Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio

Alex Dias de Freitas
Francisco Hermes Santos da Silva
Fábio José da Costa

Uma sequência didática para o Ensino de Função Exponencial por meio de Modelagem Matemática

PARAUAPEBAS/PA
2025

Alex Dias de Freitas
Francisco Hermes Santos da Silva
Fábio José da Costa

Uma sequência didática para o Ensino de Função Exponencial por meio de Modelagem Matemática

Produto Educacional apresentado como requisito obrigatório para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM), da Universidade do Estado do Pará (UEPA).

Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio

Orientador: Prof. Dr Francisco Hermes Santos da Silva

Coorientador: Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves

PARAUAPEBAS/PA
2025

Freitas, Alex Dias de

Uma sequência didática para o ensino de função exponencial por meio de modelagem matemática / Alex Dias de Freitas, Francisco Hermes Santos da Silva, Fábio José da Costa Alves – Parauapebas – PA, 2025.

ISBN: 978-65-5291-046-2

Produto educacional vinculado à dissertação “O ensino de função exponencial por meio da modelagem matemática” do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. Parauapebas-PA, 2025.

1. Ensino de matemática. 2. Aprendizagem matemática. 3. Função exponencial. 4. Desmo. 5.Sequência didática.

SUMÁRIO

1. Apresentação

Com o intuito de colaborar com o processo de ensino-aprendizagem da função exponencial, construímos este Produto Educacional, proposto como requisito á titularização de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM-UEPA), no âmbito do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, cujos resultados demonstraram-se satisfatórios.

Cabe destacar que este Produto Educacional foi concebido a partir da investigação científica intitulada *"***O Ensino de Função Exponencial por meio da Modelagem Matemática***"*, desenvolvida no contexto do referido programa de pós-graduação. Portanto, este produto educacional é composto por uma sequência didática que nos apresenta uma alternativa metodológica para o ensino de função exponencial com base na modelagem matemática. De acordo com os pressupostos teorizados sobre modelagem matemática de Biembegut (2003), Burak e Klüber (2008) e Barbosa (2003); com o objetivo de apresentar mais uma alternativa metodológica que contribua de forma significativa para o ensino de função exponencial.

A proposta apresenta uma abordagem didática inovadora, que visa explorar aspectos conceituais essenciais à compreensão da função exponencial, articulando teoria e prática por meio de uma sequência didática estruturada. Possibilitando ao aluno ser o protagonista de sua aprendizagem, ao realizar atividades de conceituação e redescoberta, e ao professor ser o mediador desse processo de ensino.

A presente obra foi elaborada com o intuito de abordar as complexidades comumente observadas por docentes e discentes no estudo da função exponencial. Para tal, buscou-se conceber estratégias pedagógicas eficazes para o aprimoramento de seu ensino. Almeja-se que este material contribua substancialmente para a consolidação do raciocínio matemático e para o aperfeiçoamento das metodologias didáticas empregadas pelos educadores.

Almeja-se que esta sequência didática seja um subsídio valioso no processo de ensino da função exponencial, conferindo maior dinamismo, interatividade e atratividade à abordagem desse tema, tanto para os discentes quanto para os docentes que a empregarem. Ressalta-se a possibilidade de realizar adaptações durante a implementação em sala de aula, a fim de que o material se ajuste de forma ótima a cada contexto educacional específico.

Desejamos a todos grande sucesso e um excelente trabalho!

2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A proposta metodológica desta investigação caracterizou-se por sua natureza qualitativa e experimental. Consistiu na elaboração e implementação de uma sequência didática, alicerçada nos pressupostos teóricos da modelagem matemática formulados por Biembegut (2003), Burak e Klüber (2008) e Barbosa (2003). O objetivo central foi investigar as potencialidades de tal abordagem no processo de aprendizagem da função exponencial. E a consequente elaboração deste produto educacional para servi como instrumento no processo de ensino da função exponencial.

De forma que deste produto educacional está alicerçado em duas bases teóricas principais: a Modelagem Matemática referente á fundamentação para a elaboração das atividades e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica -, formulada por Raymond Duval (2003) -, no que tange a avaliação e validação da aprendizagem do aluno mediante a experimentação da sequência.

A Modelagem Matemática, conforme Biembengut e Hein (2011), constitui-se em uma metodologia que habilita os discentes a compreender e representar cenários do mundo real por intermédio da linguagem matemática. Os referidos autores enfatizam que o processo de modelagem abrange etapas cruciais, tais como a interpretação da problemática, a elaboração de um modelo, a resolução matemática e a subsequente análise dos resultados. Essa abordagem didática fomenta a participação ativa dos alunos e o desenvolvimento do pensamento crítico.

Para Bassanezi (2002), o ato de modelar denota a "tradução de uma situação-problema para a linguagem matemática, sua resolução e a interpretação dos resultados obtidos" (p. 15). Barbosa (2001), por sua vez, complementa essa perspectiva ao postular que a modelagem representa uma prática social e investigativa, a qual confere valor ao conhecimento prévio dos estudantes e às suas experiências, propiciando a construção de significados matemáticos em contextos autênticos.

Para a plena compreensão da Modelagem Matemática, faz-se necessário o entendimento do conceito de modelo matemático. Bassanezi (2004, p. 20) o define como "uma construção matemática abstrata, simplificada, que retrata uma porção da realidade com uma finalidade específica". À luz dessa definição, compreende-se o modelo como uma representação paradigmática do objeto em análise.

Conforme Bassanezi (2004, p. 20), "a importância do modelo matemático consiste em ter uma linguagem concisa que expressa nossas ideias de maneira clara e sem ambiguidades, além de proporcionar um arsenal de resultados [...]". O modelo viabiliza a transição da situação real para o desafio matemático, ou seja, a busca por pressuposições que descrevam matematicamente a solução do problema. Nesse sentido, a Modelagem Matemática configura-se como o procedimento que culmina na criação desse modelo. Santos e Rosa esclarece que a :

> Modelagem matemática é uma estratégia que requer a obtenção de modelo que busca descrever matematicamente uma situação real para em seguida compreender e estudá-lo, levantando dados e elaborando hipóteses sobre tais fenômenos. Nesta perspectiva, modelagem matemática pode ser vista como estratégia de ensino e aprendizagem. Pode-se entendê-la como uma abordagem de umproblema real por meio da matemática, do problema serão extraídas as características pertinentes, elaboradas hipóteses e enfim feitas representações em variáveis matemáticas. (SANTOS E ROSA, 2008,p. 14).

A Modelagem Matemática, sob essa ótica, é concebida como uma abordagem engajadora com a realidade no processo de construção do conhecimento matemático. Manifesta-se como um método dinâmico e eficaz para a exploração e compreensão de diversos fenômenos por meio de conceitos matemáticos. De acordo com Barbosa (2007, p. 161), constitui-se em “um ambiente de aprendizagem em que os alunos são convidados a investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade”.

Em contraste, Burak (2010) propõe uma abordagem da Modelagem Matemática que se distancia da construção de um modelo matemático tradicional. Em vez disso, enfatiza que essa metodologia consiste em um conjunto de procedimentos destinados a criar uma representação paralela para explicar matematicamente os fenômenos presentes no cotidiano humano. Essa abordagem visa facilitar a realização de previsões e a tomada de decisões informadas. Com esse propósito, o pesquisador desenvolve uma estrutura metodológica composta por cinco fases, que são apresentadas a seguir, com base na interpretação de Burak e Klüber (2008):

> Escolha do tema – é o momento em que o professor apresenta aos alunos alguns temas que possam gerar interesse ou os próprios alunos sugerem um tema. Esse tema pode ser dos mais variados, uma vez que não necessita ter nenhuma ligação imediata com a matemática ou com conteúdos matemáticos, e sim com o que os alunos querem pesquisar. Já nesta fase é fundamental que o professor assuma a postura de mediador, pois deverá dar o melhor encaminhamento para que a opção dos alunos seja respeitada.
>
> Pesquisa exploratória – escolhido o tema a ser pesquisado, encaminham-se os alunos para a procura de materiais e subsídios teóricos dos mais diversos,

> os quais contenham informações e noções prévias sobre o que se quer desenvolver/pesquisar. A pesquisa pode ser bibliográfica ou contemplar um trabalho de campo, fonte rica de informações e estímulo para a execução da proposta.
>
> Levantamento dos problemas – de posse dos materiais e da pesquisa desenvolvida, incentiva-se os alunos a conjecturarem-se sobre tudo que pode ter relação com a matemática, elaborando problemas simples ou complexos que permitam vislumbrar a possibilidade de aplicar ou compreender conteúdos matemáticos, isso com a ajuda do professor, que não se isenta do processo, mas se torna o "mediador" das atividades.
>
> Resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema – nessa etapa, busca-se responder os problemas levantados com o auxílio do conteúdo matemático, que pode ser abordado de uma maneira extremamente acessível, para, posteriormente, ser sistematizado, fazendo um caminho inverso do usual, pois se ensina o conteúdo para responder às necessidades surgidas na pesquisa e no levantamento dos problemas concomitantemente.
>
> Análise crítica das soluções – etapa marcada pela criticidade, não apenas em relação à matemática, mas também a outros aspectos, como a viabilidade e a adequabilidade das soluções apresentadas, que, muitas vezes, são lógica e matematicamente coerentes, porém inviáveis para a situação em estudo. É a etapa em que se reflete acerca dos resultados obtidos no processo e como esses podem ensejar a melhoria das decisões e ações, contribuindo, dessa maneira, para a formação de cidadãos participativos, que auxiliem na transformação da comunidade em que participam (BURAK; KLÜBER, 2008, p. 21-22).

Essa abordagem proposta por Burak e Klüber (2008) serviu como um dos pilares para a construção da nossa sequência didática e consequentemente da elaboração das atividades para a experimentação da mesma. Pois ela é mais adaptável para uma realidade da sala de aula em escolas públicas, por torna prática aplicação.

Complementarmente, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, formulada por Raymond Duval (2003), aponta que a aprendizagem em matemática requer a articulação entre diferentes registros de representação, tais como gráficos, tabelas, linguagem algébrica e representações verbais. Segundo o autor, compreender um conceito matemático exige não apenas a conversão entre registros distintos, mas também a coordenação entre eles.

Nossa sequência foi pensada de tal maneira que nos levasse a compreender; como a aprendizagem se daria, à medida que os alunos trabalhassem e se apropriassem dos diversos registros de representação na construção da sua aprendizagem. Serviu como meio para avaliámos a eficácia da experimentação da sequência didática.

A integração dessas duas abordagens – modelagem e registros semióticos – proporciona uma base sólida para a construção da sequência didática proposta. Ao propor problemas contextualizados e incentivar o uso de diferentes formas de representação, o professor amplia as possibilidades de compreensão dos alunos e favorece a aprendizagem significativa dos conceitos relacionados à função exponencial.

3. A FUNÇÃO EXPONENCIAL

A função exponencial constitui um instrumento matemático primordial para a análise de processos de crescimento e decaimento em múltiplos domínios científicos, abrangendo áreas como física, biologia, economia e finanças. O presente capítulo tem como objetivo examinar, de forma sistemática, os aspectos históricos, as definições formais, as representações gráficas, as propriedades fundamentais e as aplicações práticas dessa função.

Do ponto de vista histórico, a investigação da função exponencial remonta a períodos antigos, estando intrinsecamente associada ao estudo do crescimento populacional, à capitalização de juros compostos e à modelagem de fenômenos naturais. Os primeiros indícios de seu desenvolvimento podem ser atribuídos às contribuições de John Napier, pioneiro no estudo dos logaritmos, e de Jacob Bernoulli, que explorou o crescimento contínuo em contextos financeiros. Contudo, foi somente no século XVIII que a função exponencial adquiriu sua formulação precisa, graças aos trabalhos de Leonhard Euler, que estabeleceu a base dos logaritmos naturais como o número irracional $e \approx 2,718$.

Conforme assinala Boyer (1996), o desenvolvimento das funções exponenciais e logarítmicas desempenhou um papel crucial no avanço do cálculo infinitesimal e na elaboração de modelos para uma vasta gama de fenômenos naturais e econômicos. Atualmente, a função exponencial consolida-se como um dos pilares da matemática aplicada, sendo indispensável para a análise de dinâmicas populacionais, processos de decaimento radioativo, disseminação de epidemias e sistemas econômicos, entre outros.

A relevância da função exponencial intensificou-se com o advento do cálculo infinitesimal e sua aplicação em sistemas dinâmicos. Desde então, tem sido amplamente empregada para representar fenômenos como expansão populacional, desintegração de materiais radioativos e evolução temporal de capitais financeiros. Uma de suas características mais notáveis reside em sua capacidade de exibir taxas de crescimento ou decrescimento aceleradas, superando significativamente os padrões observados em funções lineares.

Diversos processos naturais e sociais seguem esse comportamento exponencial, incluindo:

- A desintegração de elementos radioativos;
- A proliferação de microrganismos;
- A dinâmica de crescimento populacional;
- A propagação de doenças epidêmicas;
- A escala logarítmica de Richter;
- O conceito de meia-vida em química;
- A variação da pressão atmosférica;
- Fenômenos econômicos, como capitalização e juros compostos;
- O resfriamento de corpos (Lei de Newton);
- A dinâmica de queda de corpos com resistência do ar (Emer, 2020, p. 26).

Na sequência, serão apresentadas aplicações concretas da função exponencial em diferentes campos do conhecimento, com base nas contribuições de Lima (2023) e Emer (2020).

Um Modelo Matemático de Crescimento Populacional

Imagine que você está estudando como uma população que cresce ao longo do tempo. No final do século XVIII, Thomas Malthus criou um modelo para descrever esse crescimento. Ele chegou a uma equação simples, mas poderosa:

$$\boldsymbol{N(t) = No \,.\, e^{(rt)}}$$

Onde:

- N(t) é o tamanho da população em um momento específico (t);
- N_0 é o tamanho da população inicial (quando t = 0);
- r é o potencial biótico, uma constante que varia de acordo com a espécie.
- e é a base do logaritmo natural (aproximadamente 2,718).

Isto significa que cada espécie tem seu próprio ritmo de crescimento, representado pelo potencial biótico (r). Se não houver fatores que impeçam o crescimento, a população pode aumentar de forma exponencial. Isso significa que o crescimento pode ser muito rápido!

Essa equação pode ser usada para calcular o crescimento de qualquer população, desde que você saiba o percentual de reprodução da espécie. É uma ferramenta valiosa para entender como as populações mudam ao longo do tempo.

Curvas de Aprendizagem: Melhorando a Eficiência

Visualize que você está aprendendo uma nova habilidade ou tarefa. No início, você pode cometer erros e demorar mais tempo para realizar a tarefa. Mas, à medida que você ganha experiência, sua eficiência melhora! Isso é o que as curvas de aprendizagem mostram.

As curvas de aprendizagem são uma forma de medir como à eficiência de um trabalhador melhora ao longo do tempo. Elas podem ser representadas por um modelo exponencial, que ajuda a prever custos futuros e níveis de produção. As curvas de aprendizagem são úteis em muitas áreas, como:

- Programação de tarefas produtivas;
- Redução de perdas devido à inexperiência;
- Previsão de custos e produção.

Ao estudar esses fenômenos, podemos identificar padrões e tendências. Isso nos permite:

- Analisar grandezas e obter dados;
- Perceber representações e modelos que simplificam a compreensão do fenômeno;
- Tomar decisões informadas.

Matemática Financeira: O Poder dos Juros Compostos

Agora pense que você está planejando suas finanças e precisa tomar decisões importantes sobre como gerenciar seu dinheiro. A matemática financeira é uma ferramenta essencial para isso, e os juros compostos são um conceito fundamental.

Os juros compostos são um tipo de regime de capitalização que faz com que o valor do seu dinheiro cresça de forma exponencial ao longo do tempo. Isso significa que os juros são calculados não apenas sobre o capital inicial, mas também sobre os juros acumulados anteriormente.

A fórmula para calcular o montante (o valor total do capital inicial mais os juros acumulados) é:

$$\boldsymbol{M = C\,.\,(1+\,i)^{t}}$$

Onde:

- M é o montante;
- C é o capital inicial;
- i é a taxa de juros (em porcentagem) por unidade de tempo;
- t é o tempo em unidade de tempo.

Os juros compostos são importantes porque permitem que você:

- Calcule o valor futuro de um investimento ou empréstimo;
- Compare diferentes opções de investimento ou empréstimo;
- Tome decisões informadas sobre como gerenciar seu dinheiro.

Os juros compostos são usados em muitas situações do cotidiano, como: investimento em poupança ou fundos; empréstimos bancários ou financiamentos e planejamento de aposentadoria ou investimentos de longo prazo. É um poderoso instrumento da matemática financeira, utilizado no planejamento e nos cáculos de crescimento acumulados de investimentos ao longo do tempo. Os bancos usam deste conceito matemático para aumentar seus rendimentos de aplicações financeiras, calcular o valor total de dívidas, empréstimos e financiamentos. Fazendo com que os juros incidam sobre os juros já acumulados, elevando o montante a ser pago ao longo do tempo.

Terremotos: Entendendo o Fenômeno

Os terremotos são eventos naturais que ocorrem quando há uma liberação repentina de energia na crosta terrestre, causando vibrações que se propagam pela superfície da Terra. Isso pode ser resultado de:

- Movimentos de placas tectônicas: quando as placas rochosas se deslocam e liberam energia;
- Atividade vulcânica: quando os vulcões entram em erupção e liberam energia;
- Deslocamentos de gases: quando gases, como o metano, se deslocam no interior da Terra e causam vibrações.

A magnitude de um terremoto é medida por meio de um sismógrafo, um aparelho desenvolvido por Charles Richter e Beno Gutenberg em 1935. A escala Richter é usada para medir a magnitude dos terremotos em graus. A magnitude de um terremoto determina o quão destrutivo ele pode ser. Quanto maior a magnitude, mais graves podem ser as consequências, incluindo: danos a edifícios e infraestrutura; perda de vidas humanas, além de deslizamentos de terra e outros desastres secundários.

Por isso, a medição da magnitude dos terremotos é fundamental para entender o potencial de destruição e tomar medidas para mitigar os efeitos. Isso ajuda a salvar vidas e reduzir os danos causados por esses eventos naturais.

Resfriamento de Corpos: Entendendo a Lei de Newton

A lei do resfriamento de Newton é um conceito fundamental da física que descreve como os corpos perdem calor para o ambiente. Essa lei é amplamente aplicada em diversas áreas, desde a medicina até a culinária.

De acordo com a lei de Newton, a taxa de resfriamento de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente. Isso significa que:

- Quanto maior a diferença de temperatura, mais rápido o corpo perderá calor.
- Quanto menor a diferença de temperatura, mais lento o corpo perderá calor.

A lei do resfriamento de Newton tem muitas aplicações práticas, incluindo:

- Estimativa da hora da morte: a lei pode ser usada para estimar a hora da morte de uma vítima, medindo a temperatura do corpo e comparando-a com a temperatura ambiente.
- Preparação de alimentos: a lei pode ser usada para determinar o tempo necessário para que um alimento, como o café, atinja a temperatura ideal para o consumo.

Além da diferença de temperatura, outros fatores podem influenciar o resfriamento de um corpo, incluindo:

- Condução de calor: a transferência de calor por contato direto entre o corpo e o ambiente.
- Convecção: a transferência de calor por meio do movimento de fluidos, como o ar ou a água.
- Radiação: a transferência de calor por meio de ondas eletromagnéticas.

A lei do resfriamento de Newton é fundamental para entender como os corpos interagem com o ambiente e como podemos controlar a temperatura em diversas situações. Isso tem implicações importantes em áreas como a medicina, a engenharia e a culinária.

Agora que entendemos à importância das curvas de aprendizagem e como elas podem ser modeladas pela função exponencial, vamos explorar mais sobre essa função. Vamos aprender sobre sua definição, características, propriedades e representações gráficas e algébricas.

Decaimento Radioativo e Meia-Vida: Entendendo o Conceito

O decaimento radioativo é um processo natural em que substâncias radioativas perdem sua radioatividade ao longo do tempo. Isso ocorre porque os átomos instáveis emitem radiação e se transformam em átomos mais estáveis. A meia-vida é um conceito fundamental para entender esse processo.

A meia-vida é o tempo necessário para que a quantidade de uma substância radioativa se reduza à metade. Isso significa que, após cada período de meia-vida, a quantidade de material radioativo restante é metade da quantidade inicial.

O cálculo da meia-vida é feito por meio de uma função exponencial, que relaciona a quantidade de material radioativo restante com o tempo decorrido. A fórmula é:

$$\boldsymbol{Q(t) = Qo} \, . \, (\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}})^{\frac{t}{p}}$$

Onde:

- Q(t) é a quantidade de material radioativo restante após o tempo t.
- Q_0 é a quantidade inicial de material radioativo.
- t é o tempo decorrido.
- p é o valor da meia-vida do material considerado.

Aplicação na Arqueologia

A meia-vida é fundamental para a datação radioativa, um método usado para estimar a idade de materiais antigos, como fósseis ou vestígios de civilizações. O carbono-14 (C-14) é um dos elementos mais utilizados para essa finalidade.

O C-14 tem uma meia-vida de aproximadamente 5.730 anos, o que significa que, após esse período, metade da quantidade inicial de C-14 terá se desintegrado. Isso permite que os cientistas estimem a idade de materiais orgânicos com base na quantidade de C-14 restante.

A meia-vida também é importante na medicina, especialmente quando se trata de medicamentos. O tempo de meia-vida de um medicamento é o tempo necessário para que sua concentração no organismo se reduza à metade. Isso ajuda a determinar a duração do efeito farmacológico e a frequência de administração do medicamento.

A meia-vida é um conceito fundamental em diversas áreas, incluindo física, química, arqueologia e medicina. Ela ajuda a entender o decaimento radioativo, a estimar a idade de materiais antigos e a determinar a duração do efeito de medicamentos.

Ao examinar as aplicações previamente mencionadas, constata-se que esses fenômenos exibem uma propensão exponencial em múltiplos domínios. Com base nesses exemplos, torna-se viável analisar e identificar variáveis, coletar dados e informações e, consequentemente, discernir uma tendência, uma representação e um modelo que simplifica e facilita a compreensão do fenômeno em questão. Considerando que esses fenômenos podem ser efetivamente modelados por meio da função exponencial, procederemos, na próxima seção, à apresentação de sua definição, elementos constitutivos, características fundamentais, propriedades essenciais e representações gráficas e algébricas.

Definição da função exponencial

Matematicamente, uma função exponencial é qualquer função da forma $\boldsymbol{f(x) = a^x}$, em que $\boldsymbol{a > 0}$ e $\boldsymbol{a \neq 1}$, e x pertence ao conjunto dos números reais. A base a determina o comportamento da função: quando $\boldsymbol{a > 1}$, a função é crescente; quando $\boldsymbol{0 < a < 1}$, é decrescente. O domínio da função exponencial é $\mathbb{R}$ e sua imagen é o intervalo $(\boldsymbol{0}, \infty)$.

A função exponencial mais conhecida é a função $\boldsymbol{f(x) = e^x}$, onde e ≈ 2,718281828... é a base dos logaritmos naturais. Essa função possui propriedades analíticas e algébricas que a tornam essencial em diversas áreas da matemática, especialmente no cálculo diferencial e integral.

Para Lima (2023), uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $\boldsymbol{f(x) = a^x \; ou \; y = a^x}$, , com $\boldsymbol{a > 0}$ e $\boldsymbol{a \neq 1}$, é denominada função exponencial e possui as seguintes propriedades, para quaisquer x, y ∈ R:

1. - $\boldsymbol{a^x \,.\, a^y = a^{(x+y)}}$**;**

2. - $\boldsymbol{a^1 = a}$;

3. - $\boldsymbol{x < y \Rightarrow a^x < a^y}$, quando $\boldsymbol{a > 1 \; e \; x < y \Rightarrow a^y < a^x}$**,** quando $\boldsymbol{0 < a < 1}$.

As restrições, $\boldsymbol{a > 0}$ e $\boldsymbol{a \neq 1}$, dadas na definição são necessárias, pois, caso contrário, não seria possível caracterizar uma função exponencial.

- Se $\boldsymbol{a = 1}$, $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ é uma função constante. Exemplo: $\boldsymbol{f(x) = 1^x = 1}$, para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$.

- Se $\boldsymbol{a = 0}$**,** $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ não é definida em $\mathbb{R}$. Exemplo: $\boldsymbol{f(5) = 0^5 \,.\, 0^5}$ não é definido em $\mathbb{R}$.

- Se $\boldsymbol{a < 0}$, $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ não é definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Exemplo: Para $\boldsymbol{a = -4}$ e $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$; temos: $\boldsymbol{f\left(\frac{1}{4}\right) = (-4)^{\frac{1}{4}} = \sqrt{(-4)}} \notin \mathbb{R}$.

Propriedades da função exponencial

As principais propriedades algébricas da função exponencial são:

$\boldsymbol{- a^0 = 1}$, para todo $\boldsymbol{a \neq 0}$;

- $\boldsymbol{a^x.\; a^y = a^{(x+y)}}$;

- $(\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}})^{\boldsymbol{y}} = (\boldsymbol{a})^{(\boldsymbol{x}\,\cdot\,\boldsymbol{y})}$;

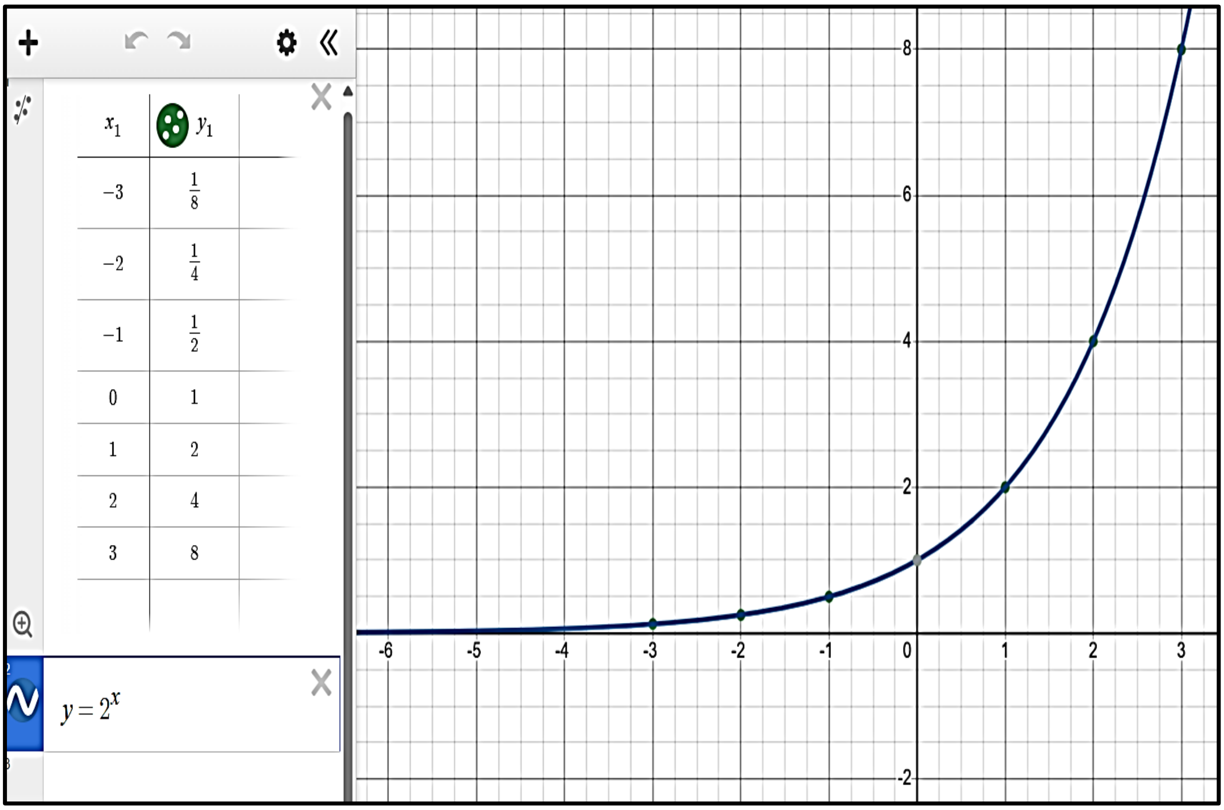
- $\frac{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{y}}} = \boldsymbol{a}^{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}$;

A função exponencial, em virtude dessas propriedades, constitui uma ferramenta de grande utilidade na resolução de equações exponenciais e na análise de fenômenos que apresentam crescimento contínuo.

Gráfico de uma função exponencial

A visualização gráfica é um recurso fundamental para a compreensão do comportamento de fenômenos. A função exponencial, em particular, é caracterizada por uma representação gráfica que reflete situações de crescimento ou decrescimento. A função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}}$, com $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{1}$, ilustra o crescimento exponencial de forma exemplar (FIGURA 1).

Figura 1 - Gráfico da função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{2}^{\boldsymbol{x}}$

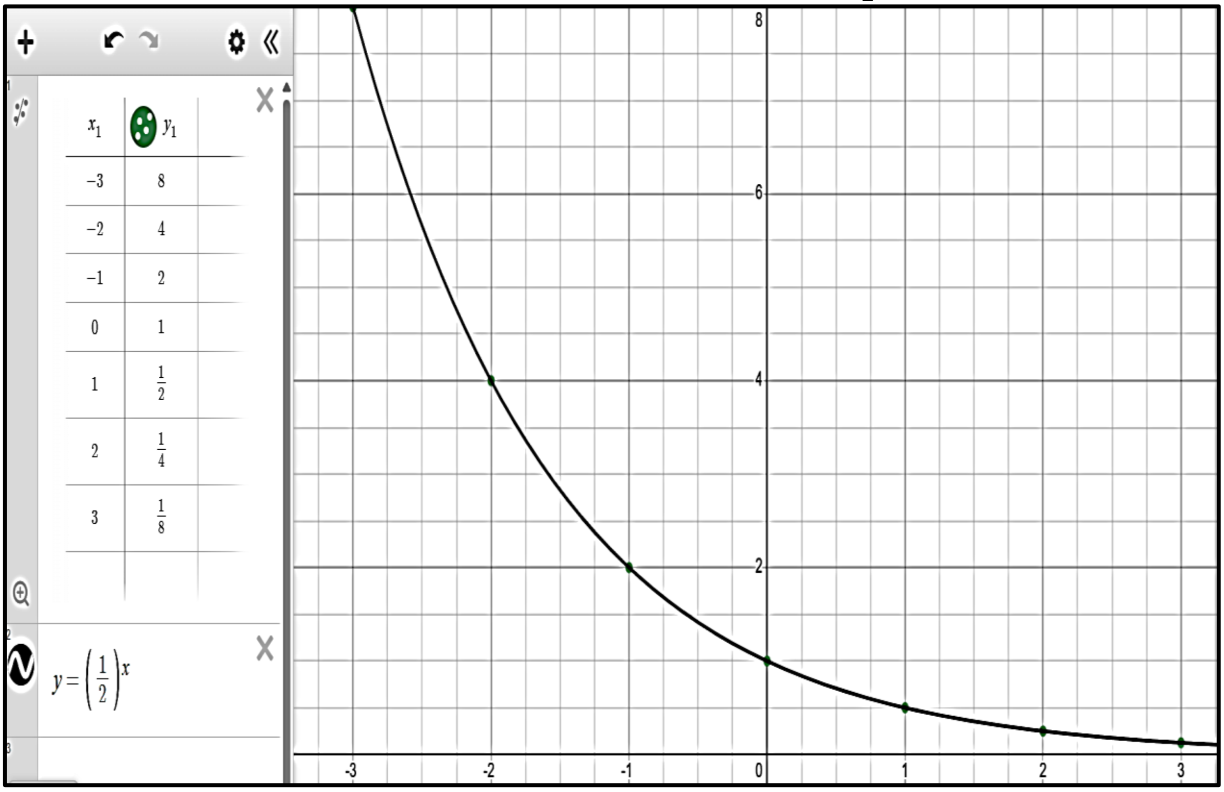


Fonte: Do autor (2024).

A análise gráfica da função exponencial revela um comportamento crescente, caracterizado pela interseção com o eixo das ordenadas no ponto (0,1).

Em contraste, o decrescimento exponencial é representado pela função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}}$, com $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{0} < \boldsymbol{a} < \boldsymbol{1}$, conforme ilustrado na Figura 2, que apresenta a representação gráfica da função $\boldsymbol{f(x) = (\frac{1}{2})^{x}}$, obtida mediante o cálculo dos pares ordenados correspondentes.

Figura 2 - Gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = (\frac{1}{2})^{x}}$



Fonte: Do autor (2024).

A representação gráfica da função exponencial apresenta um comportamento decrescente, intersectando o eixo das ordenadas no ponto (0,1).

De modo geral, as funções exponenciais podem ser classificadas em duas categorias, com base no valor da base 'a'. Se 'a' for maior que 1, a função é crescente, pois, para qualquer $\boldsymbol{x_2 > x_1 \Leftrightarrow a^{x_2} > a^{x_1}}$.

Por outro lado, se 0 < 'a' < 1, a função é decrescente, pois, para qualquer $\boldsymbol{x_2 > x_1 \Leftrightarrow a^{x_2} < a^{x_1}}$.

A curva exponencial, que representa graficamente a função, intersecta o eixo das ordenadas no ponto (0,1) e apresenta uma assíntota horizontal no eixo das abscissas, permanecendo sempre acima deste eixo, visto que $\boldsymbol{f(x) = a^x > 0}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Consequentemente, os valores da função se aproximam arbitrariamente de zero, mas nunca atingem ou são inferiores a zero. Além da função exponencial $\boldsymbol{f(x) = a^x}$, existe a função exponencial natural $\boldsymbol{f(x) = e^x}$, cuja base é o número irracional 'e', também conhecido como número neperiano, com valor aproximado de 2,718281828. A função exponencial natural é particularmente útil na modelagem de fenômenos que exibem crescimento ou decrescimento contínuo, bem como no cálculo diferencial e integral, devido à sua propriedade singular de ser idêntica à sua própria derivada.

Este estudo concentrou-se na exploração da função exponencial com base 'a', considerando sua relevância como conceito inicial e essencial para a compreensão de fenômenos exponenciais em contextos educacionais, especificamente no âmbito do 1º ano do Ensino Médio, em situações experimentais que ilustram processos de crescimento e decrescimento exponencial.

A função exponencial permite ao aluno compreender os fenômenos de crescimento e decrescimento que ocorrem no mundo real. Por isso, seu ensino não deve ser limitado a definições formais e manipulações algébricas, mas ampliado por meio da modelagem, do uso de tecnologias e de situações-problema contextualizadas; que se constitui o foco da nossa pesquisa. Com isso, promove-se uma aprendizagem mais significativa, conectada à realidade dos alunos e ao desenvolvimento do pensamento matemático.

4. UM OLHAR SOBRE MODELAGEM MATEMÁTICA

Pra começar a entender a modelagem, o primeiro passo é saber o que significa a palavra "modelo". Essa palavra tem vários sentidos diferentes. Numa pesquisa inicial, a gente vê que um modelo pode ser feito de muitas formas e jeitos, podendo usar um monte de linguagens matemáticas. Também tem a preocupação de como usar os símbolos e conceitos da matemática.

Pra Biembengut e Hein (2007, p. 12), o modelo é tipo "um monte de símbolos e contas matemáticas que tenta traduzir, de alguma forma, um fenômeno ou um problema da vida real". Eles destacam que o modelo consegue mostrar a realidade do que está sendo estudado, mesmo que de um jeito mais simples, por causa das estimativas que a gente faz. Fazer um modelo geralmente é um trabalho em grupo e, desde o começo, tem uma discussão importante sobre o que vai ser feito. Essa conversa pode ser sobre, por exemplo, os "preconceitos" da educação matemática crítica.

Sobre a ligação entre a modelagem matemática e a educação matemática crítica, Araújo (2009, p. 55) diz que a matemática é uma ferramenta que ajuda na modelagem, feita pra "promover a participação crítica dos alunos/cidadãos na sociedade, discutindo questões políticas, econômicas e ambientais".

Inspirado em Skovsmose (1990), Barbosa (2006) sugere que a Modelagem pode ter três tipos de conversas:

- Conversas matemáticas:* basicão, sobre os conceitos e as contas da matemática;

- Conversas técnicas:* sobre como arrumar a situação-problema;

- Conversas reflexivas:* sobre o que é o modelo, os critérios usados pra construir ele e qual o papel dele na sociedade.

Cada uma dessas conversas vai levar a caminhos diferentes, ou, como o autor diz, a "rotas" diferentes. As conversas reflexivas podem nos fazer pensar criticamente de vários jeitos. A visão sócio-crítica, como Barbosa (2006) aponta, discute como a Modelagem Matemática é usada em sala de aula. Ele diz que as atividades de Modelagem podem levar os alunos a ver que os modelos que eles criam não são neutros, ajudando-os a entender que eles são resultado de onde e como são feitos e usados. Assim, eles percebem que a matemática não é uma descrição 100% correta e neutra da realidade. Ou seja, os modelos são uma representação da realidade e não a própria realidade.

Ter um olhar crítico na Modelagem Matemática ajuda os alunos a criticarem como os modelos são feitos e adaptados para resolver um problema (BARBOSA, 2006). Desse jeito, o objetivo é desenvolver a capacidade crítica nos alunos, estimulando debates sobre política, economia e meio ambiente (SKOVSMOSE, 2001). Assim, a crítica está na "própria Matemática assim como o seu uso na sociedade, e não apenas se preocuparia com o desenvolvimento de habilidades em cálculos matemáticos" (ARAÚJO, 2009, p. 55-56).

Usar um olhar crítico na Modelagem Matemática em sala de aula ajuda a analisar como os alunos desenvolvem e usam a Matemática pra apresentar soluções para problemas do dia a dia (SKOVSMOSE, 2003). Desse modo, eles se tornam cidadãos ativos e críticos numa sociedade que é muito influenciada pela matemática.

A Modelagem Matemática dá um poder, que vem de estudar criticamente como os conceitos e aplicações matemáticas são usados ao longo da criação dos modelos (BARBOSA, 2003). Esse estudo permite que a gente desenvolva um posicionamento social, com base na matemática, tentando encontrar soluções para o nosso dia a dia.

Por isso, fazer modelos matemáticos não é algo neutro, já que modelar envolve entender como o conhecimento matemático é expresso desde a criação até a resolução desses modelos (BARBOSA, 2006).

Então, enquanto a gente está fazendo um modelo, a gente descreve, analisa e interpreta os acontecimentos pra ter discussões críticas e pensamentos que vão além de como resolver o modelo que os alunos criaram (BARBOSA, 2008).

5 – SEQUENCIA DIDÁTICA

Nesta secção, apresentamos a sequência didática, e o desenvolvimento da sua construção para aprendizagem de função exponencial, a partir do ajuste de curvas de dados tabelados utilizando o aplicativo Desmos. Nossa sequência didática é composta de três etapa bem definidas nos moldes da modelação matemática proposta por Biembegut (2003), porém, com alguns ajuste e adaptações para facilitar sua utilização em sala de aula.

Nossa sequência é fundamentada nos constructos teóricos da modelagem matemática, conforme delineados por Biembegut (2003), Burak e Klüber (2008) e Barbosa (2003). Optamos pela utilização da modelagem matemática, com o auxílio de tecnologias educacionais (aplicativo Desmos), como abordagem metodológica central para a estruturação da sequência didática.

Planejamento e Aplicação da Sequência Didática

A sequência didática elaborada visa apresentar o conteúdo de função exponencial por intermédio da modelagem matemática, com o suporte do aplicativo matemático Desmos. Este recurso será empregado para realizar o ajuste da curva exponencial do modelo a partir de dados propostos nas atividades, sugerindo, por meio do aplicativo, modelos matemáticos que melhor representem ou se aproximem da realidade das informações inerentes à situação-problema sugerida. Conforme previamente mencionado, a construção desta sequência didática alicerça-se nas premissas da modelagem matemática preconizadas por Biembegut (2003), Burak e Klüber (2008) e Barbosa (2003), buscando sua aplicabilidade em um cenário de sala de aula, onde, tipicamente, o tempo disponível por aula é de cinquenta minutos. A sequência é composta por três atividades, cuja descrição dos procedimentos necessários para sua efetiva execução será detalhada a seguir.

A primeira atividade, intitulada "Saúde das crianças e as bactérias", tem como propósito instigar os discentes a reconhecerem que o processo de reprodução bacteriana segue um modelo exponencial, além de fomentar a discussão sobre temas transversais como higiene e saúde. Em conformidade com os procedimentos metodológicos inerentes à utilização da modelagem matemática, proceder-se-á à descrição das etapas de aplicação da sequência didática.

PRIMEIRA ETAPA: INTERAÇÃO COM O PROBLEMA*

Esta fase inicial da modelagem requer a seleção do tema. Idealmente, o professor/pesquisador apresentaria um rol de temas pré-definidos para a escolha do aluno. Entretanto, considerando que se trata de uma sequência didática (SD) destinada a ser aplicada em contextos de sala de aula, onde o tempo disponível para uma aplicação mais minuciosa é por vezes restrito, considerou-se pertinente que os temas das atividades já estivessem previamente definidos na sequência. Tal procedimento não compromete os preceitos da modelagem matemática, uma vez que o tema se baseia em informações e dados reais. A esse respeito, recorre-se à perspectiva de BARBOSA (2003, apud BRUCKI, 2011, p. 30), em seu primeiro caso sobre as formas de desenvolvimento da modelagem matemática, que afirma que o "professor apresenta a descrição de uma situação problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução".

Nesta etapa, ocorre também a familiarização com o assunto a ser investigado. Para alcançar este objetivo, a dinâmica terá início com a projeção de vídeos que abordam a reprodução de bactérias, a fim de que o aluno registre o tema e compreenda a situação-problema que a atividade irá tratar. O primeiro vídeo (Vídeo 01) discorre de forma geral sobre a bactéria e seu modo de reprodução. O segundo vídeo (Vídeo 02) emprega um microscópio para demonstrar a reprodução bacteriana ao longo do tempo. O professor/pesquisador formulará questões como: (a) Qual o tema dos vídeos? (b) Foi possível observar aspectos matemáticos na reprodução das bactérias neles? Quais?

SEGUNDA ETAPA: MATEMATIZAÇÃO*

Nesta etapa, ocorre a transposição da linguagem natural para a linguagem matemática. Após uma breve discussão sobre o tema e a delimitação dos objetivos, proceder-se-á à coleta de dados propostos na situação-problema. É neste momento que a folha contendo a Atividade 01 será entregue aos alunos. Esta fase abrange a formulação e a resolução do problema. No caso da presente SD, para fins práticos, a situação-problema e os problemas propostos para resolução já estão incluídos na atividade. É crucial, nesta fase, que o professor/pesquisador estimule os alunos a construir tabelas com os dados extraídos das questões e a buscar um modelo matemático que solucione a situação-problema proposta.

Espera-se que os alunos, inicialmente, apresentem modelos lineares para a solução do problema. Neste ponto, será realizada uma intervenção, propondo duas sugestões de modelagem: uma linear e outra exponencial, com tudo sem nomeá-las explicitamente. Será empregado o aplicativo Desmos para realizar o ajuste de curva com os dados da situação-problema dentro de parâmetros, permitindo que o aluno observe o comportamento dos gráficos, analise, compare e proponha as melhores soluções à medida que os valores dos parâmetros são alterados para o ajuste de curva mais adequado. É fundamental, nesta etapa, o auxílio de um recurso tecnológico para o ajuste dos pontos extraídos do problema, buscando, assim, obter um modelo apropriado à realidade proposta. Mais adiante, na aplicação da atividade, será demonstrado como ocorrerá o ajuste de curvas dos dados das atividades.

O aplicativo selecionado para o ajuste de curva e a escolha do modelo, como já mencionado, é o App Desmos, reafirmando a proposta de integração da modelagem com tecnologias educacionais. A realização do ajuste de curva dos dados constitui uma excelente opção para a geração de modelos, pois, ao final desta etapa, é imperativo obter um conjunto de fórmulas, expressões ou equações. Bertone (2014, p. 52) assevera que:

> O Ajuste de Curvas surge quando se trata de interpretar dados de um experimento. Fazer um ajuste de curvas significa simplesmente determinar os coeficientes de uma função f, dada genericamente a priori, de modo que, no intervalo de valores considerado, esta função e os dados estatísticos estejam “próximos”. Dependendo do que entendemos por proximidade entre função ajustada e os dados experimentais, teremos diferentes soluções para f.

É importante esclarecer um ponto relevante quanto à utilização do termo "ajuste" nesta proposta. A atividade desenvolvida com o uso do aplicativo Desmos não corresponde, tecnicamente, ao ajuste de curva nos moldes tradicionais — como os realizados por meio de métodos estatísticos, tais como mínimos quadrados ou ajustes lineares e polinomiais. No contexto desta abordagem, adotou-se uma prática de caráter exploratório, na qual os parâmetros do modelo exponencial previamente determinado são manipulados com o intuito de analisar o impacto dessas alterações no comportamento gráfico da função. Uma espécie de ajuste da curva dentro do modelo. Essa exploração permite aos alunos observar, de maneira dinâmica e visual, como o modelo se adapta à situação-problema, favorecendo, assim, uma compreensão mais significativa dos conceitos relacionados à função exponencial.

TERCEIRA ETAPA: MODELO MATEMÁTICO*

Esta fase corresponde ao processo de validação, durante o qual é realizada uma análise minuciosa para assegurar que a representação ou modelo desenvolvido atenda de forma satisfatória à questão proposta. Esta inferência é alcançada pelo aluno após a testagem dos modelos utilizando novos pontos para o preenchimento da tabela. Nesse sentido, ALVES e FIALHO (2019, p. 23) afirmam que:

> "Como etapa final da modelagem, a validação se torna importante para a confiança para o modelo. O aluno poderá preencher um quadro de valores de testagem da função encontrada e assim, identificar que de fato o modelo é representado pelo gráfico encontrado."

Ressalta-se que o professor/pesquisador atuará como mediador, orientador e instigador no processo de condução da sequência didática. Tais ações visam a que os alunos elaborem suas próprias conclusões e alcancem uma aprendizagem significativa do conteúdo. Somente após a completude de todas as etapas desta sequência didática é que ocorrerá a formulação dos conceitos relacionados aos estudos da função exponencial. Nesta perspectiva, será agora apresentado o desenvolvimento das atividades.

Atividade 01

Título da atividade: Saúde das Crianças e as Bactérias

Objetivo da atividade: Encontrar o modelo matemático para representar o crescimento de uma colônia de bactérias da situação proposta.

Materiais utilizados: datashow; computador, celulares; calculadora científica, caneta, quadro negro, App Desmos.

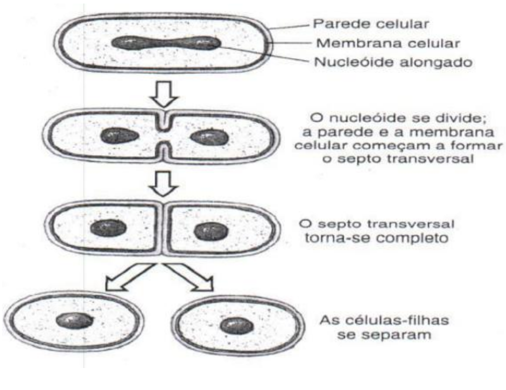
Situação Problema:

Situação Problema

Muitas infecções bacterianas em crianças podem ser prevenidas ao seguir o cronograma de vacinação recomendado, tais como, infecções virais (como o sarampo, a poliomielite, a hepatite A e a hepatite B) podem também ser prevenidas pela imunização de rotina.

No cotidiano, a entrada de vírus e bactérias no organismo das crianças pode ocorrer por diversos hábitos simples, como não lavar as mãos antes de comer, ingerir alimentos de procedência duvidosa, e cabe aos pais garantir que seus filhos sigam todos os cuidados possíveis e tenham uma dieta saudável, rica em vários nutrientes importantes para que suas imunidades estejam sempre em alta para combater esses agentes infecciosos.

Após entrarem no organismo, o crescimento bacteriano se dá por divisão binária celular, em que a célula duplica seus componentes e se divide em duas novas células. As células filhas tornam-se independentes quando um septo cresce entre elas, fazendo com que elas se separem.



Uma vez que a bactéria ou vírus tenha se adaptado ao meio, o crescimento da população, ocorrerá em velocidade incrível, e a cada intervalo de tempo (tempo de geração), que varia de 20 minutos a 20 horas, dependendo da espécie, a população de organismos dobra de tamanho. Por exemplo, a pós a contaminação por uma bactéria, após 7 tempos de geração, haverá mais de 60 organismos nesta colônia.

Uma forma de medir o crescimento bacteriano é através da estimativa do número de células que forma geradas por divisão celular por milímetro de cultura. Seguindo essa lógica, por exemplo, uma cultura contendo 1.000 organismos por milímetro com um tempo de geração de 20 minutos contaria 2.000 organismos por milímetro, 4.000 organismos após 40 minutos, 8.000 após uma hora, 64.000 após duas horas e 512.000 após três horas.

Vamos refletir:

Existiria um modelo matemático para representar o crescimento de uma colônia de bactérias para a situação apresentada no texto?

Procedimentos de aplicação da Atividade 1

Passo 01 - Apresentação de dois vídeos sobre a reprodução bacteriana e leitura do texto da situação problema abrindo momento de discussão sobre o tema (**A Interação com o Problema**).

Video 01 - Bactérias: o que são? onde vivem? o que fazem? (Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=WqrkP7QTDQQ. Acesso: 01/03/2024)

Video 02 - Reprodução das bactérias. (Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=LifTbGEcfEg. Acesso: 01/03/2024).

Texto de apoio: Reprodução das bactérias (Disponível em: https://www.biologianet.com/biodiversidade/reproducao-das-bacterias.htm. Acesso: 01/03/2024).

I - Instigar aos alunos a refletir sobre os vídeos e o texto entregue da situação problema; se eles conseguem observar alguns aspectos ou padrões matemáticos no material apresentado.

II - É possível criar um modelo matemático para representar a reprodução das bactérias?

Passo 02 – Construções de tabelas com os dados reais do problema e ajuste dos parâmetros do modelo exponencial com auxílio do App Desmos.

I - Neste momento devemos acessar o aplicativo Desmos na página: https://www.desmos.com/calculator/nhfijoedh4?lang=pt-PT.

II – Pedir para os alunos construírem uma tabela com os dados da questão (no caderno); analisarem os padrões matemáticos e solicitar que encontrem o modelo matemático que soluciona a situação problema (**A Matematização**).

III – Construir a tabela no aplicativo Desmos e fazer o ajuste nos parâmetros do **modelo exponencial** para obtermos o gráfico da função, de acordo com as seguintes especificações:

1 – Graduação dos eixos x e y: Devemos utilizar a graduação do eixo y variando entre -475.724 até 8417.84. Com passos de 2000. E por sua vez, devemos graduar o eixo x entre -123.864 até 158.935. Com passos de 20. Lembrando estas medidas podem ser reajustáveis para adaptá-las ao tamanho do monitor que se esteja usando.

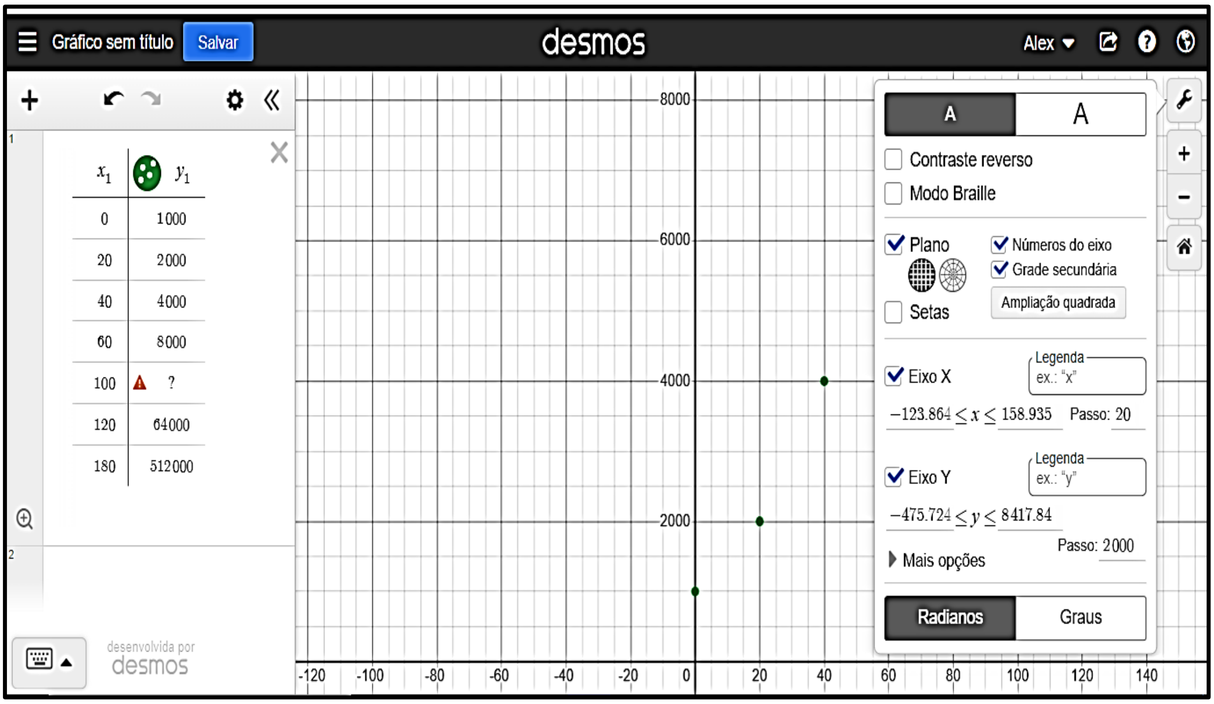
2 - O controle deslizante do parâmetro b: Devemos variar de 500 até 2000; com **b** = 1000, com passos de 100, para se ter o melhor ajuste;

3 - O controle deslizante do parâmetro c: Devemos variar de - 0.1 até 0.1; com **c** = 0,05. Com passos de 0,005; para se ter o melhor ajuste;

4 - O controle deslizante do parâmetro a: Devemos variar de 1 até 5; com **a** = 2. Com passos de 1; para se ter o melhor ajuste. O parâmetro **a** deve valer 2, pois ele é a baseado no modelo do tipo exponencial: $\boldsymbol{y = b.a^{cx}}$

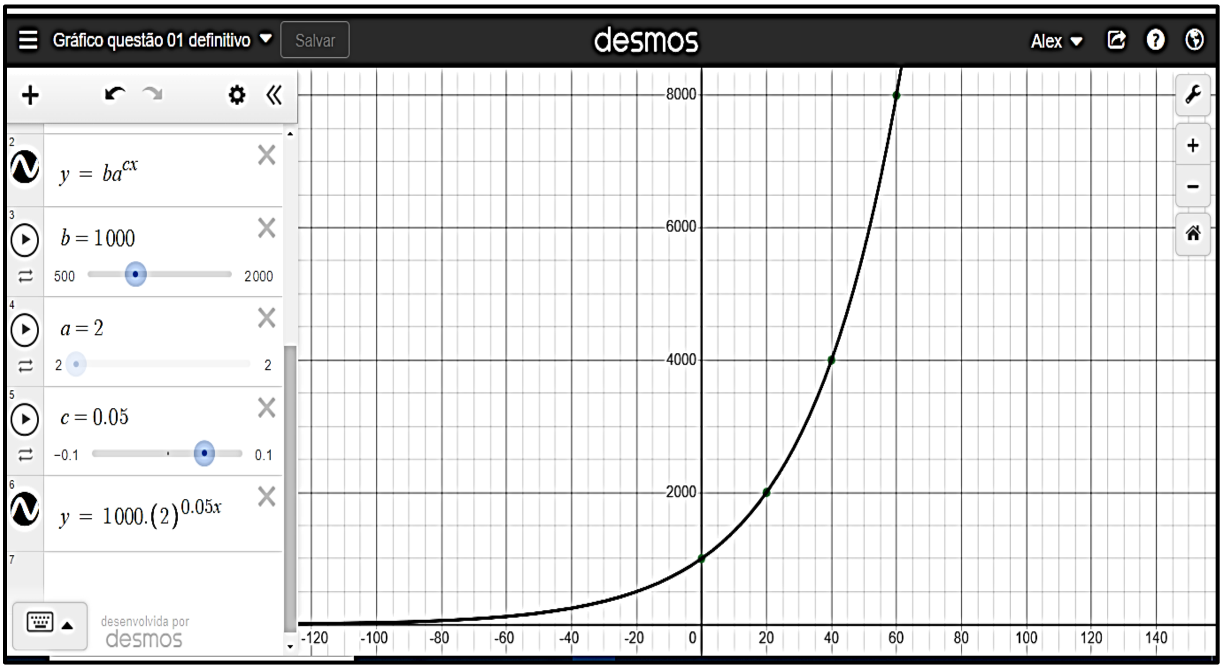
5 - O modelo: Desta forma, encontraremos o modelo exponencial dos dados do problema: $\boldsymbol{y = 1000.(2)^{0,05x}}$ **,** conforme mostrado nas Figuras 1 e 2 abaixo;

Figura 1 – Tabela 1 e Graduação dos eixos x e y



Fonte: Do autor (2024).

Figura 2 – Gráfico do Modelo Exponencial $\boldsymbol{y = 1000.(2)^{0,05x}}$



Fonte: Do autor (2024).

6 – Análise e comparações dos modelos encontrados (considerações ao professor): Neste momento da atividade, torna-se pertinente realizar uma análise crítica dos modelos matemáticos construídos pelos alunos, confrontando-os com o modelo exponencial sugerido por meio da modelagem realizada no aplicativo Desmos. A proposta é discutir possíveis ajustes e aperfeiçoamentos nas soluções apresentadas, tomando como referência a estrutura algébrica da função exponencial na forma $\boldsymbol{y = b.a^{cx}}$..

O professor, enquanto mediador, deve incentivar os estudantes a estabelecerem relações entre os modelos por eles elaborados e aquele sugerido na intervenção didática, com o intuito de identificar os parâmetros a, b e c, interpretando-os no contexto do modelo $\boldsymbol{y = 1000.(2)^{0,05x}}$, obtido a partir da simulação no aplicativo. Essa comparação visa promover uma melhor compreensão da estrutura do modelo e sua aplicação em contextos de crescimento exponencial, como é o caso da reprodução bacteriana.

Além disso, é importante destacar aos alunos que tal modelo representa uma função de crescimento exponencial, comumente empregada para descrever fenômenos caracterizados por variações acentuadas ao longo do tempo. Por fim, sugere-se a manipulação dos parâmetros do modelo para observar, de forma dinâmica e visual, as alterações no comportamento da função. Fazer a manipulação dos os parâmetros do modelo exponencial previamente determinado com o intuito de analisar o impacto dessas alterações no comportamento gráfico da função. Promovendo assim uma compreensão mais profunda do fenômeno matemático representado.

A título de exemplificação, nesta primeira atividade, parte-se do conhecimento prévio do modelo exponencial na forma $\boldsymbol{y = b.a^{cx}}$., em que b representa o valor inicial (neste caso, 1000) e a corresponde à taxa de crescimento populacional. Por meio da substituição das coordenadas extraídas da tabela, é possível determinar os parâmetros do modelo. Por exemplo, ao considerar x = 20, obtém-se y = 2000. Assim, ao substituir esses valores na equação exponencial, pode-se calcular o valor do parâmetro a. Por exemplo:

Para x = 20 temos, y = 2000. Portanto, substituindo no modelo do tipo exponencial $\boldsymbol{y = b.a^{x}}$**.,** descobrimos que **a** valerá:

$$2000 = 1000.a^{20}$$

$$2 = a^{20}$$

$$a = 2^{\frac{1}{20}} \ ou \ a = 2^{\ 0{,}05}$$

Logo, acharíamos o seguinte modelo para questão:

$$\boldsymbol{y = 1000.(2)^{0{,}05x}}$$

Que é a equação que modela a situação problema. Observando a fórmula podemos analisar algo interessante que o **a** é formado por dois números: o número 2 (base da equação) e 0,05 (expoente). Adaptando para a fórmula vamos representar o número 0,05 pela letra **c (que é a taxa de crescimento exponencial variável).**

Cabe ainda uma consideração adicional quanto a uma forma alternativa de representação do modelo exponencial $\boldsymbol{y = b.a^{cx}}$, a qual pode ser naturalmente construída pelos alunos. Trata-se de uma modelagem baseada na contagem dos ciclos de 20 minutos correspondentes ao tempo de duplicação das bactérias. Essa formulação é mais acessível aos estudantes por sua simplicidade, sendo expressa como $\boldsymbol{y = 1000.2^{x}}$, em que o valor de x resulta da divisão do tempo total de reprodução t, pelo intervalo de 20 minutos: x = $\boldsymbol{\frac{t}{20}}$**.** Com essa reconfiguração, o modelo pode ser reescrito como $\boldsymbol{y = 1000.2^{\frac{t}{20}}}$. Por exemplo, ao considerar t = 60 minutos, temos x = $\boldsymbol{\frac{60}{20}}$ = 3; o que representa três ciclos de duplicação. Substituindo na equação, obtém-se $\boldsymbol{y = 1000.2^x = \ y = 1000.2^8 = 8000}$, indicando que, após esse período, a população bacteriana alcançaria 8000 organismos, conforme tabelado.

Reajustando o modelo $\boldsymbol{y = 1000.2^x}$ $(\boldsymbol{y = b.a^x})$; pode ser reescrito como $\boldsymbol{y = 1000.2^{\frac{x}{20}}}$ que é uma outra forma de representa o modelo sugerido pelo App Desmos: $\boldsymbol{y = 1000.(2)^{0,05x}}$ **.** Devemos apenas atentar para o detalhe que $\boldsymbol{y = 1000.2^{\frac{1}{20}x}}$ e $\boldsymbol{\frac{1}{20} = 0,05}$ **.**

Passo 03 – Validação e escolha do melhor modelo para solucionar a situação problema (**O Modelo Matemático**).

I – Esta etapa é a hora dos alunos validarem o modelo escolhido. Que pode ser feito utilizando uma calculadora científica do próprio celular. E de posse dos modelos encontrados, basta testar os valores utilizados para a abscissa, onde x é a variável tempo em minutos e encontrar os valores y que é quantidade de bactérias.

II - Descrever como será feito o teste de validação na calculadora científica

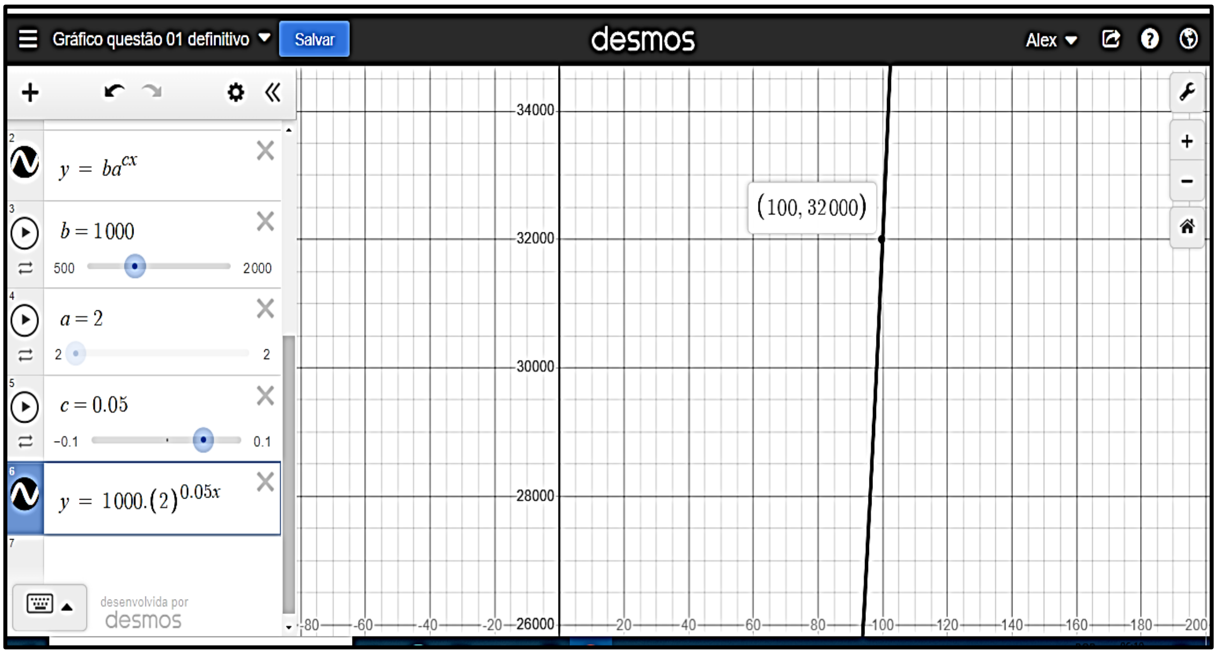
Para esta etapa vamos testar os pontos com o intuito de descobrir quantas bactérias y existiram após x = 100 mim, ou seja, 1 h e 40 mim.

Modelo Exponencial: $\boldsymbol{y = 1000.(2)^{0,05x}}$.

Fórmula na calculadora científica para realizar a verificação

Poderemos usar: y = 1000.2^(0,05x100) = y = 32.000. O ponto (100, 32000) irá aparece assinalado no gráfico da Figura 3, da nossa modelagem.

Figura 3 – Ponto (100, 32000) do Gráfico do Modelo Exponencial



Fonte: Do autor (2024).

Atividade 02

Título da atividade: Dobre folha de papel e chegue na lua

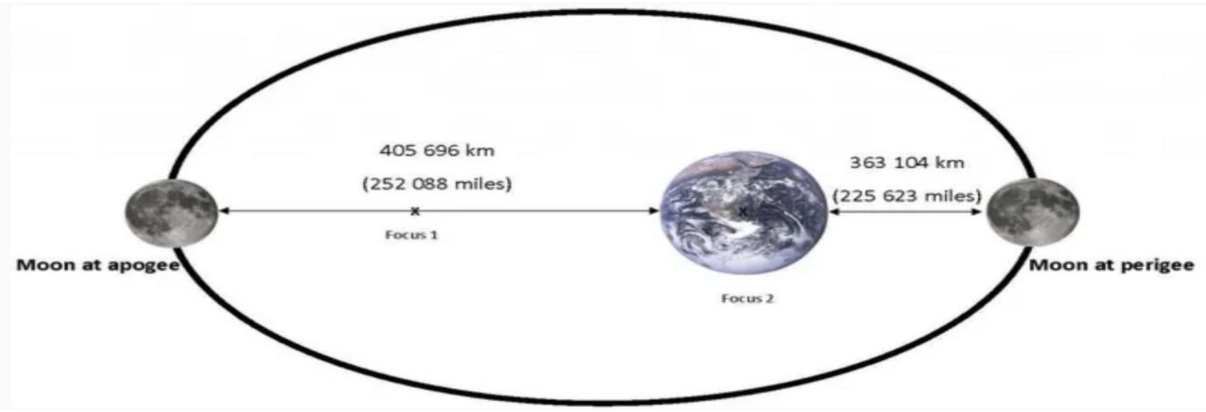
Objetivo da atividade: Saber se existe um modelo matemático que mostre quantas vezes eu tenho que dobrar o papel para chegar à lua.

Materiais utilizados: datashow; computador, celulares; calculadora científica, caneta, quadro negro, App Desmos.

Situação Problema:

Situação Problema

A Lua, nosso satélite natural, tem sido objeto de admiração e curiosidade desde tempos imemoriais, com sua beleza misteriosa e influência nas marés. É o maior satélite natural de um planeta no sistema solar em relação ao tamanho do seu corpo primário, tendo 27% do diâmetro e 60% da densidade da Terra, o que representa 1⁄81 da sua massa.



A distância entre a Terra e a Lua é a medida que separa nossos dois corpos celestes durante sua órbita, e não é estática, mas sim variável, devido às características das órbitas elípticas de ambos os corpos, logo, a distância pode acabar sendo maior ou menos a depender do ponto de medição e em média, a distância é de aproximadamente 384.400 quilômetros.

Parece absurdo, e realmente é, mas tem toda uma lógica matemática por trás dessa afirmação à primeira vista impossível. Se tomarmos um papel de 0,1 mm de espessura e dobrarmos em dois, e depois dobrarmos novamente, de forma consecutiva repetirmos esse processo várias vezes e se considerarmos que o papel não se deforma com o peso, alcançaremos uma espessura que nos permite ir da terra a lua. Vamos refletir: Se essa for uma forma possível de chegarmos à lua, quantas vezes eu preciso dobrar o papel para chegar na lua? E que modelo matemático corresponderia a essa forma de se chegar à lua?

Procedimentos de aplicação da Atividade 2

Passo 01 - Apresentação do vídeo sobre distância da terra e a lua e apresentaremos o texto da atividade, promovendo a discussão sobre o tema e sobre a possibilidade hipotética, apresentada no texto de se chegar à lua e como modelar essa proposta (**A Interação com o Problema**).

Video 03 – Todos os planetas cabem entre a Terra e a Lua: (Disponível em: https://www.youtube.com/shorts/rpMULUn0zoI. Acesso: 01/03/2024)

Texto de apoio: Qual é a distância da Terra à Lua? (Disponível em: https://canaltech.com.br/espaco/qual-e-a-distancia-da-terra-a-lua-222304/ Acesso: 01/03/2024).

I - Instigar aos alunos a refletir sobre os vídeos e o texto entregue da situação problema; se eles conseguem observar alguns aspectos ou padrões matemáticos no material apresentado.

II - Se é possível de chegarmos à lua, quantas vezes eu preciso dobrar o papel para chegar nela? E que modelo matemático corresponderia a essa forma de se chegar à lua?

Passo 02 – Construções de tabelas com os dados reais do problema e ajuste dos parâmetros do modelo exponencial com auxílio do App Desmos.

I - Neste momento devemos acessar o aplicativo Desmos na página: https://www.desmos.com/calculator/nhfijoedh4?lang=pt-PT.

II – Pedir para os alunos construírem uma tabela com os dados da questão (no caderno); analisarem os padrões matemáticos e solicitar que encontrem o modelo matemático que soluciona a situação problema (**A Matematização**).

III – Construir a tabela no aplicativo Desmos e fazer o ajuste nos parâmetros do **modelo exponencial** para obtermos o gráfico da função, de acordo com as seguintes especificações:

1 – Graduação dos eixos x e y: Devemos utilizar a graduação do eixo y variando entre -0.571 até 3.5. Com passos de 0.1. E por sua vez, devemos graduar o eixo x variando de -0.396 até 8.163. Com passos de 1. Lembrado esta graduação pode mudar conforme o munitor que esteja sendo usado.

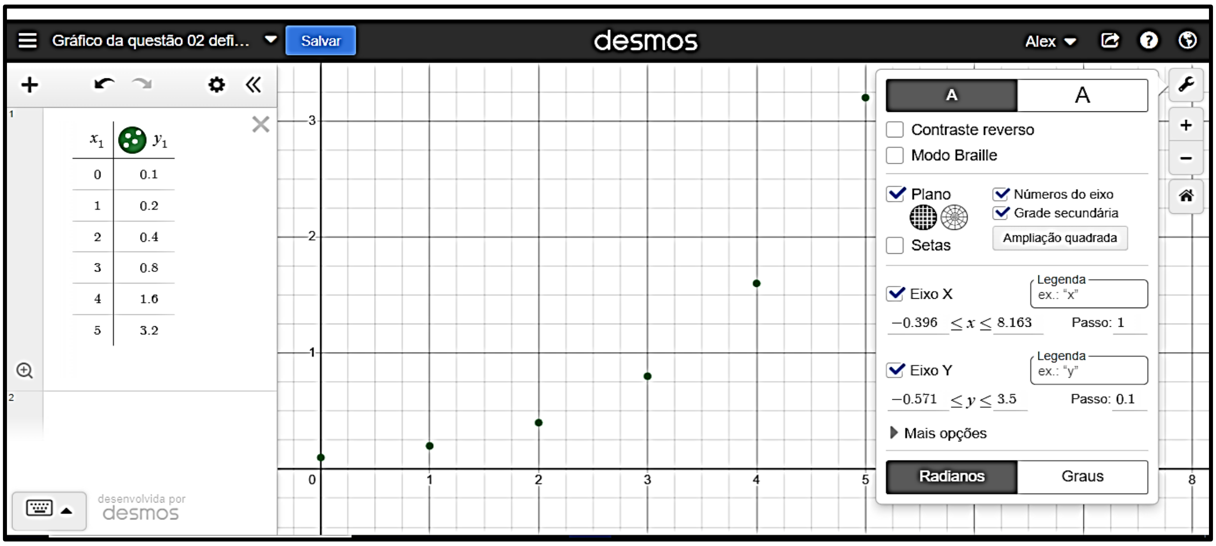
2 - O controle deslizante do parâmetro b: Deve variar de -0.1 até 0.1. Com passos de 0.1; e com **b** = 0.1 para se ter o melhor ajuste na modelação.

3 - O controle deslizante do parâmetro a: Devemos variar de 1 até 5; com **a** = 2. Com passos de 1; para se ter o melhor ajuste. O parâmetro **a** deve valer 2, pois ele é a baseado no modelo do tipo exponencial: $\boldsymbol{y = b.a^{cx}}$

4 - O parâmetro c: Deve ser igual a 1.

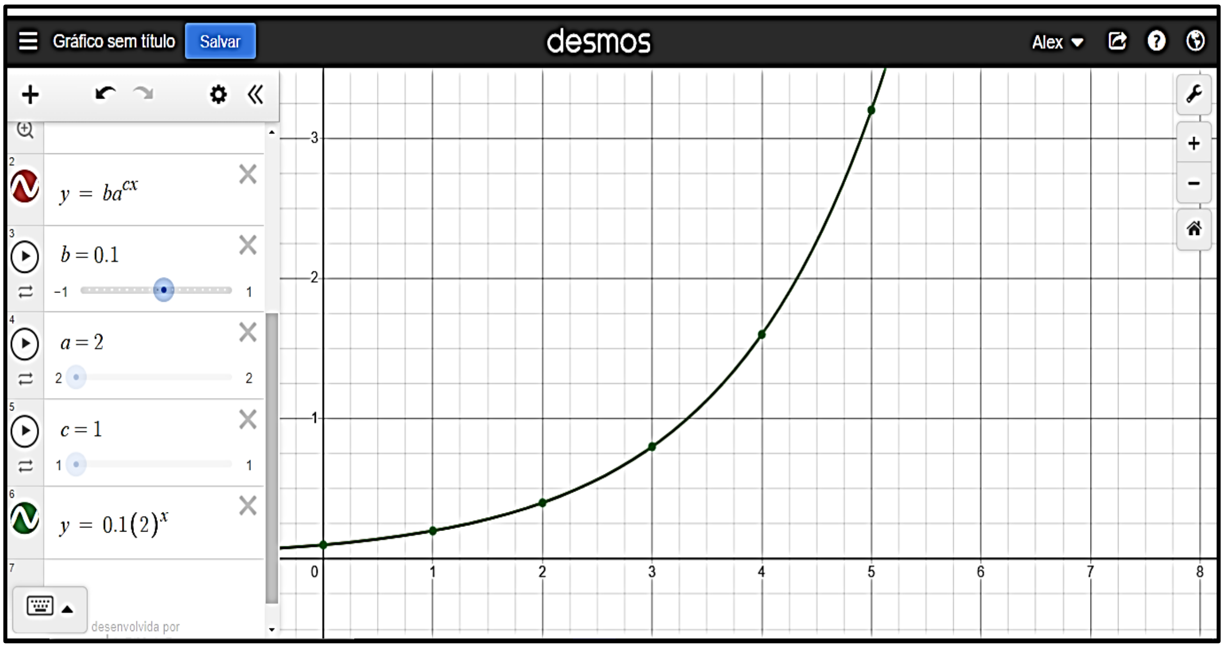
5 - O modelo: Desta forma, encontraremos o modelo exponencial dos dados do problema: $\boldsymbol{y = 0,1.(2)^x}$ **,** conforme mostrado nas Figuras 3 e 4 abaixo;

Figura 3 - Tabela 2 e Graduação dos eixos x e y



Fonte: Do autor (2024).

Figura 4 - Gráfico do Modelo Exponencial $\boldsymbol{y = 0,1.(2)^x}$



Fonte: Do autor (2024).

6 – Análise e comparações dos modelos encontrados (considerações ao professor): Neste estágio da atividade, revela-se oportuno promover uma análise crítica dos modelos matemáticos elaborados pelos alunos, estabelecendo uma comparação com o modelo exponencial gerado por meio da modelagem com o uso do aplicativo Desmos. A intenção é refletir sobre eventuais aprimoramentos e ajustes nas soluções construídas, tendo como base a estrutura algébrica da função exponencial expressa na forma $\boldsymbol{y = b.a^{cx}}$**.**

Neste momento da atividade, provavelmente os estudantes já irão demonstrar familiaridade com o modelo de crescimento exponencial, resultado do contato prévio com o aplicativo Desmos e da representação dos dados por meio de tabelas. O que facilita a percepção dos padrões de crescimento e a montagem do modelo matemático correspondente. Alguns provavelmente irão encontrar o modelo exponencial que soluciona o problema: $\boldsymbol{y = 0,1.(2)^{x}}$

É oportuno neste momento fazer mudanças nos parâmetros para ajustar o gráfico do modelo exponencial; instigando os alunos com perguntas que os levem a deduzir; qual dos modelos proposto no aplicativo se adapta melhor a realidade e solução do problema?

Mais uma vez, é importante destacar que, nesta situação-problema, adotaremos o modelo exponencial em sua forma geral, conforme já discutido: $\boldsymbol{y = b.a^{cx}}$.

Para fins de exemplificação, na resolução da segunda questão, uma vez reconhecido o modelo do tipo exponencial $\boldsymbol{y = b.a^{x}}$, onde b representa o valor inicial (neste caso, 0,1) e a é a taxa de crescimento percentual, o estudante, por meio da substituição das coordenadas extraídas da tabela, poderia obter o seguinte raciocínio:

Ao tomar x = 1, temos y = 0,2. Substituindo esses valores no modelo, obtemos:

$$0{,}2 = 0{,}1.a^{1}$$

$$2 = a^{1}$$

$$a = 2 \;\; ou \;\; a = 2^{\,1}$$

$$\boldsymbol{y = b.a^{cx}}\;\boldsymbol{,logo}\;\; \boldsymbol{y = 0,1.(2)^{1\,x}}\;\; ou\;\; simplismente, \boldsymbol{y = 0,1.(2)^{x}}.$$

Logo, o modelo assume a forma $\boldsymbol{y = 0,1.(2)^{x}}$..

Observa-se, portanto, que a equação geral $\boldsymbol{y = b.a^{cx}}$ permanece válida, mas pode ser reescrita de forma simplificada como $\boldsymbol{y = b.a^{x}}$, sempre que o parâmetro c, que representa a taxa de crescimento exponencial, for igual a 1. Essa simplificação evidencia que o comportamento exponencial se mantém, mesmo em uma formulação algébrica mais direta.

Passo 03 – Validação e escolha do melhor modelo para solucionar a situação problema (**O Modelo Matemático**).

I – Esta etapa é a hora dos alunos validarem o modelo escolhido. Que pode ser feito utilizando uma calculadora científica e de posse do modelo encontrado, basta testar os valores utilizados para a abscissa, onde x é quantidades de dobraduras e y é a o tamanho da espessura da folha.

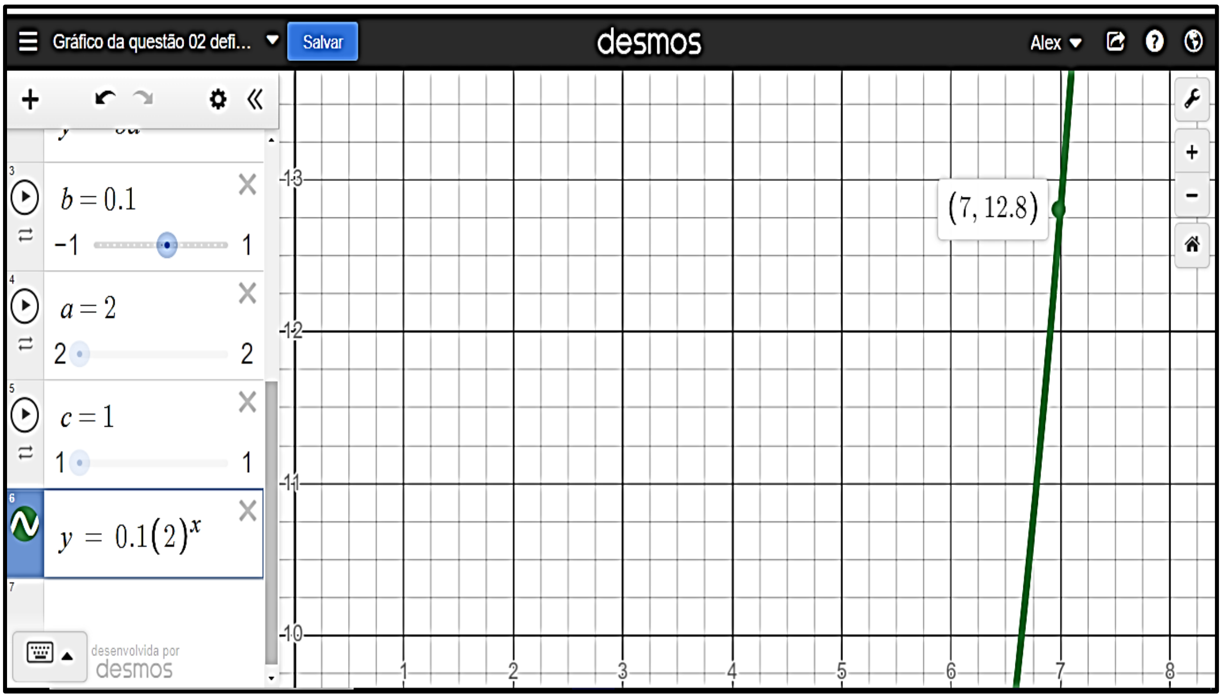
II - Descrever como será feito o teste de validação na calculadora científica – Nesta etapa vamos testar para saber qual a espessura y quando se tem 7 dobraduras da folha de papel?

Modelo Exponencial: $\boldsymbol{y = 0,1.(2)^x}$

Fórmula na calculadora científica para realizar a verificação

Poderemos usar: y = 0,1. 2^(7) = y = 12,8 mm. O ponto (7, 12.8) que aparece assinalado no gráfico da nossa modelação.

Figura 5: Ponto (7, 12.8) do Gráfico do Modelo Exponencial



Fonte: Do autor (2024).

III – Por fim, agora poderemos responder a primeira pergunta da nossa situação problema. Quantas vezes eu preciso dobrar o papel para chegar na lua? Esta resposta pode ser fornecida a parti do modelo encontrado e com o uso de calculadora científica ou do próprio aplicativo Desmos. Podemos incentivar os alunos (por tentativas) a substituir valores em x para vê qual valor se aproxima de 384.400 quilômetros, que seria a distância média da terra a lua. Lembrando que deveríamos ajustar as medidas passando de quilômetros para milímetros, desta forma teríamos 384.400.000.000 mm ou $3,844.10^{11}$ mm.

Fazendo algumas sugestões para os valores de x que mais se aproximam do resultado, tais como no intervalo de $39 \leq x \leq 43$.

Fórmula na calculadora científica para realizar a verificação:

Y = 0,1.2^(41.8) = y ≈ $3,82.10^{11}$. ou x = 42 dobras aproximadamente.

IV - Como forma de despertar a curiosidade dos alunos — embora o conteúdo exija conhecimentos sobre logaritmos, que presumivelmente ainda não foram abordados —, a proposta pode servir como estímulo e incentivo à aprendizagem futura do tema. Assim, ao considerarmos o valor de $y=3,84\times10^{11}$e o substituirmos no modelo matemático previamente obtido, poderemos realizar uma verificação exploratória da solução, teremos:

$$\boldsymbol{y = 0,1.(2)^{x}}$$

$$\boldsymbol{3,844.10^{11} = 0,1.(2)^{x}}$$

$$\boldsymbol{\frac{3,844.10^{11}}{0,1} = 0,1.(2)^{x}}$$

$$\boldsymbol{(2)^{x} = 3,844.10^{12}}$$

Para encontrarmos x usaremos log 10

$$\boldsymbol{log(2)^{x} = \log(3,844.10^{12}) = \frac{log\,(3,844.10^{12})}{log(2)}}$$

Por tabela temos que:

$$\boldsymbol{log_{10}(3,844.10^{12}) \cong 12,584}$$

$$\boldsymbol{log_{10}(2)} \cong 0{,}301$$

Portanto

$$\boldsymbol{x = \frac{12,584}{0,301}}$$

$x \cong$ 41,8 ou seja aproximadamente 42 dobras

Atividade 03

Título da atividade: Datação por Carbono-14

Objetivo da atividade: Encontrar um modelo matemático para representar o decaimento do Carbono-14 da situação.

Materiais utilizados: datashow; computador, celulares; calculadora científica, caneta, quadro negro, App Desmos.

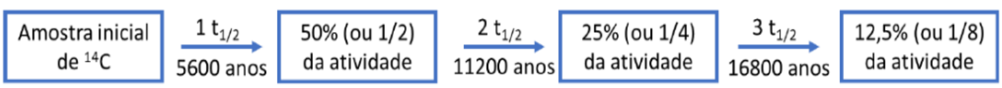
Situação Problema:

Situação Problema

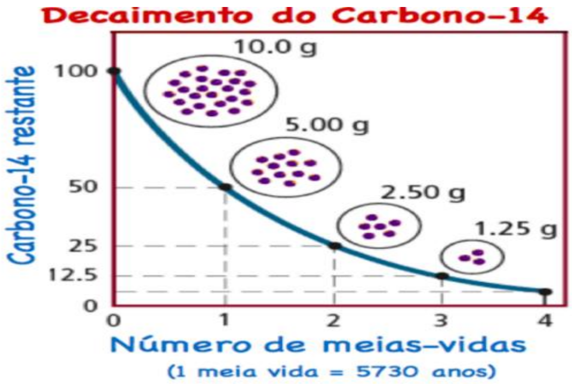
A datação com carbono-14 é uma técnica que permite aos cientistas de diversas áreas do conhecimento determinar a idade de sedimentos, fósseis humanos ou vegetais, isso porque todos os seres vivos tem em sua constituição partículas de carbono, e dentre as partículas do carbono existe uma partícula específica que nos possibilita datar com relativa exatidão em que época tais seres viveram.

Esse tipo de datação é aplicável à madeira, carbono, sedimentos orgânicos, concha marinhas ou qualquer material que tenha absorvido direta ou indiretamente compostos contendo carbono. Essa técnica foi descoberta por Willard Libby na década de 1940, que observou que a quantidade de 6C14 dos tecidos orgânicos mortos ia diminuindo de forma constante ao longo do tempo. O isótopo de 6C14 tem um tempo de meia vida (que é o tempo necessário para que determinada massa se reduza pela metade) de 5730 anos.

Por exemplo, o 14C (carbono-14) decai por radiação beta com o tempo de meia-vida igual a 5.600 anos. Isso significa que, se hoje temos uma amostra de carbono-14, ela será reduzida a 50% do seu valor inicial daqui a 5600 anos. Como o tempo de meia-vida é constante, depois de passada uma segunda meia-vida, ou seja, depois de 11200 anos, essa amostra será reduzida novamente à metade, passando a 25% (ou 1/4) do seu valor inicial. Passadas exatamente três meias-vidas, ou seja, 16800 anos, a atividade inicial da amostra será reduzida passando a 1/8 da sua atividade inicial. E, assim, por diante. Veja o esquema a seguir para melhor visualização:



Isto é, quando o animal morre, o carbono de seu corpo para de sofrer trocas com o ambiente. Dessa forma, a concentração e C-14 nofóssil será estimada pelas leis do decaimento radioativo que indicam uma variação da massa do isótopo radioativo constante em um determinado período.



Vamos refletir:

Existiria um modelo matemático para representar o decaimento do Carbono-14?

Procedimentos de aplicação da Atividade 2

Passo 01 - Apresentação do vídeo sobre como que funciona a datação por carbono 14 e dos o textos da atividade, promovendo a discussão sobre o tema e sobre a possibilidade de encontrarmos um modelo matemático que represente o decaimento do Carbono 14 (**A Interação com o Problema**).

Video 04 – Como a Datação por Carbono Funciona? (Disponível em https://www.youtube.com/shorts/sHp0OFxxhPU. Acesso: 01/03/2024)

Texto 03 de apoio: DNA de mamute é revelado. (Disponível em: https://agencia.fapesp.br/dna-de-mamute-e-revelado/4798. **Acesso: 01/03/2024).**

Texto 04 de apoio: Pesquisadores recuperaram DNA de ossos de mamute – Datação de carbono 14. (Disponível em: https://www.resumov.com.br/provas/enem-2016/q63-pesquisadores-recuperaram-dna-de-ossos-de-mamute/. **Acesso: 01/03/2024).**

I - Instigar aos alunos a refletir sobre os vídeos e os textos entregue da situação problema; se eles conseguem observar alguns aspectos ou padrões matemáticos no material apresentado.

II - É possível criar um modelo matemático que represente o decaimento do carbono 14.?

Passo 02 – Construções de tabelas com os dados reais do problema e ajuste dos parâmetros do modelo exponencial com auxílio do App Desmos.

I - Neste momento devemos acessar o aplicativo Desmos na página: https://www.desmos.com/calculator/nhfijoedh4?lang=pt-PT.

II – Pedir para os alunos construírem uma tabela com os dados da questão (no caderno); analisarem os padrões matemáticos e solicitar que encontrem o modelo matemático que soluciona a situação problema (**A Matematização**).

III – Construir a tabela no aplicativo Desmos e fazer o ajuste nos parâmetros do **modelo exponencial** para obtermos o gráfico da função, de acordo com as seguintes especificações:

1 – Graduação dos eixos x e y: Devemos utilizar a graduação do eixo y variando de -12.0531 até 131.8179. Com passos de 25. E por sua vez, devemos graduar o eixo x variando de -1966.53 até 26807.69. Com passos de 5730. Lembrado esta graduação pode mudar conforme o munitor que esteja sendo usado.

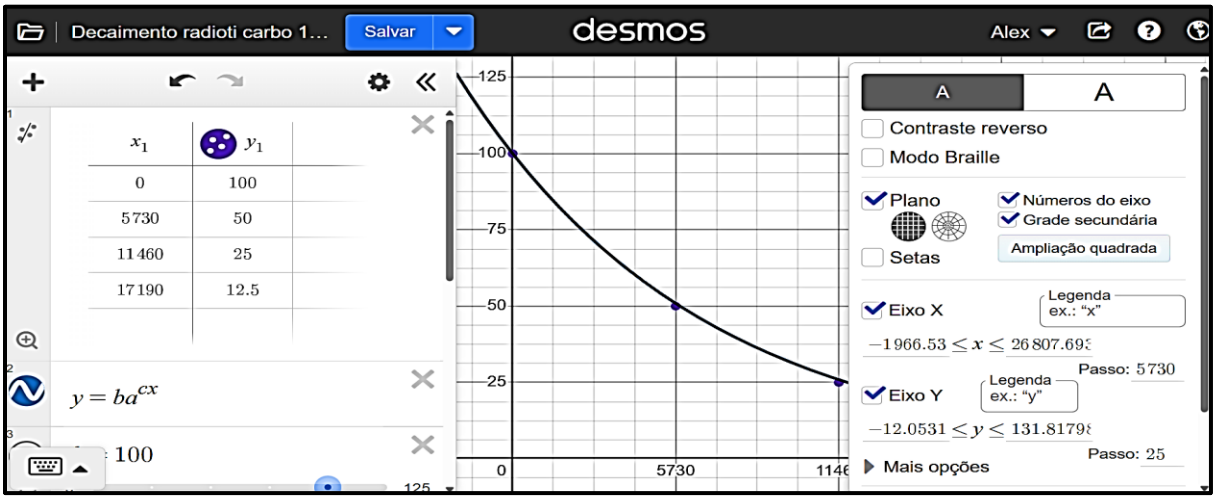
2 - O controle deslizante do parâmetro b: O controle deslizante do parâmetro **b** deve variar de 0 até 125. Com passos de 25; e com **b** = 100 para se ter o melhor ajuste.

3 - O controle deslizante do parâmetro c: O controle deslizante do parâmetro **c** deve variar de - 0.001 até 0.001. Com passos de 0,00001; com **c** = 0,00017. para se ter o melhor ajuste de curva;

4 - O controle deslizante do parâmetro a: O parâmetro **a** deve ser igual a 0.5. Com passos de 0.5 e controle deslizante variando e -1 até1, para se ter o melhor ajuste.

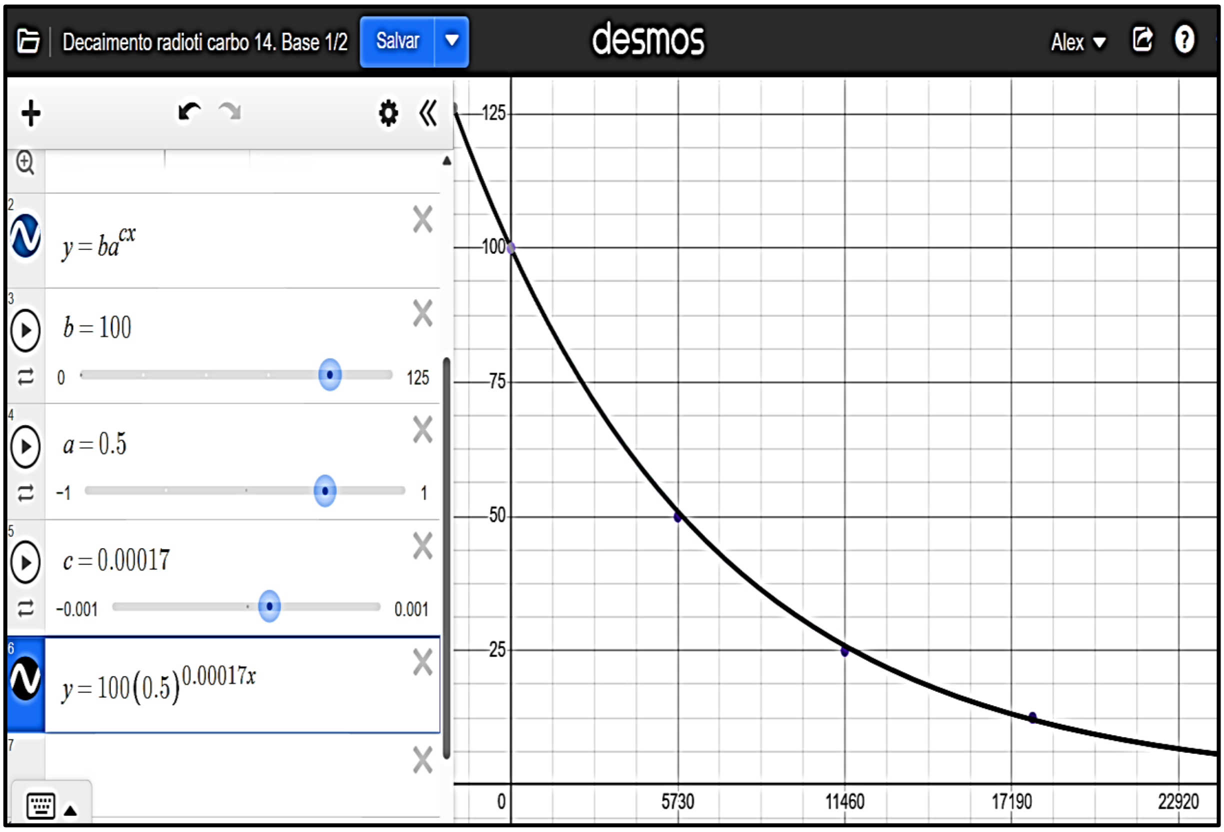
5 - O modelo: Obteremos assim o modelo do ajuste exponencial dos dados do problema: $\boldsymbol{y = 100.(0,5)^{0,00017x}}$, conforme ilustrado nas Figuras 6 e 7 abaixo

Figura 6- Tabela 3 e Graduação dos eixos x e y



Fonte: Do autor (2024).

Figura 7 - Gráfico do Modelo Exponencial $\boldsymbol{y = 100.(0,5)^{0,00017x}}$



Fonte: Do autor (2024).

6 – Análise e comparações dos modelos encontrados: Neste momento como de praxe, devemos realizar uma análise crítica dos modelos matemáticos construídos pelos alunos, confrontando-os com o modelo exponencial sugerido por meio da modelagem realizada no aplicativo Desmos. A proposta é discutir possíveis ajustes e aperfeiçoamentos nas soluções apresentadas, tomando como referência a estrutura algébrica da função exponencial na forma $\boldsymbol{y = b.a^{cx}}$..

A execução desta atividade pode se revelar particularmente desafiadora para os estudantes. Encontrando dificuldades em desenvolvê-la de forma satisfatória, especialmente no que se refere à elaboração da tabela a partir dos dados fornecidos na situação-problema. Tal dificuldade pode ser atribuída, em grande medida, à mudança na lógica da questão em relação às atividades anteriores, nas quais a variável y apresentava um crescimento por duplicação em intervalos regulares de tempo. Diante desse novo cenário, tornou-se necessária uma intervenção pontual por parte do professor afim de dirimir algumas dúvidas**.**

Espera-se que os alunos percebam que a porcentagem do material se reduza a metade a cada ciclo de meia vida. Logo no base a seria $\frac{1}{2}$ ou 0,5 (meio). Que estaria multiplicada pelo valor inicial de 100 %. E com base nos conhecimentos prévios que eles já adquiriram do modelo exponencial – é possível que alguns cheguem no seguinte modelo: $\boldsymbol{y = 100\,.\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}$

É relevante salientar que essa modelagem não deve ser considerada equivocada, desde que se interprete a variável x como indicativa da quantidade de ciclos completos de meia-vida. Para que essa compreensão seja alcançada, é necessário que os valores de tempo apresentados na tabela — como 5.730, 11.470, 17.960, entre outros — sejam devidamente divididos pelo valor correspondente ao período de meia-vida. E o professor pode fazer essa intervenção mostrando este entendimento para o aluno.

Por fim, independentemente do modelo sugerido pelo aplicativo - e após o professor fazer uma intervenção - salientando que os ciclos são gerados quando tempo é dividido pelo valor correspondente ao período de meia vida. Espera-se que o aluno posso alcança este modelo matemático: $\boldsymbol{y = 100\,.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}}$. Que nada nada mais é uma outra representação do modelo proposto pelo Exponencial $\boldsymbol{y = 100.(0,5)^{0,00017x}}$**,** proposto pelo Desmos.

Deve-se ressaltando aos alunos que o parâmetro c $\simeq$ 0,000017, aparece da inversão do tempo de meia vida na variável x. Portanto temo que, $\boldsymbol{\frac{1}{5730} \simeq 0,00017}$, que surge para se adequar ao modelo exponencial matemático do aplicativo. Logo, o modelo matemático que chegamos, $\boldsymbol{y = 100\,.(0,5)^{0,000017x}}$; é somente uma outra forma de reescrever o modelo, $\boldsymbol{y = 100\,.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}}$**,** considerando x=t neste último modelo.

Passo 03 – Validação e escolha do melhor modelo para solucionar a situação problema (**O Modelo Matemático**).

I – Esta etapa é a hora dos alunos validarem o modelo escolhido. Que pode ser feito utilizando uma calculadora científica do próprio celular. E de posse dos modelos encontrados, basta testar os valores utilizados para a abscissa, onde x é a variável tempo em anos e encontrar os valores y que é a porcentagem de material que ainda resta.

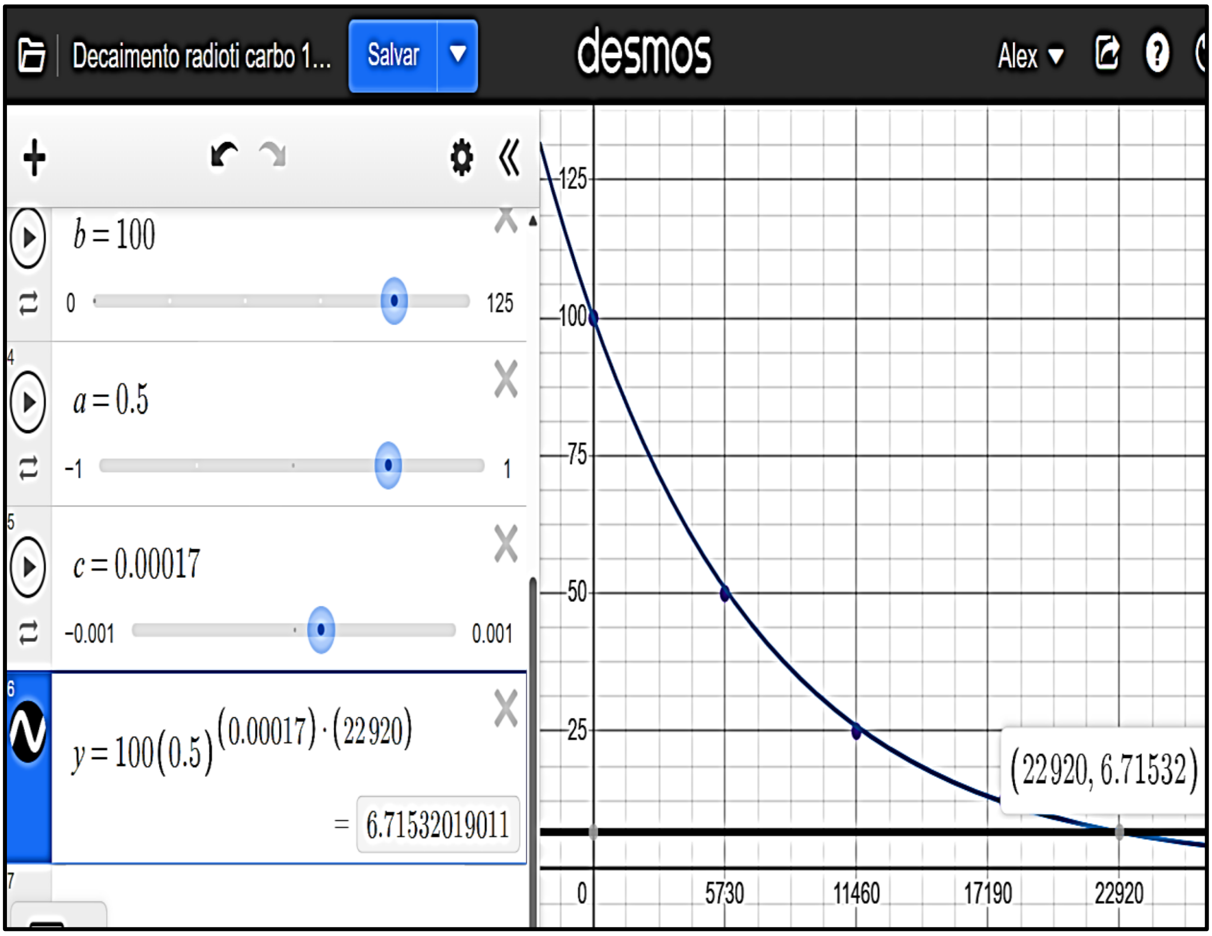
II - Descrever como será feito o teste de validação na calculadora científica – Para esta etapa vamos testar os pontos que indicam qual a porcentagem de material radioativo restante quando se passarem 22920 anos.

Modelo Exponencial: $\boldsymbol{y = 100.(0,5)^{0,00017x}}$.

Fórmula na calculadora científica para realizar a verificação

Poderemos usar: y = 100.(0,5)^(0,00017 x 22920) = y = 6,71. O ponto (22920, 6,71) aparece assinalado no gráfico da nossa modelação conforme podemos observar na Figura 8, nos fornecendo uma boa margem de precisão para este ajuste dos parâmetros do gráfico do modelo exponencial.

Figura 8 - Ponto (22920, 6.71) do Gráfico do Modelo Exponencial



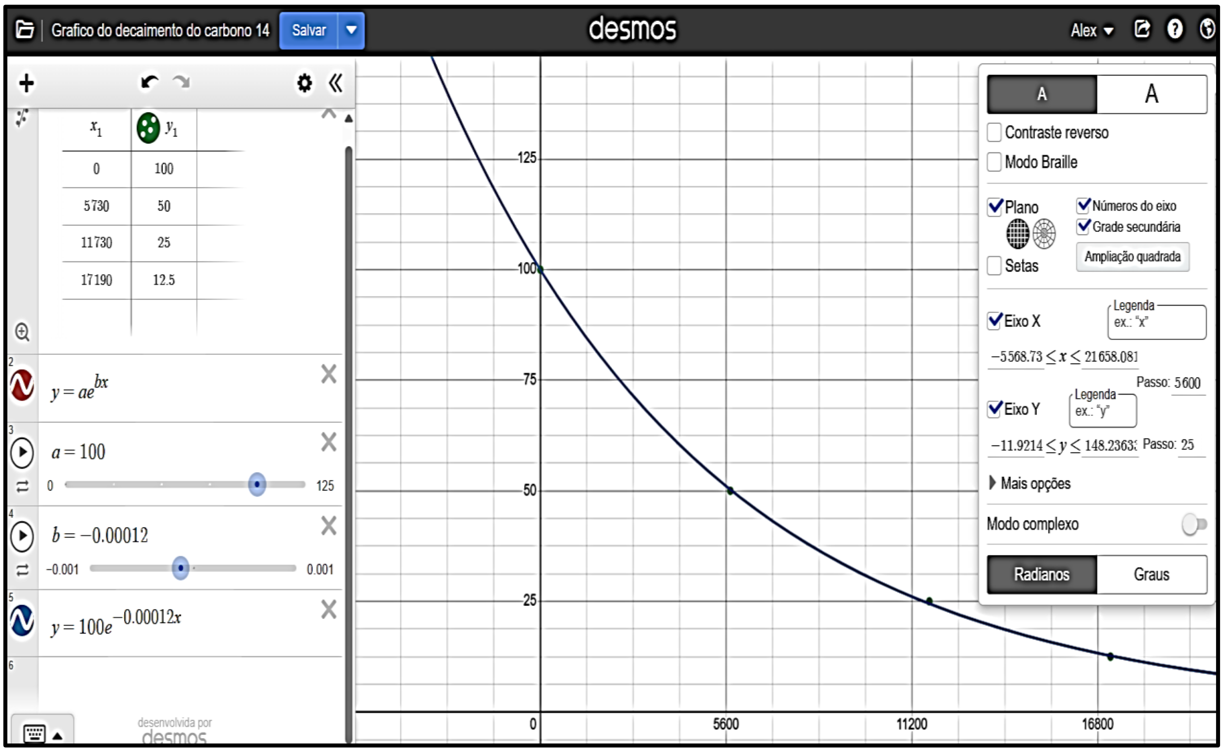
Fonte: Do autor (2024).

Passo 04 – Como forma de ampliar a curiosidade e o interesse dos estudantes, é pertinente, neste momento da atividade, apresentar no aplicativo Desmos um modelo matemático de decaimento radioativo do carbono-14, com base na função exponencial natural da forma $\boldsymbol{y = be^{cx}}$ amplamente utilizada em estudos científicos oficiais. Essa sugestão pode ser explorada ao final da aula experimental, conforme indicado na Figura x, utilizando, por exemplo, o modelo:

$$y = 100.e^{-0{,}00012x}$$

É relevante destacar que, ao realizar o ajuste dos parâmetros no Desmos, observa-se que a taxa de variação exponencial assume valor negativo, caracterizando o decaimento. Nesse processo, o parâmetro c, anteriormente igual a 0,00017, passa a ser -0,00012, refletindo a diminuição progressiva expressa pelo modelo.

Figura 9 - Gráfico do Modelo Exponencial $y = 100.e^{-0{,}00012x}$



Fonte: Do autor (2024).

Sugestões para o professor

01 – Recomenda-se que a explanação teórica sobre o conteúdo, por meio de aula expositiva, seja realizada apenas após a aplicação de, no mínimo, duas atividades introdutórias.

02 – Após a aula expositiva, é aconselhável a aplicação de uma atividade de fixação com o objetivo de consolidar os conceitos abordados.

03 – Sempre que possível, orienta-se que os estudantes façam uso do aplicativo Desmos na resolução da atividade de fixação, promovendo a integração entre tecnologia e aprendizagem. A seguir, será apresentado um exemplo de atividade com essa finalidade.

6 - Sugestões de Atividades de Fixação para Implementação da Sequência Didática

O ensino da função exponencial assume papel de grande relevância na formação matemática dos estudantes, sobretudo quando se considera a presença desse conceito em uma ampla gama de fenômenos naturais, sociais e econômicos. Diversos processos do mundo real seguem padrões de crescimento ou decaimento exponencial, como é o caso da desintegração radioativa, da proliferação de microrganismos, da propagação de epidemias, da dinâmica populacional, do conceito de meia-vida em química, da variação da pressão atmosférica com a altitude, da escala logarítmica de Richter, dos modelos econômicos envolvendo juros compostos e capitalização, da Lei do Resfriamento de Newton e até da queda de corpos com resistência do ar.

Diante dessa diversidade de aplicações, a função exponencial se apresenta como um conteúdo que pode – e deve – ser abordado a partir de contextos significativos, capazes de promover a articulação entre a matemática e a realidade. Neste sentido, a modelagem matemática revela-se como uma poderosa estratégia didática, uma vez que permite que o estudante construa modelos a partir de dados reais, compreenda o comportamento das funções envolvidas e reflita sobre os fenômenos que estão sendo analisados.

Aliada à modelagem, a utilização de recursos tecnológicos potencializa ainda mais esse processo de ensino e aprendizagem. Aplicativos como o Desmos, por exemplo, oferecem um ambiente interativo que permite a manipulação de parâmetros, o ajuste gráfico de curvas e a visualização dinâmica de modelos matemáticos. Tais ferramentas ampliam as possibilidades de análise por parte dos estudantes, permitindo a construção de significados de forma visual, exploratória e investigativa. Além disso, o uso dessas tecnologias contribui para a superação de obstáculos cognitivos, ao tornar mais acessível a compreensão de conceitos abstratos, como o comportamento assintótico das funções ou o impacto de pequenas variações nos parâmetros da função exponencial.

A articulação entre modelagem matemática e tecnologias digitais favorece, assim, a resolução de situações-problema contextualizadas, ancoradas em dados reais, o que proporciona aos alunos uma experiência de aprendizagem mais significativa. Ao serem desafiados a encontrar modelos matemáticos que representem adequadamente tais situações, os estudantes mobilizam conhecimentos prévios, estabelecem conexões entre diferentes representações e desenvolvem habilidades de análise crítica e argumentação. Portanto, o ensino da função exponencial, quando conduzido sob essa abordagem, não apenas promove a aprendizagem conceitual do conteúdo, mas também contribui para a formação de um sujeito mais ativo, reflexivo e preparado para lidar com os desafios da realidade contemporânea.

Diante do exposto, consideramos oportuno apresentar, a seguir, algumas sugestões de atividades nas quais a sequência didática elaborada nesta pesquisa poderá ser utilizada como suporte pedagógico para o ensino da função exponencial. As propostas estão ancoradas na perspectiva da modelagem matemática mediada por tecnologias digitais, e visam proporcionar aos estudantes oportunidades de construção ativa do conhecimento, por meio da exploração de dados reais, interpretação de gráficos e análise de situações-problema contextualizadas.

A sequência, estruturada em etapas que contemplam a interação com o problema, a matematização da situação e a validação do modelo, oferece ao professor um referencial metodológico que pode ser adaptado a diferentes realidades escolares. Seu uso é especialmente recomendável em contextos nos quais se deseja aproximar o conteúdo matemático do cotidiano do aluno, tornando a aprendizagem mais significativa e contribuindo para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Essas atividades podem ser aplicadas tanto em aulas regulares quanto em projetos interdisciplinares, oficinas temáticas ou como parte de sequências didáticas mais amplas. E podem ser adaptadas para outros recursos tecnológicos além do Desmos, desde que permitam que o aluno visualize o comportamento da função exponencial e compreenda, de maneira intuitiva, como os parâmetros influenciam o modelo. Assim, a proposta busca favorecer a aprendizagem conceitual por meio de práticas pedagógicas inovadoras, capazes de estimular a curiosidade, a autonomia e o engajamento dos estudantes.

6.1 - Taxa de Contágio de Covid-19 em Paranaguá

Situação Problema

O cálculo matemático para determinar a taxa de contágio de uma doença leva em consideração dados diários sobre o tamanho da população, os casos confirmados, as mortes, os infectados e o número de recuperados. O número efetivo de reprodução, chamado (R), diz qual o potencial de propagação do vírus. Se maior que 1, cada paciente transmite a doença a, pelo menos, mais uma pessoa. Se menor do que 1, menos indivíduos se infectam.

Por exemplo, se a taxa de contágio for igual a 1,63, isso quer dizer que 10 pessoas contaminadas podem transmitir o vírus para outras 16. De acordo com o site de notícias Bem Paraná, a taxa de contágio no Paraná estava entre 2 e 3, no dia 28/05/2020. Levando em consideração que Paranaguá tem 133.761 habitantes, sendo que, destes, 54 já testaram positivo para o Coronavírus, em quanto tempo toda a população de Paranaguá estaria contaminada, se considerarmos que a taxa de contágio irá se manter?

Faça um modelo matemático que represente a taxa de contágio constante e igual a 2 e outro constante e igual a 3, utilize o APP Desmos.

(Esta questão foi adaptada do material do IFPR-Campus Maringá, considerando os dados reais da época de sua elaboração. Disponível em: https://ifpr.edu.br/paranagua/wp-content/uploads/sites/20/2020/07/Atividade-Matematica-04.pdf. Acesso: 10/07/2024.

Resolução

- População de Paranaguá: **133.761 habitantes**
- Casos confirmados no início: **54 pessoas**
- Modelo matemático:

$$\boldsymbol{y = 54 \, . \, a^x}$$

onde:

- y: número de infectados após x dias
- a: taxa de contágio (número médio de pessoas infectadas por uma)
- x: dias

Vamos fazer para **duas taxas de contágio**:

- **R = 2**

$y = 54 . 2^x$, ou seja, entre o 11º e o 12º dia a cidade estaria toda contaminada, aproximadamente 11,27 dias

- **R = 3**

$y = 54 . 3^x$ **,** ou seja, entre o 7º e o 8º dia a cidade estaria toda contaminada, aproximadamente 7,11 dias

6.2 - Decaimento Radioativo do césio-137

Situação Problema

O legado radioativo de Goiânia – O caso do Césio-137

Em setembro de 1987, ocorreu em Goiânia (GO) um dos mais graves acidentes radioativos do mundo. Dois catadores de materiais recicláveis encontraram um aparelho abandonado no antigo Instituto Goiano de Radioterapia. Sem saber do risco, eles desmontaram o equipamento e levaram para casa o pó brilhante que havia dentro. Esse material era o isótopo radioativo Césio-137 (^{137}Cs), altamente perigoso à saúde.

O Césio-137 é um subproduto de reatores nucleares e emite radiação gama. Ele é medido em Becquerel (Bq), que indica o número de desintegrações nucleares por segundo. Ou seja, se uma amostra tem 2000 Bq, significa que ocorrem 2000 desintegrações por segundo naquela substância.

Após o acidente, muitas áreas foram contaminadas. Como o Césio-137 tem uma meia-vida de cerca de 30 anos, isso significa que a atividade radioativa da substância cai pela metade a cada 30 anos. (Fonte: Comissão Nacional de Energia Nuclear – CNEN).

Fontes da Pesquisa:

https://www.reddit.com/r/CatastrophicFailure/comments/189gc94/goi%C3%A2nias_cesium137_disaster_september_13_1987/?tl=pt-br&utm_source=chatgpt.com: Acesso: 10/07/2024

https://www.epa.gov/radiation/radionuclide-basics-cesium-137?utm_source=chatgpt.com: Acesso: 10/07/2024

a) Sabendo que a atividade inicial de uma amostra de Césio-137 era de 2000 Bq, crie o modelo exponencial que representa o decaimento radioativo dessa substância ao longo do tempo, em anos. Utilize o APP Desmos.

b) Com base nesse modelo, calcule qual será a atividade radioativa da amostra após 60 anos.

c) Interprete seu resultado: a substância ainda representa perigo após esse tempo?

Resolução

- Atividade inicial: b = 2000Bq
- Meia-vida: T = 30
- Tempo decorrido: t = 60
- Modelo do decaimento:

$$\boldsymbol{y = b \,.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}}$$

Montar o modelo com os dados

$$\boldsymbol{y = 2000 \,.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{60}{30}} = 2000\, x\ \ \frac{1}{4} = 500Bq}$$

Isso significa que ela ainda sofre 500 desintegrações nucleares por segundo — ou seja, **ainda representa risco à saúde**, mesmo após seis décadas do acidente.

6.3 – Curva de Aprendizagem

Situação-Problema

Curva de Aprendizagem e o Aprendizado no Treinamento Militar

Durante a Segunda Guerra Mundial, a indústria aeronáutica dos Estados Unidos percebeu um padrão: quanto mais vezes uma tarefa era repetida, menos tempo os trabalhadores levavam para executá-la. Esse fenômeno foi sistematizado por Theodore P. Wright, em 1936, e deu origem ao conceito matemático da Curva de Aprendizagem.

Essa ideia foi fundamental, por exemplo, na fabricação dos bombardeiros B-24, onde se observou que, a cada dobrar da produção, o tempo necessário por unidade caía cerca de 20%. Com o tempo, esse conceito passou a ser usado em diversas áreas, desde o treinamento militar até o aprendizado de habilidades cotidianas como digitação ou pilotagem de drones.

Fonte dos dados:

Wright, T. P. (1936). *Factors affecting the cost of airplanes*. Journal of the Aeronautical Sciences.

Adaptado com base em: Investopedia - Learning Curve https://www.investopedia.com/terms/l/learning-curve.asp; Acesso em 10/08/2024

Um estudo mostra que o tempo necessário para completar uma tarefa diminui em **15% a cada repetição**. Isso significa que a **taxa de retenção** do tempo é de **85%**. Ou seja, cada nova execução leva apenas **85% do tempo anterior**.

Se uma tarefa inicial é completada em **20 minutos**, qual será o tempo necessário para realizá-la **após 6 repetições**?

Utilize o modelo da curva de aprendizagem, dado por:

$$\boldsymbol{T(n) = T_1 \, . r^{n-1}}$$

Onde:

- $\boldsymbol{T(n)}$ é o tempo necessário para completar a tarefa na n-ésima repetição;
- $\boldsymbol{T_1}$ é o tempo da primeira execução (20 minutos);
- r é a **taxa de retenção** (neste caso, 85% = 0,85);
- n é o número da repetição (a partir de 1).

Resolução

Dados da questão:

- $\boldsymbol{T_1}$ = 20 minutos;
- r = 0,85;
- n = 6.

Aplicando a fórmula:

$$\boldsymbol{T(n) = T_1 \, . r^{n-1}}$$

$$\boldsymbol{T(6) = 20 \, . \, 0,85^{6-1}}$$

$$\boldsymbol{T(6) = 20 \, . \, 0,85^{5}}$$

$$\boldsymbol{T(6) = 20 \, . \, 0,85^{5}}$$

$$\boldsymbol{T(6) \approx 8,874 \, minutos}$$

Após 6 repetições da mesma tarefa, o tempo necessário será de aproximadamente **8,87 minutos**.

6.4 - Crescimento Populacional da Cidade de Parauapebas (PA)

Situação-Problema

A cidade de Parauapebas, localizada no sudeste do estado do Pará, tem se destacado nas últimas décadas por seu acelerado crescimento populacional. A região abriga parte do Projeto Grande Carajás, coordenado pela mineradora Vale, o que impulsionou a chegada de milhares de trabalhadores de diversas regiões do país.

De acordo com os dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE):

- Em 2010, a população era de 153.942 habitantes.
- Em 2022, a população atingiu 266.424 habitantes.

Isso representa um dos maiores crescimentos populacionais proporcionais do país. Tal aumento decorre de fatores como a oferta de emprego na mineração, urbanização acelerada, e migração em massa de outros estados em busca de melhores condições de vida.

Fonte: IBGE Cidades – Parauapebas
https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pa/parauapebas/panorama – Acesso em 20/08/2024

Com base nos dados populacionais da cidade de Parauapebas (PA), fornecidos pelo IBGE:

- População em 2010: P_0 =153.942
- População em 2022: P(t)=266.424
- Intervalo de tempo: t=12 anos

1. Supondo que o crescimento da população siga um modelo exponencial da forma:

$$\boldsymbol{P(t) = P_0 \,.\, a^t}$$

Onde:

- P(t) é a população após t anos;
- P_0 é a população inicial;
- a é a razão de crescimento anual;
- t é o tempo (em anos).

a) Determine o valor da razão de crescimento a;

b) Monte a função do crescimento populacional de Parauapebas;

c) Estime qual será a população da cidade no ano de 2030, mantendo a taxa de crescimento constante.

Resolução

Encontrar a razão de crescimento a

Usamos a fórmula do crescimento populacional:

$$P(t) = P_0 \,.\, a^t$$

Substituímos os valores:

$$266.424 = 153.942 \,.\, a^{12}$$

$$\frac{266.424}{153.942} = a^{12}$$

$$a^{12} \approx 1,7312$$

$$a \approx 1,0478$$

Função do modelo de crescimento populacional

Agora que conhecemos a razão de crescimento a, podemos escrever a função:

$$P(t) = 153.942 \,.\, 1,0478^t$$

Estimar a população em 2030

De 2010 a 2030 temos: t = 20 anos.

Substituímos na função:

$$P(20) = 153.942 \,.\, 1,0478^{20}$$

$$P(20) = 153.942 \,.\, 2,537 \approx 390.688 \, habitantes$$

A projeção da população de Parauapebas para 2030, mantendo-se o crescimento dos últimos 12 anos, é de aproximadamente **390.688 habitantes**.

6.5 – Lei de Resfriamento de Corpos de Newton

Situação-Problema

Durante uma manhã de trabalho em um laboratório da Universidade de Illinois, nos Estados Unidos, uma equipe de físicos conduzia experimentos em uma sala climatizada a 22°C. Um dos pesquisadores deixou sobre a bancada um copo de café quente recém-passado, cuja temperatura inicial era de 90°C. Ao retornar 30 minutos depois, ele notou que a temperatura do café havia diminuído para 52°C.

Esse cenário serve para estudar um clássico modelo de decaimento térmico: a Lei de Resfriamento de Newton, que descreve como a temperatura de um corpo varia ao longo do tempo, em função da temperatura do ambiente e da diferença inicial.

A Lei de Resfriamento de Newton é expressa por:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a) \,.\, e^{-kt}$$

Onde:

- T(t): temperatura do corpo no tempo t;
- T_a: temperatura ambiente;
- T_0: temperatura inicial do corpo;
- k: constante de resfriamento (positiva);
- t: tempo decorrido (em minutos).

Fonte: The Physics Classroom - Newton's Law of Cooling : https://www.physicsclassroom.com/class/thermalP/Lesson-1/Newton-s-Law-of-Cooling

Dado que a temperatura inicial do café era de 90°C e que, após 30 minutos, sua temperatura caiu para 52°C, sendo a temperatura ambiente constante de 22°C:

a) Construa o modelo matemático do resfriamento utilizando a Lei de Newton, determinando a constante k;

b) Use o modelo para estimar a temperatura do café após 50 minutos;

c) Em quanto tempo a bebida atingirá 30°C, temperatura em que geralmente se considera que o café já esfriou totalmente para consumo?

Reoslução

Usamos a fórmula:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a) \, . \, e^{-kt}$$

Com os dados:

- $T_0 = 90$
- $T_a = 22$
- $T(30) = 52$

Substituímos:

$$52 = 22 + (90 - 22) \, . \, e^{-30k}$$

$$30 = 68 \, . \, e^{-30k}$$

$$0,4412 = \, . \, e^{-30k}$$

$$ln(0,4412) = \, . -30k$$

$$-0,8187 = \, . -30k$$

$$k \approx 0,0273$$

Estimar a temperatura após 50 minutos

$$T(50) = 22 + 68\,.\,e^{-0,0273\,.50}$$

$$T(50) \approx 39,34°C$$

Em quanto tempo o café estará a 30°C?

Vamos resolver:

$$30 = 22 + 68\,.\,e^{-0,0273\,.t}$$

$$8 = 68\,.\,e^{-0,0273\,.t}$$

$$0,1176 = e^{-0,0273\,.t}$$

Aplicamos log:

$$\ln(0,1176) = -0,0273t$$

$$t \approx 78,4 \text{ minutos}$$

Conclusão:

a) Modelo: $T(t) = 22 + 68\,.\,e^{-0,0273\,.t}$

b) Após 50 minutos, o café estará a aproximadamente 39,34°C.

c) O café atingirá 30°C após cerca de 78,4 minutos**.**

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente sequência didática foi objeto de validação na dissertação de mestrado de Freitas (2025), mediante sua aplicação a estudantes do 1º ano do Ensino Médio em uma instituição de ensino estadual localizada em Parauapebas, Pará. Os resultados obtidos indicaram um impacto significativo no processo de aprendizagem de função exponencial por meio da modelagem matemática, com foco na resolução de questões problemas como base em dados reais em áreas de aplicações desde conhecimento. Este produto educacional tem como objetivo contribuir para o aprimoramento do processo de ensino-aprendizagem função exponencial, oferecendo aos docentes da educação básica um recurso prático que fomenta reflexões pedagógicas e avaliativas. Acreditamos que a utilização desse material em sala de aula possa ampliar o interesse dos estudantes por novas experiências de aprendizagem, estimulando sua capacidade de construir conhecimento e argumentar sobre conceitos matemáticos, considerando a matemática como uma construção humana.

As reflexões por meio dos vídeos e texto antes de apresentarmos a situação problema, funcionam como uma espécie de preparação do terreno, despertando a curiosidade e chamando a atenção para o assunto que será abordado. O mínimo de intervenção por parte do professor faz com que o aluno seja o protagonista na construção do seu saber. O uso das tecnologias é uma facilidade pois faz o aluno ter uma visão ampla do comportamento do fenômeno de crescimento ou decrescimento exponencial a ser estudado. Devemos melhorar no sentido de criar mas atividades que envolvam outros fenômenos relacionados ao a aplicação do estudo de função exponencial como: Decaimento Radioativo; Meia Vida de algum material; Juros Compostos; Medição da Magnitude de Terremoto; Curvas de aprendizagem; Crescimento Populacional e etc.

A presente sequência didática tem como objetivo principal subsidiar professores e estudantes no processo de ensino e aprendizagem função exponencial. As atividades que compõem a sequência didática são projetadas para envolver os estudantes em um processo de aprendizagem ativa, mediante a conceituação de princípios e fórmulas relativos ao objeto de estudo. As atividades foram pensadas e formuladas de acordo com as etapas propostas pelos teóricos da modelagem matemática, para efetivação do ensino e aprendizagem de função exponencial.

Desta forma, a sequência de atividades apresentada neste produto educacional oferece aos profissionais que atuam no ensino de matemática uma ferramenta didática adicional para aborda este tema tão recorrente e cobrado desde concursos e vestibulares além do próprio ENEM. Bem como proporciona aos estudantes a oportunidade de aprofundar seus conhecimentos sobre o assunto. Para que eles consigam ter uma aprendizagem e conhecimento dos fenômenos exponencias que nos cercam. Adicionalmente, permitem justificar a fundamentação lógica dos modelos matemáticos, tal como apresentadas nos livros didáticos, contribuindo assim para uma compreensão mais profunda do conteúdo.

Referencias

BARBOSA, J.C. A Prática dos Alunos no Ambiente de Modelagem Matemática: pespectiva. O Esboço de um Framework. In: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A.D., ARAÚJO, J.L. (org.). Modelagem Matemática na Educação Brasileira: Pesquisas Práticas Educacionais. Recife: SBEM, 2007.

BARBOSA, J.C. Modelagem Matemática na sala de aula: O Esboço de um Framework. In: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A.D., ARAÚJO, J.L. (org.). Modelagem Matemática na Educação Brasileira: Pesquisas Práticas Educacionais. Recife: SBEM, 2007

BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. São Paulo, Editora Contexto, 2014.

BASSANEZI, R. C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BERTONE, Ana Maria Amarillo; BASSANEZI, Rodney Carlos; JAFELICE, Rosana Sueli da Motta. Modelagem Matemática. Uberlândia, MG: UFU, 2014.

BIEMBENGUT. M. S. Concepções e Tendências de Modelagem Matemática na Educação Básica. Revista Tópicos Educacionais v. 18 n. 1-2 (2012) - Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – PUCRS.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN N. Modelagem matemática no ensino. São Paulo: Contexto, 2003, 127p.

BIEMBENGUT, M. S. Modelagem matemática & implicações no ensino-aprendizagem de matemática. Blumenau, Furb. 1999

BIEMBENGUT, M. S.; Concepções e tendências de modelagem matemática na Educação Básica. Revista Tópicos Educacionais, vol. 18, núm. 1-2, pp. 118-138. Universidade Federal de Pernambuco, 2012.

BOYER, C. B. História da matemática. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br . Acesso em: 02 jul. 2022.

BURAK, D. A modelagem matemática e relações com a aprendizagem significativa. São Paulo, Primeira Edição, Editora CRV, 2010

BURAK, Dionísio; KLUBER, Tiago Emanuel. Modelagem Matemática: Uma perspectiva para a Educação Básica. Curitiba: CRV, 2008.

DANTAS, Emerson de Oliveira. A função exponencial. 2014. 59 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT)) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife. Disponível em: http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/6703. Acesso: 29/05/2023

DUVAL, Raymond. Registros de representação semótica e funcionamento cognitivo do pensamento matemático. In: MACHADO, S. D. (Org.). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-59.

EMER, Silvana. Modelagem matemática aliada à experimentação no ensino de funções exponenciais. 2020. Dissertação (Mestrado) – Curso de Ensino de Ciências Exatas, Universidade do Vale do Taquari - Univates, Lajeado, p. 105. 2020. Disponível em: http://hdl.handle.net/10737/2919. Acesso: 29/05/2023.

ESPINDOLA, Elisângela. Trabalho Documental do Professor de Matemática e Projeto de Ensino da Função Exponencial. XII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo, 16 jul, 2016. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6563_4105_ID.pdf. Acesso em: 10 jul. 2022.

FERREIRA, Rodrigo dos Santos. Função exponencial e GeoGebra: um estudo sobre abordagens e tarefas para o Ensino Médio. Dissertação – PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Oeste da Bahia. Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias - Barreiras, p. 153. 2021. Disponível em: https://ufob.edu.br/ensino/pos-graduacao/profmat/dissertacoes-e-teses/dissertacoes-e-teses-2021/mestrando-rodrigo-dos-santos-ferreira-defesa-08-06-2021-orientador-andre-pereira-da-costa.pdf. Acesso: 29/05/2023.

Alex Dias de Freitas Possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade do Estado do Pará (2012). Pós Graduação em Educação Inclusiva pelo Centro Universitário FAVENI. Atualmente é professor - Preparatório DIFERENCIAL, professor - Preparatório Impacto, Preparatório Prime Educacional e professor da Prefeitura Municipal de Parauapebas. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática. Mestrando em Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio pela Universidade do Estado do Pará.

Francisco Hermes Santos da Silva é Doutor em Educação na área de Educação Matemática pela UNICAMP (1999), Mestre em Educação na área de Psicologia Educacional pela Universidade Estadual de Campinas (1995). Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1993). Atualmente é docente sem vínculo empregatício da Universidade Estadual do Pará no Programa de pós-graduação em Mestrado profissional em Ensino de matemática ; tem vínculo como docente da Universidade Federal de Mato Grosso do Program de Pós-Graduação em educação em Ciências e Matemática - PPGECM, pólo UFPA do program em REDE de Formação da Amazônia - REAMEC. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Métodos e Técnicas de Ensino, Teorias de Aprendizagem, atuando principalmente nos temas: educação matemática, aprendizagem significativa e obstáculos didático.

Fábio José da Costa Alves possui Licenciatura em Matemática pela União das Escolas Superiores do Pará - UNESPa (1990), Licenciatura em Ciências de 1º Grau pela União das Escolas Superiores do Pará - UNESPa (1989), graduação em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Pará (1994), Mestrado em Geofísica pela Universidade Federal do Pará (1999), Doutorado em Geofísica pela Universidade Federal do Pará (2003) e Pós-Doutorado pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2017). Atualmente é Professor Adjunto IV da Universidade do Estado do Pará, Docente do Mestrado em Educação/UEPA e Docente do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática/UEPA. Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática/UEPA de 2019 à 2023. Líder do Grupo de Pesquisa em Ensino de Matemática e Tecnologias e Vice líder do Grupo de Pesquisa em Cognição e Educação Matemática da UEPA. Está atuando no desenvolvimento de software educativo para o ensino de matemática. Têm experiência em Educação Matemática e matemática aplicada. Tem experiência na área do ensino a distância. Tem experiência em Geociências, com ênfase em Geofísica Aplicada, nos temas: deconvolução, filtragem com Wiener, atenuação e supressão de múltiplas.

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem