Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio

ALEX DIAS DE FREITAS

O ENSINO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

PARAUAPEBAS/PA
2025

Alex Dias de Freitas

O ENSINO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para Ensino de Matemática no Nível Médio.
Orientador: Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva

PARAUAPEBAS/PA
2025

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) de acordo com o ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade do Estado do Pará

F862e Freitas, Alex Dias de
O Ensino de Função Exponencial por meio da Modelagem Matemática / Alex Dias de Freitas. — Parauapebas, 2025.
134 f.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva
Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática) - Universidade do Estado do Pará, Campus I - Centro de Ciências Sociais e Educação (CCSE), 2025.

1. Ensino de matemática. 2. Aprendizagem matemática. 3. Função exponencial. 4. Desmo. 5. Sequência didática. I. Título.

CDD 22.ed. 510.7

Elaborado por Priscila Melo CRB/2-1345

ALEX DIAS DE FREITAS

O ENSINO DE FUNÇÃO EXPONENCIAL POR MEIO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Gaduação em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva

Data de aprovação: 28/08/2025

Banca examinadora

Documento assinado digitalmente
gov.br FRANCISCO HERMES SANTOS DA SILVA
Data: 01/09/2025 11:23:18-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

_______________________________________. Orientador

Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva
Doutor em Educação – Universidade Estadual de Campinas / UNICAMP
Universidade Federal do Pará

Documento assinado digitalmente
gov.br FABIO JOSE DA COSTA ALVES
Data: 01/09/2025 15:34:46-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

_______________________________________. Examinador Interno

Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves
Doutor em Geofísica – Universidade Federal do Pará / UFPA
Universidade do Estado do Pará

Documento assinado digitalmente
gov.br SARA RAISSA SILVA RODRIGUES
Data: 28/08/2025 11:01:44-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

_______________________________________. Examinador Externo

Profa. Dra. Sara Raíssa Silva Rodrigues
Doutora em Matemática – Universidade de Brasília / UnB
Universidade do Estado do Pará

Belém – PA
2025

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao Criador de todas as coisas; aos meus pais, o Sr. Anadilson Vieira de Freitas e à Srª Maria Madalena Dias de Freitas, aos meus familiares e amigos; todos meus professores (em especial ao Dr. Fábio) que, ao longo desta caminhada acadêmica e profissional, me serviram de fonte de inspiração, e aos meus alunos, que me motivam sempre a evoluir como professor.

Alex Dias de Freitas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela força, sabedoria e serenidade concedidas ao longo desta caminhada, que me permitiram seguir firme diante dos desafios e alcançar mais esta conquista. Aos meus pais, pelo amor incondicional, pelos valores que me ensinaram e pelo apoio constante em todas as etapas da minha vida. Aos meus amigos, pela presença, compreensão e incentivo nos momentos de cansaço e incerteza, que tantas vezes me motivaram a continuar. Expresso também minha profunda gratidão aos professores que, com dedicação e paciência, contribuíram para minha formação acadêmica e pessoal, compartilhando conhecimentos e experiências valiosas. Agradeço, de modo especial, aos meus alunos, cuja curiosidade, participação e entusiasmo renovaram diariamente meu compromisso com o ensino e a aprendizagem. A todos que, de alguma forma, fizeram parte desta trajetória, deixo o meu sincero reconhecimento e gratidão.

“A matemática é muito importante, pois nos ensina a entender, compreender, analisar e descrever a realidade que nos cerca. E lembrando que todo mundo pode ser professor, mas ser professor não é para todo mundo.

Alex Dias (2025)

RESUMO

FREITAS, Alex Dias. **O Ensino de Função Exponencial por meio de Modelagem Matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2025.

Essa pesquisa tem como finalidade apresentar uma proposta metodológica que facilite o ensino de função exponencial, com resoluções de problemas em dados reais, para a construção de uma sequência didática por meio da Modelagem Matemática juntamente com o auxílio de tecnologias. Fundadamentada nos pressupostos teóricos de Bassanezi (2014), Barbosa (2004), Biembengut (2003), Burak e Klüber (2008); com o objetivo de investigar suas potencialidades na aprendizagem de função exponencial. O problema de pesquisa que norteia o nosso estudo é saber **quais as potencialidades de uma sequência didática construída com base na Modelagem Matemática para a aprendizagem de função exponencial.** O objetivo geral do nosso trabalho é **investigar as potencialidades de uma sequência didática construída com base na Modelagem Matemática para a aprendizagem de função exponencial**. Como recurso, propomos uma sequência didática para o ensino de função exponencial com a Modelagem Matemática, com ajuste da curva exponencial dos dados reais e com o auxílio do aplicativo Desmos. Para substanciar nosso trabalho, foi efetuado levantamento bibliográfico de pesquisas relacionadas ao ensino do referido tema, levando em consideração os trabalhos dos últimos 10 anos, além de uma pesquisa de opinião feita com 47 professores do estado do Pará (e outros estados) que atuam no Ensino Médio da rede pública estadual, mediante a aplicação de um questionário via Google Formus, a fim de identificarmos as dificuldades no processo de ensino-aprendizagem e avaliação de função exponencial. Nossa sequência foi aplicada com alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual no município de Parauapebas, no estado do Pará. Os resultados apontaram que a sequência didática por meio de modelagem mostrou-se uma alternativa eficaz para o ensino-aprendizagem de função exponencial. A sequência revelou que os alunos internalizaram aspectos essenciais da função exponencial, o que indica que a abordagem investigativa favoreceu a aprendizagem significativa. Como os próprios estudantes relataram, a metodologia facilitou a compreensão e o reconhecimento de padrões, e o uso de ferramentas tecnológicas para resolver problemas reais auxiliou a consolidar a aprendizagem. Portanto, concluímos que a Modelagem Matemática aliada ao uso de tecnologias pode ser uma estratégia eficaz para o ensino de funções exponenciais.

Palavras-chave: Ensino de matemática. Aprendizagem matemática. Função exponencial. Desmos. Sequência didática.

ABSTRACT

Teaching Exponential Functions by Mathematical Modeling. Dissertation (Professional Master's Degree in Mathematics Education) – State University of Pará, Belém, 2025.

This research is intended to present a methodological proposal that facilitates the teaching of exponential functions using mathematical modeling, with problem solving using real data, based on the application of a teaching sequence built on fundamentals of Mathematical Modeling with the aid of technology. The research problem that guides our study is to determine the potential of a didactic sequence built on Mathematical Modeling for learning exponential functions. The overall objective of this work is to investigate the potential of a didactic sequence built on Mathematical Modeling for learning exponential functions. As a resource, we propose a didactic sequence for teaching exponential functions using Mathematical Modeling with adjustments to the exponential curve of real data and with the assistance of the Desmos software. To substantiate our work, we conducted a bibliographic survey of research related to the teaching of this topic, taking into account investigations from the last 10 years, as well as an opinion survey involving 47 teachers from the state of Pará (and other states) who teach in public high schools, using a questionnaire via Google Forms, in order to identify difficulties in the teaching-learning process and assessment of exponential functions. Our sequence was applied to first-grade high school students at a public school in the municipality of Parauapebas, Pará, Brazil. Results showed that the didactic sequence using modeling proved to be an effective alternative for teaching and learning exponential functions. The sequence revealed that students internalized essential aspects of the exponential function, suggesting that the investigative approach promoted meaningful learning. As the students themselves reported, the methodology enabled them to understand and recognize patterns, and the use of technological tools to solve real problems helped consolidate their learning. We conclude that Mathematical Modeling combined with technologies can be an effective strategy for teaching exponential functions

Keywords: Mathematics teaching. Mathematical learning. Exponential function. Desmos. Didactic sequence.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

Sumário

1. INTRODUÇÃO

A aprendizagem matemática é de extrema importância para os alunos, pois ela desenvolve o raciocínio lógico, fundamental para as tomadas de decisões em quaisquer situações do cotidiano da vida da pessoa, sejam referentes aos processos de ensino-aprendizagem em uma escola ou dentro de um ambiente de trabalho. O saber matemático estimula o pensamento rápido e o surgimento de ideias e é essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas. De acordo com a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) (Brasil, 2018) o conhecimento matemático é necessário a todos os alunos da Educação Básica, por sua grande aplicação na sociedade contemporânea e pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades.

A relevância da Matemática vai além da sua condição de disciplina curricular, configurando-se como uma ciência capaz de promover transformações significativas na sociedade. Nesse sentido, é crucial que nossos alunos compreendam e apreciem a importância da Matemática enquanto agente de mudança social. Por isso, devemos vencer os obstáculos de aprendizagem que, porventura, os educandos apresentarão durante o estudo desta matéria. E este pensamento foi justamente uma das razões que nos motivou a enveredar no caminho desta pesquisa – na tentativa de contribuir com uma proposta de sequência didática que ajude a tornar a aprendizagem do estudo sobre função exponencial atraente, convidativa e significativa, de modo que os estudantes possam criar vínculos e conexões com a disciplina.

As dificuldades enfrentadas pelos alunos referentes ao processo de aprendizagem de conceitos matemáticos fundamentais são comuns. Nesse contexto, os professores precisam revisar e aprimorar suas abordagens pedagógicas, buscando estratégias inovadoras para promover a aprendizagem. Paralelamente, é imprescindível que os estudantes desenvolvam as habilidades necessárias para assimilar e dominar os conceitos matemáticos, relacionando-os à sua realidade cotidiana. Quando eles conseguem aplicar tais conhecimentos em situações práticas, vivenciando a Matemática concretamente, a retenção do conhecimento é mais eficaz e a aprendizagem torna-se mais significativa.

A aprendizagem é concebida como um processo bidirecional, onde o professor contribui com metodologias criativas e o aluno, por sua vez, apresenta uma predisposição para aprender. À luz da teoria de aprendizagem significativa de David

Ausubel[1] (1918-2008), Moreira (2012) destaca a existência de duas condições elementares para a ocorrência de aprendizagem significativa: 1) o material de aprendizagem deve ser potencialmente significativo; 2) o aprendiz deve apresentar uma predisposição para aprender. Para os autores, uma aprendizagem significativa somente ocorrerá no momento em que o estudante absorver uma nova ideia a partir de um conhecimento prévio, quando o professor propõe uma situação de ensino criativa e relevante. Desta forma, o educando atribui novos significados a seus conhecimentos prévios com base nas informações repassadas.

Foi com esta visão de aprendizagem significativa que escolhemos como objeto matemático de estudo a Função Exponencial para nossa pesquisa, por ser um assunto com grande interação no campo das diversas ciências, e com o qual podemos modelar situações práticas condizentes com a realidade dos discentes e aplicáveis ao seu cotidiano. Devido a sua grande aplicabilidade, ela torna-se conteúdo essencial no currículo matemático. Soma-se a isso o fato deste ser assunto recorrente nas provas do Enem e vestibulares, onde, geralmente, o nível de erro pela falta de domínio é alto. Isso nos motiva a encontrar estratégias didáticas que diminuam as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem deste objeto.

Ao longo de minha trajetória acadêmica, desde o Ensino Médio até a graduação em Matemática, busquei incessantemente atribuir significado ao conhecimento adquirido. Questões como “qual é a aplicabilidade prática desse conceito?”, “qual é o propósito de estudar isso?” e “em que contextos posso utilizar esse conhecimento?” eram recorrentes em minha mente de estudante. Agora, como professor, com uma perspectiva transformada e ampliada, procuro desenvolver práticas de ensino que minimizem os obstáculos enfrentados pelos meus alunos, promovendo uma aprendizagem mais significativa e contextualizada.

Uma justificativa pessoal para a escolha do tema deste trabalho, “O Ensino de Função Exponencial por Meio da Modelagem Matemática”, está intrinsicamente relacionada a minha inquietação, durante estes doze anos de vida de magistério, em tornar a aprendizagem dos conteúdos matemáticos ministrados em sala de aula o mais compreensíveis possível para meus estudantes, e fazer com que eles entendam

[1] David Ausubel (1918-2008) graduou-se em Psicologia e Medicina e doutorou-se em Psicologia do Desenvolvimento na Universidade de Columbia, onde foi professor no Teacher’s College por muitos anos; dedicou sua vida acadêmica ao desenvolvimento de uma visão cognitiva à Psicologia Educacional.

e deem significados àquilo que aprendem, e para que valorizem o conhecimento matemático e se desenvolvam, mostrando a importância de se estudar matemática até mesmo para o seu desenvolvimento como cidadãos.

Havia um sentimento de tristeza em planejar e ministrar aulas e, ao fim das mesmas, ficar com a sensação de que ninguém conseguiu aprender "nada". Não ocorria, na maioria das vezes, aprendizagem por parte dos alunos, o que me fez repensar minha postura como docente e buscar alternativas de ensino em cursos de pós-graduação e neste mestrado, onde tive contato com a Modelagem Matemática, enxergando nela uma possibilidade para o refinamento das minhas aulas, principalmente quanto ao conteúdo de funções, e mais especificamente da função exponencial, meu objeto de estudo.

A imersão nesta formação continuada moldava-me na busca de explicações mais acessíveis para os estudantes, no intuito de compreender as causas das dificuldades na aprendizagem da função exponencial. Passei a fazer uma triagem dos conteúdos enfatizando, *a priori*, aqueles com maior aplicabilidade e passíveis de conexões com a prática e a realidade do dia a dia dos alunos. Por vezes, gostava, e ainda gosto, de criar questões com base em informações de situações reais. Simulava modelos matemáticos considerando dados factuais ou fazia adaptações dos mesmos. Assim, percebia maior interesse e envolvimento dos educandos em aulas com essa dinâmica.

Nesse contexto, enquanto me aprofundava no curso, desenvolvi uma afinidade com a Modelagem Matemática como pressuposto teórico para esta pesquisa. A aplicação de modelos matemáticos, partindo de dados reais, permitiu-me explorar questões e propor situações-problema para introduzir o conteúdo de forma significativa. Essa abordagem está em consonância com os pressupostos teóricos da Modelagem Matemática, conforme destacado por Bassanezi (2014, p. 16), que define a Modelagem Matemática como "a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Reafirmando esta visão, temos teóricos como Biembengut (2009) e Skovsmose (2000) enfatizando que a estratégia de modelagem consiste na criação de modelos a partir da realidade, o que corrobora a abordagem adotada nesta pesquisa.

O estudo das funções é de grande valia pelas inúmeras possibilidades de modelagem de diversos fenômenos da nossa realidade. Em se tratando de função exponencial, os processos relacionados a juros compostos, reprodução celular, o contágio de doenças infecciosas e o crescimento de populações, por exemplo, podem ser modelados satisfatoriamente por meio dela. É por isso que a função exponencial é componente curricular obrigatório na Educação Básica, na etapa do ensino Médio.

Devido a esta aplicabilidade, é de extrema importância o domínio da função exponencial por parte dos alunos. Por isso, é necessário pesquisar as dificuldades de aprendizagem do ensino deste conteúdo. Não apenas saber os problemas de aprendizagem por parte dos alunos, mas também os obstáculos encontrados pelos professores ao ensinar e avaliar nossos discentes com relação a este tema.

Desta forma, com o objetivo de subsidiar nossa pesquisa com um arcabouço teórico sólido, fizemos uma revisão sistemática da literatura dos últimos dez anos para identificar as tendências e avanços recentes nas pesquisas sobre o ensino de função exponencial. Além disso, consultamos professores para investigar os problemas que eles encontram ao ensinarem esse conteúdo, e quais estratégias metodológicas utilizam com mais frequência. Para coletar esses dados, aplicamos um questionário *online* por meio do Google Forms, o que permitiu uma análise mais profunda das percepções e práticas docentes quanto ao ensino de função exponencial.

É de conhecimento que as habilidades e competências que os estudantes precisam desenvolver são muitas e exigem uma dedicação tanto dos professores quanto dos alunos para alcançá-las. E tal desenvolvimento, de acordo com o que a BNCC sugere com relação ao Ensino Médio, tem de ser centrado na construção de uma visão integrada da matemática aplicada à realidade, levando-se em conta as vivências cotidianas dos discentes em diferentes graus relativos a suas condições socioeconômicas, a avanços tecnológicos, mercado de trabalho, mídias sociais, entre outros (Brasil, 2018).

Um dado de avaliação sobre os conhecimentos e habilidades, entre eles os de matemática, pelo Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa)[2] (2022), aponta que 73% dos estudantes registram baixo desempenho em matemática. Esse dado reforça a atenção necessária ao ensino de matemática e evidencia um cenário

[2] O Pisa é um estudo comparativo internacional, realizado a cada três anos pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). O programa avalia o conhecimento e as habilidades dos estudantes na faixa etária de 15 anos (idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países) em matemática, leitura e ciências.

ainda mais desafiador para os professores.

Assim, vemos a potência que uma qualificada formação dos professores pode proporcionar na vida dos alunos, a fim de se propiciar o entusiasmo, interesse e disseminação de uma matemática viva, ativa, permanente, criativa e presente na realidade, onde o significado está no ser, existir e atuar em sociedade.

Nesse sentido, a matemática pode ser vivenciada em diversos contextos e lugares, considerando-se a diversidade de objetos matemáticos e suas inter-relações. Diante dessa multiplicidade, optamos por focar nossa pesquisa no estudo da função exponencial, tendo em vista nossa experiência docente no ensino desse tema e sua relevância na matemática e em outras áreas científicas.

O interesse nesse tema é justificado pelo seu potencial em modelar situações cotidianas, proporcionando uma abordagem prática e contextualizada da realidade. Isso permite aos alunos experiências significativas de reconhecimento da matemática em contextos reais e sua aplicabilidade na vida diária. Além disso, a relevância do tema é reforçada por sua presença em avaliações externas, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e vestibulares. No caso específico da função exponencial, processos como juros compostos, crescimento populacional, reprodução celular e propagação de doenças infecciosas podem ser efetivamente modelados por meio desse conceito matemático. Em decorrência disso, a função exponencial é um conteúdo obrigatório na Educação Básica, particularmente no Ensino Médio, devido à sua importância em descrever e analisar fenômenos naturais e sociais.

Por sua relevância, evidenciamos a necessidade de compreensão e domínio que os estudantes necessitam adquirir em relação a este assunto. Entender as dificuldades de aprendizagem e ensino representam um importante ponto de partida em busca de metodologias ativas para se amenizar estas deficiências no ensino.

Nesse ínterim, uma das habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que se relaciona diretamente com a função exponencial é a de “resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros” (Brasil, 2018, p. 528). Essa habilidade evidencia a relevância atribuída a esse objeto matemático no currículo escolar, sendo reconhecida sua importância na formação dos estudantes.

Com base nessas considerações, propomos desenvolver um estudo que vise subsidiar a elaboração de uma proposta de sequência didática para a aprendizagem de função exponencial, com o objetivo de promover uma aprendizagem mais contextualizada e significativa para os educandos. Pretendemos, assim, contribuir para o desenvolvimento da sua capacidade de reflexão, aspecto fundamental para a construção de conhecimentos matemáticos relevantes. Para alcançar esse objetivo, nossa pesquisa buscará responder à seguinte questão: **Quais são as potencialidades de uma sequência didática fundamentada na Modelagem Matemática para a aprendizagem de função exponencial?**

O objetivo geral desta pesquisa é investigar as potencialidades de uma sequência didática fundamentada na Modelagem Matemática para a aprendizagem de função exponencial. Especificamente, pretendemos desenvolver uma sequência didática que utilize a Modelagem Matemática para ensinar função exponencial com ajuste da curva exponencial dos dados reais e com o auxílio do aplicativo Desmos. Para alcançar esse objetivo, basearemos a investigação em estudos teóricos sobre Modelagem Matemática aplicada ao ensino de função exponencial, bem como em pesquisas sobre o uso de tecnologias no ensino de matemática. Os seguintes objetivos específicos serão perseguidos:

1) Investigar as dificuldades de ensino-aprendizagem do conteúdo relacionado à função exponencial a partir das publicações dos últimos 10 anos;

2) Investigar as dificuldades de ensino do conteúdo de função exponencial a partir da visão dos professores;

3) Construir uma sequência didática para aprendizagem do conteúdo de função exponencial a partir da Modelagem Matemática;

4) Identificar quais as potencialidades da Modelagem Matemática e do uso de tecnologias na aprendizagem do conteúdo de função exponencial;

5) Elaborar um produto educacional referente ao processo de ensino de função exponencial para utilização em sala de aula.

Dessa forma, pretendemos desenvolver uma sequência didática que possa ser utilizada por professores como recurso auxiliar na elaboração de aulas mais interativas e dinâmicas, oferecendo uma abordagem inovadora para a apresentação do conteúdo de função exponencial aos alunos. Além disso, pretendemos criar um produto educacional que possa ser aplicado em sala de aula, colaborando com a melhoria da prática docente e da aprendizagem discente.

O presente estudo está dividido em sete capítulos. Onde primeiramente na introdução, revelamos nossa questão de pesquisas e objetivos. No capítulo dois apresentaremos um levantamento bibliográfico, visando à análise dos avanços mais recentes concernentes ao ensino de funções exponenciais. Apresentando uma revisão da literatura para verificarmos o estado atual das pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem desse tópico nos últimos dez anos. Tal revisão nos permitirá estabelecer um panorama das investigações em curso, identificando o posicionamento e a originalidade de nossa proposta no que tange à contribuição para os estudos nesta área.

Uma análise das produções acadêmicas abrangendo as estratégias, metodologias, sequências didáticas e teorias de ensino empregadas. Um destaque especial foi conferido às abordagens que integram a Modelagem Matemática e o uso de tecnologias no ensino de funções exponenciais, estabelecendo uma comparação com a metodologia proposta neste trabalho, com vistas a identificar possíveis contribuições e inovações. Além disso, apresentaremos um diagnóstico do ensino de função exponencial sob a perspectiva dos professores, investigando as estratégias de ensino e metodologias usadas por eles e identificando as dificuldades no processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo.

No terceiro capítulo, abordaremos o objeto matemático em estudo, a função exponencial. No quarto capítulo, discutiremos o estudo da Modelagem Matemática e sua aplicação no ensino de matemática. No quinto capítulo, exploraremos o uso de tecnologias no ensino de matemática. No sexto capítulo, apresentaremos a metodologia empregada na pesquisa, incluindo a elaboração e aplicação da sequência didática. No sétimo capítulo, analisaremos os resultados da experimentação e, por fim, teremos as considerações finais, sintetizando os principais achados e contribuições da pesquisa.

Despertar nos estudantes o interesse pela matemática por meio de propostas que rompem com o ensino tradicional constitui uma das motivações centrais desta pesquisa. A construção de uma sequência didática voltada ao estudo da função exponencial visa proporcionar a eles a oportunidade de visualizar modelos exponenciais a partir de dados reais, com base nos pressupostos teóricos da Modelagem Matemática e de recursos tecnológicos. Essa abordagem favorece o desenvolvimento de uma aprendizagem mais contextualizada, dinâmica e significativa. Ao integrar teoria e prática, espera-se que os educandos compreendam melhor os conceitos envolvidos e percebam a aplicabilidade da matemática em situações concretas.

2. LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO

Neste capítulo, faremos um levantamento do que foi produzido referente ao ensino de função exponencial nos últimos 10 anos, com um recorte no tempo ao analisarmos as metodologias utilizadas no processo de ensino e aprendizagem deste assunto, como forma de nos apropriarmos das produções referentes ao nosso objeto matemático para fundamentar, embasar e orientar nossa pesquisa. Também apresentaremos, na subseção seguinte, um breve prognóstico (feito por meio de uma pesquisa) das tendências matemáticas de ensino sobre função exponencial que os docente do nosso estado estão utilizando, de maneira a compreender os obstáculos que encaram no processo de ensino deste tema.

2.1. Estudos Recentes na Área

É fundamental, em todo trabalho de pesquisa, realizar uma revisão dos estudos que foram produzidos até o momento presente, referente ao objeto em análise. É uma etapa necessária para sabermos os assuntos que estão sendo desenvolvidos, quais linhas de pesquisas não foram estudadas, ou, ainda, aquilo a ser ampliado. Esta fase é essencial para compararmos o nosso trabalho com os já realizados, e compreendermos as tendências utilizadas com relação ao nosso objeto de estudo, a fim que possamos substanciar e fundamentar nossa pesquisa. Sobre este tipo de pesquisa, de caráter bibliográfico, Ferreira (2002) afirma que o pesquisador é:

> Sustentado e movido [*sic*] pelo desafio de conhecer o já construído e produzido para depois buscar o que ainda não foi feito, de dedicar cada vez mais atenção a um número considerável de pesquisas realizadas de difícil acesso, de dar conta de determinado saber que se avoluma cada vez mais rapidamente e de divulgá-lo para a sociedade, todos esses pesquisadores trazem em comum a opção metodológica, por se constituírem pesquisas de levantamento e de avaliação do conhecimento sobre determinado tema (Ferreira, 2002, p. 259).

É importante ressaltar que a pesquisa bibliográfica do tipo estado da arte incorpora a leitura dos resumos como estratégia para estabelecer critérios de validade científica, conforme proposto por Ferreira (2002), durante a fase subsequente de desenvolvimento pelo pesquisador. Por conseguinte, a leitura dos resumos fornece subsídios para que o pesquisador possa obter informações, por intermédio da pesquisa bibliográfica, que se encontram presentes nas produções acadêmicas.

Nesse sentido, a leitura do resumo contribui, por exemplo, para desenvolver uma análise temática, pois possibilita que o pesquisador compreenda a predominância de temas ou assuntos desenvolvidos nas produções acadêmicas que foram identificadas em uma pesquisa bibliográfica. Essa análise é crucial, pois:

> Essa compreensão do ‘estado do conhecimento’ sobre um tema, em determinado momento, é necessária no processo de evolução da ciência, a fim de que se ordene periodicamente o conjunto de informações e resultados já obtidos, ordenação que permita a indicação das possibilidades de integração de diferentes perspectivas, aparentemente autônomas, a identificação de duplicações ou contradições e a determinação de lacunas ou vieses (Soares; Maciel, 2000, p. 9).

Podemos dizer que o pesquisador do estado da arte se vale da técnica da leitura de resumos para dinamizar as pesquisas, conseguindo uma abrangente quantidade de estudos para análise. Mata e Carvalho (2020) justificam a relevância deste método para quem se utilizada do estado da arte ao afirmarem:

> Nesse sentido, é possível avançar e inferir que a leitura dos resumos contribui para que o pesquisador do estado da arte caracterize e identifique os métodos de pesquisa e as correntes teóricas presentes na produção acadêmica. Isso porque essas informações, na maioria das vezes, encontram-se registradas nos resumos das produções acadêmicas (Mata; Carvalho, 2020, p. 22).

Portanto, esse tipo de abordagem, predominantemente de levantamento de dados, permite organizar diversas fontes bibliográficas, o que facilita e traz contribuições significativas para as futuras pesquisas científicas, pois o pesquisador poderá conhecer o que foi estudado anteriormente sobre seu objeto, desenvolver novas teorias, melhorar, ampliar ou aprofundar as que já existem. Cabe evidenciar que, nas análises feitas para compor nosso estudo, buscamos uma leitura mais aprofundada para além dos resumos, realizando uma inspeção no corpo das publicações, com o intuito de avaliar a metodologia utilizada, as características das amostras e a apreciação dos resultados.

Para o desenvolvimento do nosso estado da arte aplicado ao ensino de função exponencial, levamos em consideração tanto os trabalhos análogos a nossa proposta de intervenção quanto aqueles que, de forma geral, apenas têm identificação com nosso objeto de estudo. Utilizamos primordialmente o critério temporal em nossa busca para delimitarmos as produções realizadas nos últimos dez anos. Analisamos seus objetivos, como foi desenvolvida a aplicação da sequência didática, em que momento e local houve a aplicação, seus agentes, suas metodologias de investigação e os resultados que obtiveram, para servirem de suporte para nossa pesquisa.

Assim sendo, começamos nossas investigações de levantamento bibliográfico no dia 29/05/2023 utilizando o buscador www.google.com.br com as palavras-chave de busca “Dissertação” e “ensino de função exponencial”, considerando os trabalhos dos últimos 10 anos a contar de janeiro de 2013, e, com o tema relacionado a nossas palavras-chave de busca, considerando as 20 primeiras abas do buscador. Para dar mais subsídios a nossa pesquisa, no dia 30/05/2023, em vez de utilizarmos a chave “Dissertação”, utilizamos as palavras-chave– “Tese” e “ensino de função exponencial”, onde também consideramos como parâmetro os trabalhos dos últimos 10 anos a contar de janeiro de 2013, e, com o tema relacionado a nossa chave de busca, considerando as 20 primeiras abas do buscador.

Obtivemos como resultados vários trabalhos acadêmicos, entre artigos, TCC’s, dissertações e teses. Preocupamo-nos em selecionar as dissertações e teses de acordo com os seguintes critérios:

1) Trabalhos sobre função exponencial;

2) Trabalhos que versavam sobre o ensino de função exponencial;

3) Trabalhos que falavam sobre o ensino de função exponencial e funções logarítmicas;

4) Trabalhos que abordavam o ensino de função exponencial por meio de Modelagem Matemática;

5) Trabalhos que envolviam uso de tecnologia no ensino de função exponencial.

Para a organização dos dados, foi criado um quadro no programa de computador Word com os seguintes parâmetros: Ano da publicação, Tipo de publicação (tese ou dissertação), Título da Publicação e Nomes dos Autores. As publicações foram numeradas conforme apareceram na ordem do buscador. Assim, a dissertação que aparece com o número 1 logo à frente indica que foi a primeira dissertação que surgiu nossa busca, apesar do quadro estar organizado na ordem crescente do ano das publicações.

No total, foram analisadas 22 dissertações e 03 teses. A chave de busca “Tese” encontrou poucas teses e repetiu bastante as dissertações que já haviam sido catalogadas conforme os critérios estabelecidos. A parti das pesquisas, montamos o seguinte quadro com as obras levantadas:

Quadro 1. Publicações de 2013 a 2023.

ANO	TIPO	TÍTULO	AUTORES
2013	Dissertação	Uma abordagem diferente para o ensino da função exponencial no Ensino Médio	Michel Angelucci
2014	Dissertação	A função exponencial	Emerson de Oliveira Dantas
2014	Dissertação	Análise da contextualização da função exponencial e da função logarítmica nos livros didáticos do ensino médio	Michelle Noberta Araújo de Oliveira
2014	Dissertação	As funções exponencial e logarítmica: uma abordagem para o professor do ensino básico	Cícero Dos Santos Alves
2014	Dissertação	O ensino das funções exponenciais e logarítmicas com a utilização da planilha Excel na forma de aplicativo	Vicente Ferrer Trajano Bezerra.
2015	Dissertação	Contexto e aplicações das funções exponenciais no ensino médio – Uma Abordagem Interdisciplinar	Ricardo José Aguiar Silva
2015	Dissertação	Um Estudo sobre a Função Exponencial	Rafael Henrique de Oliveira
2015	Dissertação	Metodologia de ensino do conceito de função exponencial à luz da teoria das situações didáticas	Emilene Funez Rozanski
2015	Dissertação	Função exponencial: definição, caracterização e aplicação	Anderson Oliveira Gadioli
2016	Dissertação	Investigando a Modelagem Matemática no ensino de funções afins e exponenciais	Ricardo Nogueira Viana Narcizo
2016	Tese	Introdução ao conceito de função: uma proposta com o *software* Simcalc no ensino fundamental	Robson dos Santos Ferreira
2018	Dissertação	Uma estratégia didática para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas	Cássia Gonçalves D’Avila
2018	Dissertação	O Ensino da Função Exponencial por Meio de Atividades	José Augusto Freitas de Menezes
2018	Dissertação	Sequência Didática para o Ensino de Função Exponencial	Marconni Augusto Pock de Oliveira
2018	Dissertação	O Ensino de Função Exponencial para Além das Aparência	Adnielson Lima Da Silva
2019	Dissertação	Exponencial, matrizes: uma reflexão para o ensino médio	Nelúcio Martins de Oliveira
2019	Dissertação	Aproximação entre teoria e prática: a Modelagem Matemática como método facilitador para o ensino de funções exponenciais	Francisco Maciel Dos Santos Silva

2019	Tese	Percurso de Estudo e Pesquisa no Conceito de Função: Analisando o Processo de Ensino e Aprendizagem e as Influências na Formação do Professor de Matemática	Rochelande Felipe Rodrigues
2020	Dissertação	A abstração da função exponencial de interações entre engrenagens	Cristhian Pires Da Costa
2020	Dissertação	Modelagem Matemática aliada à experimentação no ensino de funções exponenciais	Silvana Emer
2020	Tese	Analiticidade da função exponencial generalizada para argumentos complexos e suas implicações	Alexandre Henrique de Martine
2021	Dissertação	Função exponencial: uma abordagem guiada pela BNCC	Atílio Vieira Costa
2021	Dissertação	Resolução de Problemas como Estratégia para a Aprendizagem de Função Exponencial	Angela Maria Schramm De Azevedo
2021	Dissertação	As funções exponenciais e suas aplicações no modelo epidêmico	Olegario Kleiton Costa Penha
2021	Dissertação	O ensino aprendizagem de equação exponencial auxiliado pelo Geogebra	Luís Cláudio Pinto Costa

Fonte: Google (2023).

A finalidade foi buscar estudos relacionados ao objeto matemático sobre o ensino de função exponencial, independentemente de haver ou não familiaridade com nossa proposta de intervenção. Nossa ideia (proposta) é a elaboração de uma sequência didática para o ensino de função exponencial por meio da Modelagem Matemática, valendo-nos de dados reais e de determinadas situações-problema, encontrando o modelo exponencial que solucione estas situações e fazendo o ajuste da curva exponencial do gráfico dentro do modelo encontrado, com auxílio do aplicativo Desmos.

Conforme Emer (2020), existem várias situações naturais e sociais onde podemos extrair dados reais de situações, como

> desintegração radioativa, reprodução de bactérias, crescimento populacional, epidemias, escala Richter, a meia-vida de substâncias, mensuração de pressão atmosférica, capitalização e juros compostos, resfriamento de corpos, velocidade de pouso de um paraquedas de asas, entre outras (Emer, 2020, p. 27).

Como vimos, vários fenômenos são explicados por meio da função exponencial, o que a torna um campo fértil para o ensino. Portanto, ter uma visão das pesquisas produzidas é essencial para apresentarmos uma proposta que venha a somar no ensino deste objeto. Portanto, passaremos para a análise das produções feitas em nosso levantamento bibliográfico.

Na obra de Angelucci (2013), intitulada “Uma abordagem diferente para o ensino da função exponencial no Ensino Médio”, o objetivo era propor uma abordagem diferenciada para o ensino da função exponencial. Tal abordagem diferenciada consistia na aplicação de folhas de atividades interligadas, por meio da resolução de problemas cuidadosamente elaborados sobre os pilares da teoria das situações didáticas, desenvolvida por Guy Brousseau, juntamente com a metodologia da engenharia didática, com base nas ideias de Michéle Artigue. As atividades foram aplicadas em uma turma de 1ª série do Ensino Médio da E. E. Prof. João Caetano da Rocha, no município de Itápolis-SP, e os resultados obtidos nas análises mostraram que essa abordagem proporcionou um aprendizado significativo, quando comparado com o ensino tradicional.

A pesquisa “A função exponencial”, de Dantas (2014), teve o objetivo do estudo da função exponencial com domínio real, com base na equação funcional de Cauchy $f(x+y) = f(x).f(y)$. Para chegar a esta equação, foi realizado um estudo das definições e propriedades da potência de expoente de número real, considerando-se particularmente o caso onde o expoente é um número irracional. Também foi sugerida uma proposta pedagógica para o ensino de potenciação, caracterização da função exponencial e da equação funcional linear de Cauchy por meio de uma sequência de aulas, subdividida em três blocos de aulas voltadas ao primeiro ano do Ensino Médio, contemplando estes assuntos.

Já na pesquisa “Análise da contextualização da função exponencial e da função logarítmica nos livros didáticos do ensino médio”, de Oliveira (2014), o objetivo geral foi contribuir com o ensino-aprendizagem das funções exponenciais e logarítmicas, por meio de boas contextualizações encontradas em livros didáticos de matemática do Ensino Médio. Foram analisadas questões de 10 livros didáticos, classificando-as como boas ou inadequadas quanto à contextualização e com base nas teorias de Elon Lima. A conclusão foi que os livros, em sua maioria, têm tentado utilizar questões contextualizadas para motivar o estudo das funções exponenciais e logarítmicas, porém ainda ocorrem alguns equívocos no momento de elaborar e selecionar estas questões.

No estudo “As funções exponencial e logarítmica: uma abordagem para o professor do ensino básico”, de Alvez (2014), foi buscada uma abordagem visando diminuir as dificuldades que surgem quando tentamos ensinar potências com expoente irracional. Foi analisada a apresentação do tema função exponencial em quatro livros do ensino médio, a saber, Dante (2010), Iezzi (2010), Paiva (2009) e Smole e Diniz (2010). Houve também como sugestão, como base para uma abordagem satisfatória, as recomendações da Revista do Professor de Matemática (RMP). A conclusão foi que uma boa abordagem para o ensino de função tem de ter fatores como exemplo motivador, explicação do significado de expoente com número irracional, de crescimento, taxa de crescimento e decrescimento exponencial, além de mostrar as aplicações destas funções.

Na obra “O ensino das funções exponenciais e logarítmicas com a utilização da planilha Excel na forma de aplicativo”, de Bezerra (2014), o objetivo foi saber se o uso da planilha Excel como aplicativo pode tornar mais eficiente e significativo o aprendizado das funções exponenciais e logarítmicas. Para este fim, foi sugerida uma sequência diádica fundamentada na engenharia didática, na interdisciplinaridade e na informática na educação formal. A sequência foi aplicada a um grupo de oito alunos do 2º ano do curso técnico em Agropecuária do IFRO, *campus* Colorado do Oeste. Foi obtido êxito na experimentação, pois os educandos puderam vislumbrar maneiras mais significativas de aprenderem logaritmo, e ela também possibilitou a reflexão sobre a prática docente.

O trabalho de Silva (2015), intitulado “Contexto e aplicações das funções exponenciais no ensino médio - Uma Abordagem Interdisciplinar”, defende, com seus fundamentos e abordagens baseados na interdisciplinaridade, na contextualização e nas orientações do Parâmetros Curriculares Nacionais, que o estudo das funções exponenciais deve ser introduzido não somente através de uma sólida fundamentação teórica, mas também a partir de relações e problemas que tenham significado real para os alunos, utilizando as mais variadas e possíveis interações com as outras áreas do conhecimento. Desta forma, uma sequência de oito atividades didáticas foi proposta com as aplicações da função exponencial, inclusive em outras áreas do conhecimento, para emprego em sala de aula, abrangendo tanto as disciplinas escolares básicas quanto alguns ramos das ciências em geral, e apontando para o caráter inter e transdisciplinar que esses conceitos assumem.

Na pesquisa de Oliviera (2015), com o título “Um Estudo sobre a Função

Exponencial", o objetivo foi a realização de um estudo detalhado sobre a função exponencial, analisando-se as principais propriedades desta função e a construção de seus gráficos. A pesquisa foi direcionada aos professores e estudantes de matemática ou áreas de exatas. Por fim, foi sugerida uma proposta de trabalho para os docentes de matemática do Ensino Médio, com algumas aplicações importantes da função exponencial, como o estudo do carbono-14. Com essas aplicações, procurou-se dar uma sugestão de aula para os docentes de matemática do Ensino Médio que trabalharão com a função exponencial, com o intuito principal de que os professores consigam motivar seus alunos a aprender mais sobre o assunto.

Já na obra de Rozanski (2015), "Metodologia de ensino do conceito de função exponencial à luz da teoria das situações didáticas", foi apresentada uma proposta de metodologia que favorecesse o desenvolvimento de habilidades interpretativas e criativas de potencial significado para os estudantes, com uma sequência didática baseada na teoria das situações didáticas de Guy Brousseau e nos registros de representações semióticas de Duval. A sequência foi aplicada a discentes do 1º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual José de Anchieta, da Cidade de Dois Vizinhos, no estado doParaná. Para o desenvolvimento da pesquisa, fez-se uso da ferramenta metodológica engenharia didática de Artigue. Resultados promissores foram alcançados, uma vez que os alunos conseguiram, sem imposição, desenvolver e compreender a parte conceitual, as relações de dependência e suas características, além de serem capazes de resolver e criar problemas sobre o objeto matemático.

No estudo "Função exponencial: definição, caracterização e aplicação", de Gadioli (2015), o objetivo foi propor uma metodologia para que os educadores possam, de forma coerente, dar significado ao estudo da função exponencial, utilizando-a como ferramenta central na resolução problemas diversos. O trabalho foi embasado nos estudos de Lima (2010), Dante (2014), Eves (2004) e Iezzi (2011). A metodologia de aplicação consistiu na realização de um minicurso para 18 alunos do curso técnico integrado ao Ensino Médio de Administração do IFES, *campus* Cariacica, cujo resultado foi a melhoria significativa na aprendizagem por parte dos educandos.

O trabalho de Narcizo (2016), com o título "Investigando a modelagem matemática no ensino de funções afins e exponenciais", teve como objetivo verificar se a Modelagem Matemática pode contribuir ou colaborar com o ensino-aprendizagem de função afim e, principalmente, a função exponencial. Com base nas teorias de

Modelagem Matemática de Biembengut (2009) e Bassanezi (2011) para a criação de um modelo matemático e na criticidade de Burak (2012), aplicou-se uma sequência didática em uma turma de 2º ano do Ensino Médio do Instituto Federal de Brasília, *campus* Gama. O autor obteve resultados positivos e negativos quanto à utilização da modelagem no ensino, contudo, no geral, concluiu satisfatoriamente que o emprego de Modelagem Matemática no ensino das funções pode auxiliar bastante a aprendizagem, porém não substitui totalmente as aulas tradicionais.

Na tese de Ferreira (2016), intitulada “Introdução ao conceito de função: uma proposta com o *software* SimCalc no ensino fundamental”, o objetivo foi discutir os obstáculos epistemológicos apontados por Sierpinska que surgem ao se introduzir ideias relacionadas ao conceito de função com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental por meio de um coletivo pensante, e quais são as potencialidades do *software* SimCalc, enquanto integrante desse coletivo, que colaboram com a superação dos obstáculos evidenciados. Com base no conceito de Obstáculo Epistemológico nas perspectivas de Bachelard, Brousseau e Sierpinska (1992), foi proposta uma experimentação didática desenvolvida por meio de nove atividades distribuídas em seis encontros com oito alunos de 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal da cidade de São Roque, São Paulo. O principal resultado foi a constituição de um recurso pedagógico favorável à introdução do conceito de função no Ensino Fundamental e, consequentemente, à sua construção ao longo dos anos posteriores.

Com o tema “Uma estratégia didática para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas”, D’Avila (2018) teve por objetivo colaborar e possibilitar uma melhor aprendizagem dos estudantes no ensino de funções exponenciais e logarítmicas, por meio de uma série de atividades fundamentadas nas metodologias das situações-problema, na tecnologia da informação e comunicação, na História da Matemática e com materiais concreto. As atividades foram aplicadas a alunos do 1º ano do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS). Os resultados sugerem que os recursos didáticos utilizados são cativantes e capazes de aproximar o mundo matemático dos discentes.

Por outro lado, Menezes (2018), com o tema “O Ensino Da Função Exponencial Por Meio De Atividades”, teve o objetivo de analisar as potencialidades de uma sequência didática ao ensino de função exponencial na Educação Básica por meio do ensino da matemática com atividades proposto por Sá (2009) e com base nas teorias da engenharia diádica de Artigue (1996). Para esta finalidade, foi feito um experimento com 40 alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola estadual da cidade de Belém do Pará. Os resultados indicaram que a sequência didática é possível e válida, pois os educandos alcançaram o aprendizado com eficácia e aprenderam a analisar as propriedades que geralmente são anunciadas.

Na pesquisa de Oliveira (2018), intitulada “Sequência didática para o ensino de função exponencial”, o objetivo foi buscar descobrir quais as potencialidades de uma sequência didática criada especificamente para o ensino de função exponencial a partir da resolução de problemas e estruturada sob a visão das unidades articuladas de reconstrução conceitual. Para isso, foi feito um experimento didático por meio de uma sequência com base na teoria da engenharia didática de Artigue (1988) e das UARC’s de Cabral (2017). Ela foi aplicada com uma turma de 1° ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de ensino no município de Belém do Pará. Os resultados apontaram que os alunos participantes do experimento manifestaram indícios de aprendizagem registrados durante o processo, e passaram a ter um bom entendimento dos conceitos e propriedades referentes ao tema.

Por sua vez, Silva (2018), em seu estudo “O Ensino de função exponencial para além das aparências”, procurou responder à seguinte questão de pesquisa: “De que modo a situação desencadeadora de aprendizagem possibilita ou cria condições para superar as aparências de outras situações no ensino de função exponencial, para que o aluno se aproprie do conceito de forma teórica?” Foi apresentada uma metodologia de ensino fundamentada nas seguintes teorias: histórico-cultural, de Vygotsky (1984), atividade orientadora de ensino, de Moura (2010). e a teoria da atividade, de Leontiev (1983). A metodologia foi aplicada a professores na “Oficina Pedagógica de Matemática” (OPM) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Os principais resultados foram: os nexos internos reconhecidos por meio do movimento histórico e lógico da função exponencial; a elaboração de indicadores de análise de situações de livros didáticos; e a transformação dos sentidos atribuídos pelos professores a situações no ensino de função exponencial.

Na pesquisa “Exponencial, matrizes: uma reflexão para o ensino médio”, de Oliveira (2019), o objetivo principal foi apresentar uma contribuição para o ensino-aprendizagem das funções exponenciais e matrizes, explorando as contextualizações encontradas em livros didáticos de matemática do ensino. Com base no que propõem os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino fundamental e Médio e as

Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica, sua metodologia consistiu em analisar oito livros do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) oferecidos nas escolas estaduais de Minas Gerais, de modo a saber quais possuem contextualizações adequadas (situações verossímeis que tenham ligação com o mundo real) e que proporcionam significado aos conteúdos, motivação e estímulo aos alunos na aprendizagem dos assuntos. A conclusão foi que se utiliza mais contextualizações no conteúdo de funções exponenciais do que no de matrizes, devido às diversidades de situações de aplicabilidade destas funções. E não foi possível encontrar nos livros sequer um que fizesse a conexão entre os dois conteúdos.

Na obra de Silva (2019), “Aproximação entre teoria e prática: a modelagem matemática como método facilitador para o ensino de funções exponenciais”, o objetivo foi analisar o uso da Modelagem Matemática como alternativa para melhoria do ensino de função exponencial. Para tanto, foi feito um experimento didático com uma sequência construída com base nas teorias de modelagem de autores como Bassanezi (2014), Barbosa (2004), Borssoi (2004), Biembengut e Hein (2009), Macedo (2013), Malagutti (2013), Braz (2013) e D’Ambrósio (1998). Ela foi aplicada em uma turma de 1º ano da Escola Estadual Aristófanes Fernades, de Mossoró, Rio Grande do Norte. Como resultado, a pesquisa verificou que o uso da metodologia da Modelagem Matemática é pode contribuir para o aprimoramento do ensino de funções exponenciais.

Na tese de Rodrigues (2019), com o título “Percurso de Estudo e Pesquisa no Conceito de Função: Analisando o Processo de Ensino e Aprendizagem e as Influências na Formação do Professor de Matemática”, o objetivo era analisar os contratos didáticos estabelecidos, alguns elementos cognitivos e as organizações praxeológicas construídas e/ou reconstruídas em uma aplicação do Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) na disciplina Funções I da Licenciatura em Matemática, no processo de compreensão e aplicação do conceito de função. Com base na Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 1986) e na Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 1996, 2007), foi utilizado o PEP como dispositivo didático e aplicado como metodologia para o ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos nas licenciaturas em Matemática e na formação inicial e continuada do professor de matemática. Como resultados, foi observado que o PEP promoveu uma mudança na praxeologia dos alunos e na do professor, ao mesmo tempo que influenciou as práticas de ensino utilizadas pelo docente, promovendo sua formação profissional.

Costa (2020), em sua pesquisa intitulada “A abstração da função exponencial de interações entre engrenagens”, procurou responder se seria possível abstrair a função exponencial de interações entre engrenagens LEGO e, com estas interações, construir um câmbio de marchas que pudesse ser objeto de estudo em uma sequência didática para auxílio no ensino da função exponencial. Uma sequência didática foi aplicada com alunos do 1ª ano do Ensino Médio, embasada pela teoria de Zabala (1998), que possui como alicerces as concepções construtivistas de Piaget (1978) sobre o processo cognitivo da construção do conhecimento. Com o resultado positivo desta pesquisa, a conclusão foi que é possível vislumbrar o grande arsenal matemático existente nas interações entre engrenagens, o que, quando associado à Robótica Educacional, permite trabalhar o desenvolvimento integral dos alunos.

No estudo de Emer (2020), “Modelagem matemática aliada à experimentação no ensino de funções exponenciais”, buscou-se responder à seguinte questão: Como a Modelagem Matemática, desenvolvida por meio de experimentações, pode contribuir no ensino da função exponencial com alunos no 1º ano do Ensino Médio? Para isso, foi realizado um experimento didático, por meio de uma sequência fundamentada nas teorias de Bassanezi (2014), Barbosa (2004) e Biembengut (2009), sobre Modelagem Matemática. Ele foi aplicado com alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola particular do Vale do Taquari-RS. A conclusão foi que a Modelagem Matemática, aliada à experimentação, contribuiu significativamente para o ensino da função exponencial, pois desenvolveu competências e despertou o interesse dos alunos para os caminhos da pesquisa.

A tese de Martine (2020), “Analiticidade da função exponencial generalizada para argumentos complexos e suas implicações”, basead nas teorias de distribuições de Laurent Schwartz, matemático francês ganhador da medalha Fields em 1950 e divulgador das ideias que usavam generalização, procurou responder às seguintes questões: Quando uma generalização é consistente? Quais critérios podem ser utilizados para definir o que é uma boa generalização? O autor, em sua tese, apresentou uma extensão para a função exponencial generalizada em argumentos complexos. Como resultado, mostrou vantagens na generalização da transformada de Fourier, de funções trigonométricas, hiperbólicas e log-periódicas, proporcionando um ganho significativo nas demais generalizações.

Em sua dissertação intitulada “Função exponencial: uma abordagem guiada pela BNCC", Costa (2021) estudou a BNCC e propôs uma experimentação didática fundamentada nas diretrizes da mesma. Foi sugerida uma série com três sequências didáticas, com questões dispostas de forma ordenada, estruturada e articulada com o objetivo de possibilitar aos estudantes a construção do conhecimento acerca dos conteúdos baseadas nas competências e habilidades que a BNCC orienta para o ensino de função exponencial. Não houve a oportunidade de aplicação da sequência, pois a mesma foi elaborada na época da pandemia de Covid-19.

Por sua vez, Azevedo (2021), em sua dissertação "Resolução de Problemas como Estratégia para a Aprendizagem de Função Exponencial", buscou investigar como a resolução de problemas pode ajudar nas aulas de matemática e, particularmente, no conteúdo programático de função exponencial, sugerindo a metodologia de resolução de problemas como estratégia de aprendizagem significativa para o estudo deste conteúdo. Valendo-se das ideias de Dante (1998) e Polya (1978), o autor propôs uma sequência didática como uma série de atividades baseado na resolução de problemas para o ensino da função exponencial. Esta sequência seria testada em uma Unidade Escolar de Ensino Médio da rede pública de Cruz das Almas, Bahia, Porém, devido à pandemia da Covid-19, não houve a possibilidade de aplicar as situações-problema e, assim, não foi possível gerar dados concretos sobre a eficácia e a eficiência da proposta.

Penha (2021), em sua pesquisa "As funções exponenciais e suas aplicações no modelo epidêmico", analisou as diversas aplicações das funções exponenciais no âmbito interdisciplinar e os seus descritores segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A Modelagem Matemática foi ferramenta essencial para a resolução de problemas que afetam a humanidade, assim como a epidemiologia matemática. O autor utilizou o modelo SIR (Suscetíveis, Infectados e Recuperados) para o estudo da pandemia da Covid-19 nas cidades de São Luís, São José de Ribamar, Paço do Lumiar e Raposa, municípios do estado do Maranhão que compõem a região metropolitana da ilha de São Luís. Foi realizado um comparativo do avanço da doença nesses locais, com simulações que auxiliaram na compreensão da curva de crescimento ou diminuição da pandemia. Dessa forma, a partir desses resultados e análise pôde-se projetar uma realidade futura para cada cidade em estudo.

Por fim, a obra de Costa (2021), intitulada "O ensino-aprendizagem de equação exponencial auxiliado pelo Geogebra", buscou investigar se uma sequência didática auxiliada pelo uso do programa Geogebra potencializa a aprendizagem de equação exponencial. Para isso, foi criado um experimento didático com uma sequência construída com base nas teorias de Registros de Representações Semióticas de Durval (2009) e na Gênese Instrumental de Rabardel (1995), e aplicada com estudantes do 1º ano de uma escola pública estadual em Belém do Pará por meio da plataforma Google Meet. Chegou-se a um resultado satisfatório, pois os estudantes manusearam bem o programa e souberam usá-lo na resolução da equação exponencial.

De acordo com nossos parâmetros de busca estabelecidos, as leituras dos estudos neste levantamento bibliográfico forneceram um panorama das pesquisas que realizadas nos últimos dez anos com relação ao nosso objeto matemático de estudo. Procuramos avaliar todos os trabalhos conforme foram aparecendo. Eles foram tabelados em ordem cronológica para termos uma noção das tendências metodológicas que estavam sendo utilizadas, ou as que estavam em maior visibilidade com o passar do tempo. Procuramos averiguar principalmente os resultados das aplicações das sequências didáticas para que pudéssemos compará-las e nortear nossa própria pesquisa, analisando as que mais se aproximam ou se assemelham com nosso referido estudo.

Com base nas apreciações feitas em nossa busca pelas tendências metodológicas para o ensino de função exponencial, e conforme observado nos resumos para melhor entendermos e situarmos nossa proposta de intervenção no panorama das pesquisas, dividimos em quatro grandes eixos temáticos nosso levantamento bibliográfico, a saber:

01 - Pesquisas com abordagem ou sequências metodológicas diferenciadas (tais como ensino por atividade, resolução de problemas, engenharia didática). Obtivemos quatorze obras neste eixo;

02 - Estudos que usam da contextualização e interdisciplinaridade. Obtivemos três pesquisas neste eixo;

03 - Pesquisas baseadas na utilização de aplicativos. Obtivemos quatro pesquisas neste eixo;

04 - Trabalhos que utilizam modelagem, e obtivemos quatro neste eixo.

Este levantamento foi importantíssimo para termos esta visão das principais propostas metodológicas que estão sendo utilizadas, e sabermos onde a nossa pode contribuir para o ensino da função exponencial. Nas análises feitas, observamos que a utilização da modelagem é recurso valioso que contribui para a aprendizagem significativa dos alunos. Os trabalhos que utilizaram recursos tecnológicos também se mostraram uma alternativa viável, conforme mostraram os resultados. Tivemos quatro obras que aplicaram a modelagem e quatro que empregaram tecnologia como elemento principal estruturador de seus estudos. Poucas vezes tivemos o entrelace destas duas metodologias para o ensino da função exponencial. Encontramos somente uma sequência didática com uso da modelagem e com auxílio de aplicativos tecnológicos.

Nossa proposta de intervenção será fundamentada justamente nas teorias da Modelagem Matemática aliada ao uso de tecnologia aplicada ao ensino do conteúdo de função exponencial para potencializar a aprendizagem. A proposta deste trabalho consiste na elaboração de uma sequência didática voltada ao ensino da função exponencial, fundamentada na abordagem da Modelagem Matemática. Para isso, serão utilizados dados reais extraídos de situações-problema específicas, com o objetivo de identificar o modelo exponencial mais adequado à representação do fenômeno em questão. A etapa seguinte compreende o ajuste da curva exponencial ao gráfico correspondente, com auxílio do aplicativo Desmos, que contribuirá para a visualização e análise do comportamento da função no contexto modelado.

Dessa forma, alicerçados nas contribuições teóricas sobre Modelagem Matemática apresentadas por Bassanezi (2014), Barbosa (2004), Biembengut (2003) e Burak e Klüber (2008), propomos a construção de uma sequência didática que possa atuar como recurso didático-pedagógico no processo de ensino. Tal proposta visa oferecer aos docentes uma ferramenta metodológica complementar, e aos estudantes, uma experiência de aprendizagem mais significativa, contextualizada e potencialmente transformadora.

2.2. Diagnóstico dos Professores

Com o intuito de investigar como está sendo ensinado o conteúdo de função exponencial nas escolas públicas do estado do Pará, realizamos uma consulta pública com os professores da rede estadual do Ensino Médio do Pará mediante a aplicação de um questionário via Google Forms, contendo perguntas sobre a formação (tanto inicial quanto continuada) dos professores, as abordagens pedagógicas aplicadas em sala de aula (ou em outros ambientes) para ensinar funções exponenciais e os desafios enfrentados pelos educadores no que diz respeito ao entendimento dos alunos sobre o conteúdo, bem como as dificuldades pessoais dos docentes ao lidarem com esse tema.

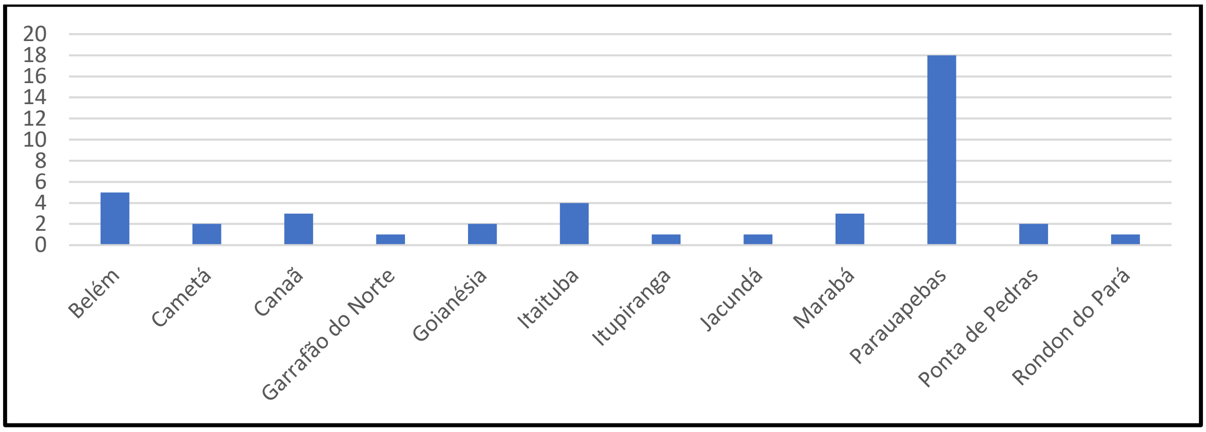
A motivação para o desenvolvimento deste diagnóstico surge na proposta do curso da disciplina de Currículo e Avaliação no Ensino de Matemática, do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade Estadual do Pará (UEPA), onde pesquisamos os componentes curriculares e métodos de avaliação para termos o arcabouço teórico que nos auxiliou e nos preparou na análise diagnóstica das dificuldades de aprendizagem da função exponencial.

A proposta envolvia a elaboração de um questionário e um quadro descritivo de conteúdos sobre o nosso objeto matemático. Tal instrumento de pesquisa contém perguntas sobre o perfil dos docentes, as práticas pedagógicas adotadas por cada um deles e sobre o processo de ensino, aprendizagem e avaliação por eles utilizados. Trata-se de um trabalho de campo por meio de um questionário diagnóstico elaborado no Google Forms para uma amostra de 47 docentes, sendo que 4 destes eram de outros estados e 43 eram do Pará e atuam no Ensino Médio da rede estadual. O questionário também visou investigar quais as dificuldades na aprendizagem dos seus educandos com relação ao conteúdo de função exponencial. Desta forma, temos um panorama de como eles estão trabalhando o conteúdo, e também sabemos como os alunos estão aprendendo o assunto.

Por fim, as informações coletadas pelo preenchimento por parte dos professores participantes permitiu-nos gerar quadros e gráficos com dados suficientes para uma análise de resultados e, com isso, termos uma visão dos problemas encarados pelos estudantes na aprendizagem da função exponencial de acordo com os docentes. Optamos por escolher apenas algumas questões que julgamos mais relevantes em relação ao foco da pesquisa, as quais nos fornecem um vislumbre do perfil dos professores e de suas percepções acerca das metodologias utilizadas e seus obstáculos no ensino da função exponencial.

Passaremos, agora, para a análise dos resultados observados nos gráficos gerados pela pesquisa de campo via Google Forms (2022). Essa pesquisa de campo resultou em uma amostra de 47 docentes que responderam ao questionário, dos quais 43 eram educadores do 1º ano das escolas públicas do Pará, público-alvo da nossa pesquisa. Todos aceitaram participar do estudo de livre e espontânea vontade. Vale ressaltar que destes 43 professores do nosso estado, 41% (18 entrevistados) são da cidade de Parauapebas. Os restantes foram das cidades de Belém (5 participantes), Cametá (2 participantes), Canaã (3 participantes), Garrafão do Norte (1 participante), Goianésia (2 participantes), Itaituba (4 participantes), Itupiranga (1 participante), Jacundá (1 participante), Marabá (3 participantes), Ponta de Pedras (2 participantes) e Rondon do Pará (1 participante). Isso nos permitiu obter uma amostra bem diversificada envolvendo várias regiões do estado do Pará, com quatorze cidades participantes, conforme sistematizado no Gráfico 1.

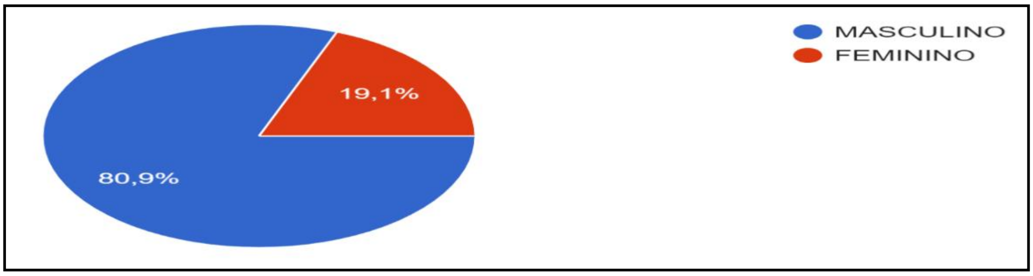
Gráfico 1. Contagem dos participantes dos municípios paraenses.



Fonte: Pesquisa de campo (2022).

A amostra forneceu indicativo da diferença muito grande entre a quantidade de homens e mulheres que lecionam matemática no Ensino Médio. Observamos que 80,8% (38 entrevistados) são do gênero masculino e 19,2 % (9 entrevistados) são do gênero feminino. Essa porcentagem chama a atenção. De acordo com o Resumo Técnico Censo Escolar da Educação Básica 2021, existia um total de 516.484 professores atuando no Ensino Médio em 2021, sendo que 57,7% eram do sexo feminino e 42,3% do sexo masculino. Apesar da maioria ser de mulheres, esses números não se repetem em relação aos profissionais de matemática, onde se observa que a maioria é composta de homens, conforme também apontou nosso estudo diagnóstico no Gráfico 2. Cabe-nos uma reflexão: qual o principal motivo do menor número de mulheres dentro da área de matemática? Quais fatores contribuem para isso? É um fator cultural, uma questão biológica, social, histórica ou uma combinação de todas essas alternativas?

Gráfico 2. Gênero dos participantes.

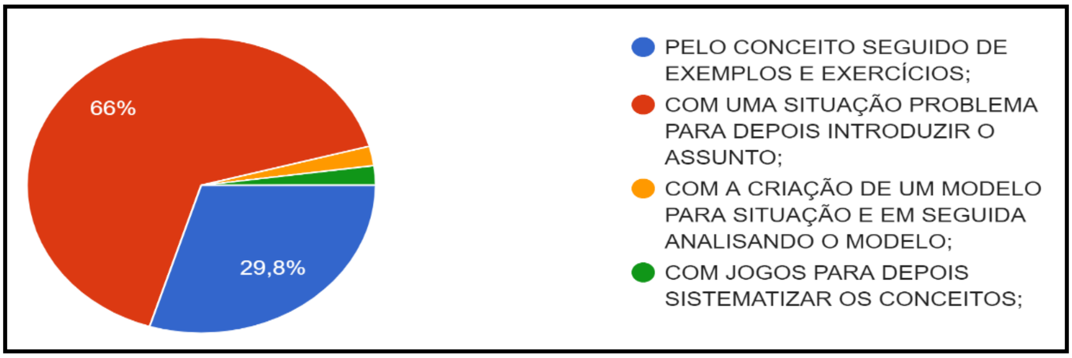


Fonte: Pesquisa de campo, Google Forms (2022).

Passada esta etapa de identificação da nossa amostra, o questionário serviu para diagnosticarmos as práticas e metodologias de ensino aplicadas pelos professores em sala de aula. Etapa importante, pois contribui diretamente com nossa pesquisa. Primeiramente, averiguamos de quais maneiras os docentes costumam iniciar suas aulas de matemática. O Gráfico 3 apontou que 66% (31 entrevistados) costumam iniciar as aulas com uma situação-problema, enquanto 29,8% (14 pesquisados) preferem apresentar o conceito seguido de exemplos e exercícios. Essas duas maneiras são as predominantes, mostrando que, de acordo com a porcentagem da primeira estratégia, os professores estão em sintonia com que os currículos orientam. Esta estratégia metodológica de introduzir conteúdo por meio de situação-problema é preconizada e fundamentada na BNCC:

> Outro aspecto a ser considerado é que a aprendizagem de Álgebra, como também aquelas relacionadas a Números, Geometria e Probabilidade e estatística, podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional dos alunos, tendo em vista que eles precisam ser capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações-problema, apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos e vice-versa (Brasil, 2018, p. 271).

Gráfico 3. Forma de como os docentes iniciam as aulas.



Fonte: Pesquisa de campo, Google Forms (2022).

É importante o emprego do método de se iniciar a aula por meio de uma situação-problema, como indica a BNCC. É gratificante vermos que o diagnóstico apontou ser esta umas das táticas predominantes dos nossos professores. Entretanto, chamou-nos a atenção, no gráfico, de que a utilização da criação de modelos como estratégia para o ensino seja pouquíssimo explorada, assim como o uso de jogos. Portanto, justifica-se a importância da nossa proposta de sequência didática com base nos fundamentos da modelagem, para contribuir com as formas de se ensinar o conteúdo de função exponencial.

Quando perguntados do que mais os docentes sentiam falta na hora de ministrar suas aulas de matemática, dois fatores se destacaram. O primeiro foi a falta de recursos didáticos e pedagógicos para implementação das aulas, apontado por 44,7% (21 docentes), e metodologias diferenciadas de ensino, afirmado por 12,5%. É possível que essas dificuldades se deem pela falta de infraestrutura de algumas escolas do nosso estado e pela pouca oferta de formação continuada ou cursos de capacitação por parte da gestão escolar. Ainda com relação ao segundo caso, também pode ser pelo desinteresse/comodismo do profissional em se capacitar. A respeito desse tema, Leite (2007) sugere que uma das razões para esse índice pode ser a falta de formação adequada e preparo suficiente durante o processo inicial de formação dos profissionais docentes. Tal perspectiva é corroborada por Tedesco (citado por Leite, 2007) ao afirmar que

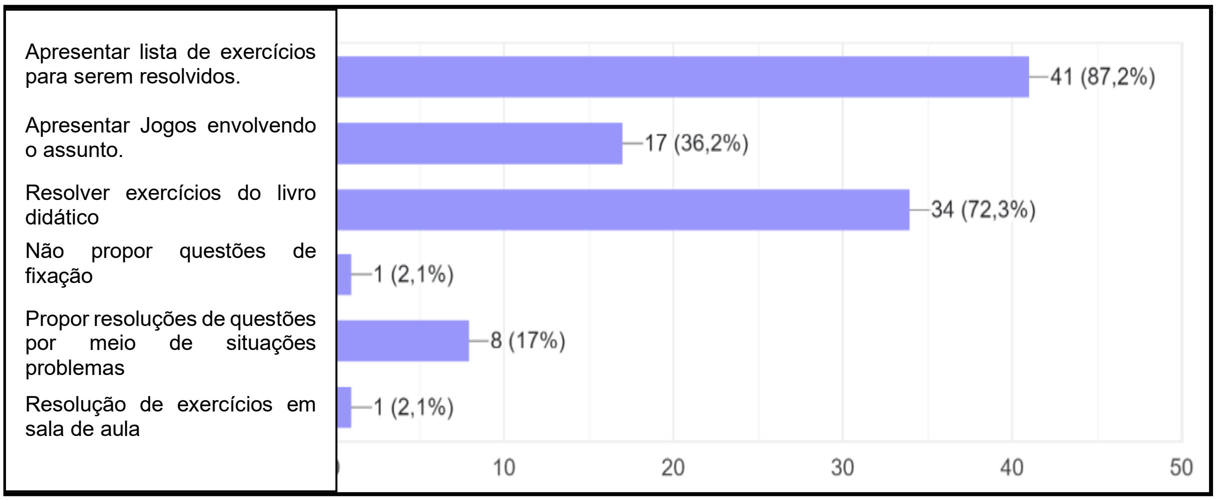
> a formação inicial do professor se apresenta de forma insuficiente e aligeirada, não sendo capaz de suprir os desafios da formação docente diante do novo contexto que exige dos profissionais uma série de capacidades e habilidades (pensamento sistemático, criatividade, solidariedade, habilidade de resolver problemas, trabalhos em equipe, dentre outros) que não estavam presentes nos cursos de formação (Tedesco *apud* Leite, 2007, p. 4).

A utilização de metodologias diferenciadas de ensino é crucial para melhorar a eficácia do processo de aprendizagem na sala de aula. Diversificar as estratégias pedagógicas pode engajar os alunos de maneira mais efetiva, promover uma compreensão mais profunda dos conceitos e atender às diversas necessidades de aprendizado. Metodologias são grandes diretrizes que orientam os processos de ensino e aprendizagem e que se concretizam em estratégias, abordagens e técnicas concretas, específicas e diferenciadas (Bacich; Moran, 2018, p. 41). Por isso, nossa proposta tem por finalidade trazer a Modelagem Matemática como estratégica metodológica diferenciada para a sala de aula, pois acreditamos que, devido a suas características, ela pode acarretar uma aprendizagem significativa do conteúdo sobre função exponencial.

Quando indagados sobre as estratégias de que os professores se valem para fixar o conteúdo ministrado, as mais utilizadas são: lista de exercícios para serem resolvidos (87,2%); resolução de exercícios do livro didático (72,3%), como visto no Gráfico 4. Percebemos que os docentes encontram desafios ao criarem métodos alternativos para solidificar o conteúdo. Adicionalmente, apresentar listas de exercícios pré-fabricadas, sem a oportunidade de se promover debates, emerge como uma opção mais conveniente e menos exigente para os educadores.

Seguir atrelado unicamente ao modelo tradicional de ensino dos conteúdos matemático não condiz com a realidade da docência moderna e atual. O professor deve continuamente procurar formas de aperfeiçoar sua prática: atualizando-se, aprendendo e aplicando as novas tendencias metodológicas de ensino matemático. Nesse contexto, Grando (2000, p. 13) alerta sobre as críticas que Piaget tece quanto à forma com que o processo de ensino-aprendizagem da matemática é desencadeado nas escolas tradicionais. Dentre muitas das críticas, ele destaca a passividade dos alunos, o acúmulo de informações, a pouca experimentação, os altos índices de reprovação em matemática e a grande dificuldade dos educandos em estabelecer relações lógicas nas aulas de matemática.

Gráfico 4. Estratégias de fixação do conteúdo.



Fonte: Pesquisa de campo, Google Forms (2022).

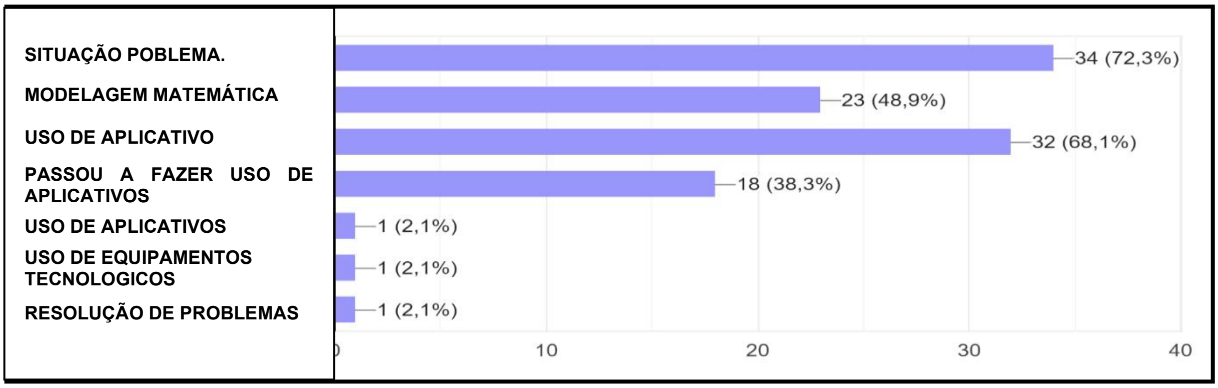
Isso não implica que os exercícios devem ser excluídos, pois são essenciais para fortalecer habilidades fundamentais. No entanto, deve-se evitar abordar os exercícios unicamente como aplicações de fórmulas pré-definidas. Em outras palavras, não se trata apenas de ler, extrair informações e aplicar habilidades adquiridas em aulas anteriores, sem demandar qualquer reflexão sobre o processo realizado.

Podemos observar, ainda no Gráfico 4, que a proposta de fixação do conteúdo por meio da resolução de questões com uso de *softwares* é pouco recorrente. Então, podemos concluir que as novas tecnologias para auxiliarem o ensino e aprendizagem do conteúdo de função exponencial quase não foram utilizadas pelos professores do diagnóstico. E, em nosso mundo globalizado e tecnológico, o educador não pode renunciar ao uso de tecnologias em sua prática docente. Ele deve conhecer e empregar *softwares* de matemática em suas aulas.

Assim, é essencial que o professor esteja capacitado para a incorporação de tecnologias (Pocinho; Gaspar, 2012), mantendo uma pesquisa contínua sobre metodologias de ensino alinhadas a essa nova realidade e aprimorando seus conhecimentos por meio da efetiva utilização das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC's) em sua formação inicial e continuada. Este pensamento está de acordo com nossa pesquisa, pois faremos uso das tecnologias para a construção da sequência didática envolvendo a modelagem: por intermédio do aplicativo Desmos trabalharemos com ajustes da curva exponencial dos dados reais para o ensino de função exponencial.

Por último, a pergunta do diagnóstico de extrema importância para nossa pesquisa era: quais recursos metodológicos os professores utilizavam para trabalhar o conteúdo de função exponencial com seus alunos?

Gráfico 05. Recursos metodológicos.



Fonte: Pesquisa de campo, Google Forms (2022).

De acordo com o gráfico acima, o recurso metodológico mais empregado é a situação-problema. Observamos que a Modelagem Matemática foi o terceiro recurso metodológico mais utilizado, enquanto o uso de tecnologias ficou na quarta posição, de acordo com a porcentagem acumulada do gráfico. Isso ressalta a importância de pesquisarmos maneiras para levarmos esses recursos metodológicos para a sala de aula, pois são recursos valiosos que contribuem para a melhoria do processo de ensino dos conteúdos matemáticos.

Enquanto profissionais da educação, é importante que estejamos continuamente munidos de recursos metodológicos capazes de fortalecer e enriquecer nossa prática docente. Cada situação enfrentada em sala de aula demanda uma análise criteriosa, de modo que a escolha adequada de estratégias potencialize os resultados de ensino. Algumas metodologias, quando aplicadas a determinados conteúdos ou perfis de turmas, demonstram-se mais eficazes do que outras. Assim, quanto maior o repertório didático do professor, maiores as possibilidades de êxito no processo educativo. Nesse sentido, o diagnóstico realizado evidenciou a necessidade de se ampliar e diversificar os recursos pedagógicos, com vistas a aprimorar o ensino da função exponencial. Com base nessa constatação, propomos uma sequência didática fundamentada na Modelagem Matemática e articulada ao uso de tecnologias digitais, como forma de promover uma aprendizagem mais contextualizada e significativa.

3. A FUNÇÃO EXPONENCIAL

A função exponencial destaca-se como uma ferramenta matemática fundamental para compreender processos de aumento e diminuição de fenômenos em diversas áreas, como física, biologia, economia e finanças. Este capítulo explorará brevemente sua história, as definições formais, as representações gráficas, suas propriedades e aplicações no cotidiano.

Historicamente, o estudo da função exponencial tem raízes antigas, ligadas à análise do crescimento de populações, ao cálculo de juros compostos e à descrição de fenômenos naturais. Seus primórdios podem ser reconhecidos desde os trabalhos de John Napier, o criador dos logaritmos, até os trabalhos de Jacob Bernoulli, que investigou o crescimento contínuo ao estudar juros compostos. A formulação mais precisa da função exponencial como a conhecemos hoje ocorreu a partir do século XVIII, com destaque para Leonhard Euler, que definiu a base dos logaritmos naturais como o número irracional $e \approx 2{,}718$.

Conforme apontado por Boyer (1996), o estudo das funções exponenciais e logarítmicas foi essencial para o desenvolvimento do cálculo infinitesimal e para a criação de modelos para inúmeros eventos naturais e econômicos. Essa função firmou-se como uma das mais importantes na matemática aplicada, sendo crucial para analisar a dinâmica de populações, a radioatividade, a propagação de epidemias, a economia e outros campos.

A função exponencial ganhou ainda mais importância com o surgimento do cálculo infinitesimal e da modelagem de sistemas dinâmicos. Desde então, tem sido amplamente utilizada para representar crescimentos populacionais, decaimento de materiais radioativos e a evolução de capitais financeiros ao longo do tempo.

Um dos principais atributos da função exponencial é sua capacidade de apresentar crescimento ou decrescimento rápido de forma mais intensa do que nas funções lineares. Diversos fenômenos naturais e sociais seguem esse padrão, como a desintegração de elementos radioativos, a multiplicação de bactérias, o aumento populacional, a propagação de epidemias, a escala Richter, o conceito de meia-vida de átomos, a medição da pressão atmosférica, além de situações econômicas como a capitalização e os juros compostos, o resfriamento de corpos e até a velocidade de descida de um paraquedas com asa. A seguir, são apresentados exemplos de aplicações das funções exponenciais em distintas áreas do conhecimento, com base nas obras de Lima (2023) e Emer (2020).

Um Modelo Matemático de Crescimento Populacional

Imagine que você está estudando como uma população cresce ao longo do tempo. No final do século XVIII, Thomas Malthus criou um modelo para descrever esse crescimento. Ele chegou a uma equação simples, mas poderosa:

$$\boldsymbol{N(t) = No \,.\, e^{(rt)}}$$

Onde:

- $\boldsymbol{N(t)}$ é o tamanho da população em um momento específico (t);

- $\boldsymbol{N_0}$ é o tamanho da população inicial (quando t = 0);

- $\boldsymbol{r}$ é o potencial biótico, uma constante que varia de acordo com a espécie;

- $\boldsymbol{e}$ é a base do logaritmo natural (aproximadamente 2,718).

Isto significa que cada espécie tem seu próprio ritmo de crescimento, representado pelo potencial biótico (r). Se não houver fatores que impeçam o crescimento, a população pode aumentar de forma exponencial. Isso significa que o crescimento pode ser muito rápido!

Essa equação pode ser usada para calcular o crescimento de qualquer população, desde que você saiba o percentual de reprodução da espécie. É uma ferramenta valiosa para entender como as populações mudam ao longo do tempo.

Curvas de Aprendizagem: Melhorando a Eficiência

Visualize que você está aprendendo uma nova habilidade ou tarefa. No início, você pode cometer erros e demorar mais tempo para realizar a tarefa. Mas, à medida que ganha experiência, sua eficiência melhora! Isso é o que as curvas de aprendizagem mostram.

As curvas de aprendizagem são uma maneira de medir como a eficiência de um trabalhador melhora ao longo do tempo. Elas podem ser representadas por um modelo exponencial:

$$\boldsymbol{T(n) = T_1 \,.\, r^{n-1}}$$

Onde:

- $\boldsymbol{T(n)}$ é o tempo necessário para completar a tarefa na n-ésima repetição;
- $\boldsymbol{T_1}$ é o tempo da primeira execução;

- r é a **taxa de retenção**;
- n é o número da repetição (a partir de 1).

Que ajuda a prever custos futuros e níveis de produção. As curvas de aprendizagem são úteis em muitas áreas, como:

- Programação de tarefas produtivas;

- Redução de perdas devido à inexperiência;

- Previsão de custos e produção.

Ao estudar esses fenômenos, podemos identificar padrões e tendências. Isso nos permite:

- Analisar grandezas e obter dados;

- Perceber representações e modelos que simplificam a compreensão do fenômeno;

- Tomar decisões informadas.

Matemática Financeira: O Poder dos Juros Compostos

Agora pense que você está planejando suas finanças e precisa tomar decisões importantes sobre como gerenciar seu dinheiro. A matemática financeira é uma ferramenta essencial para isso, e os juros compostos são um conceito fundamental.

Os juros compostos são um tipo de regime de capitalização que faz com que o valor do seu dinheiro cresça de forma exponencial ao longo do tempo. Isso significa que os juros são calculados não somente sobre o capital inicial, como também sobre os juros acumulados anteriormente.

A fórmula para calcular o montante (o valor total do capital inicial mais os juros acumulados) é:

$$\boldsymbol{M = C \,.\, (1 + \; i)^{t}}$$

Onde:

- $\boldsymbol{M}$ é o montante;

- $\boldsymbol{C}$ é o capital inicial;

- $\boldsymbol{i}$ é a taxa de juros (em porcentagem) por unidade de tempo;

- $\boldsymbol{t}$ é o tempo em unidade de tempo.

Os juros compostos são importantes porque permitem que você:

- Calcule o valor futuro de um investimento ou empréstimo;
- Compare diferentes opções de investimento ou empréstimo;
- Tome decisões informadas sobre como gerenciar seu dinheiro.

Os juros compostos são empregados em muitas situações do cotidiano, como: investimento em poupança ou fundos; empréstimos bancários ou financiamentos e planejamento de aposentadoria ou investimentos de longo prazo. É um poderoso instrumento da matemática financeira, utilizado no planejamento e nos cáculos de crescimento acumulados de investimentos ao longo do tempo. Os bancos usam fazem uso deste conceito matemático para aumentarem seus rendimentos de aplicações financeiras, calcular o valor total de dívidas, empréstimos e financiamentos, fazendo com que os juros incidam sobre os juros já acumulados e elevando o montante a ser pago ao longo do tempo.

Terremotos: Entendendo o Fenômeno

Os terremotos são eventos naturais que ocorrem quando há uma liberação repentina de energia na crosta terrestre, causando vibrações que se propagam pela superfície da Terra. Isso pode ser resultado de:

- Movimentos de placas tectônicas: quando as placas rochosas se deslocam e liberam energia;
- Atividade vulcânica: quando os vulcões entram em erupção e liberam energia;
- Deslocamentos de gases: quando gases, como o metano, se deslocam no interior do planeta e causam vibrações.

A magnitude de um terremoto é medida por meio de um sismógrafo, um aparelho desenvolvido por Charles Richter e Beno Gutenberg em 1935. A escala Richter é usada para medir a magnitude dos terremotos em graus. A magnitude de um terremoto determina o quão destrutivo ele pode ser. Quanto maior a magnitude, mais graves podem ser as consequências, incluindo danos a edifícios e infraestrutura, perda de vidas humanas, além de deslizamentos de terra e outros desastres secundários.

Por isso, a medição da magnitude dos terremotos é fundamental para entender o potencial de destruição e tomar medidas para mitigar os efeitos. Isso ajuda a salvar vidas e reduzir os prejuízos causados por esses eventos naturais.

Resfriamento de Corpos: Entendendo a Lei de Newton

A lei do Resfriamento de Newton é um conceito fundamental da física que descreve como os corpos perdem calor para o ambiente. Essa lei é amplamente aplicada em diversas áreas, desde a medicina até a culinária.

De acordo com esta lei, a taxa de resfriamento de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o ambiente. Isso significa que:

- Quanto maior a diferença de temperatura, mais rápido o corpo perderá calor;
- Quanto menor a diferença de temperatura, mais lento o corpo perderá calor.

A lei do Resfriamento de Newton tem muitas aplicações práticas, incluindo:

- Estimativa da hora da morte: a lei pode ser usada para estimar a hora da morte de uma vítima, medindo a temperatura do corpo e comparando-a com a temperatura ambiente;
- Preparação de alimentos: a lei pode ser usada para determinar o tempo necessário para que um alimento, como o café, atinja a temperatura ideal para o consumo.

Além da diferença de temperatura, outros fatores podem influenciar o resfriamento de um corpo, incluindo:

- Condução de calor: a transferência de calor por contato direto entre o corpo e o ambiente;
- Convecção: a transferência de calor por meio do movimento de fluidos, como o ar ou a água;
- Radiação: a transferência de calor por meio de ondas eletromagnéticas.

A lei do Resfriamento de Newton é fundamental para entender como os corpos interagem com o ambiente e como podemos controlar a temperatura em diversas situações. Isso tem implicações importantes em áreas como a medicina, a engenharia e a culinária.

Decaimento Radioativo e Meia-Vida: Entendendo o Conceito

O decaimento radioativo é um processo natural em que substâncias radioativas perdem sua radioatividade ao longo do tempo. Isso ocorre porque os átomos instáveis emitem radiação e transformam-se em átomos mais estáveis. A meia-vida é um conceito fundamental para entender esse processo.

A meia-vida é o tempo necessário para que a quantidade de uma substância radioativa se reduza à metade. Isso significa que, após cada período de meia-vida, a quantidade de material radioativo restante é metade da quantidade inicial.

O cálculo da meia-vida é feito por uma função exponencial que relaciona a quantidade de material radioativo restante com o tempo decorrido. A fórmula é:

$$\boldsymbol{Q(t) = Qo \,.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{p}}}$$

Onde:

- $Q(t)$ é a quantidade de material radioativo restante após o tempo t;

- Q_0 é a quantidade inicial de material radioativo;

- t é o tempo decorrido;

- p é o valor da meia-vida do material considerado;

Aplicação na Arqueologia

A meia-vida é essencial para a datação radioativa, um método para estimar a idade de materiais antigos, como fósseis ou vestígios de civilizações. O carbono-14 (C-14) é um dos elementos mais utilizados para essa finalidade.

O C-14 possui uma meia-vida de aproximadamente 5.730 anos, o que significa que, após esse período, metade da quantidade inicial de C-14 terá se desintegrado. Isso permite que os cientistas estimem a idade de materiais orgânicos com base na quantidade de C-14 restante.

A meia-vida também é importante na medicina, especialmente quando se trata de medicamentos. O tempo de meia-vida de um medicamento é o tempo necessário para que sua concentração no organismo se reduza à metade. Isso ajuda a determinar a duração do efeito farmacológico e a frequência de administração do medicamento.

A meia-vida é um conceito fundamental em diversas áreas, incluindo física, química, arqueologia e medicina. Ela ajuda a entender o decaimento radioativo, a estimar a idade de materiais e a determinar a duração do efeito de medicamentos.

Ao examinar as aplicações previamente mencionadas, constatamos que esses fenômenos exibem uma propensão exponencial em múltiplos domínios. Com base nesses exemplos, torna-se viável analisar e identificar variáveis, coletar dados e informações e, consequentemente, discernir uma tendência, uma representação e um modelo que simplifique e facilite a compreensão do fenômeno em questão. Considerando que esses fenômenos podem ser efetivamente modelados por meio da função exponencial, procederemos, na próxima seção, à apresentação de sua definição, elementos constitutivos, características fundamentais, propriedades e representações gráficas e algébricas.

Definição da Função Exponencial

Matematicamente, uma função exponencial é qualquer função na forma $\boldsymbol{f(x) = a^x}$, em que $\boldsymbol{a > 0}$ e $\boldsymbol{a \neq 1}$, e x pertence ao conjunto dos números reais. A base *a* determina o comportamento da função: quando $\boldsymbol{a > 1}$, a função é crescente; quando $\boldsymbol{0 < a < 1}$, é decrescente. O domínio da função exponencial é $\mathbb{R}$ e sua imagen é o intervalo $(\boldsymbol{0}, \infty)$.

A função exponencial mais conhecida é $\boldsymbol{f(x) = e^x}$, onde e ≈ 2,718281828... é a base dos logaritmos naturais. Essa função possui propriedades analíticas e algébricas que a tornam relevante em diversas áreas da Matemática, especialmente no cálculo diferencial e integral.

Para Lima (2023), uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $\boldsymbol{f(x) = a^x \; ou \; y = a^x}$, , com $\boldsymbol{a > 0}$ e $\boldsymbol{a \neq 1}$, é denominada função exponencial e possui as seguintes propriedades, para quaisquer x, y ∈ R:

1. – $\boldsymbol{a^x \cdot a^y = a^{(x+y)}}$**;**

2. – $\boldsymbol{a^1 = a}$;

3. – $\boldsymbol{x < y \Rightarrow a^x < a^y}$, quando $\boldsymbol{a > 1 \; e \; x < y \Rightarrow a^y < a^x}$**,** quando $\boldsymbol{0 < a < 1}$.

As restrições, $\boldsymbol{a > 0}$ e $\boldsymbol{a \neq 1}$, dadas na definição são necessárias, pois, caso contrário, não seria possível caracterizar uma função exponencial.

- Se $\boldsymbol{a = 1}$, $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ é uma função constante. Exemplo: $\boldsymbol{f(x) = 1^x = 1}$, para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$.

- Se $\boldsymbol{a = 0}$**,** $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ não é definida em $\mathbb{R}$. Exemplo: $\boldsymbol{f(5) = 0^5 \cdot 0^5}$ não é definido em $\mathbb{R}$.

- Se $\boldsymbol{a < 0}$, $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ não é definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Exemplo: Para $\boldsymbol{a = -4}$ e $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$, temos: $\boldsymbol{f\left(\frac{1}{4}\right) = (-4)^{\frac{1}{4}} = \sqrt{(-4)}} \notin \mathbb{R}$.

Propriedades da Função Exponencial

As principais propriedades algébricas da função exponencial são:

$-\ \boldsymbol{a^0} = \boldsymbol{1}$, para todo $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$;

- $\boldsymbol{a^x} .\ \boldsymbol{a^y} = \boldsymbol{a^{(x+y)}}$;

- $(\boldsymbol{a^x})^{\boldsymbol{y}} = (\boldsymbol{a})^{(\boldsymbol{x}\,.\,\boldsymbol{y})}$;

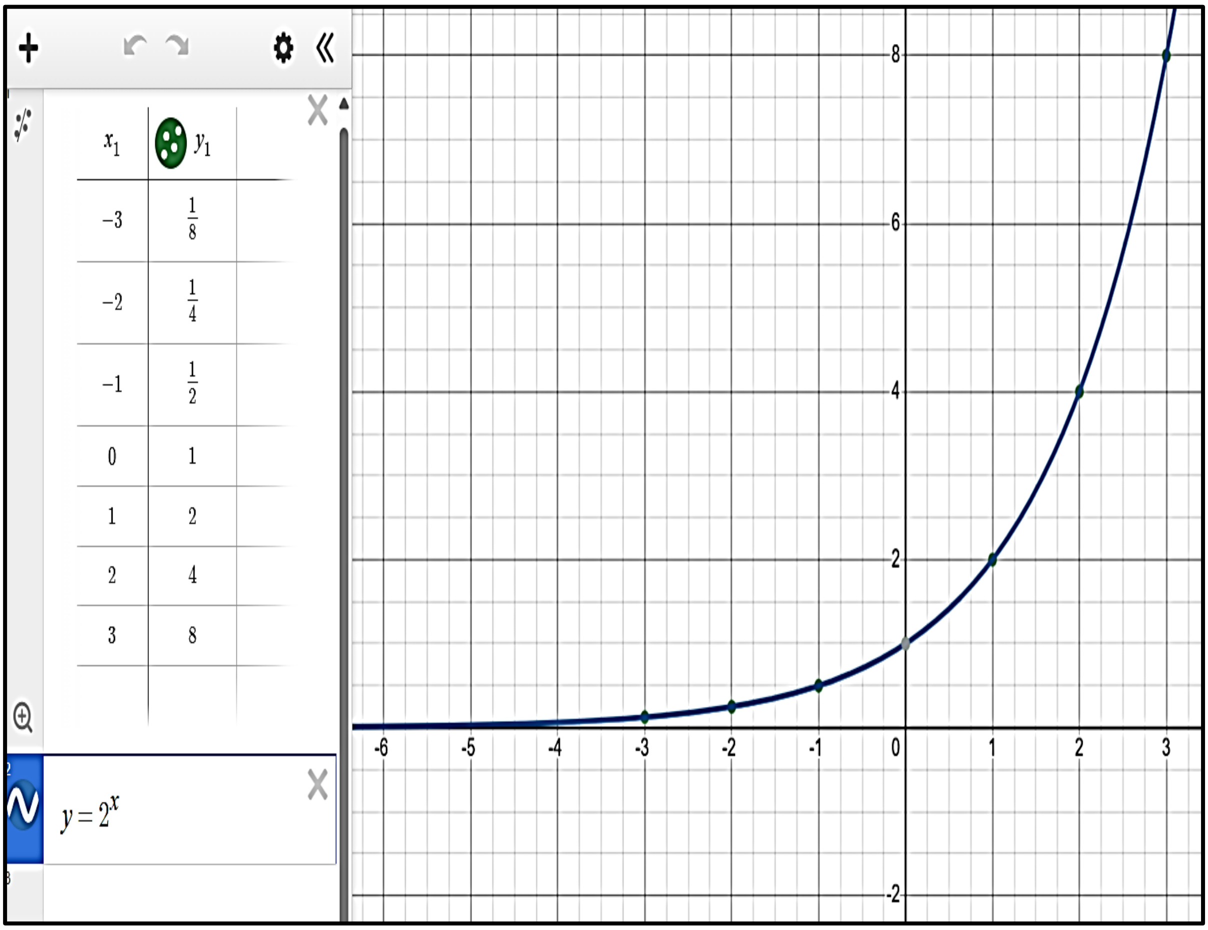
- $\dfrac{\boldsymbol{a^x}}{\boldsymbol{a^y}} = \boldsymbol{a^{(x-y)}}$;

A função exponencial, em virtude dessas propriedades, constitui uma ferramenta de grande utilidade na resolução de equações exponenciais e na análise de fenômenos que apresentam crescimento contínuo.

Gráfico de uma Função Exponencial

A visualização gráfica é um recurso relevante na compreensão do comportamento de fenômenos. A função exponencial, em particular, é caracterizada por uma representação gráfica que reflete situações de crescimento ou decrescimento. A função $\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{a^x}$, com $\boldsymbol{a} > \boldsymbol{1}$, ilustra o crescimento exponencial de forma exemplar (Figura 1).

Figura 1. Gráfico da função $\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{2^x}$.

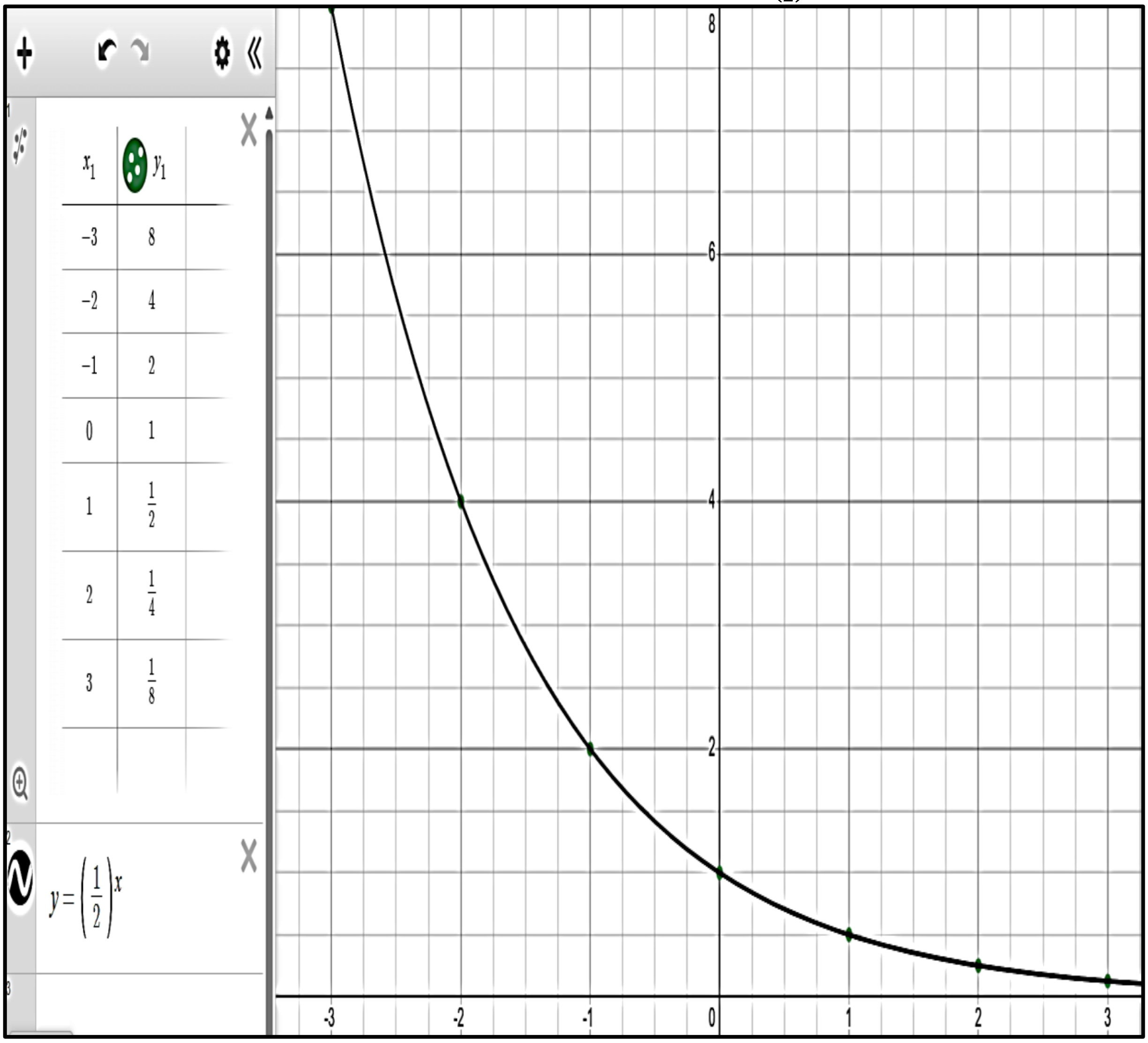


Fonte: O autor (2024).

A análise gráfica da função exponencial revela um comportamento crescente, caracterizado pela interseção com o eixo das ordenadas no ponto ***(0,1).***

Em contraste, o decrescimento exponencial é representado pela função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{x}}$, com $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1}$, conforme ilustrado na Figura 2, que apresenta a representação gráfica da função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{x}}$, obtida mediante o cálculo dos pares ordenados correspondentes.

Figura 2. Gráfico da função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{x}}$**.**



Fonte: O autor (2024).

A representação gráfica da função exponencial apresenta um comportamento decrescente, intersectando o eixo das ordenadas no ponto ***(0,1).***

De modo geral, as funções exponenciais podem ser classificadas em duas categorias, com base no valor da base *a*. Se *a* for maior que 1, a função é crescente, pois, para qualquer $\boldsymbol{x_2} > \boldsymbol{x_1} \Leftrightarrow \boldsymbol{a^{x_2}} > \boldsymbol{a^{x_1}}$.

Por outro lado, se 0 < *a* < 1, a função é decrescente, pois, para qualquer $\boldsymbol{x_2} > \boldsymbol{x_1} \Leftrightarrow \boldsymbol{a^{x_2}} < \boldsymbol{a^{x_1}}$.

A curva exponencial que representa graficamente a função, intersecta o eixo das ordenadas no ponto ***(0,1)*** e apresenta uma assíntota horizontal no eixo das abscissas, permanecendo sempre acima deste eixo, visto que $\boldsymbol{f(x) = a^x > 0}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Consequentemente, os valores da função aproximam-se arbitrariamente de zero, mas nunca atingem zero ou são inferiores a ele. Além da função exponencial $\boldsymbol{f(x) = a^x}$, existe a função exponencial natural $\boldsymbol{f(x) = e^x}$, cuja base é o número irracional *e*, também conhecido como número neperiano,. A função exponencial natural é particularmente útil na modelagem de fenômenos que exibem crescimento ou decrescimento contínuo, bem como no cálculo diferencial e integral, devido à sua propriedade singular de ser idêntica à sua própria derivada.

Este estudo concentrou-se na exploração da função exponencial com base *a*, considerando sua relevância como conceito inicial e essencial para a compreensão de fenômenos exponenciais em contextos educacionais, especificamente no âmbito do 1º ano do Ensino Médio, em situações experimentais que ilustram processos de crescimento e decrescimento exponencial.

A função exponencial permite aos alunos compreenderem os fenômenos de crescimento e decrescimento que ocorrem no mundo real. Por isso, seu ensino não deve ser limitado a definições formais e manipulações algébricas, mas ampliado por meio da modelagem, do uso de tecnologias e de situações-problema contextualizadas que se constituem no foco de nossa pesquisa. Com isso, promove-se uma aprendizagem mais significativa, conectada à realidade dos alunos e ao desenvolvimento do pensamento matemático.

4. MODELAGEM NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Na Educação Matemática existem diversas tendências que observam as formas de saber, aprender e ensinar, considerando contextos, situações, grupos sociais e culturais. Entre as tendências na Educação Matemática está a Modelagem Matemática, que "é um processo de representação de problemas do mundo real em termos matemáticos, na tentativa de encontrar soluções para os problemas" (Bertone; Bassanezi; Jafelice, 2014, p. 18).

Ao realizar uma consulta em um dicionário sobre o significado da palavra modelagem, descobrimos que ela diz respeito à "ação ou efeito de modelar, uma modelação". Assim, quando se pensa em Modelagem Matemática deve-se considerá-la como uma forma de compreensão de situações da realidade, do concreto ou abstrato a partir de um modelo onde a Matemática se aplica na proposição de soluções, ou como uma alternativa para melhor compreensão desse dado cenário.

Para entender a Modelagem Matemática, é necessário estipular a descrição de modelo matemático, que Bassanezi (2004, p. 20) define como "uma construção matemática abstrata, simplificada, que retrata uma porção da realidade com uma finalidade específica". Com essa definição, temos o modelo como uma representação típica de algo em análise.

Conforme Bassanezi (2004, p. 20), "a importância do modelo matemático consiste em ter uma linguagem concisa que expressa nossas ideias de maneira clara e sem ambiguidades, além de proporcionar um arsenal de resultados [...]". O modelo facilita a transição da situação real para o desafio matemático, ou seja, a procura por suposições que descrevam de maneira matemática a solução do problema. Nesse sentido, a Modelagem Matemática é o procedimento que conduz à criação desse modelo. Santos e Rosa destacam:

> Modelagem matemática é uma estratégia que requer a obtenção de [um] modelo que busca descrever matematicamente uma situação real para em seguida compreender e estudá-lo, levantando dados e elaborando hipóteses sobre tais fenômenos [*sic*]. Nesta perspectiva, modelagem matemática pode ser vista como estratégia de ensino e aprendizagem. Pode-se entendê-la como uma abordagem de um problema real por meio da matemática, [e] do problema serão extraídas as características pertinentes, elaboradas [as] hipóteses e enfim feitas [as] representações em variáveis matemáticas (Santos; Rosa, 2008, p. 14).

Entende-se, dessa maneira, que a prática da Modelagem Matemática representa uma abordagem de envolvimento com a realidade no processo de construção de saberes matemáticos, manifestando-se como um método dinâmico e eficaz para explorar e compreender fenômenos diversos por meio de conceitos matemáticos, e que, segundo Barbosa (2007, p. 161), seria “um ambiente de aprendizagem em que os alunos são convidados a investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade”.

Essa estratégia educacional proporciona aos estudantes um ambiente de aprendizado onde são incentivados a investigar e resolver problemas do cotidiano utilizando as ferramentas matemáticas para análise e solução.

Além disso, a Modelagem Matemática promove uma conexão significativa entre a teoria e a prática, facilitando a aplicação dos conceitos aprendidos em situações do mundo real, o que contribui para o desenvolvimento de habilidades críticas e para a formação de pensamento lógico-matemático. Dessa forma, a modelagem revela-se não apenas como uma abordagem didática, mas como uma poderosa ferramenta no aprimoramento do aprendizado e no desenvolvimento de uma compreensão mais profunda e aplicada da Matemática.

No século XIX surgiram os primeiros movimentos relacionados à Modelagem Matemática. Entre os principais atores que potencializaram este movimento estão Hans Freudenthal e Henry Pollak, protagonistas do que denominaram de Matemática realística, em que buscaram explorar as experiências presentes no cotidiano dos alunos, ao invés do foco em regras, comandos e abstrações.

No Brasil, a Modelagem Matemática chega a partir de um grupo de professores, entre eles Ubiratan D’Ambrósio e Rodney Carlos Bassanezi, ambos do Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação (IMECC) da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

Entre os interesses e o propósito de tornar a aprendizagem matemática viva na mobilização de conceitos e modelação de situação está uma melhor compreensão do mundo, o enfrentamento de situações vivenciais fora de sala de aula e a formação cidadã dos estudantes.

> Nesse sentido, a Modelagem Matemática foi consolidada como uma nova tendência e perspectiva didática que impulsionou o crescente aumento de materiais de estudos, as produções acadêmicas de Aplicações e Modelagem no ensino de Matemática para serem utilizadas no contexto escolar (Aragão, 2016, p. 5).

Assim, a Modelagem Matemática recebe destaque no âmbito das pesquisas em Educação Matemática e torna-se tendência, especialmente por conectar a abstração à realidade, e por sua eficiência no desenvolvimento de boas aprendizagens.

> Destaca-se que Modelagem Matemática é um método de pesquisa utilizado, em particular, nas Ciências. Os procedimentos são essencialmente: (1º.) reconhecimento da situação-problema, (2º.) familiarização com o assunto a ser modelado, (3º.) formulação do problema, (4º.) formulação de um modelo matemático, (5º.) resolução do problema a partir do modelo e (6º.) validação do modelo (Biembengut, 2012, p. 120).

Com base no exposto, buscamos tratar, nesta pesquisa, de sugestões de atividades para o ensino da função exponencial utilizando a Modelagem Matemática com experimentação. Essas sugestões têm como objetivo orientar o trabalho do professor em sala de aula, visando criar um ambiente de aprendizagem no qual o aluno desempenha um papel central. Para alcançar esse objetivo, a abordagem propõe experimentos a partir de situações reais.

Pretendemos, com isso, que os educandos sejam incentivados a identificar grandezas e a representar o modelo matemático correspondente, que, no caso, é a função exponencial. Conforme destacado por Bassanezi (2014, p. 16), “a Modelagem Matemática é a habilidade de transformar problemas do mundo real em desafios matemáticos e resolvê-los, interpretando as soluções na linguagem do contexto original”.

A Modelagem Matemática, segundo Biembengut e Hein é, como um processo relacionado à aquisição de um modelo que, em certos aspectos, pode ser equiparado a um procedimento artístico,

> Pois para elaborar um modelo, além de conhecimento apurado de Matemática, o modelador deve ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas (Biembengut; Hein, 2003, p. 12).

A citação supracitada destaca a complexidade envolvida no processo de modelagem, ressaltando que, além do conhecimento em Matemática, é vital que o modelador possua uma dose considerável de intuição e criatividade. Essas habilidades são importantes para se interpretar o contexto da situação-problema, identificar o conteúdo matemático mais adequado e aplicar um senso lúdico na manipulação das variáveis envolvidas.

A menção à intuição e criatividade destaca a natureza multifacetada e, em alguns aspectos, artística da Modelagem Matemática, enfatizando a importância de abordagens mais holísticas e inovadoras na construção de modelos.

A interação com situações tangíveis e passíveis de manipulação não apenas facilita o trabalho em grupo, como confere significado ao conceito em análise. Nesse contexto, os alunos constroem o conhecimento ao enfrentarem situações-problema, participarem de trocas e discussões, formularem questionamentos e realizarem testes. Conforme destacado por Bassanezi (2014), essa transformação ocorre de maneira espontânea, à medida que as atividades se desdobram ao longo das etapas da Modelagem Matemática.

Além disso, é crucial reconhecer a importância da abordagem baseada em situações reais na educação matemática. A aplicação prática dos conceitos, como sugerido pela Modelagem Matemática, não apenas engaja os estudantes de maneira mais eficaz, mas promove uma compreensão mais profunda e duradoura dos tópicos abordados.

Burak (2010) destaca uma abordagem da Modelagem Matemática sob uma perspectiva afastada da construção de um modelo matemático. Ao invés disso, orienta que essa metodologia se constitui por meio de um conjunto de procedimentos com o propósito de criar uma representação paralela para explicar matematicamente os fenômenos presentes no cotidiano humano. Essa abordagem visa auxiliar na realização de previsões e na tomada de decisões.

Dessa forma, o pesquisador direciona seus estudos para aprimorar essa metodologia, propondo cinco fases a serem seguidas durante a aplicação da modelagem. A seguir, apresentamos a essência de cada uma dessas etapas, conforme interpretado por Burak e Klüber (2008):

> Escolha do tema – é o momento em que o professor apresenta aos alunos alguns temas que possam gerar interesse ou os próprios alunos sugerem um tema. Esse tema pode ser dos mais variados, uma vez que não necessita ter nenhuma ligação imediata com a matemática ou com conteúdos matemáticos, e sim com o que os alunos querem pesquisar. Já nesta fase é fundamental que o professor assuma a postura de mediador, pois deverá dar o melhor encaminhamento para que a opção dos alunos seja respeitada.
>
> Pesquisa exploratória – escolhido o tema a ser pesquisado, encaminham-se os alunos para a procura de materiais e subsídios teóricos dos mais diversos, os quais contenham informações e noções prévias sobre o que se quer desenvolver/pesquisar. A pesquisa pode ser bibliográfica ou contemplar um trabalho de campo, fonte rica de informações e estímulo para a execução da proposta.
>
> Levantamento dos problemas – de posse dos materiais e da pesquisa

> desenvolvida, incentiva-se os alunos a conjecturarem-se [*sic*] sobre tudo que pode ter relação com a matemática, elaborando problemas simples ou complexos que permitam vislumbrar a possibilidade de aplicar ou compreender conteúdos matemáticos, isso com a ajuda do professor, que não se isenta do processo, mas se torna o 'mediador' das atividades.
>
> Resolução dos problemas e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema – nessa etapa, busca-se responder os problemas levantados com o auxílio do conteúdo matemático, que pode ser abordado de uma maneira extremamente acessível, para, posteriormente, ser sistematizado, fazendo um caminho inverso do usual, pois se ensina o conteúdo para responder às necessidades surgidas na pesquisa e no levantamento dos problemas concomitantemente.
>
> Análise crítica das soluções – etapa marcada pela criticidade, não apenas em relação à matemática, mas também a outros aspectos, como a viabilidade e a adequabilidade das soluções apresentadas, que, muitas vezes, são lógica e matematicamente coerentes, porém inviáveis para a situação em estudo. É a etapa em que se reflete acerca dos resultados obtidos no processo e como esses podem ensejar a melhoria das decisões e ações, contribuindo, dessa maneira, para a formação de cidadãos participativos, que auxiliem na transformação da comunidade em que participam (Burak; Klüber, 2008, p. 21-22).

Cabe ressaltar que a utilização de metodologias ativas, como a Modelagem Matemática, está alinhada com as tendências contemporâneas em educação, que buscam promover uma aprendizagem participativa, contextualizada e significativa. Tais abordagens contribuem com o desenvolvimento de habilidades cognitivas e sociais, preparando os alunos para enfrentarem desafios no mundo real.

De acordo com Biembengut e Hein (2003), a Modelagem Matemática compreende um processo sistemático dividido em etapas essenciais, conforme podemos observar a seguir:

Fase 1 – Interação com o Problema

Nesta fase inicial de envolvimento, que é considerada uma etapa preliminar, a situação a ser estudada será delimitada. Para aprimorar a compreensão, é crucial realizar uma pesquisa sobre o tema definido, seja por meio de um estudo indireto, consultando fontes como livros, jornais e revistas especializadas, ou através de uma abordagem direta, que envolva experiências em campo e a obtenção de dados junto a estudiosos da área. Nesta etapa ocorrem as seguintes ações:

- reconhecimento da situação-problema;
- familiarização com o assunto a ser modelado – pesquisa.

Fase 2 – Matematização

Os dados coletados na fase de interação propiciam a organização da situação em análise, conduzindo à transição da linguagem natural para a linguagem matemática. Este estágio caracteriza-se pela identificação e desenvolvimento de um modelo que represente adequadamente a problemática em questão, sendo abordados os seguintes aspectos:

- formulação do problema – hipótese;
- resolução do problema em termos do modelo.

A fase mais complexa, segundo Biembengut (1999), é a tradução da situação-problema para a linguagem matemática que envolva a formulação e escrita do problema através de um modelo que conduza à solução. Nesse processo, intuição e criatividade são elementos essenciais.

Sobre tais aspectos, Bassanezi (2014, p. 19) afirma que, “quando se procura refletir uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender ou de agir sobre ela, o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: o Modelo”. Nesse sentido, compreendemos que isso pode ser caracterizado como “um conjunto de expressões aritméticas ou fórmulas, ou equações algébricas, ou gráfico, ou representação, ou programa computacional, que levem à solução ou permitam a dedução de uma solução” (Biembengut; Hein, 2003, p. 14).

Para formular e validar as hipóteses, são considerados requisitos indispensáveis:

1) Avaliar as informações, distinguindo entre aqueles relevantes e não relevantes e identificando os fatos envolvidos;

2) Determinar os fatores a serem investigados, levantando-se hipóteses pertinentes;

3) Identificar as constantes presentes na situação;

4) Generalizar e escolher as variáveis que são relevantes;

5) Escolher símbolos apropriados para representar as variáveis selecionadas;

6) Descrever essas relações em termos matemáticos.

Na conclusão desta etapa, é preciso adquirir um conjunto de expressões, fórmulas ou equações algébricas, assim como gráficos, que levem à solução ou permitam deduzi-la. Assim, a questão pode ser tratada com as ferramentas matemáticas disponíveis, requerendo um conhecimento razoável das entidades matemáticas envolvidas na criação do modelo.

Fase 3 – O Modelo Matemático

Esta etapa refere-se ao procedimento de validação, onde é conduzida uma avaliação detalhada para verificar se a representação ou modelo construído atende de maneira satisfatória a problemática proposta.

Ao longo do processo de execução de um projeto de Modelagem Matemática, os estudantes reúnem dados, manuseiam informações provenientes da realidade, experienciam situações concretas e, por conseguinte, interpretam as soluções derivadas da resolução de desafios matemáticos. Esse engajamento não somente valida o modelo matemático proposto, mas os orienta em direção ao desenvolvimento do pensamento crítico e reflexivo por meio da construção ativa do conhecimento.

Conforme salientado por Miguel (2009, p. 11), esse processo dinâmico não só permite a aplicação prática dos conceitos matemáticos, como proporciona uma base sólida para a formação de uma compreensão mais profunda e contextualizada da matemática. Portanto, a prática da Modelagem Matemática não se limita à mera resolução de problemas, mas serve de ponte para a construção de uma perspectiva analítica e crítica, promovendo um aprendizado mais significativo e duradouro.

Por meio da compreensão dessas premissas, Biembengut e Hein (2009) orientam que na aplicação de uma atividade prática baseada na Modelagem Matemática, caso seja identificado que a solução não é confiável, é recomendado que alunos e professores retornem à segunda fase, buscando aprimorar e ajustar o modelo de maneira mais eficiente. Essa abordagem permite um refinamento contínuo do processo, garantindo uma representação matemática mais precisa e robusta para resolver o problema em questão.

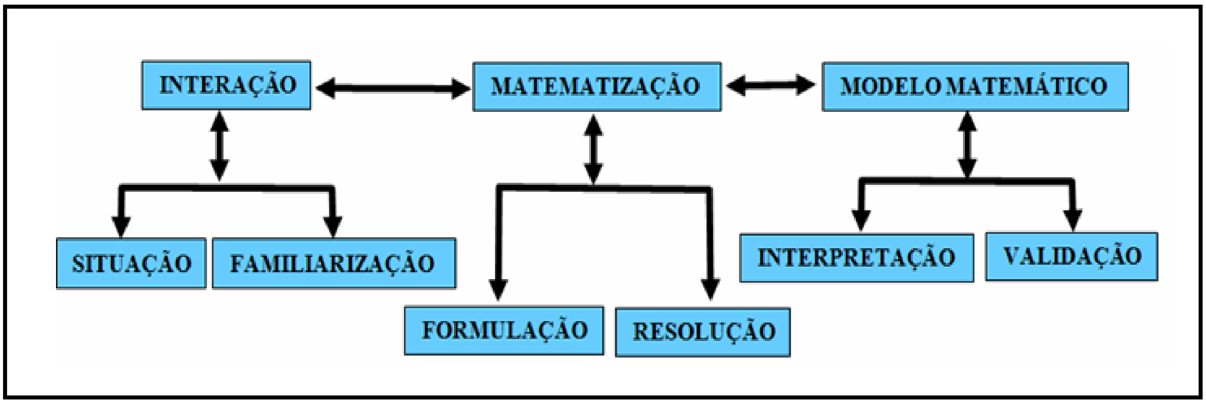
Como ocorrências, é possível observar os seguintes aspectos:

- Interpretação da solução;
- Verificação ou validação.

Portanto, a compreensão do modelo deve ocorrer por meio da análise das implicações da solução gerada a partir do modelo em investigação. Em seguida, é importante avaliar a adequação da solução, retornar à situação-problema original e considerar a relevância e confiabilidade da solução obtida.

Em resumo, essas fases fornecem um guia estruturado para a aplicação da Modelagem Matemática em diversas áreas de pesquisa e prática científica. Em resumo, o diagrama abaixo, proposto por Biembengut (1999), representa o referido processo.

Quadro 2. Organograma proposto das várias fases da modelagem.



Fonte: Biembengut (1999).

Este esquema serve como um direcionamento para a construção de um modelo matemático, embora seja insuficiente para efetivar completamente o processo, uma vez que a modelagem é uma arte que demanda não somente habilidades, mas também experiência e sensibilidade lógico-matemática.

No contexto específico deste estudo, que visa à aplicação do processo de Modelagem Matemática em cursos regulares, são necessárias adaptações levando-se em consideração o nível de escolaridade dos educandos, o tempo disponível para as atividades em sala de aula, o cumprimento do programa educacional e a disposição da comunidade escolar para aceitar mudanças. Adicionalmente, o professor deve possuir um conhecimento sólido sobre modelagem, sendo fundamental realizar um estudo aprofundado sobre a metodologia, elaborar alguns modelos e ter experiência prévia na implementação dessa abordagem no ensino.

Um fator relevante que merece ser destacado é que na Modelagem Matemática as funções do docente e dos estudantes passam por redefinições, de modo que o educador assume uma função de mediador, orientador e instigador, efetuando intervenções e interferindo, quando necessário, nas atitudes dos discentes durante as atividades (Barbosa, 2007).

Ao incorporar a Modelagem Matemática, deparamo-nos com dois desafios iniciais: a adaptação dos estudantes, que estão familiarizados com a condição de receptores, e a superação da insegurança por parte do educador, habituado a ter controle absoluto e a apresentar respostas prontas. Portanto, é essencial que o docente esteja atento às conjecturas e raciocínios emergentes dos alunos, além de estar preparado para lidar com a imprevisibilidade na abordagem de situações-problema (Oliveira; Barbosa, 2011).

5. USO DE TECNOLOGIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Neste capítulo, apresentamos ideias relativas ao uso de tecnologias no ensino de matemática e descrevemos o aplicativo Desmos e suas potencialidades para o ensino de função exponencial.

TECNOLOGIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

O uso de tecnologias no ensino de matemática tem revolucionado a forma como os alunos aprendem e os professores ensinam. A integração de dispositivos como computadores, *tablets* e aplicativos específicos tem proporcionado uma abordagem mais envolvente e interativa para o ensino desse tema complexo. Essas ferramentas tecnológicas oferecem uma série de benefícios. Primeiramente, permitem a visualização de conceitos matemáticos de maneira mais concreta e intuitiva. Gráficos e representações visuais dinâmicas ajudam os estudantes a compreenderem melhor alguns tópicos como funções, geometria e estatística.

Além disso, *softwares* e aplicativos de Matemática oferecem oportunidades para prática personalizada. Os alunos podem avançar no seu próprio ritmo, trabalhando em exercícios que se adequam ao seu nível de habilidade. Isso ajuda a evitar que alguns deles fiquem entediados e outros se sintam perdidos.

A colaboração também é incentivada por meio da tecnologia. Plataformas de aprendizado *online* permitem que os educandos trabalhem juntos em projetos, resolvam problemas em equipe e compartilhem suas abordagens. Isso reflete uma abordagem mais próxima das habilidades necessárias no mundo profissional.

Entretanto, é importante mencionar que a tecnologia não deve substituir o papel do professor, mas complementá-lo. Professores continuam a desempenhar um papel vital na orientação dos alunos, esclarecendo conceitos e fornecendo contexto para o aprendizado.

Em resumo, o uso de tecnologias no ensino de matemática traz uma série de vantagens, desde a visualização concreta de conceitos até a prática personalizada e a colaboração. Ao integrar sabiamente a tecnologia com a instrução tradicional, é possível criar uma experiência de aprendizado mais rica e significativa para os alunos.

O APLICATIVO DESMOS

As tecnologias educacionais atualmente representam um importante meio de construir e proporcionar boas aprendizagens. Diversas ferramentas tecnológicas, entre físicas e digitais, são empregadas por professores na produção e mediação de conhecimentos, especialmente matemáticos.

Na contramão da facilitação das aprendizagens estão os desafios relacionados a disponibilidades de recursos tecnológicos para os professores e formação/preparo adequado a sua utilização.

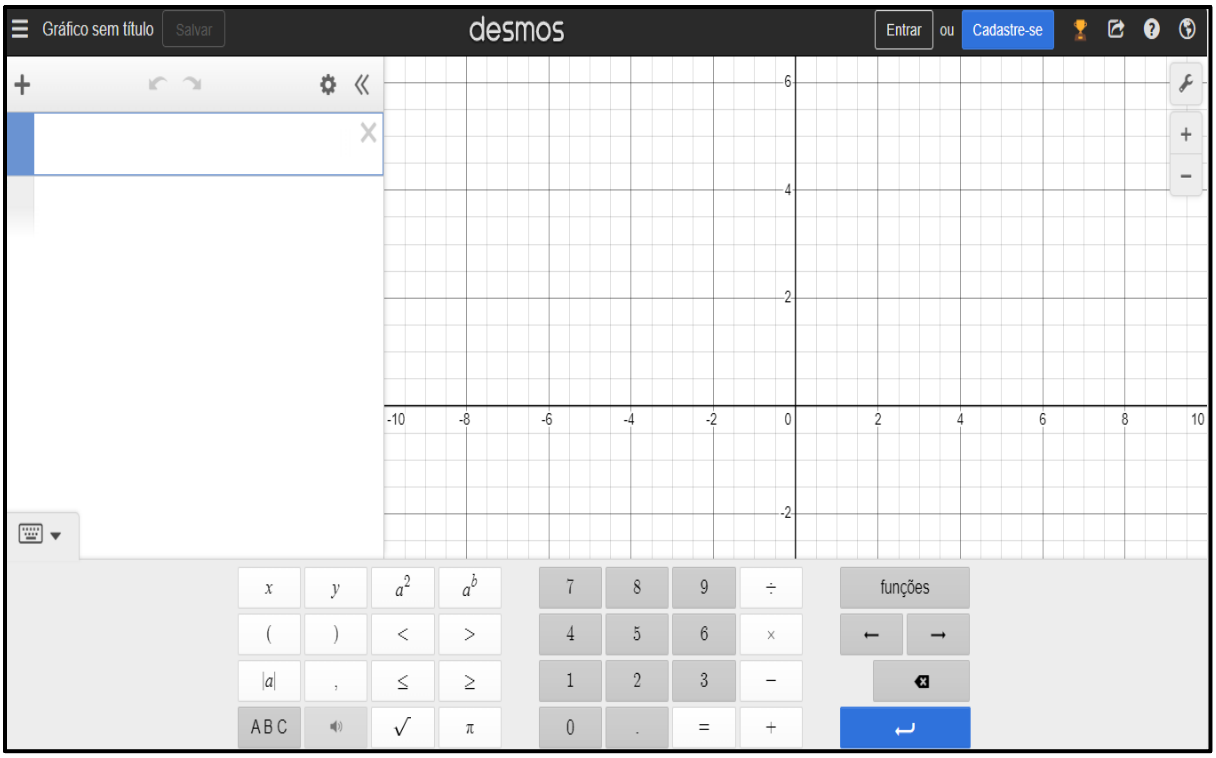
No ensino e aprendizagem de matemática, as tecnologias representam uma importante ferramenta para a visualização de elementos figurativos e geométricos com maior facilidade, pela possibilidade de solucionar problemas de maneira ágil e, especialmente, pela aproximação que proporciona aos alunos para com a matemática, por estar presente em suas atividades diárias.

A tecnologia pode ser aplicada como recurso para ilustrar um objeto de conhecimento matemático ou ser o recurso didático necessário para a compreensão dos estudantes, sem a qual a aprendizagem do assunto se tornaria difícil. Em ambos os casos, o seu uso tem proporcionado um dinamismo maior em sala de aula, provocando motivação e interesse dos educandos.

Entre as mais variadas ferramentas está o uso de *softwares* educativos, uma forma de tecnologia desenvolvida especialmente para atuar no âmbito educacional em espaços escolares, ou seja, ser suporte/ferramenta possível de uso pelo professor ou de forma livre para o desenvolvimento de aprendizagens. Utilizar os *softwares* educativos permite promover e desenvolver habilidades na solução de problemas, raciocínio lógico, manipulação e gerenciamento e investigação de dados. “O *software* educativo é um conjunto de recursos informáticos projetados com a intenção de serem usados em contexto de ensino e aprendizagem” (Sancho, 1998, p. 169).

Nesta pesquisa, o *software* educativo de nosso interesse para o trabalho com função exponencial é o denominado Desmos, cujo nome vem do grego e que significa *conexão*. É um programa *online* gratuito, semelhante a uma calculadora gráfica. Entre suas funcionalidades está a de construir pontos, gráficos de funções e regiões do plano através de equações cartesianas, sendo também possível calcular expressões numéricas e resolver equações de primeiro e segundo graus com uma incógnita.

Figura 3. Tela inicial do *software* Desmos.



Fonte: https://www.desmos.com/.

A Figura 3 apresenta a interface do *software* Desmos, onde o usuário tem a visualização do campo de comando onde são definidas expressões, dados numéricos etc., bem como a janela de projeção dos pontos, gráficos, curvas e regiões planas a ser exibida conforme os comandos.

Com esta ferramenta o usuário consegue ampliar/reduzir, transladar a área visível e deslizar um ponto sobre as curvas cartesianas (momento em que o programa exibe as coordenadas do ponto). Ele também pode alterar a cor de um ponto, gráfico, curva ou região do plano e especificar as escalas dos eixos coordenados.

Ainda é possível esconder ou exibir os eixos coordenados e a malha quadriculada. O Desmos possui um modo de exibição especial para projetores, que aumenta a espessura dos traços para melhor visualização. O *software* possui ainda um recurso muito útil e interativo: *sliders*, que são controles deslizantes que permitem alterar dinamicamente o valor de um parâmetro. Por exemplo, no campo de comandos, ao se digitar a expressão $\boldsymbol{f(x) = mx}$, o programa detecta $\boldsymbol{m}$ como um parâmetro, e automaticamente pergunta se o usuário deseja criar um *slider* correspondente. Ao clicar e arrastar o controle do *slider*, o valor de *m* muda e o gráfico da função é atualizado.

6. METODOLOGIA

Neste capítulo, delinearemos a metodologia, a sequência didática e os resultados consequentes da experimentação didática empregada nesta pesquisa.

A proposta metodológica desta pesquisa é de cunho qualitativo e experimental. Trata-se da elaboração e aplicação de uma sequência didática fundamentada nos pressupostos teóricos sobre Modelagem Matemática de Bassanezi (2014), Barbosa (2004), Biembengut (2003) e Burak e Klüber (2008), com o objetivo de investigar suas potencialidades na aprendizagem de função exponencial. *A priori*, fizemos um levantamento bibliográfico das produções acadêmicas considerando os últimos dez anos, para sabermos quais metodologias estão sendo utilizadas sobre nosso objeto matemático. Depois, procuramos saber a opinião dos professores no intuito de descobrir suas estratégias didáticas e suas dificuldades dentro da sala de aula, referentes ao ensino-aprendizagem de função exponencial. Com base nestes levantamentos, optamos por utilizar como metodologia a Modelagem Matemática com o auxílio de tecnologias educacionais (aplicativo Desmos) na construção da nossa sequência didática.

Nossa experimentação foi realizada de forma presencial, nos dias 10, 11, 12, 13 e 17 do mês de junho de 2024, contabilizando 5 encontros com a duração de 2 horas cada, e totalizando 10 horas de experimentação didática. A investigação ocorreu em uma escola estadual de Ensino Médio na cidade de Parauapebas, Pará, com uma turma de cerca de 20 alunos do 1º ano do Ensino Médio. A aplicação desta sequência didática com 2 horas por encontro foi feita para uma realidade a mais próxima possível em sala de aula (duas aulas de 50 minutos cada). Dadas as variantes e condicionantes que dificultam o processo de aprendizagem dentro das escolas públicas, procuramos fazer a sequência diádica de modo que houvesse condições de o professor reproduzi-la no seu dia a dia escolar.

Para aplicação desta sequência didática, vale ressaltar que a postura do professor/pesquisador é tão somente a de um observador, mediador e orientador, evitando transmitir o conhecimento pronto e acabado. Deve-se deixar as discussões e conclusões dos estudantes fluírem naturalmente, sem intervenção direta, para que eles possam desenvolver, analisar e avaliar o conhecimento construído por si próprios durante a aplicação.

A análise dos dados referentes à aprendizagem dos alunos após a etapa de experimentação será conduzida com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica proposta por Raymond Duval (2003). Tal referencial teórico possibilita compreender os processos cognitivos envolvidos na aprendizagem matemática, considerando as diferentes formas de representação — como a algébrica, a gráfica, a numérica e a verbal — e as transformações que ocorrem entre elas. Assim, a interpretação dos resultados buscará identificar como os estudantes mobilizam e convertem esses registros na construção de significados, evidenciando os modos pelos quais o pensamento matemático se manifesta ao longo das atividades propostas.

Dito isto, passaremos à explicação e descrição dos procedimentos metodológicos a serem realizados para o bom andamento da experimentação e funcionamento da sequência didática.

6.1. Sequência Didática

Nesta seção, apresentamos a sequência didática e o desenvolvimento da sua construção para o ensino de função exponencial. Nossa sequência didática é composta de três etapas bem definidas nos moldes da modelação matemática proposta por Biembegut (2003), porém, com alguns ajustes e adaptações para facilitar sua utilização em sala de aula.

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Este estudo procura desenvolver uma sequência didática direcionada ao ensino da função exponencial, tendo como base a perspectiva da Modelagem Matemática. A proposta envolve a utilização de dados reais, oriundos de situações-problema, com a finalidade de determinar o modelo exponencial que melhor represente o fenômeno analisado. Posteriormente, será realizado o ajuste da curva correspondente ao gráfico obtido, contando com o suporte do aplicativo Desmos, ferramenta tecnológica que auxiliará na interpretação visual e na compreensão do comportamento da função no contexto proposto.

A elaboração de uma sequência didática direcionada ao ensino da função exponencial tem por finalidade possibilitar aos estudantes a análise e a compreensão de modelos exponenciais a partir da interpretação de dados reais, com os fundamentos teóricos da Modelagem Matemática e o emprego de tecnologias digitais como suporte ao processo de ensino e aprendizagem.

Conforme mencionado anteriormente, esta proposta apoia-se nas concepções de Modelagem Matemática apresentadas por Bassanezi (2014), Barbosa (2004), Biembengut (2003) e Burak e Klüber (2008), com o intuito de estruturar uma sequência didática aplicável à realidade das salas de aula, nas quais, geralmente, o tempo disponível por aula é de 50 minutos. A sequência é composta por três atividades, cujos procedimentos serão descritos detalhadamente, de modo a orientar sua implementação. Ressalta-se que a descrição da primeira atividade servirá como referência metodológica para a realização das demais.

A primeira atividade tem por tema: **Saúde das crianças e as bactérias**. Nesta atividade, vamos instigar os alunos a perceber que o processo de reprodução das bactérias ocorre segundo um modelo exponencial, além de discutir temas transversais como higiene e saúde. Seguindo os procedimentos metodológicos necessários para utilização da Modelagem Matemática, seguimos para a descrição das etapas de aplicação da sequência didática.

PRIMEIRA ETAPA: INTERAÇÃO COM O PROBLEMA

Esta primeira etapa da modelagem requer a escolha do tema. O ideal seria o professor/pesquisador apresentar alguns temas pré-definidos para os alunos escolherem. Entretando, por se tratar de uma sequência didática para ser aplicada dentro das situações de sala de aula onde, às vezes, o professor não têm tempo suficiente para uma aplicação mais minuciosa, achamos por bem que a sequência já viesse com os temas das atividades definidas. Isto em nada fere os preceitos da Modelagem Matemática, pois trata-se de um assunto com base em informações e dados reais. Sobre isto, recorremos à ideia de Barbosa (2003 *apud* Brucki, 2011, p. 30) no seu primeiro caso de como as formas de Modelagem Matemática podem ser desenvolvidas, onde afirma que o “professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução”.

Nesta etapa também ocorre a familiarização com o assunto a ser pesquisado. Para alcançar este aspecto, nossa dinâmica começará com uma apresentação de vídeos que discorrem sobre a reprodução de bactérias para os estudantes tomarem nota do tema e entender a situação-problema de que a atividade tratará. O vídeo 01 fala de forma geral sobre a bactéria e seu modo de reprodução. O vídeo 02 utiliza um microscópio para mostrar como as bactérias se reproduzem no decorrer do tempo. O professor/pesquisador fará perguntas como: (a) “Do que se trata o tema dos vídeos?” (b) “Vocês conseguiram observar alguns aspectos matemáticos na reprodução das bactérias neles?” “Quais?”.

SEGUNDA ETAPA: MATEMATIZAÇÃO

É nesta etapa que ocorre a passagem da linguagem natural para a linguagem Matemática. Após uma breve discussão sobre o tema, e tendo ideia do que se pretende buscar, passaremos para a coleta de dados proposta na situação-problema. Neste momento entregamos a folha com a atividade 01 para os alunos. Aqui ocorre a formulação do problema e a resolução. No caso da nossa sequência didática – para fins práticos –, a situação-problema já vem na atividade, juntamente com os problemas propostos a serem resolvidos. É importante, nesta fase, que o professor/pesquisador instigue os alunos a construírem tabelas com os dados extraídos das questões e busquem um modelo matemático que solucione a situação-problema proposta.

Espera-se que, inicialmente, os estudantes proponham modelos lineares para a resolução do problema apresentado. Nesse contexto, será realizada uma intervenção pedagógica que apresentará, de forma implícita, duas possibilidades de modelagem: uma de natureza linear e outra exponencial. Para o desenvolvimento dessa etapa, será utilizado o aplicativo Desmos, que possibilitará o ajuste da curva exponencial ao conjunto de dados extraídos da situação-problema. A ferramenta permitirá aos alunos visualizarem o comportamento dos gráficos, realizarem comparações, interpretarem os diferentes cenários e buscarem soluções mais adequadas por meio da manipulação dos parâmetros envolvidos, buscando o melhor ajuste possível. O uso de recursos tecnológicos é essencial nesse momento, pois facilita a obtenção de um modelo matemático que melhor represente a realidade analisada. A maneira como será conduzido o processo será detalhada posteriormente, durante a descrição da aplicação da atividade.

Nosso aplicativo para o ajuste de curva e a escolha do modelo, como já dito, é o aplicativo Desmos. Reafirmando nossa proposta de fazer a modelagem com auxílio de tecnologias educacionais, realizar o ajuste de curva dos dados é uma ótima opção para gerarmos um modelo, pois, ao final desta etapa, é necessário adquirir um conjunto de fórmulas, expressões ou equações. Bertone (2014, p. 52) afirma:

> O Ajuste de Curvas surge quando se trata de interpretar dados de um experimento. Fazer um ajuste de curvas significa simplesmente determinar os coeficientes de uma função f, dada genericamente *a priori*, de modo que, no intervalo de valores considerado, esta função e os dados estatísticos estejam ‘próximos’. Dependendo do que entendemos por proximidade entre função ajustada e os dados experimentais, teremos diferentes soluções para f.

Cabe esclarecer um aspecto relevante acerca do uso do termo “ajuste” nesta proposta. O que realizamos, com o auxílio do aplicativo Desmos, não se configura como um ajuste de curva no sentido técnico clássico — como aqueles baseados em métodos estatísticos, a exemplo dos mínimos quadrados, ajustes lineares ou polinomiais. No presente caso, trata-se de uma abordagem exploratória, na qual os parâmetros do modelo exponencial previamente identificado são manipulados com o objetivo de se observar como essas alterações afetam o comportamento da função representada graficamente. É uma espécie de ajuste da curva dentro do modelo. Essa variação intencional dos parâmetros permite que os alunos analisem, de forma dinâmica e visual, a adequação do modelo à situação-problema, favorecendo a compreensão conceitual da função exponencial.

TERCEIRA ETAPA: MODELO MATEMÁTICO

Esta fase corresponde ao processo de validação, durante o qual é realizada uma análise minuciosa para assegurar que a representação ou modelo desenvolvido atenda de modo satisfatório a questão proposta. Os alunos chegam a esta conclusão após testarem os modelos com novos pontos para preencherem a tabela. Nesse sentido, Alves e Fialho (2019, p. 23) afirmam:

> Como etapa final da modelagem, a validação se torna importante para a confiança do modelo. O aluno poderá preencher um quadro de valores de testagem da função encontrada e, assim, identificar que de fato o modelo é representado pelo gráfico encontrado.

Ressaltamos que o professor/pesquisador atuará como mediador, orientador e instigador na condução da sequência didática. Tudo isso para que os educandos tirem suas próprias conclusões e tenham uma aprendizagem significativa do conteúdo. Somente após completadas todas estas etapas da sequência didática, haverá a formulação dos conceitos relacionados aos estudos da função exponencial. Nessa perspectiva, mostraremos, agora, o desenvolvimento das atividades.

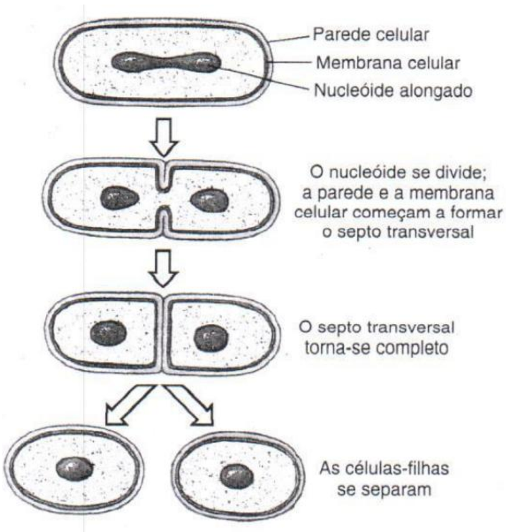
Atividade 1 – Saúde das Crianças e as Bactérias

Situação-Problema

Muitas infecções em crianças podem ser prevenidas ao se seguir o cronograma de vacinação recomendado. Infecções como sarampo, poliomielite, hepatite A e hepatite B podem também ser prevenidas pela imunização de rotina.

No cotidiano, a entrada de vírus e bactérias no organismo das crianças pode ocorrer por diversos hábitos simples, como não lavar as mãos antes de comer e ingerir alimentos de procedência duvidosa, e cabe aos pais garantirem que seus filhos sigam todos os cuidados possíveis e tenham uma dieta saudável, rica em vários nutrientes importantes para que suas imunidades estejam sempre satisfatórias para combater esses agentes infecciosos.

Após os microrganismos entrarem no organismo, o crescimento bacteriano se dá por divisão binária celular, em que a célula duplica seus componentes e divide-se em duas novas células. As células-filhas tornam-se independentes quando um septo cresce entre elas, fazendo com que se separem.



Uma vez que a bactéria ou vírus tenha se adaptado ao meio, o crescimento da população, ocorrerá em velocidade incrível, e a cada intervalo de tempo (tempo de geração), que varia de 20 minutos a 20 horas, a depender da espécie, a população de organismos dobra de tamanho. Por exemplo, após a contaminação por uma bactéria, e após 7 tempos de geração, haverá mais de 60 organismos nesta colônia.

Uma forma de se medir o crescimento bacteriano é pela estimativa do número de células geradas por divisão celular por milímetro de cultura. Seguindo essa lógica, uma cultura contendo 1.000 organismos por milímetro, com um tempo de geração de 20 minutos, contaria 2.000 organismos por milímetro, 4.000 organismos após 40 minutos, 8.000 após uma hora, 64.000 após duas horas e 512.000 após três horas.

Vamos refletir:

Existiria um modelo matemático para representar o crescimento de uma colônia de bactérias para a situação apresentada no texto?

Se nada for feito, quanto elementos de organismo teríamos por milímetro na colônia, na situação apresentada no texto?

Procedimentos do pesquisador na Atividade 1

Na aplicação da sequência faremos uso de *datashow*, computador, celulares, calculadora científica, caneta, quadro negro, aplicativo Desmos.

Passo 01 - Apresentação de dois vídeos sobre a reprodução bacteriana e leitura do texto da situação-problema, abrindo-se um momento de discussão sobre o tema.

Video 01 - Bactérias: o que são? onde vivem? o que fazem? (Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=WqrkP7QTDQQ. Acesso: 01/03/2024)

Video 02 - Reprodução das bactérias. (Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=LifTbGEcfEg. Acesso: 01/03/2024).

Texto de apoio: Reprodução das bactérias (Disponível em: https://www.biologianet.com/biodiversidade/reproducao-das-bacterias.htm. Acesso: 01/03/2024).

Pediremos aos alunos para refletirem sobre os vídeos e o texto entregue da situação-problema:

É possível criar um modelo matemático para representar a reprodução das bactérias?

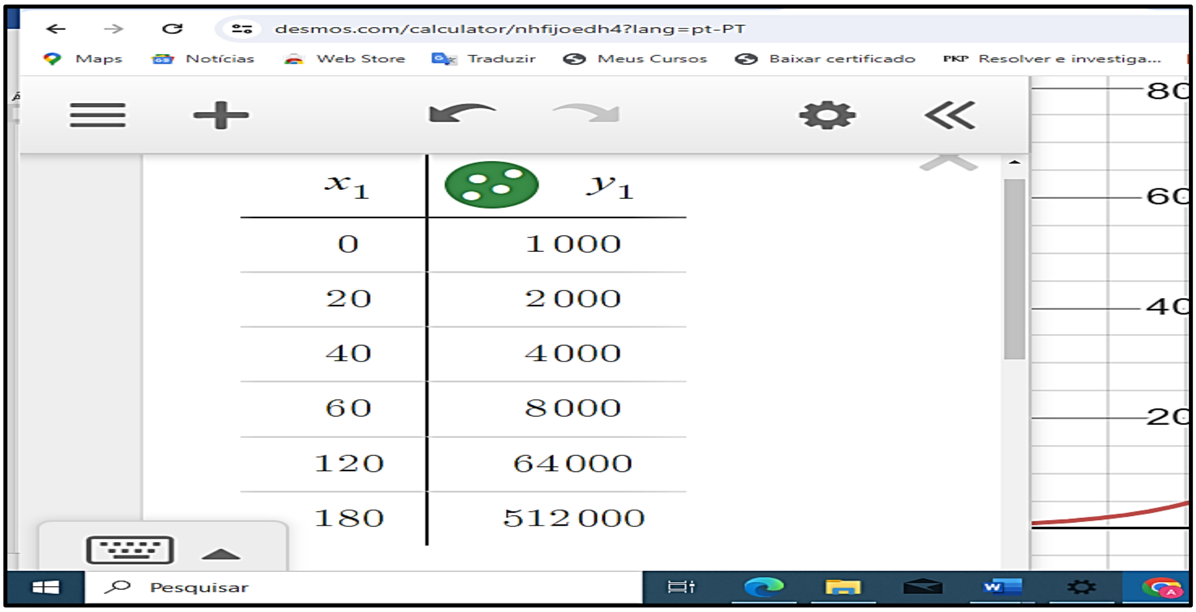
Passo 02 – Construção de tabelas e ajuste de curva dos dados da situação-problema com auxílio do aplicativo Desmos.

I – Neste momento, devemos acessar o aplicativo Desmos na seguinte página eletrônica: https://www.desmos.com/calculator/nhfijoedh4?lang=pt-PT;

II – Pedir para os alunos construírem uma tabela com os dados do problema (no caderno);

III – Construir a tabela no aplicativo Desmos, conforme mostrado na Figura 4;

Figura 4. Tabela 1 dos dados no *software* Desmos.



Fonte: O autor (2024).

IV – Fazer o ajuste de curva linear ($y = ax + b$) com os dados da tabela conforme a Figura 5.

Observação 01: Devemos utilizar a graduação do eixo y variando de *2000* unidades, e a do eixo x, de *20* unidades de medida;

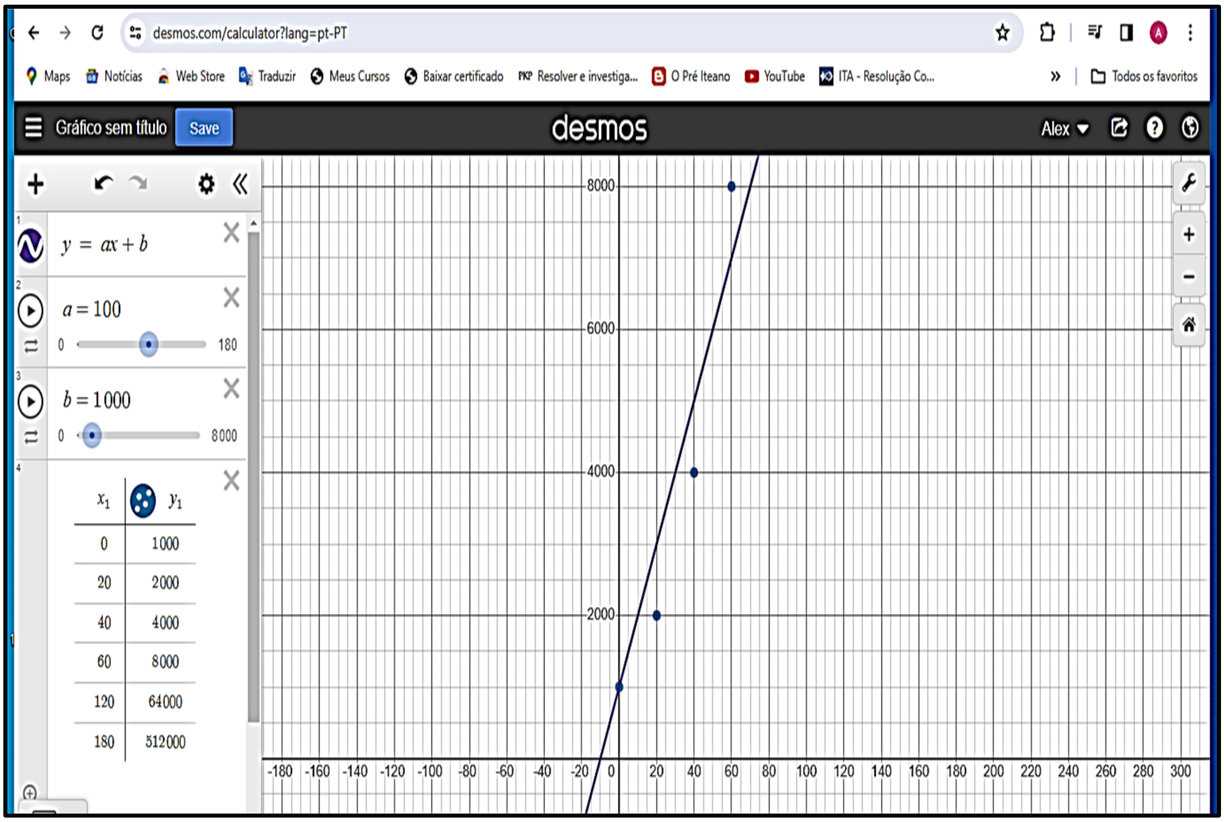
Observação 02: O controle deslizante do parâmetro *a* deve variar de *0* até *180*, com $a = 100$ para se ter o melhor ajuste.

Observação 03: O controle deslizante do parâmetro b deve variar de *1000* até *8000*, com $b = 1000$ para se ter o melhor ajuste;

Observação 04: Obteremos, assim, o modelo do ajuste linear dos dados do problema, conforme mostrado a seguir:

$$\boldsymbol{y = 100x + 1000}$$

Figura 5. Modelo linear dos dados no *software* Desmos.



Fonte: O autor (2024).

V – Fazer o ajuste de **curva exponencial** por meio do aplicativo Desmos:

Observação 05: Cabe-nos aqui uma consideração ao leitor quanto ao modelo exponencial a ser usado. O modelo $\boldsymbol{y = be^{cx}}$ com o número neperiano é o mais utilizado para descrever modelos exponenciais por suas propriedades matemáticas únicas que tornam o cálculo e a análise de processos de crescimento ou decaimento exponenciais mais intuitivos. Isso facilita a descrição e a manipulação de processos de crescimento contínuo. Tais propriedades permitem uma análise mais direta e simples destes processos exponenciais. A constante $\boldsymbol{e}$ é uma das constantes matemáticas mais importantes, e sua definição está diretamente relacionada ao conceito de crescimento exponencial.

Entretanto, para tornar o processo mais didático e em consonância com o que se é ensinado nas escolas e nas questões cobradas em livros didáticos ou em provas do Enem e de vestibulares em geral, optaremos, nas duas primeiras questões, pelo modelo geral da função do tipo exponencial $\boldsymbol{y = b.a^{cx}}$. Lembrando que os modelos são semelhantes; o que muda é que, em uma função, utilizamos o $\boldsymbol{e}$ como base, e no modelo do tipo exponencial, aparecem outros números como bases. No caso das questões 01 e 02, é o número 2 que será nossa base. Quando readaptamos, chegamos à conclusão de que os modelos são praticamente iguais, apenas diferenciados por este detalhe, como mostraremos mais à frente.

Acreditamos que, devido à natureza dos problemas propostos nesta metodologia, os alunos terão mais condições de compreender uma modelação que envolva a função do tipo exponencial do que as que se valem do número neperiano. No entanto, não deixaremos de aplicar a modelação exponencial $\boldsymbol{y = be^{cx}}$. A mesma aparecerá na terceira questão, pois a utilizaremos juntamente com os estudantes, com o Desmos para encontrarmos um modelo matemático que represente o decaimento do carbono-14. Uma vez que o modelo exigiria conhecimentos de logaritmos para encontrarmos a constante de decaimento, o que torna inviável a experimentação para alunos de 1º ano, que ainda não tiveram contato com o assunto, quando estiverem familiarizados com o aplicativo, apresentaremos diretamente a modelagem exponencial $\boldsymbol{y = be^{cx}}$ e faremos algumas sugestões de parâmetros para realizarmos ajustes de curva até encontrarmos a função que modela o decaimento do carbono - 14 (conforme será explicado na questão 03).

Para exemplificação, nesta primeira questão, uma vez conhecido o modelo do tipo exponencial $\boldsymbol{y = b.a^{cx}}$, onde $\boldsymbol{b}$ é o valor inicial $\mathbf{1000}$ e $\boldsymbol{a}$ é a taxa de crescimento percentual (populacional), os alunos, por meio da substituição das coordenadas dos valores da tabela, poderiam encontrar a seguinte resposta como exemplo:

Para $\boldsymbol{x = 20}$, temos $\boldsymbol{y = 2000}$. Portanto, substituindo no modelo do tipo exponencial $\boldsymbol{y = b.a^{x}}$, descobrimos que *a* valerá:

$$\mathbf{2000 = 1000}.\boldsymbol{a}^{\mathbf{20}}$$
$$\mathbf{2} = \boldsymbol{a}^{\mathbf{20}}$$
$$\mathbf{2 = 2^{\frac{1}{20}}} \text{ ou } \mathbf{2^{0,05}}$$

Logo, acharíamos o seguinte modelo para a questão:

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{1000.(2)^{0,05\boldsymbol{x}}},$$

que é a equação que modela a situação-problema. Observando a fórmula, podemos analisar algo interessante: o $\boldsymbol{a}$ é formado por dois números, o $\mathbf{2}$ (base da equação) e o $\boldsymbol{0{,}05}$ (expoente). Fazendo uma readaptação, e chamando o número $\boldsymbol{0{,}05}$ de ***c*** (**a taxa de crescimento exponencial**), poderíamos reescrever o modelo do tipo exponencial da seguinte maneira: $y = b.a^{cx}$, semelhante ao outro modelo, com a diferença de que, agora, a base é o número *a*, e não o número neperiano e. Será este o modelo que utilizaremos nas questões 01 e 02 quando fizermos o ajuste de curva por meio do aplicativo Desmos na resolução destas situações-problema;

Observação 06: Para obtermos uma melhor visualização do gráfico na tela, como mostra a Figura 6, devemos utilizar a graduação do eixo y variando de *-475.724* até *8417.84*, com passos de *2000*. E, por sua vez, devemos graduar o eixo x entre -*123.864* e *158.935*, com passos de *20*. Lembrando que estas medidas podem ser reajustáveis para adaptá-las ao tamanho do monitor de computador utilizado;

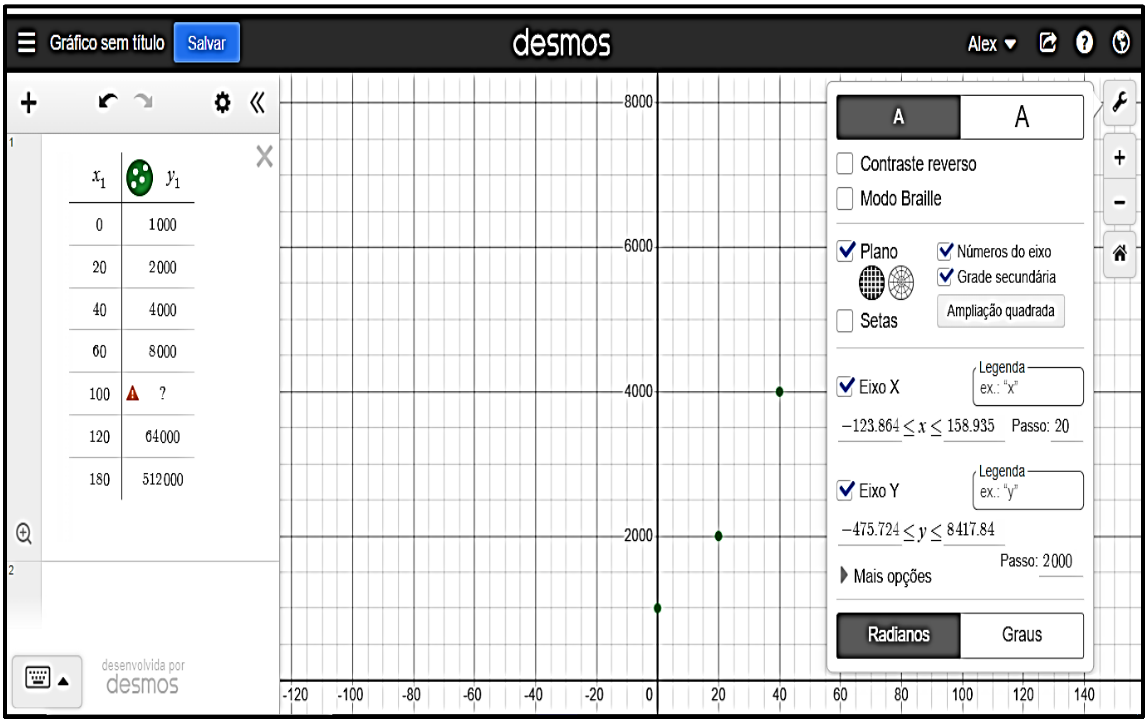
Observação 07: O controle deslizante do parâmetro b deve variar de *500* até *2000*, com $b = 1000$, com passos de *100* para se ter o melhor ajuste;

Observação 08: O controle deslizante do parâmetro c deve variar de *-0.1* até *0.1*, com $c = 0{,}05$, com passos de *0,005* para se ter o melhor ajuste;

Observação 09: O controle deslizante do parâmetro *a* deve variar de *1* até *5*, com $a = 2$, com passos de *1* para se ter o melhor ajuste. O parâmetro *a* deve valer *2*, pois ele é a base do nosso modelo do tipo exponencial, conforme explicado.

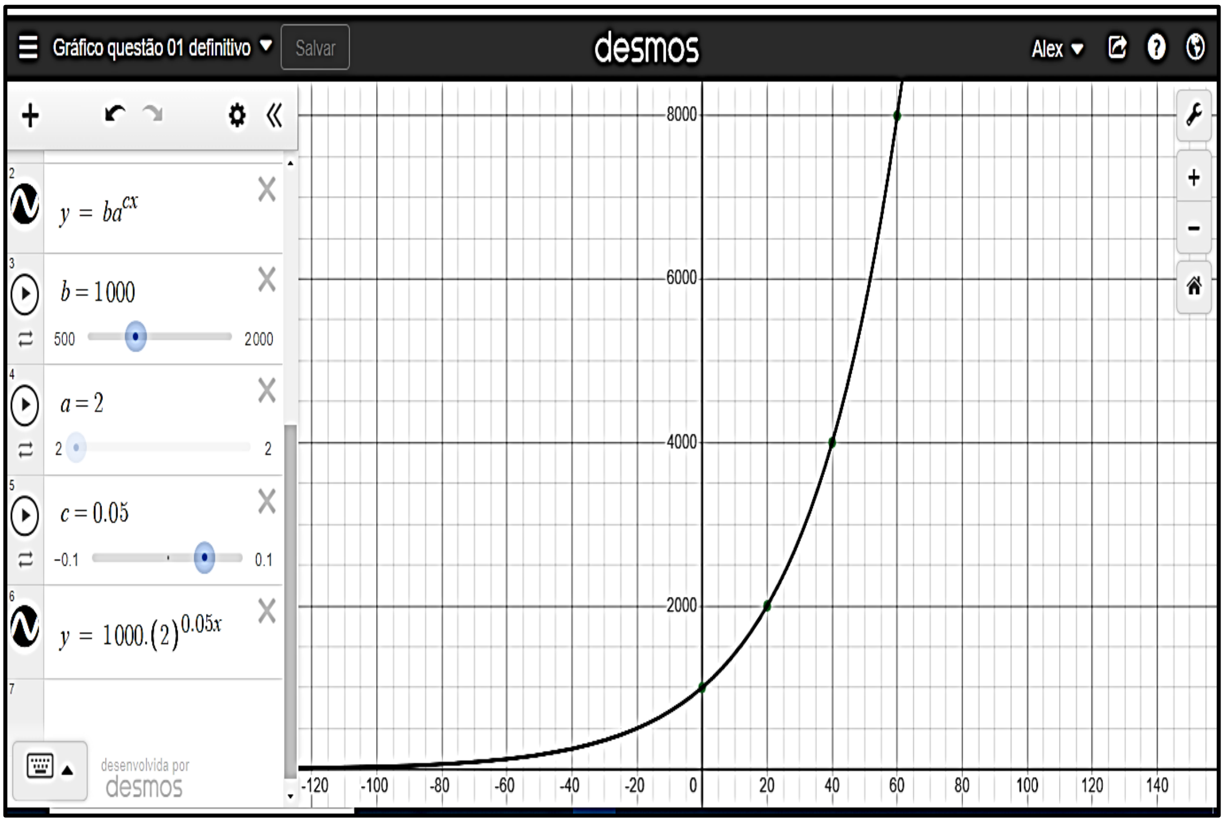
Observação 09: Obteremos, assim, o modelo do ajuste exponencial dos dados do problema $y = \mathbf{1000}.(\mathbf{2})^{\mathbf{0{,}05}x}$, como mostrado na Figura 7;

Figura 6. Graduação dos eixos x e y.



Fonte: O autor (2024).

Figura 7. Gráfico do modelo exponencial $y = 1000.(2)^{0,05x}$.



Fonte: O autor (2024).

VI - Após fazer mudanças nos parâmetros para moldar o melhor ajuste para a curva no gráfico exponencial, deve-se instigar os alunos com perguntas que os levem a deduzir quais dos modelos propostos no aplicativo se adapta melhor à realidade e à solução do problema.

Passo 03 – Validação e escolha do melhor modelo para solucionar a situação-problema.

I – Esta etapa é o momento de os alunos validarem o modelo escolhido, O que pode ser feito com uma calculadora científica do próprio celular. De posse dos modelos encontrados, basta-lhes testarem os valores utilizados para a abscissa, onde x é a variável tempo em minutos, e encontrar os valores de y, que é a quantidade de bactérias.

II - Descrever como será feito o teste de validação na calculadora científica.

Para esta etapa, vamos testar os pontos com o intuito de descobrir quantas bactérias y existiram após $x = 100\ mim$, ou seja, $1\ h$ e $40\ mim$.

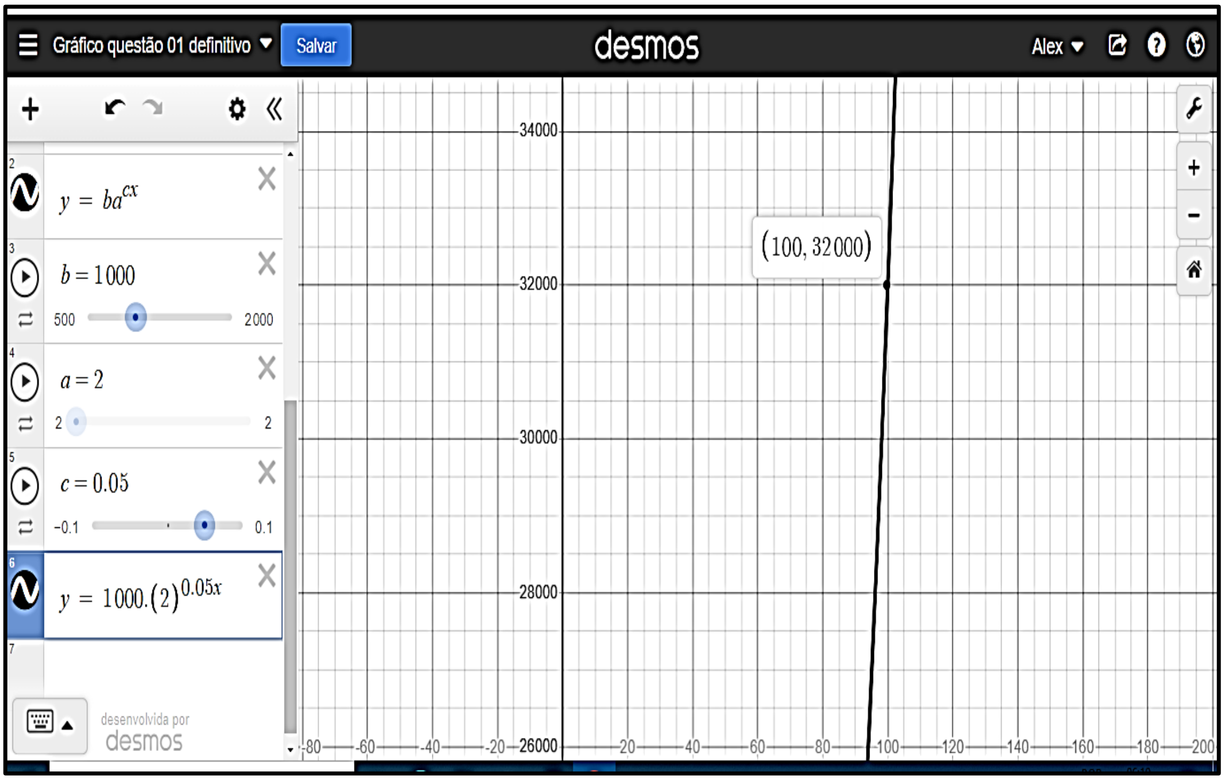
Modelo Linear: $y = 100x + 1000 = 100.100 + 1000 = y = 11.000$

Modelo Exponencial: $y = \mathbf{1000}.(\mathbf{2})^{\mathbf{0{,}05}x}$

Fórmula na calculadora científica para realizar a verificação

Poderemos usar: $y = \mathbf{1000}.\mathbf{2}\hat{}(\mathbf{0},\mathbf{05}x\mathbf{100}) = y = \mathbf{32.000}$. O ponto $(\mathbf{100}, \mathbf{32000})$ aparece assinalado no gráfico da nossa modelação, conforme podemos observar na Figura 8.

Figura 8. Ponto (100, 32000) do gráfico do modelo exponencial.



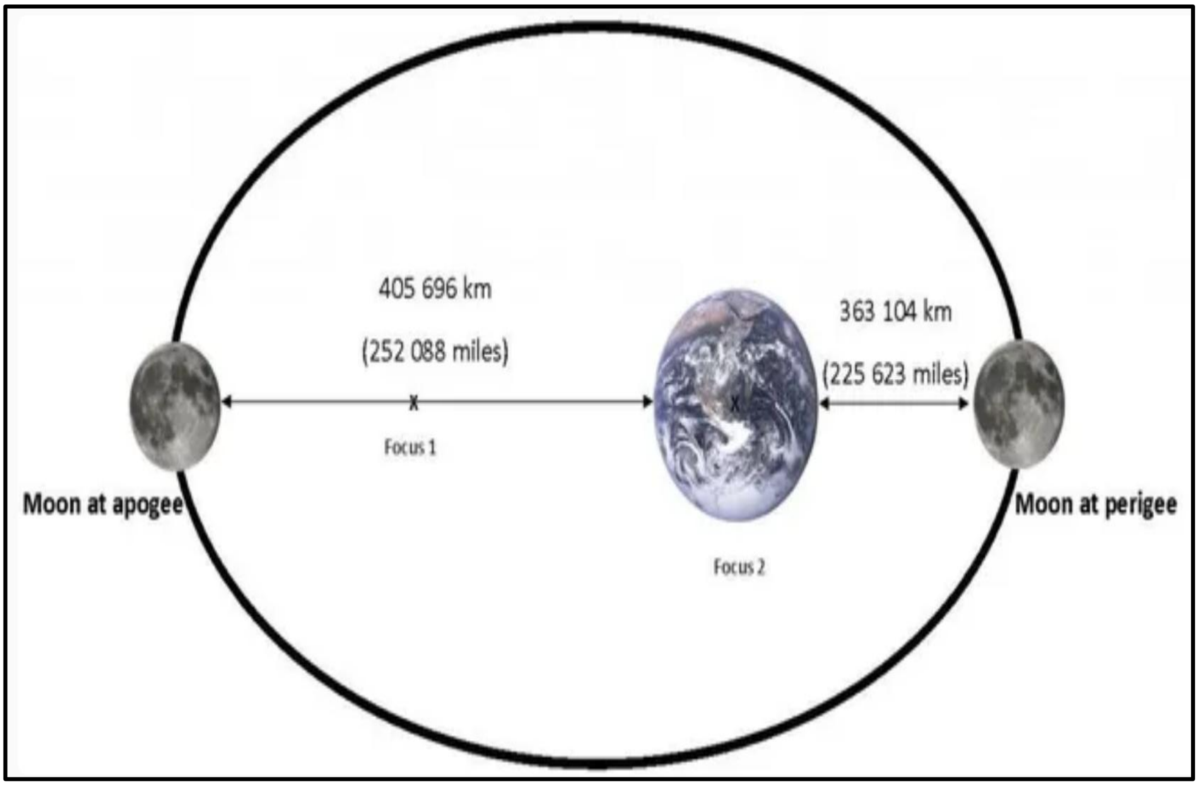
Fonte: O autor (2024).

Todos estes procedimentos serão realizados na aplicação das atividades 2 e 3, e com os mesmos procedimentos durante os encontros. Somente ao final da modelação da última atividade é que daremos início à formulação dos conceitos, definições e características relacionados aos estudos da função exponencial.

Atividade 2 – Dobre a folha de papel e chegue à Lua

A Lua, nosso satélite natural, tem sido objeto de admiração e curiosidade desde tempos imemoriais, com sua beleza misteriosa e influência nas marés. É o maior satélite natural de um planeta no sistema solar em relação ao tamanho do seu corpo primário, tendo 27% do diâmetro e 60% da densidade da Terra, o que representa 1⁄81 da sua massa.

A distância entre a Terra e a Lua é a medida que separa nossos dois corpos celestes durante sua órbita, e não é estática, mas variável, devido às características das órbitas elípticas de ambos os corpos. Logo, a distância pode ser maior ou menor, a depender do ponto de medição; em média, a distância é de aproximadamente 384.400 quilômetros.



Parece absurdo, e realmente o é, mas há uma lógica matemática por trás dessa afirmação, à primeira vista, impossível. Se tomarmos um papel de 0,1 mm de espessura e o dobrarmos em dois, e depois o dobrarmos novamente, e repetirmos esse processo várias vezes, e se considerarmos que o papel não se deforma com o peso, alcançaremos uma espessura que nos permite ir da Terra à Lua.

Vamos refletir:

Se essa for uma forma possível de chegarmos à Lua, quantas vezes precisamos dobrar o papel para chegar até lá? E que modelo matemático corresponderia a essa forma de se chegar à Lua?

Procedimentos do pesquisador na Atividade 2

Na aplicação da atividade 2 utilizaremos *datashow*, computador, celulares, calculadora científica, caneta, quadro negro, aplicativo Desmos.

Passo 01 - Apresentação do vídeo sobre distância entre a Terra e a Lua. Leitura do texto da atividade, promovendo a discussão sobre o tema e sobre a possibilidade hipotética, apresentada na situação-problema, e como modelar esta proposta.

Video 03 – Todos os planetas cabem entre a Terra e a Lua (Disponível em: https://www.youtube.com/shorts/rpMULUn0zoI. Acesso: 01/03/2024)

Texto de apoio: Qual é a distância da Terra à Lua? (Disponível em: https://canaltech.com.br/espaco/qual-e-a-distancia-da-terra-a-lua-222304/ Acesso: 01/03/2024).

Vamos refletir sobre a proposta:

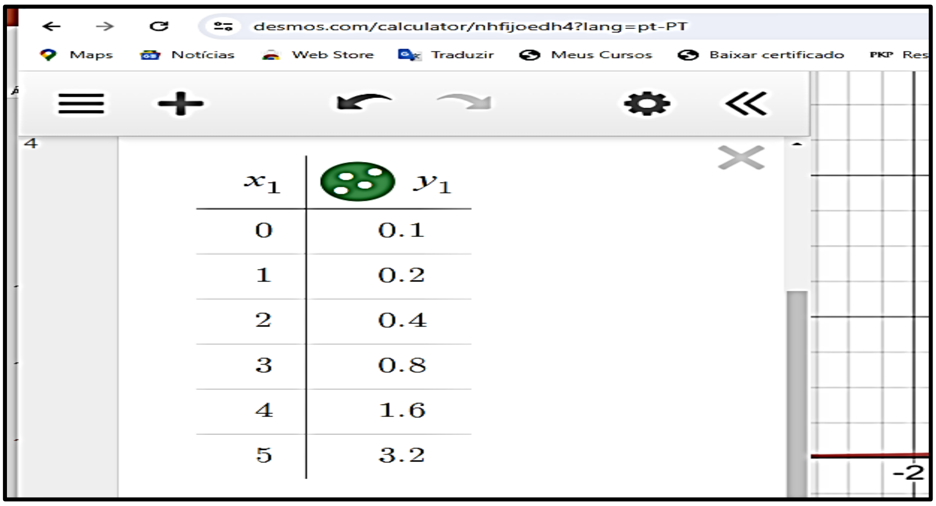
Passo 02 – Construção de tabelas e ajuste de curva dos dados da situação-problema com auxílio do aplicativo Desmos.

I – Neste momento, devemos acessar o aplicativo Desmos na página eletrônica: https://www.desmos.com/calculator/nhfijoedh4?lang=pt-PT.

II – Pedir para os alunos construírem uma tabela com os dados do problema (no caderno);

III – Construir a tabela no aplicativo Desmos, conforme mostrado na Figura 9;

Figura 9. Tabela 2 dos dados no *software* Desmos.



Fonte: O autor (2024).

IV – Fazer o ajuste quadrático ($\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$) com os dados da tabela conforme a Figura 10;

Observação 01: Devemos utilizar a graduação do eixo y variando de $\mathit{0{,}1}$ unidade, e a do eixo x de $\mathit{01}$ unidade de medida;

Observação 02: O controle deslizante do parâmetro *a* deve variar de *-10* até *10*, com $a = 0{,}3$ para se ter o melhor ajuste.

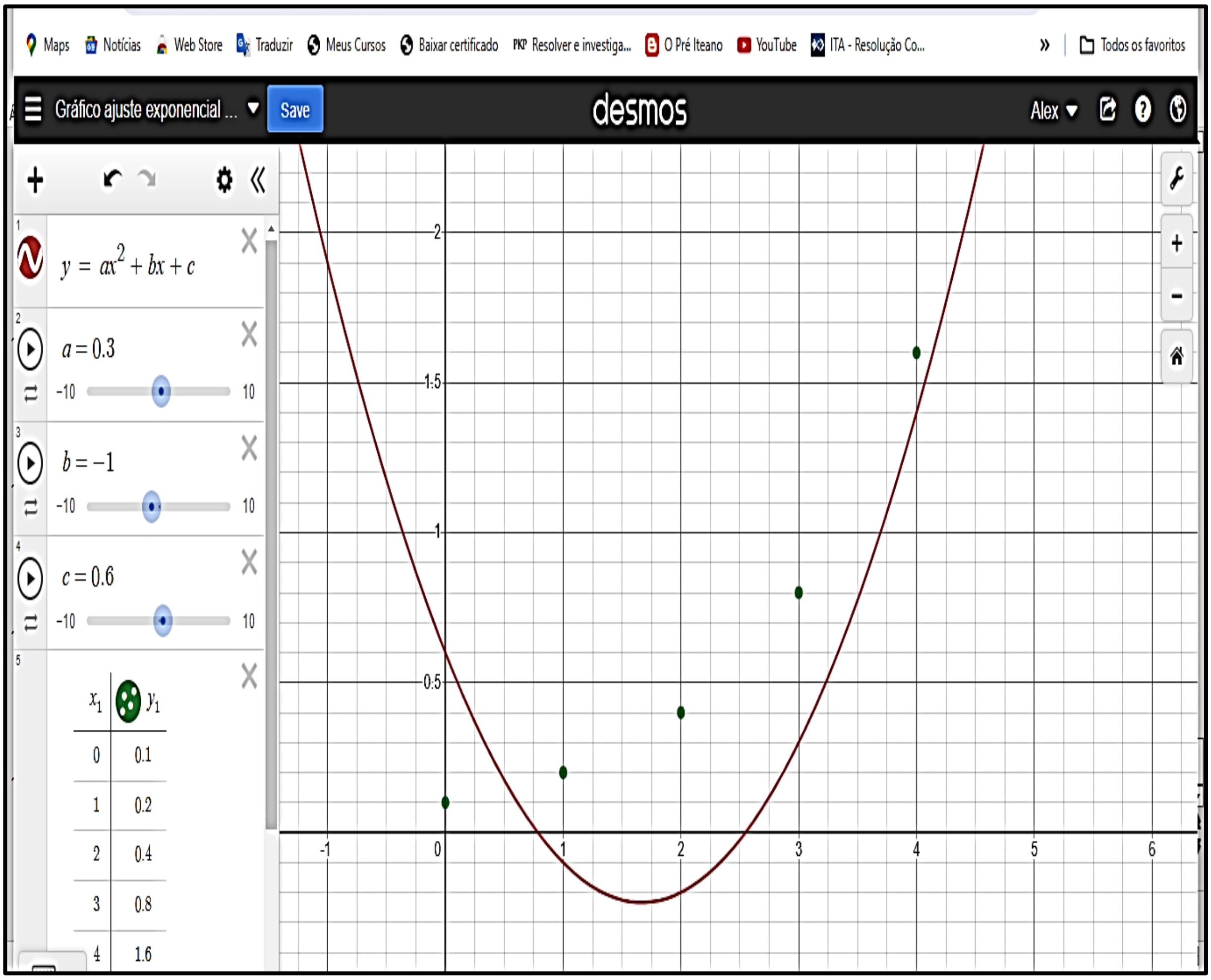
Observação 03: O controle deslizante do parâmetro b deve variar de *-10* até *10*, com $b = -1$ para se ter o melhor ajuste;

Observação 04: O controle deslizante do parâmetro *c* deve variar de *-10* até *10*, com $c = 0{,}6$ para se ter o melhor ajuste;

Observação 05: Obteremos, assim, o modelo do ajuste quadrático dos dados do problema, conforme mostrado abaixo:

$$\boldsymbol{y = 0,3x\hat{}2 - 1x + 0,6}$$

Figura 10. Modelo quadrático dos dados no *software* Desmos.



Fonte: O autor (2024).

V – Fazer o ajuste para o modelo exponencial por meio do aplicativo Desmos com os dados da tabela, conforme a Figura 11;

Observação 06: Novamente cabe-nos observar que utilizaremos o modelo do tipo exponencial na forma geral nesta situação-problema, conforme explicado: $\boldsymbol{y = b.a^{cx}}$.

Para exemplificação, nesta segunda questão, uma vez conhecido o modelo do tipo exponencial $\boldsymbol{y = b.a^{x}}$, onde $\boldsymbol{b}$ é o valor inicial $\boldsymbol{0,1}$ e $\boldsymbol{a}$ é a taxa de crescimento percentual exponencial, os alunos, por meio da substituição das coordenadas dos valores da tabela, poderiam encontrar a seguinte resposta como exemplo:

Para $\boldsymbol{x = 1}$, temos $\boldsymbol{y = 0,2}$. Portanto, substituindo no modelo do tipo exponencial $\boldsymbol{y = b.a^{x}}$, descobriremos que *a* valerá:

$$\boldsymbol{0,2 = 0,1.a^{1}}$$

$$\boldsymbol{2 = a^{1}}$$

$$\boldsymbol{a = 2 \ \ ou \ \ a = 2^{\ 1}}$$

$$\boldsymbol{y = b.a^{cx}\,, logo \ \ y = 0,1.(2)^{1\,x}} \ \ ou \ \ simplesmente \ \ \boldsymbol{y = 0,1.(2)^{\,x}}.$$

Observamos, portanto, que o modelo $\boldsymbol{y = b.a^{cx}}$ se mantém, porém apresenta-se de forma mais simplificada, uma vez que, agora, a taxa de crescimento exponencial $\boldsymbol{c}$ é igual a *1*, podendo ser reescrito simplesmente no formato da função do tipo exponencial $\boldsymbol{y = b.a^{x}}$. Isto ocorre toda vez que a constante $\boldsymbol{c}$ (a taxa de crescimento exponencial) é igual a *1*.

Observação 07: Para obtermos uma melhor visualização do gráfico na tela, como mostra a Figura 11, devemos utilizar a graduação do eixo y variando entre ***-0.571*** até ***3.5***, com passos de ***0.1***. E, por sua vez, devemos graduar o eixo $\boldsymbol{x}$ variando de -0.396 até ***8.163***, com passos de *1*. Lembrando que esta graduação pode mudar conforme o monitor de computador utilizado.

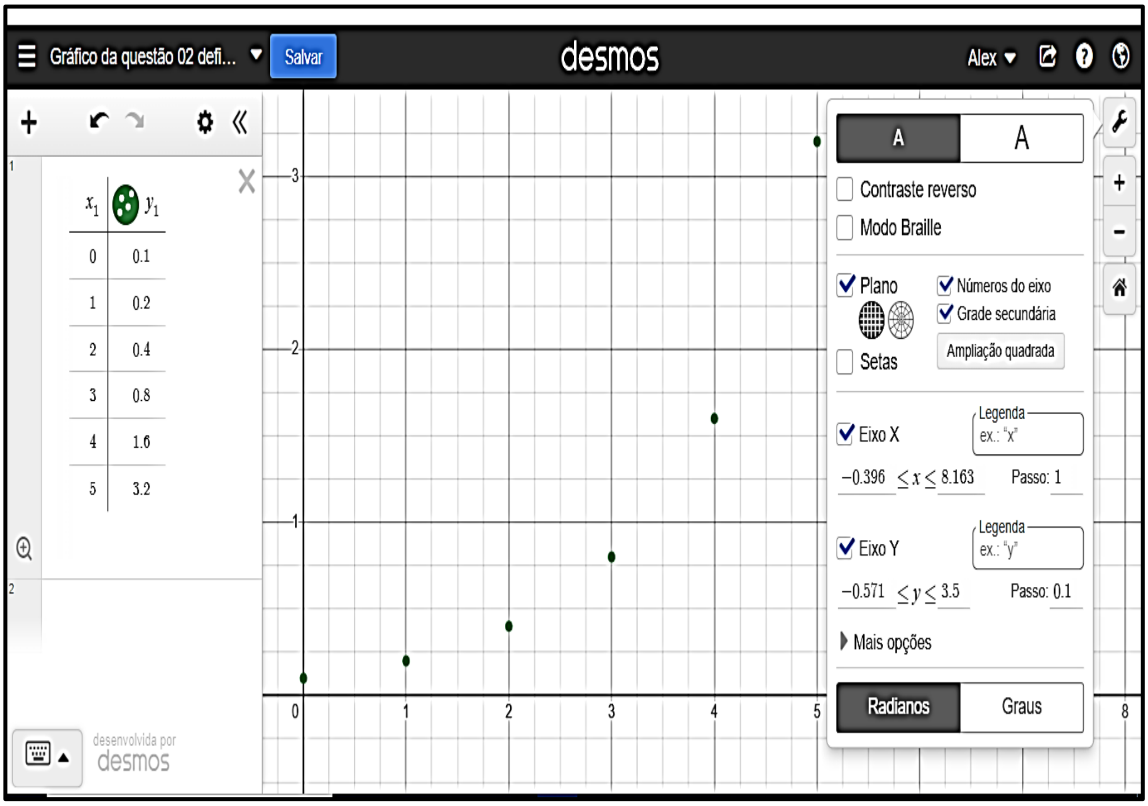
Observação 08: O controle deslizante do parâmetro *b* deve variar de ***-0.1*** até ***0.1***, com passos de ***0.1***, e com ***b = 0.1*** para se ter o melhor ajuste na modelagem.

Observação 09: O parâmetro *a* deve ser igual a *2*; o parâmetro *c* deve ser igual a *1*.

Observação 10: Obteremos, assim, o modelo exponencial dos dados do problema conforme mostrado a seguir:

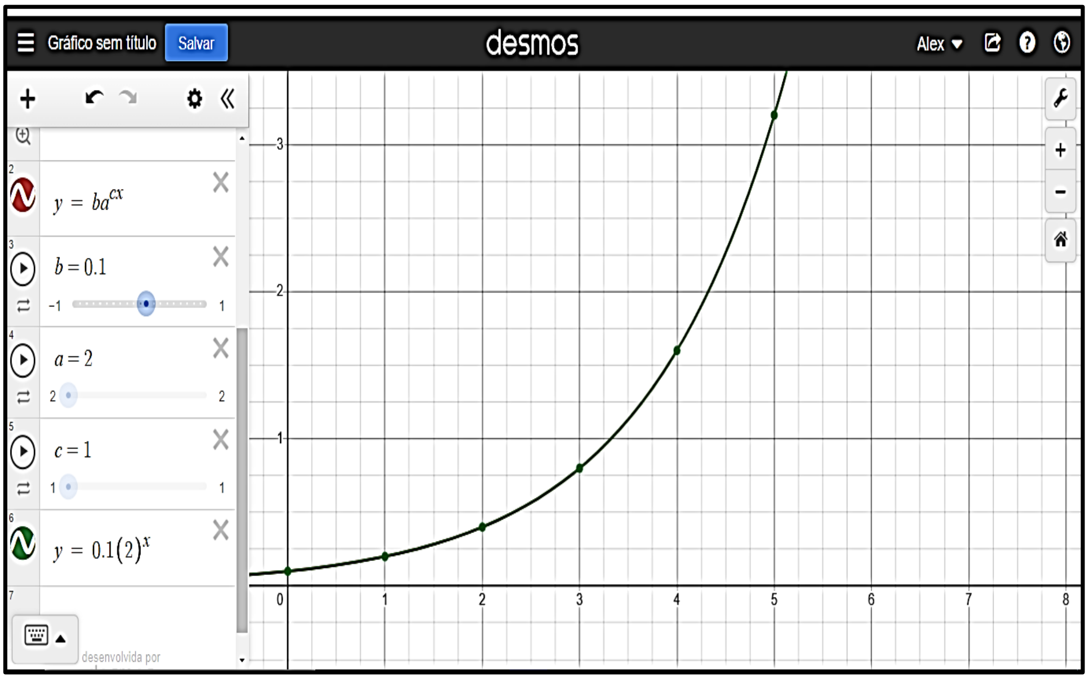
$$\boldsymbol{y = 0,1.(2)^{\,x}}$$

Figura 11. Tabela 3 e graduação dos eixos x e y.



Fonte: O autor (2024).

Figura 12. Gráfico do modelo exponencial $y = 0,1.(2)^{x}$.



Fonte: O autor (2024).

VI - Após fazer mudanças nos parâmetros para ajustar o gráfico do modelo exponencial, deve-se instigar os alunos com perguntas que os levem a deduzir qual dos modelos propostos no aplicativo se adapta melhor à realidade e à solução do problema;

Passo 03 – Validação e escolha do melhor modelo para solucionar a situação-problema.

I – Esta etapa é o momento de os alunos validarem o modelo escolhido, o que pode ser feito com uma calculadora científica. De posse do modelo encontrado, basta-lhes testarem os valores utilizados para a abscissa, onde *x* é a quantidades de dobraduras e *y* é o tamanho da espessura da folha.

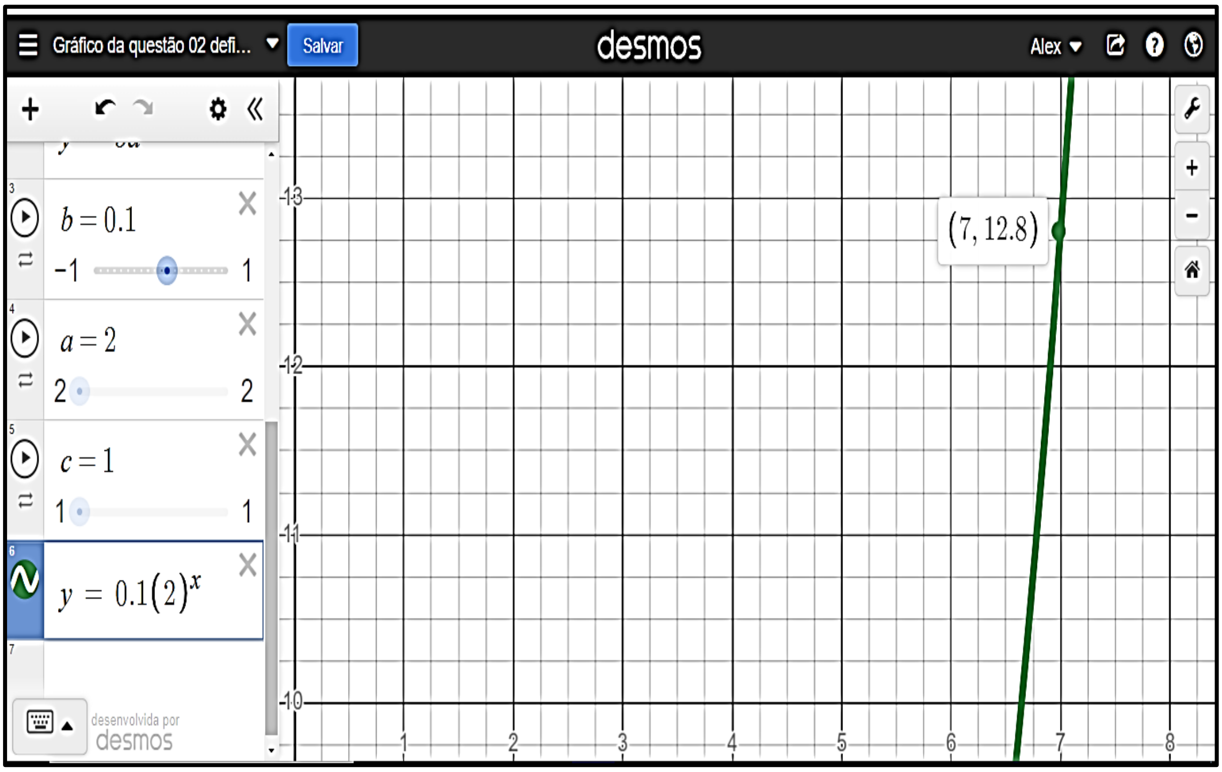
II – Descrever como será feito o teste de validação na calculadora científica – Nesta etapa, testaremos qual a espessura *y* quando se tem 7 dobraduras da folha de papel.

Modelo Exponencial: $\boldsymbol{y = 0,1.(2)^{x}}$

Fórmula na calculadora científica para realizar a verificação

Poderemos usar***:*** $y = 0{,}1.\ 2\hat{}(7) = y = 12{,}8\ mm$. O ponto ***(7, 12.8)*** aparece assinalado no gráfico da nossa modelação, conforme podemos observar na Figura 13.

Figura 13. Ponto (7, 12.8) do gráfico do modelo exponencial.



Fonte: O autor (2024).

III – Por fim, poderemos responder à primeira pergunta da nossa situação-problema:

quantas vezes eu preciso dobrar o papel para chegar à Lua? Esta resposta pode ser fornecida a partir do modelo encontrado e com o uso de calculadora científica ou do próprio aplicativo Desmos. Podemos incentivar os alunos (por tentativas) a substituírem valores em x para verem qual valor se aproxima de 384.400 quilômetros, que seria a distância média da Terra à Lua. Lembrando que deveríamos ajustar as medidas passando de quilômetros para milímetros, desta forma teríamos $384.400.000.000\,mm$, ou $3{,}844.10^{11}\,mm$, e fazendo algumas sugestões para os valores de $\mathbf{x}$ que mais se aproximam do resultado, tais como no intervalo de $\mathbf{39 \leq x \leq 43}$.

Fórmula na calculadora científica para realizar a verificação

Y = 0,1.2^(41.8) = y ≈ $3{,}82.10^{11}$. ou x = 42 dobras aproximadamente.

Como curiosidade, pois precisaríamos do conhecimento de logaritmos que supostamente os alunos ainda não possuem, ficaria como incentivo despertar-lhes o interesse para o assunto ao verificarem a resposta considerando y= $3{,}84.10^{11}$ e substituírem no modelo encontrado, obtendo:

$$\boldsymbol{y = 0{,}1.(2)^{x}}$$

$$\mathbf{3{,}844.10^{11} = 0{,}1.(2)^{x}}$$

$$\mathbf{\frac{3{,}844.10^{11}}{0{,}1} = 0{,}1.(2)^{x}}$$

$$\mathbf{(2)^{x} = 3{,}844.10^{12}}$$

Para encontrarmos x, usaremos $log\,10$:

$$\boldsymbol{log}(2)^{x} = \mathbf{lo\,g}(\mathbf{3{,}844.10^{12}}) = \frac{\mathbf{lo\,g}(\mathbf{3{,}844.10^{12}})}{\boldsymbol{log}(2)}$$

Assim, temos que:

$$\boldsymbol{log_{10}}(\mathbf{3{,}844.10^{12}}) \cong \mathbf{12{,}584}$$

$$\boldsymbol{log_{10}}(2) \cong \mathbf{0{,}301}$$

Portanto,

$$\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{12{,}584}}{\mathbf{0{,}301}}$$

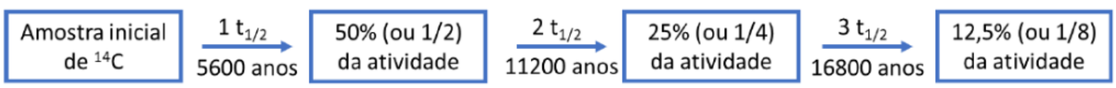
$\mathbf{x \cong 41{,}8}$, ou seja, aproximadamente *42* dobras.

Atividade 3 – Datação por Carbono-14

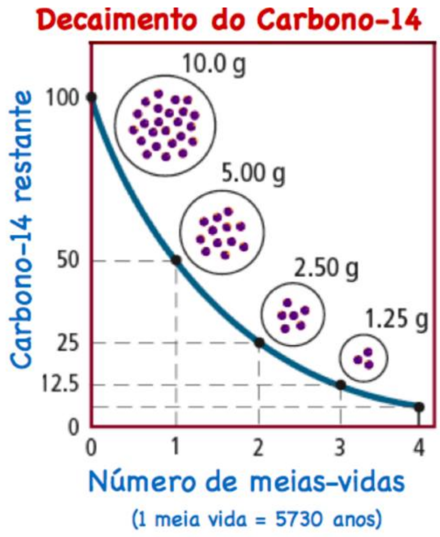
A datação com carbono-14 é uma técnica que permite aos cientistas de diversas áreas do conhecimento determinarem a idade de sedimentos, além de fósseis humanos ou vegetais, pois todos os seres vivos têm, em sua constituição, compostos com átomos de carbono, e dentre estes existe um átomo específico que nos possibilita datar com relativa exatidão em que época tais seres viveram.

Tal tipo de datação é aplicável à madeira, sedimentos orgânicos, conchas marinhas ou qualquer material que tenha absorvido direta ou indiretamente compostos contendo carbono. Essa técnica foi descoberta por Willard Libby nos anos 1940, que observou que a quantidade de C-14 dos tecidos orgânicos mortos diminuía de maneira constante ao longo do tempo. O isótopo de C-14 possui uma meia-vida (o tempo necessário para que determinada massa se reduza pela metade) de 5.730 anos.

Por exemplo, o carbono-14 decai por radiação beta com o tempo de meia-vida igual a 5.600 anos. Isso significa que, se hoje temos uma amostra de carbono-14, ela será reduzida a 50% do seu valor inicial daqui a 5.600 anos. Como o tempo de meia-vida é constante, depois de passada uma segunda meia-vida, ou seja, depois de 11.200 anos, essa amostra será reduzida novamente à metade, passando a 25% (ou 1/4) do seu valor inicial. Passadas exatamente três meias-vidas, ou seja, 16.800 anos, a atividade inicial da amostra será reduzida, passando a 1/8 da sua atividade inicial. E assim por diante. Veja o esquema a seguir para melhor visualização:



Isto é, quando o animal morre, o carbono de seu corpo para de sofrer trocas com o ambiente. Dessa forma, a concentração de C-14 no fóssil será estimada pelas leis do decaimento radioativo, que indicam uma variação da massa do isótopo radioativo constante em um determinado período.



Vamos refletir:

Haveria um modelo matemático para representar o decaimento do Carbono-14?

Procedimentos do pesquisador na Atividade 3

Na aplicação da atividade 3, utilizaremos *datashow*, computador, celulares, calculadora científica, caneta, quadro negro, aplicativo Desmos.

Passo 01 - Apresentação do vídeo sobre como funciona a datação por carbono-14 e dos textos da atividade, promovendo a discussão sobre o tema e sobre a sobre a possibilidade de encontrarmos um modelo matemático do decaimento de C-14.

Video 04 – Como a Datação por Carbono Funciona? (Disponível em https://www.youtube.com/shorts/sHp0OFxxhPU. Acesso: 01/03/2024)

Texto 03 de apoio: DNA de mamute é revelado. (Disponível em: https://agencia.fapesp.br/dna-de-mamute-e-revelado/4798. Acesso: 01/03/2024).

Texto 04 de apoio: Pesquisadores recuperaram DNA de ossos de mamute – Datação de carbono 14. (Disponível em: https://www.resumov.com.br/provas/enem-2016/q63-pesquisadores-recuperaram-dna-de-ossos-de-mamute/. Acesso: 01/03/2024).

Pediremos aos alunos para refletirem sobre os vídeos e os textos entregues da situação-problema: é possível criar um modelo matemático que represente o decaimento do carbono-14?

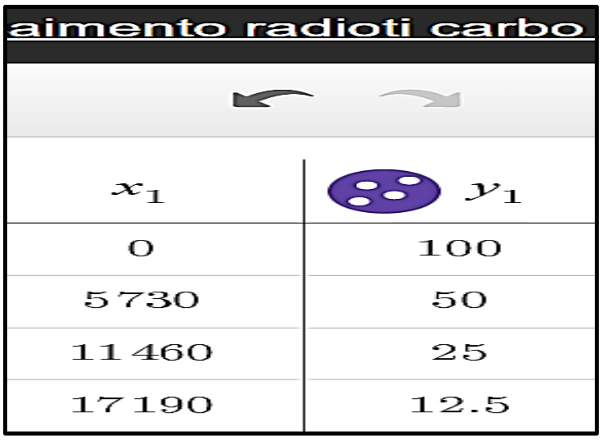
Passo 02 – Construção de tabelas e ajuste de curva dos dados da situação-problema com auxílio do aplicativo Desmos.

I - Neste momento, devemos acessar o aplicativo Desmos na seguinte página eletrônica: https://www.desmos.com/calculator/nhfijoedh4?lang=pt-PT.

II – Instigar e orientar os alunos a construírem uma tabela com os valores das quantidades de carbono-14 em função do tempo (no caderno);

III – Construir a tabela no aplicativo Desmos, conforme mostrado na Figura 14;

Figura 14. Tabela 4 dos dados no *software* Desmos.



aimento radioti carbo

x_1	y_1
0	100
5730	50
11460	25
17190	12.5

Fonte: O autor (2024).

IV – Fazer o ajuste de curva exponencial por meio do aplicativo Desmos com os dados da tabela.

Observação 01: Para obtermos uma melhor visualização do gráfico na tela, como mostra a Figura 15, devemos utilizar a graduação do eixo y variando de -12.0531 até 131.8179, com passos de 25. E, por sua vez, devemos graduar o eixo x variando de -1966.53 até 26807.69, com passos de $5730.$ Lembrando que esta graduação pode mudar conforme o monitor de computador utilizado.

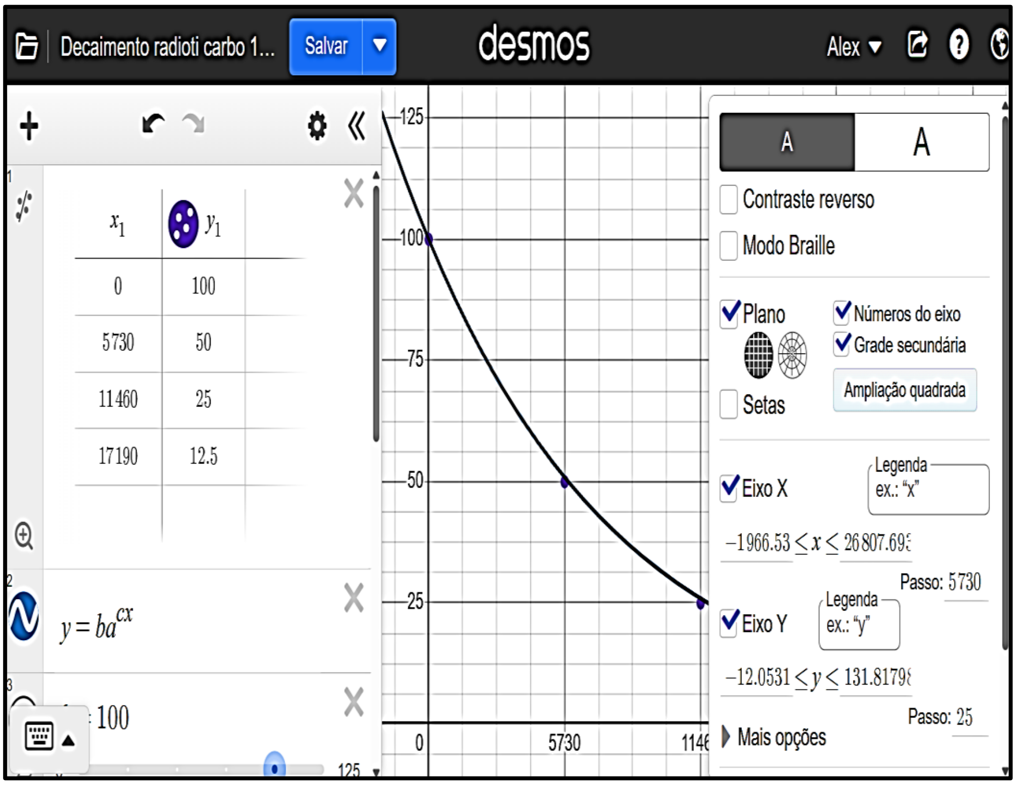
Observação 02: O controle deslizante do parâmetro b deve variar de 0 até 125, com passos de 25, e com $b = 100$ para se ter o melhor ajuste.

Observação 03: O parâmetro *a* deve ser igual a 0.5, com passos de 0.5 e controle deslizante variando de -1 até 1 para se ter o melhor ajuste.

Observação 04: O controle deslizante do parâmetro c deve variar de -0.001 até 0.001, com passos de $0{,}00001$, com $c = 0{,}00017$ para se ter o melhor ajuste de curva.

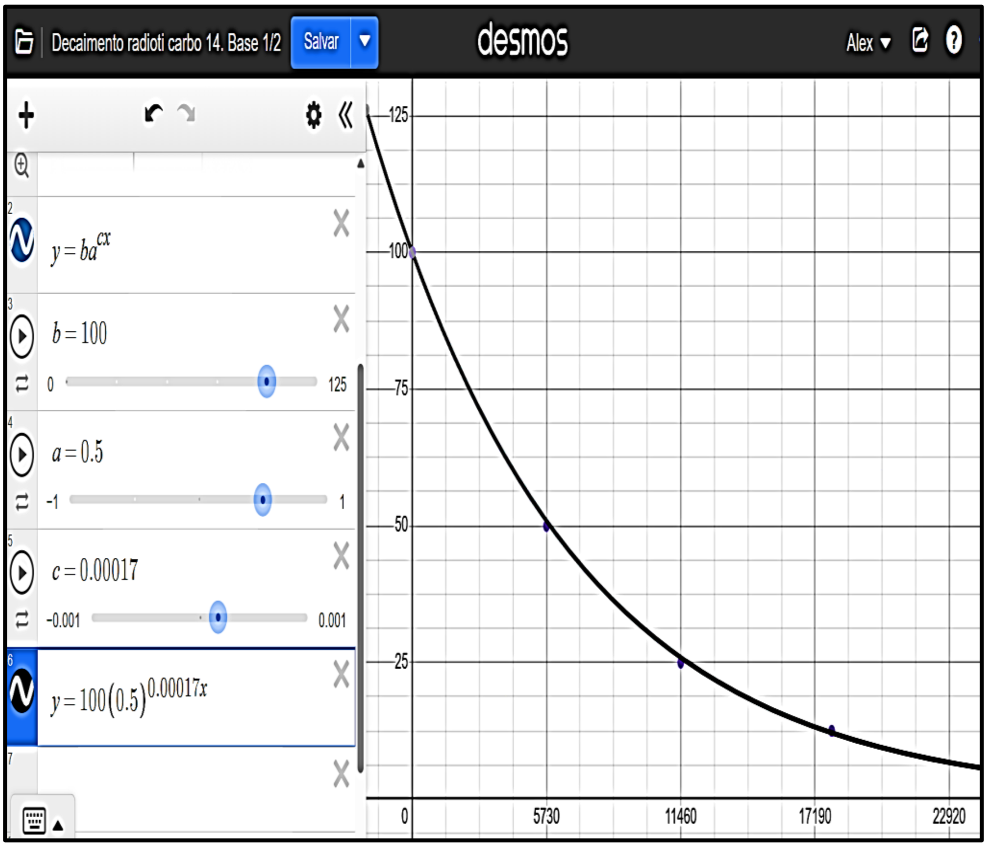
Observação 05: Obteremos, assim, o modelo do ajuste exponencial dos dados do problema $\boldsymbol{y = 100.(0,5)^{0,00017x}}$, conforme ilustrado na Figura 16.

Figura 15. Tabela 4 e graduação dos eixos x e y.



Fonte: O autor (2024).

Figura 16. Gráfico do modelo exponencial $y = 100.(0,5)^{0,00017x}$.



Fonte: O autor (2024).

Passo 03 – Validação e escolha do melhor modelo para solucionar a situação-problema.

I – Esta etapa é o momento de os alunos validarem o modelo escolhido, o que pode ser feito com uma calculadora científica do próprio celular. De posse dos modelos encontrados, basta-lhes testarem os valores utilizados para a abscissa, onde x é a variável tempo em anos (de uma meia-vida) e encontrar os valores de y, que é a porcentagem de material que ainda resta.

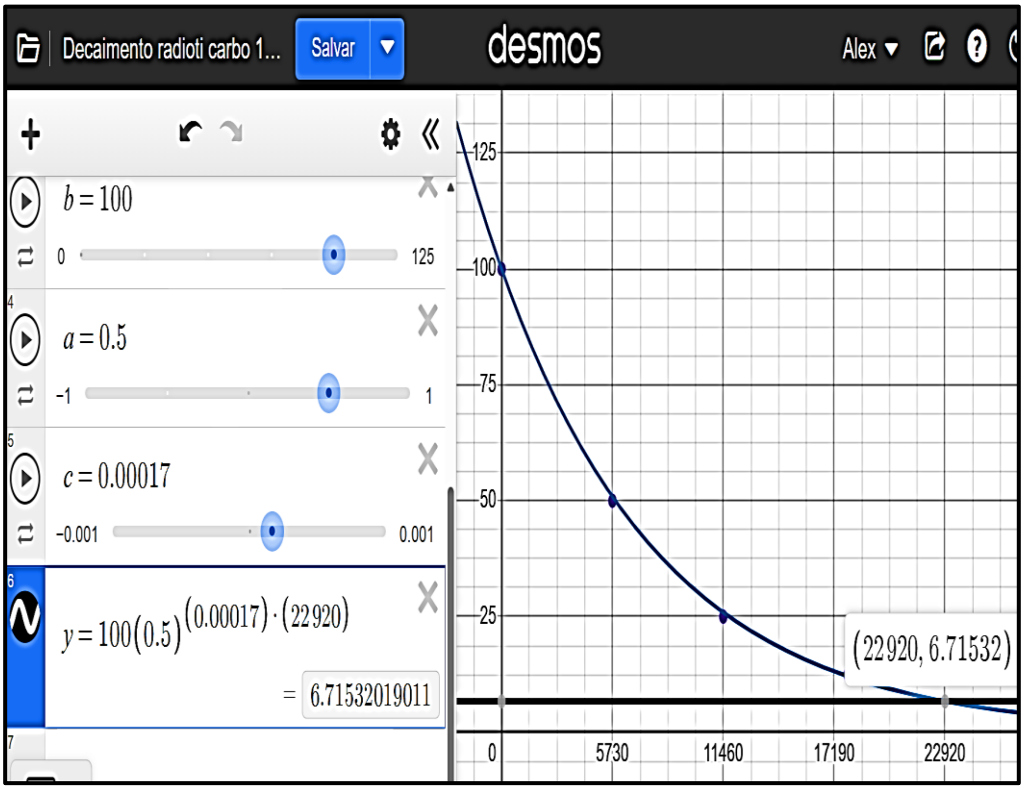
II – Descrever como será feito o teste de validação na calculadora científica – Para esta etapa, testaremos os pontos que indicam a porcentagem de material radioativo restante quando se passarem *22.920* anos.

Modelo Exponencial: $\boldsymbol{y = 100.(0,5)^{0,00017x}}$

Fórmula na calculadora científica para realizar a verificação

Poderemos usar: $\boldsymbol{y = 100.(0,5)\text{\textasciicircum}(0,00017\,x\,22920) = y = 6,71}$. O ponto *(22920, 6,71)* aparece assinalado no gráfico da nossa modelação, conforme podemos observar na Figura 17, fornecendo-nos uma boa margem de precisão para este ajuste dos parâmetros do gráfico do modelo exponencial.

Figura 17. Ponto (22920, 6.71) do gráfico do modelo exponencial.



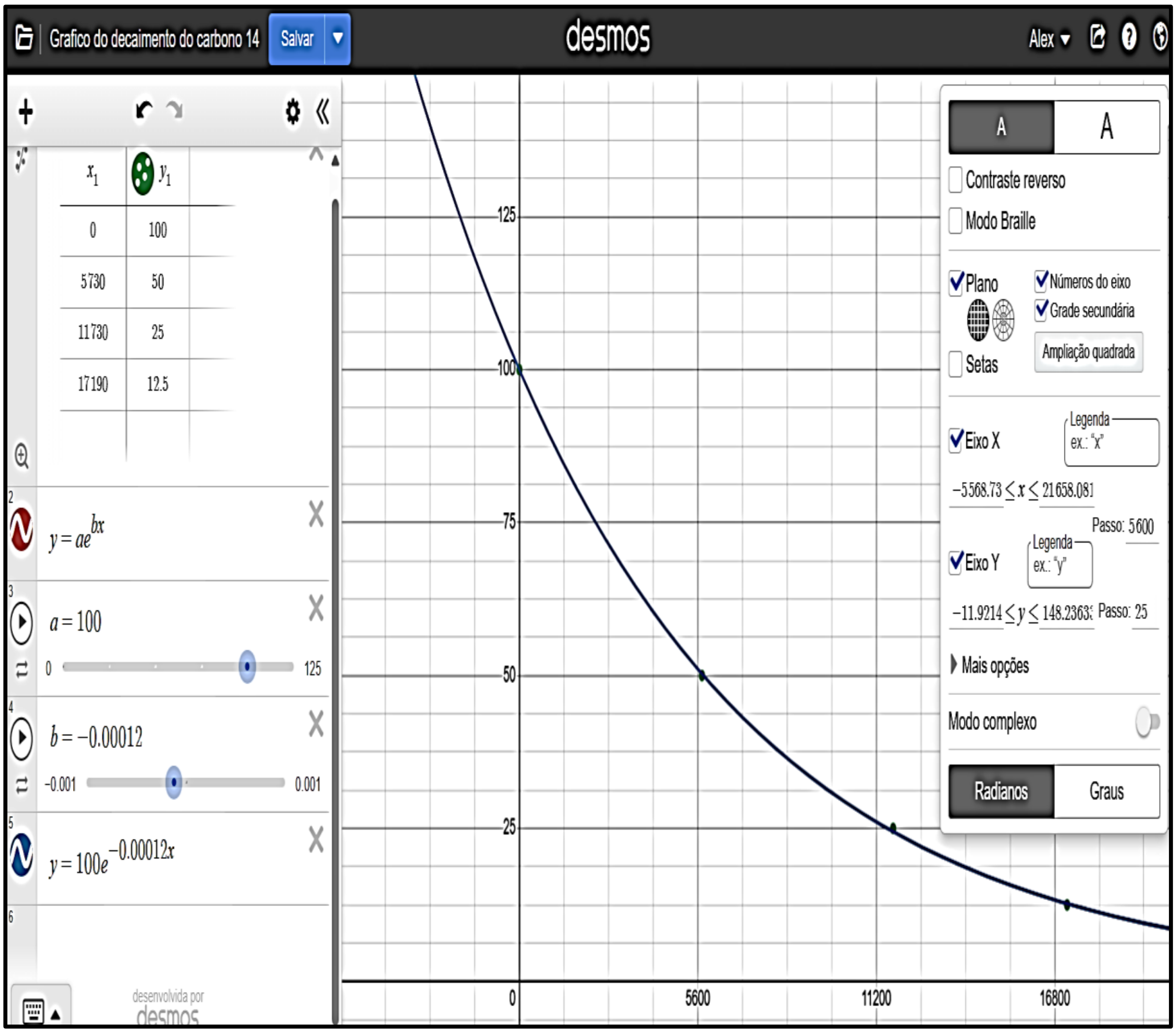
Fonte: O autor (2024).

Passo 04 – Como forma de ampliar a curiosidade e o interesse dos estudantes, é pertinente, neste momento da atividade, apresentar no aplicativo Desmos um modelo matemático de decaimento radioativo do carbono-14 com base na função exponencial natural da forma $\boldsymbol{y = be^{cx}}$, amplamente utilizada em estudos científicos oficiais. Essa sugestão pode ser explorada ao final da aula experimental, conforme indicado na Figura 18, utilizando, por exemplo, o modelo abaixo:

$$\boldsymbol{y = 100.\,e^{-0{,}00012x}}$$

É relevante destacar que, ao realizar o ajuste dos parâmetros no Desmos, a taxa de variação exponencial assume valor negativo, caracterizando o decaimento. Nesse processo, o parâmetro *c*, anteriormente igual a 0,00017, passa a ser -0,00012, refletindo a diminuição progressiva expressa pelo modelo.

Figura 18. Gráfico do modelo exponencial $\boldsymbol{y = 100.\,e^{-0{,}00012x}}$.



Fonte: O autor (2024).

6.2. Experimentação Didática

Neste subitem serão apresentados os procedimentos adotados para a escolha do local da pesquisa e a seleção dos participantes envolvidos. Em seguida, será descrita detalhadamente a aplicação de cada etapa da sequência didática proposta, acompanhada pelos registros escritos produzidos pelos estudantes.

O experimento didático foi realizado nos dias 10, 11, 12, 13 e 17 de junho de 2024, em uma escola pública de Ensino Médio localizada no município de Parauapebas, Pará, tendo como público-alvo uma turma de alunos do 1º ano do período noturno. A escolha da instituição justificou-se pelo apoio institucional oferecido, pois o diretor da escola também integra o Programa de Mestrado em Ensino de Matemática, o que viabilizou as condições necessárias para o bom desenvolvimento da proposta. Vinte estudantes voluntários, que ainda não haviam sido apresentados ao conteúdo de função exponencial, participaram da experiência.

A opção por essa etapa de escolaridade não se deu ao acaso, pois compreendemos que a função exponencial constitui um tema essencial a ser abordado no 1º ano do Ensino Médio, sobretudo diante das fragilidades estruturais e pedagógicas enfrentadas pelas escolas públicas da rede estadual, como greves, escassez de profissionais e carência de metodologias ativas de ensino. Diante desse cenário, a proposta de intervenção busca contribuir para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem, proporcionando aos estudantes uma compreensão mais sólida do conteúdo, além de prepará-los para avaliações escolares e exames seletivos, como vestibulares e o Enem.

Primeiro Encontro

A aplicação da sequência didática, inicialmente prevista para o final do mês de maio, precisou ser adiada para meados de junho devido a reformas na infraestrutura da escola. Após a conclusão das obras, o calendário escolar foi reorganizado, o que resultou na antecipação das avaliações para as primeiras semanas de junho, inviabilizando a realização da intervenção didática nesse período. Superadas essas dificuldades, realizamos, no dia 10 de junho de 2024, a primeira reunião com os estudantes selecionados. Na ocasião, apresentamos os objetivos da pesquisa, explicamos a dinâmica da aplicação, os dias previstos para as atividades, a metodologia adotada e ressaltamos a importância do compromisso e da assiduidade dos participantes no processo experimental.

Com o intuito de estimular o engajamento dos estudantes, acordou-se que a participação no projeto contaria como pontuação no bimestre letivo. Ao final desse primeiro encontro, definimos em conjunto os dias da intervenção: 11, 12, 13 e 17 de junho. A data de 14 de junho, inicialmente considerada, foi descartada devido à realização de uma festividade escolar (festa junina), sendo acordado o encerramento das atividades para o dia 17. O diretor da instituição comprometeu-se a dialogar com os docentes para a liberação dos três primeiros horários de aula, possibilitando que a experimentação ocorresse na sala de recursos, no turno da noite, com o auxílio de *datashow*, entre 19h e 21h.

Segundo Encontro

O segundo encontro com os alunos ocorreu conforme o previsto, no dia 11 de junho de 2024, às 19h, ocasião em que foi realizada a primeira atividade da sequência didática, intitulada “Saúde das crianças e as bactérias”. Inicialmente, a estratégia pensada era dividir a turma em grupos. No entanto, essa abordagem foi reconsiderada pela possibilidade de variação na frequência dos participantes ao longo da aplicação. Optamos, portanto, pela entrega de atividades impressas para todos, de modo que a resolução fosse feita individualmente. Tal decisão visou ampliar a amostra quantitativa de respostas e permitir uma análise mais precisa da evolução individual dos educandos nas etapas subsequentes da intervenção. Dessa forma, foi possível uma avaliação qualitativa do processo de aprendizagem, sobretudo no que diz respeito ao despertar do interesse e à construção de sentidos pela Modelagem Matemática.

No encontro anterior, realizado em 10 de junho de 2024, havíamos feito a apresentação do projeto e a seleção dos estudantes participantes, totalizando 23 alunos. Como já era esperado, esse número não se manteve estável. Na segunda reunião, estiveram presentes 19 estudantes, os quais foram identificados com letras (e números, quando necessário), respeitando o critério de confidencialidade. A codificação foi a seguinte: B, C_1, C_2, E, F, G, G1, I, J, L, K, M_1, M_2, P_1, P_2, R_1, R_2, S e W. Essa sistemática permitiu acompanhar com maior precisão o desempenho de cada discente ao longo do experimento, por meio da análise dos registros escritos e das interações verbais gravadas em áudio, o que favoreceu a compreensão do progresso individual diante das tarefas propostas.

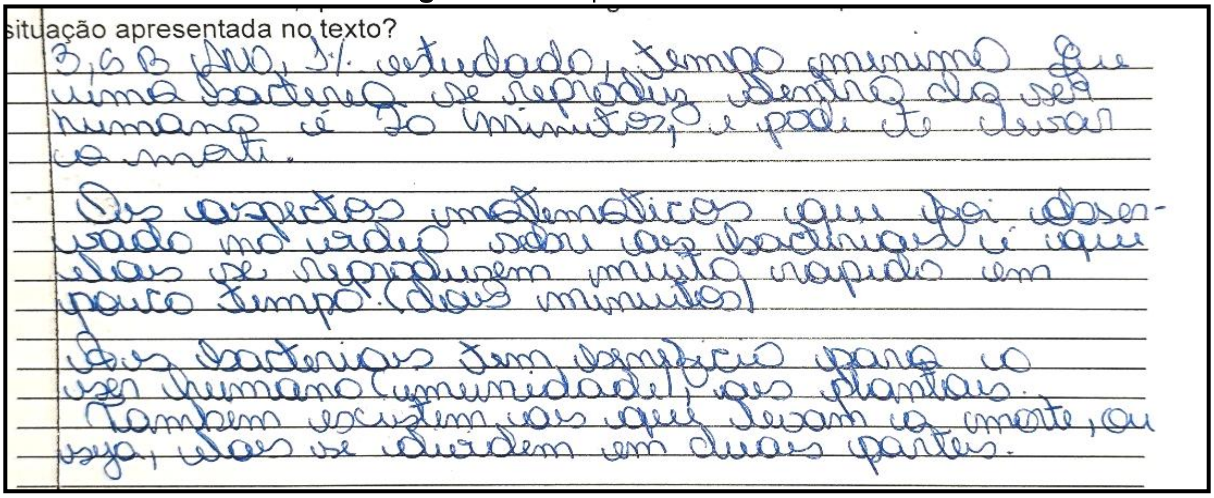
A atividade inaugural abordava o tema transversal “Saúde das crianças e as bactérias", com o objetivo de articular conhecimentos da biologia e da matemática por meio da modelagem de situações reais. A proposta consistiu na análise de dados sobre o crescimento populacional de bactérias e, a partir disso, na construção de tabelas e no uso do aplicativo Desmos para encontrar o modelo matemático mais adequado à situação. Essa metodologia foi replicada nas demais atividades da sequência, promovendo o contato direto com o conceito de crescimento exponencial para a apropriação dos modelos matemáticos pertinentes à resolução dos problemas.

O desenvolvimento da intervenção seguiu os procedimentos previamente descritos na metodologia. Lembrando que este momento da experimentação trata da primeira etapa da aplicação da nossa sequência didática: **a interação com o problema**. A primeira etapa da atividade corresponde ao momento de interação com a situação-problema. Inicialmente, foi exibido o vídeo "Bactérias: o que são? Onde vivem? O que fazem?", que contextualiza o papel das bactérias na saúde humana e os cuidados necessários com a higiene para prevenção de doenças. Em seguida, os alunos tiveram acesso ao texto de apoio "Crescimento e cultivo de bactérias", que serviu de base para a construção da situação-problema a partir de dados reais. O material destacava que, em condições favoráveis, o tempo médio de duplicação das bactérias é de aproximadamente 20 minutos, levando a um crescimento exponencial da população. Posteriormente, foi exibido um segundo vídeo, mais breve, intitulado "Reprodução das bactérias", com imagens reais captadas por microscópio, que mostrava o processo de divisão celular a cada ciclo de 20 minutos.

Com base nesses materiais, foi promovida uma discussão em sala de aula sobre a importância da higiene para a saúde. Os alunos reconheceram que cuidados básicos podem impedir a proliferação de bactérias nocivas ao organismo. Após esse momento reflexivo, o professor-pesquisador conduziu uma mediação didática, instigando-os a identificarem os aspectos matemáticos presentes, especialmente no segundo vídeo. O material audiovisual foi reprisado para que observações mais detalhadas pudessem ser feitas. Os educandos demonstraram interesse e participaram ativamente, expressando oralmente suas interpretações, que foram registradas em áudio. Também foi solicitado o registro escrito das observações individuais, com ênfase nas ideias utilizadas para resolver o problema proposto.

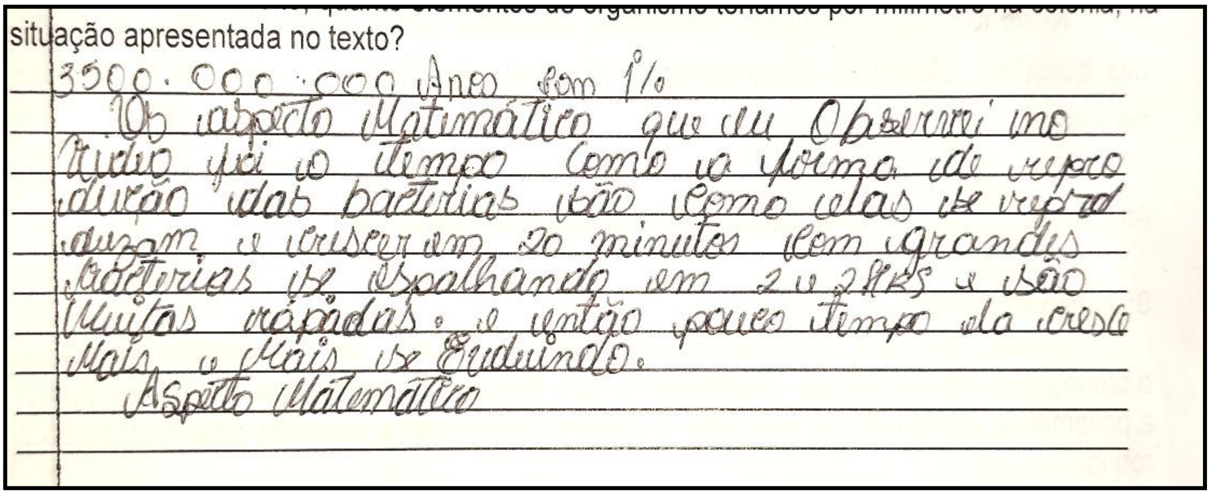
A maioria dos estudantes percebeu que a quantidade de bactérias dobrava a cada 20 minutos, o que caracteriza um crescimento de natureza exponencial. Essa percepção pôde ser verificada nos registros produzidos, como ilustrado nos exemplos dos alunos identificados como G (Figura 19) e M_1 (Figura 20), cujas produções evidenciam a compreensão progressiva do fenômeno modelado.

Figura 19. Resposta do aluno **G**.


situação apresentada no texto?
3,6 B ano, 1% estudado, tempo mínimo que uma bactéria se reprodiz dentro do ser humano é 20 minutos, e pode te levar a morte.
Os aspectos matemáticos que foi observado no vídeo sobre as bactérias é que elas se reproduzem muito rápido em pouco tempo. (20 minutos)
As bactérias tem benefício para o ser humano (imunidade), as plantas. Também existem as que levam a morte, ou seja, elas se dividem em duas partes.

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Figura 20. Resposta do aluno M_1.

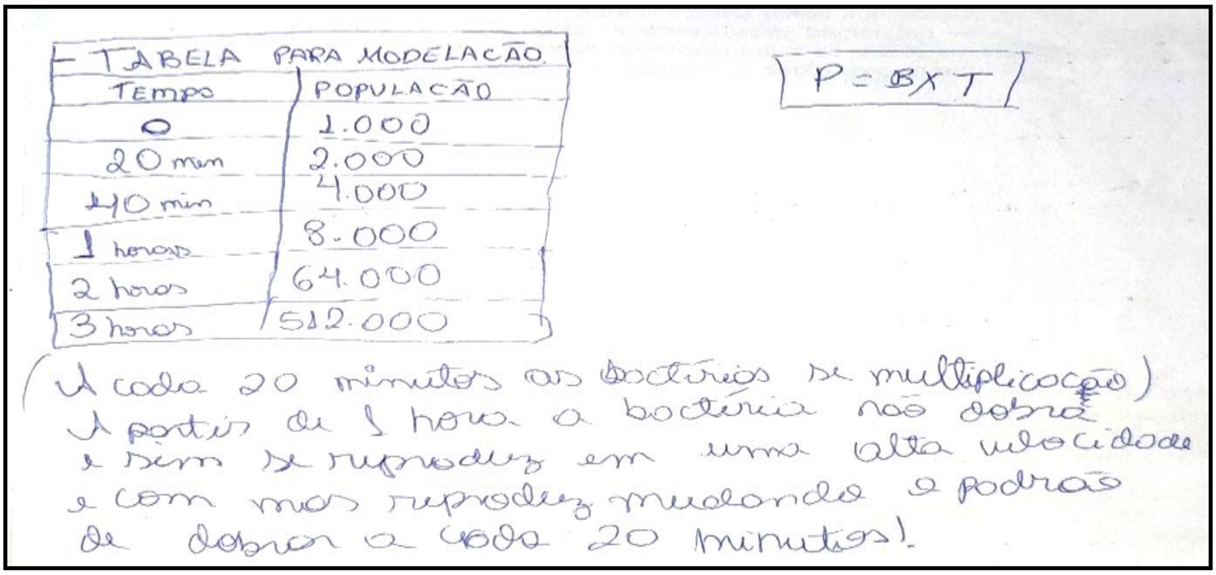

situação apresentada no texto?
3500.000.000 Anos com 1%
Os aspecto Matemático que eu Observei no vídeo foi o tempo como a forma de reprodução das bactérias são como elas se reproduzem e crescem em 20 minutos com grandes bactérias se espalhando em 2 a 2 HRS e são muitas rápidas. e então pouco tempo ela cresce mais e mais se evoluindo.
Aspecto Matemático

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

A partir das observações realizadas pelos alunos — especialmente quanto à percepção de que a população de bactérias dobrava com o tempo —, propomos uma reflexão sobre os vídeos assistidos e o texto de apoio, questionando a possibilidade de construir um modelo matemático que representasse o fenômeno de reprodução bacteriana, conforme descrito na situação-problema. Aqui foi feita uma intervenção pontual, sugerindo-se a elaboração de uma tabela baseada nos dados apresentados com o intuito de identificar padrões matemáticos que auxiliassem na definição do modelo mais adequado. Os estudantes foram orientados, ainda, a registrar por escrito todas as ideias e estratégias consideradas na construção do modelo.

A aplicação da atividade evidenciou que a maioria dos estudantes recorreu inicialmente a uma modelagem de caráter linear, o que era esperado, dado que os mesmos já haviam estudado previamente a função afim. Essa tendência pode ser constatada, por exemplo, no registro escrito do aluno identificado como E (Figura 21).

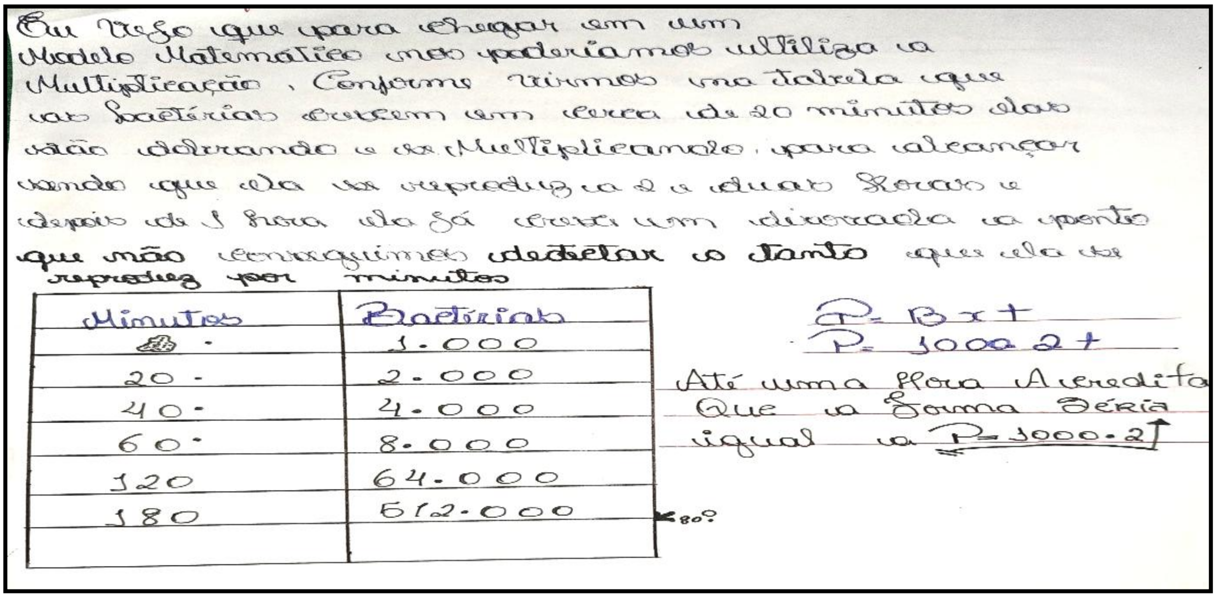
Figura 21. Resposta do aluno **E**.



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

O mesmo foi notado no registro de **J** (Figura 22), que se aproximou bastante da modelação exponencial, apesar de manter a modelação de uma função afim.

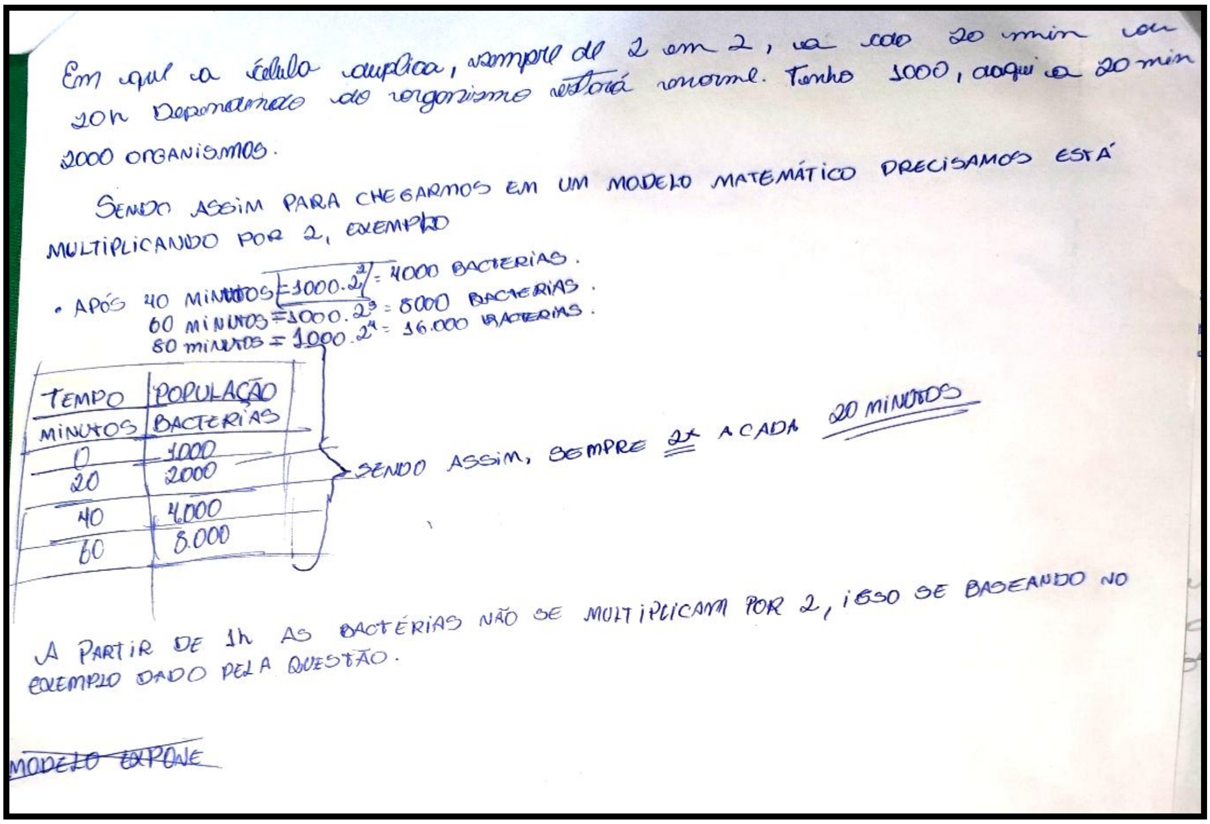
Figura 22. Resposta do aluno **J**.



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Entretanto, ao analisarmos a atividade do aluno identificado como **P2**, tivemos uma agradável surpresa. Diferentemente da maioria, ele conseguiu aplicar corretamente um modelo de natureza exponencial para resolver a situação-problema proposta. Em sua estratégia de resolução, afastou-se da concepção de crescimento linear, reconhecendo que os dados apresentados na tabela indicavam uma progressão de tipo exponencial. O estudante observou que a população de microrganismos dobrava a cada 20 minutos, partindo de uma quantidade inicial de 1000 indivíduos e atingindo 2000 após esse intervalo. A partir disso, ele propôs um modelo baseado em potências de base 2, associando cada ciclo de 20 minutos a um novo expoente. Assim, identificou que, por exemplo, 40 minutos equivaleriam a dois ciclos (2^2), 60 minutos a três ciclos (2^3), e assim sucessivamente, como pode ser verificado na Figura 23.

Figura 23. Resposta do aluno **P2**.



Em que a célula duplica, sempre de 2 em 2, a cada 20 min ou 20h Dependendo do organismo estará enorme. Tenho 1000, daqui a 20 min 2000 organismos.

SENDO ASSIM PARA CHEGARMOS EM UM MODELO MATEMÁTICO PRECISAMOS ESTÁ MULTIPLICANDO POR 2, EXEMPLO

• APÓS 40 MINUTOS $= 1000 \cdot 2^2 =$ 4000 BACTERIAS.
60 MINUTOS $= 1000 \cdot 2^3 =$ 8000 BACTERIAS.
80 MINUTOS $= 1000 \cdot 2^4 =$ 16.000 BACTERIAS.

TEMPO MINUTOS	POPULAÇÃO BACTERIAS
0	1000
20	2000
40	4000
60	8.000

SENDO ASSIM, SEMPRE 2x A CADA 20 MINUTOS

A PARTIR DE 1h AS BACTÉRIAS NÃO SE MULTIPLICAM POR 2, ISSO SE BASEANDO NO EXEMPLO DADO PELA QUESTÃO.

~~MODELO EXPONE~~

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

O aluno **P2** foi capaz de construir uma solução utilizando uma abordagem exponencial, o que evidenciou uma compreensão mais aprofundada da situação-problema. Diante disso, parabenizamos o esforço coletivo da turma e propusemos que fossem realizados testes com os diferentes modelos desenvolvidos, a fim de verificar qual deles melhor se ajustaria aos dados apresentados na atividade.

Com base na proposta de **P₂**, realizamos uma intervenção didática para esclarecer aos estudantes que, quando ocorre um crescimento abrupto de algo, como no caso da reprodução de bactérias, onde elas se duplicam rapidamente em um determinado intervalo de tempo relativamente curto, estamos diante de uma taxa de crescimento exponencial. Assim, o modelo linear da função afim deixa de ser apropriado, exigindo-se, portanto, a aplicação de uma função exponencial para representar com mais fidelidade o fenômeno em questão.

Mostramos aos alunos que existem ferramentas tecnológicas matemáticas que nos auxiliam no estudo do comportamento destes fenômenos. Elas facilitam a construção do modelo matemático e a análise dos dados relacionados às taxas de crescimento e decrescimento exponencial. E foi neste momento que abrimos o aplicativo Desmos. Informamos que este programa poderia ser baixado gratuitamente em seus dispositivos móveis.

Dando prosseguimento à fase de experimentação e à aplicação prática da sequência didática, conforme detalhado na seção anterior, passamos à execução do segundo passo das estratégias propostas, que consistiu na construção de tabelas e no ajuste dos parâmetros do modelo relacionado à situação-problema, com o apoio do aplicativo Desmos. A tabela foi elaborada em conjunto com os alunos, possibilitando a apresentação e análise de um modelo de crescimento exponencial, comumente utilizado para representar fenômenos como a reprodução de bactérias. Em consonância com o que foi descrito na metodologia, sugerimos o uso do modelo exponencial da forma $\boldsymbol{y = b.a^{cx}}$ em substituição ao modelo $\boldsymbol{y = b.e^{cx}}$, por ser mais recorrente em avaliações e atividades do Ensino Médio. Vale destacar que esta etapa corresponde à fase de **matematização** da nossa sequência didática, em que o foco é a construção formal do modelo matemático a partir da análise dos dados do problema.

Neste momento da atividade, o professor-pesquisador propôs que os educandos estabelecessem uma analogia entre a solução construída pelo aluno **P₂** e o modelo exponencial sugerido na intervenção didática. A intenção era levá-los a comparar a estrutura algébrica do modelo $\boldsymbol{y = b.a^{cx}}$ com a expressão utilizada por **P₂** para o tempo de 60 minutos: $\boldsymbol{y = 1000.2^{3} = 8000}$ bactérias. Solicitamos, então, que eles identificassem a correspondência entre os parâmetros do modelo geral e os valores numéricos presentes na solução de **P₂**. Os alunos rapidamente notaram que o valor de b correspondia a 1000 e que a base a era igual a 2. A maior dificuldade, no entanto, consistiu em compreenderem que os parâmetros c e x estavam representados conjuntamente pelo número 3 no expoente da potência.

Diante dessa dificuldade, foi feita uma intervenção didática com o objetivo de esclarecer a função de cada elemento na estrutura do modelo. Explicamos que, para a construção correta do modelo, era necessário representar explicitamente o tempo em minutos como variável. Assim, a letra x corresponderia aos valores da variável tempo (por exemplo, $20, 40, 60$ minutos etc.), conforme indicado na tabela. Já o parâmetro c deveria ser entendido como o fator que, ao ser multiplicado pelo tempo, resultaria no número de ciclos de duplicação (no caso de 60 minutos, $c{\cdot}x = 3$). Dessa forma, a expressão final do modelo poderia ser escrita como, $\boldsymbol{y = 1000.2^{c60}}$, explicitando o papel de cada parâmetro na estrutura funcional do crescimento exponencial.

Salientamos aos alunos que os parâmetros a, b e c deste modelo matemático poderiam ser encontrados com auxílio do aplicativo Desmos. Esclarecemos que, por meio dos recursos tecnológicos do aplicativo, poderíamos definir intervalos de valores para estes parâmetros. E fazer, por tentativas, ajustes no gráfico até aproximarmos ou encontrarmos os pontos correspondentes aos dados da tabela do problema. Feitos estes ajustes na curva exponencial do gráfico dentro do modelo, descobrimos a fórmula que modela o crescimento exponencial da situação, solucionando o problema da questão proposta.

Seguindo os procedimentos que o pesquisador deveria adotar na aplicação da atividade, descritos na seção anterior, consideramos que o controle deslizante do parâmetro b deve variar de 500 até 2000 (intervalo de valores), com $b = 1000$, com passos de 100 para se ter o melhor ajuste. O controle deslizante do parâmetro c deve variar de -0.1 até 0.1, com $c = 0{,}05$, com passos de 0,005 para se ter o melhor ajuste. E o controle deslizante do parâmetro a deve variar de 1 até 5, com $a = 2$, chegando, enfim, à fórmula que representa o modelo de crescimento exponencial da reprodução da população de bactérias: $\boldsymbol{y = 1000.(2)^{0{,}05x}}$.

Neste momento da experimentação didática, os alunos puderam observar no aplicativo Desmos o formato do gráfico do nosso modelo matemático, a curva exponencial. Eram necessários, portanto, testes para aferir o modelo matemático encontrado, como parte da terceira e última etapa da nossa sequência didática: **o**

modelo matemático. Essa etapa, como explicado anteriormente, refere-se ao processo de validação para verificar se o modelo atende adequadamente à questão em estudo. Os alunos alcançam essa conclusão ao testarem, no modelo, novos pontos da tabela. Com o intuito de confirmar a validade do modelo, solicitamos que eles averiguassem, com o auxílio da calculadora dos seus celulares, qual seria a população de bactérias quando tivessem passados $x = 100$ minutos.

Para realizar a verificação, solicitamos que utilizassem na calculadora científica dos seus celulares a fórmula *Y= 1000.2^(0,05x100)*. Os alunos encontram como resultado $y = 32.000$. Ficou comprovado no aplicativo Desmos que o ponto *(100, 32000)* aparece de fato, assinalado no gráfico de nossa modelação. O gráfico passou justamente no ponto de coordenadas *(100, 32.000)*, provando que os ajustes dos parâmetros *a*, *b* e *c* estavam corretos, retificando que após 100 minutos teríamos 32.000 bactérias. Desta forma, com a validação do modelo da situação-problema 01, demos por encerrado o segundo dia de experimentação.

Terceiro Encontro

O terceiro encontro ocorreu no dia 12/06/2024, às 19h. Foi o dia da realização da segunda atividade proposta, com o tema “Dobre uma folha de papel e chegue à Lua”. Neste dia contamos com a presença de 16 alunos (B, C_1, C_2, G, G_1, I, J, L, K, M_1, M_2, P_1, P_2, R_1, R_2, S). Preparamos os recursos necessários à aplicação da sequência didática. Organizamos a sala e esperamos a chegada dos estudantes. Ressaltamos a eles que a atividade seguiria os mesmos passos de implementação da primeira atividade. Entregamos a folha com a atividade 02, em seguida houve a exibição do vídeo “Todos os planetas cabem entre a Terra e a Lua”. Este vídeo sugere que temos uma noção equivocada da distância entre os dois astros. Esta distância é maior que o nosso senso comum imagina. De forma que podemos colocar todos os planetas do sistema solar entre a Terra e a Lua, mais Plutão e ainda sobra espaço, afirmando que, em média, a distância é cerca de 384.400 km entre elas.

O texto de apoio “Qual é a distância da Terra à Lua?” aprofundou o tema e serviu de base para análise dos dados da situação-problema proposta na atividade 2. Isso revela que, às vezes, desenhos e ilustrações colocam a Lua bem perto da Terra, não nos dando uma noção real da distância entre os astros. Como a Lua segue uma órbita elíptica ao redor da Terra, sua distância em relação ao nosso planeta não é fixa. No entanto, em média, a Lua está a cerca de 384.400 km da Terra — o equivalente a alinhar 30 planetas Terra ao longo desse percurso. Além disso, foi mostrada a técnica utilizada pelos gregos do passado para calcular a distância entre elas. Salientamos, novamente, que este momento da experimentação trata da primeira etapa da aplicação de nossa sequência didática: **a interação com o problema**.

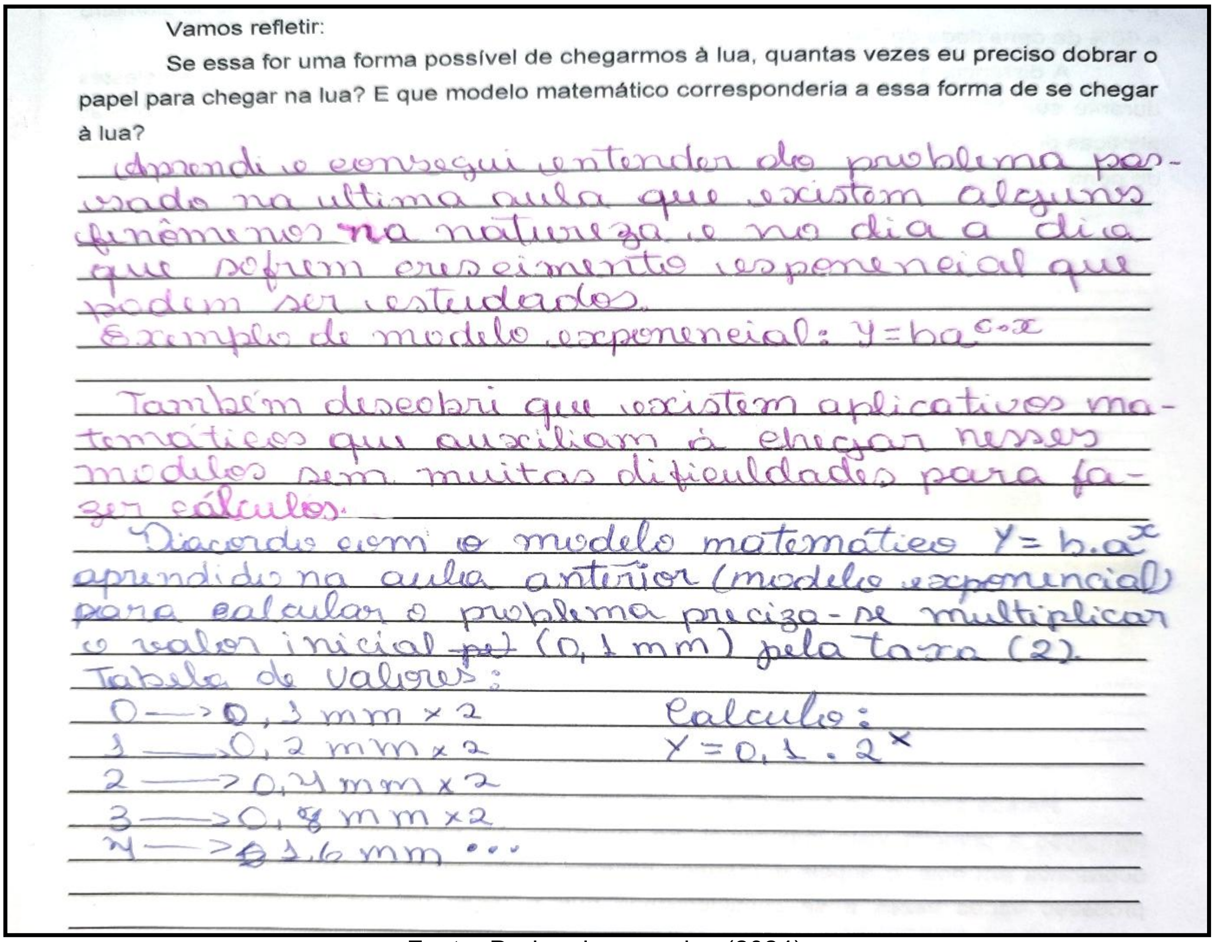
Após estas discussões sobre o tema, foi realizada a leitura da situação-problema proposta, o que causou incredulidade entre os alunos, pelo fato de parecer absurdo, e realmente o é, mas há uma lógica matemática por trás dessa afirmação. Se tomarmos um papel de 0,1 mm de espessura e o dobrarmos em dois, e depois o dobrarmos novamente e repetirmos esse processo várias vezes, e se considerarmos que o papel não deforme com o peso, alcançaríamos uma espessura que nos permitiria ir da Terra à Lua. A problemática da situação é justamente essa: dentro destas condições, quantas vezes precisamos dobrar o papel para chegarmos à Lua? E qual modelo matemático corresponderia a esta forma de chegarmos à Lua?

Em busca da solução do problema proposto, e seguindo o roteiro com os procedimentos de aplicação, conforme feito na primeira atividade, sugerimos aos estudantes novamente a construção de tabelas com os dados extraídos da questão para identificação de algum padrão matemático que auxiliasse na construção do modelo. Novamente pedimos para eles descreverem nos cadernos todas as ideias que utilizariam para alcançar o modelo, levando em consideração o que haviam aprendido na experimentação didática do encontro anterior.

A esta altura, eles já estavam familiarizados com o modelo de crescimento exponencial devido ao contato que tiveram com o aplicativo Desmos na atividade anterior. Após a construção da tabela, eles identificaram os valores correspondentes aos parâmetros do modelo matemático. Com a detecção dos dados do problema, foram incentivados a descrever o processo de criação do modelo matemático que solucionaria o questionamento proposto na situação citada.

Algo positivo que verificamos nesta interação foi que os alunos que não conseguiram desenvolver o primeiro problema entenderam o processo de modelação na segunda atividade. Como no caso do aluno L, que afirmou ter aprendido, da última aula, a existência de fenômenos na natureza e no dia a dia que sofrem crescimento exponencial, podendo os mesmos serem estudados pelo modelo exponencial geral, $\boldsymbol{y = b.a^{cx}}$ ou o modelo da função do tipo exponencial $\boldsymbol{y = b.a^{x}}$ quando $\boldsymbol{c = 1}$, como no caso deste problema proposto, descobrindo também a existência de aplicativos matemáticos que auxiliam na construção deste modelo. Após construir a tabela e analisar os dados, o aluno chegou satisfatoriamente ao modelo matemático da situação-problema proposta: $\boldsymbol{y = 0,1.(2)^x}$, conforme descrito na Figura 24.

Figura 24. Resposta do aluno **L**.


Vamos refletir:

Se essa for uma forma possível de chegarmos à lua, quantas vezes eu preciso dobrar o papel para chegar na lua? E que modelo matemático corresponderia a essa forma de se chegar à lua?

Aprendi e consegui entender do problema passado na ultima aula que existem alguns fenômenos na natureza e no dia a dia que sofrem crescimento esponencial que podem ser estudados.

Exemplo de modelo exponencial: $Y = ba^{c \cdot x}$

Também descobri que existem aplicativos matemáticos que auxiliam á chegar nesses modelos sem muitas dificuldades para fazer cálculos.

Diacordo com o modelo matemático $Y = b.a^x$ aprendido na aula anterior (modelo exponencial) para calcular o problema preciza-se multiplicar o valor inicial ~~pel~~ (0,1 mm) pela taxa (2).

Tabela de Valores:

0 —> 0,1 mm x 2

1 —> 0,2 mm x 2

2 —> 0,4 mm x 2

3 —> 0,8 mm x 2

4 —> 1,6 mm ...

Calculo:

$Y = 0,1 . 2^x$

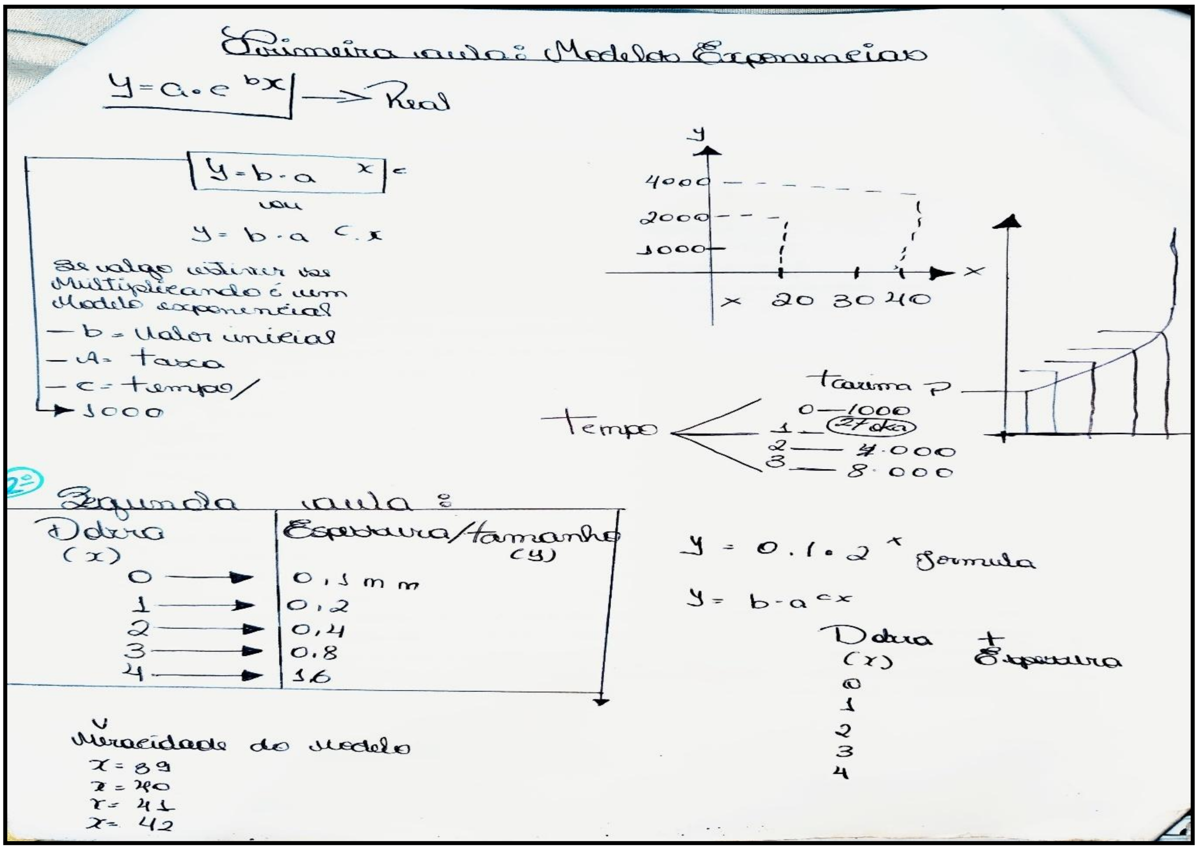
Fonte: Dados da pesquisa (2024).

O aluno **L** não havia desenvolvido a primeira atividade, entretanto, após as construções e considerações feitas sobre o modelo de crescimento exponencial com auxílio do aplicativo Desmos, ele compreendeu a estrutura do modelo e como encontrar os valores dos parâmetros da modelação. De modo geral, ficou evidente para os alunos que, após tabelarmos os dados do problema, o primeiro valor da coluna espessura na tabela era a “primeira letra do modelo” ou o valor inicial, conforme descrito pelo aluno **L**, ao dizer que “para calcular o problema, precisa-se multiplicar o valor inicial (0,1 mm) pela taxa (2)”. A taxa (2) indicava que o valor inicial duplicava de tamanho a cada dobra imposta ao papel. Esta percepção se deu pelo falo da experimentação ocorrida no encontro anterior, onde a quantidade de bactérias também dobrava com o passar dos ciclos de 20 minutos.

Observou-se, com isso, que a espessura do papel duplicava constantemente à medida que fazíamos dobraduras no papel, fato que poderia ser expresso por uma potência de base 2, situação semelhante à que havíamos visto no modelo passado, de forma que poderíamos replicar o modelo exponencial também nesta situação-problema atual. Para sanar uma dúvida que ocorreu na representação dos modelos, explicamos que o modelo exponencial $\boldsymbol{y = b.a^{cx}}$ é o mesmo que o modelo $\boldsymbol{y = b.a^{x}}$; a diferença em relação a este se dá pelo fato de c ser igual a $\boldsymbol{1\ (c = 1)}$.

Além do aluno **L**, o aluno **M₁** também chegou à mesma conclusão. Assim como o aluno **L**, **M₁** não havia desenvolvido a primeira atividade. Entretanto, com as considerações propostas pelo pesquisador na primeira atividade, ele logrou êxito na tarefa, obtendo satisfatoriamente o modelo que soluciona o problema proposto, conforme a Figura 25, retomando os conhecimentos adquiridos na primeira atividade para a execução da segunda atividade. Após as intervenções, esclarecimentos e conhecimentos construídos na primeira aula, **M₁** fez uma analogia correta e encontrou o modelo exponencial matemático (Figura 25). Salientamos que este momento corresponde à segunda etapa de nossa sequência didática: **a matematização**.

Figura 25. Resposta do aluno **M₁**.



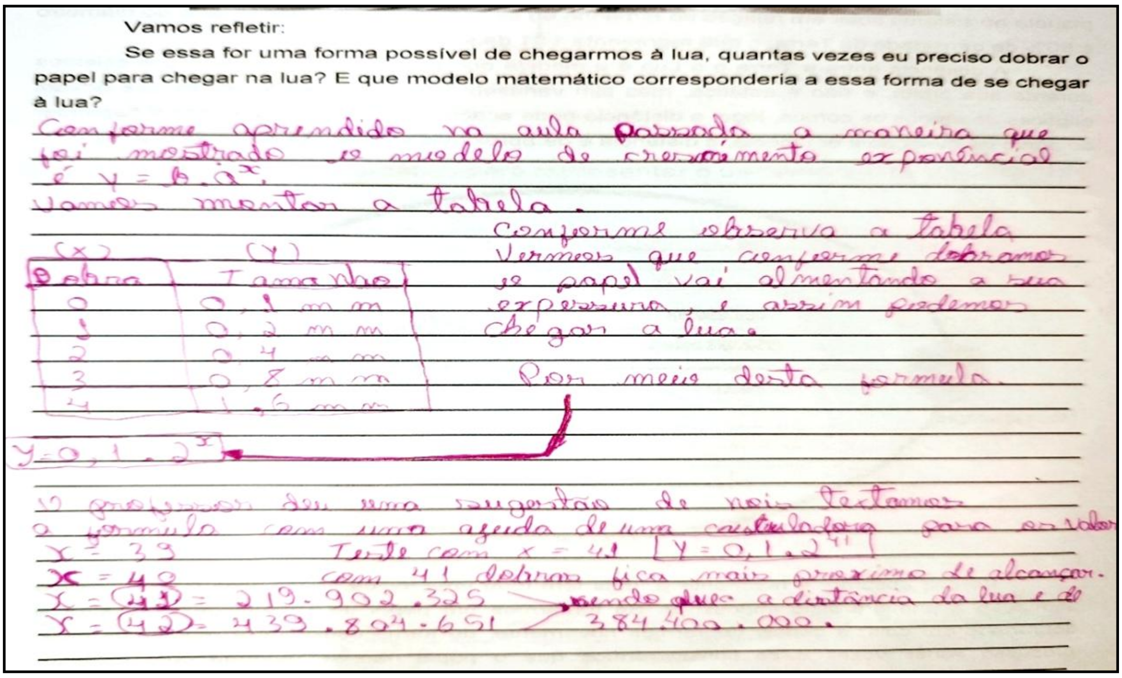
Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Os alunos, em sua maioria, conseguiram chegar ao modelo resolutivo da segunda situação, como mostraremos mais a frente (na seção da análise dos resultados), onde faremos um comparativo do desenvolvimento das atividades a cada aula para termos uma ideia da evolução da compreensão do assunto. Neste momento, seguindo os procedimentos descritos para aplicação da atividade, abrimos o aplicativo Desmos para a construção do modelo e visualização do gráfico da curva exponencial. Verificamos que, de fato, a fórmula na qual encontraríamos a espessura do papel que nos permitiria ir da Terra à Lua é representada pelo modelo matemático $\boldsymbol{y = 0,1.(2)^x}$. Após isso, faltou somente responder: quantas vezes precisamos dobrar o papel para chegar à Lua? A resposta a esta pergunta seria encontrada quando fossem feitos os testes para aferirmos o modelo matemático, como parte da terceira e última etapa da sequência didática: **o modelo matemático**.

Neste momento, fizemos uma intervenção incentivando os discentes a substituírem valores em *x* para verificarem qual se aproximava de 384.400 quilômetros, que é a distância média da Terra à Lua, relembrando-lhes que deviam ajustar as medidas passando de quilômetros para milímetros, ou seja, 384.400 km para 384.400.000.000 mm, ou $3{,}844.10^{11}$ mm. Propomos que os testes fossem feitos para $x = 39$, $x = 40$, $x = 41$ e $x = 42$, com o auxílio da calculadora científica dos seus celulares e por intermédio da fórmula de averiguação, $y = 0{,}1.2^{\wedge X}$. Os alunos supracitados não conseguiram realizar a verificação do modelo, conforme podemos observar nas descrições feitas por eles nas figuras acima.

Entretanto, outros alunos conseguiram validar o modelo matemático ao descobrirem que seriam necessárias aproximadamente 41 dobras no papel para chegarem à Lua, com a seguinte fórmula de checagem na calculadora: $Y = 0{,}1.\ 2^{\wedge}(41)$. Podemos observar a validação do aluno **G1**, na Figura 26.

Figura 26. Resposta do aluno G_1.



Vamos refletir:

Se essa for uma forma possível de chegarmos à lua, quantas vezes eu preciso dobrar o papel para chegar na lua? E que modelo matemático corresponderia a essa forma de se chegar à lua?

Conforme aprendido na aula passada a maneira que foi mostrado o modelo de crescimento exponencial é $y = b.a^x$.
Vamos montar a tabela.

(x) Dobra	(y) Tamanho
0	0,1 mm
1	0,2 mm
2	0,4 mm
3	0,8 mm
4	1,6 mm

Conforme observa a tabela vermos que conforme dobramos o papel vai almentando a sua expessura, e assim podemos chegar a lua.
Por meio desta formula.

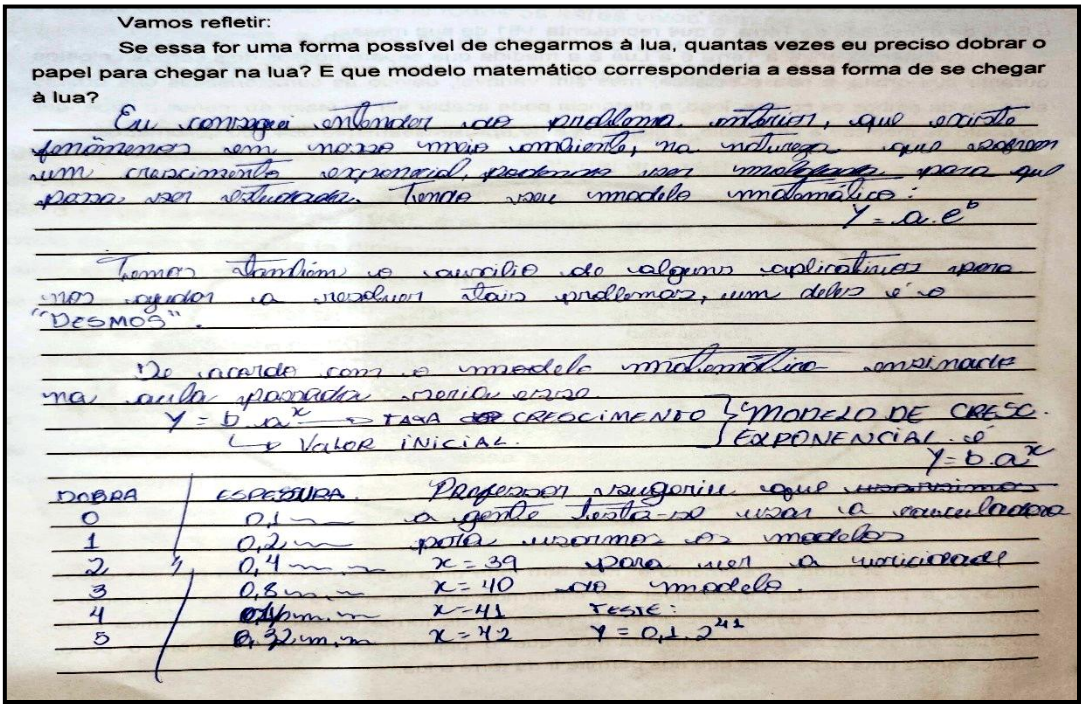
$y = 0,1 . 2^x$

O professor deu uma sugestão de nois testamos a formula com uma ajuda de uma calculadora para os valor
x = 39 Teste com x = 41 $\boxed{y = 0,1 . 2^{41}}$
x = 40 com 41 dobras fica mais proximo de alcançar.
x = (41) = 219.902.325 → sendo que a distância da lua é de
x = (42) = 439.804.651 ↗ 384.400.000.

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

E também pelo aluno **P2**, na Figura 27. Eles conseguiram descrever bem todo o processo que os levou à aquisição do modelo e os testes para legitimar a sua eficiência. Fizeram análises parecidas, inclusive chegando ao mesmo resultado de 41 dobraduras para atingir a espessura necessária para se chegar à Lua.

Figura 27. Resposta do aluno P_2.



Vamos refletir:

Se essa for uma forma possível de chegarmos à lua, quantas vezes eu preciso dobrar o papel para chegar na lua? E que modelo matemático corresponderia a essa forma de se chegar à lua?

Eu consegui entender o problema inteiro, que existe fenômenos em nosso meio ambiente, na natureza que sofrem um crescimento exponencial, podemos usar modelagem para que possa ser estudado. Tendo seu modelo matemático:
$Y = a.e^b$

Temos também o auxilio de alguns aplicativos para nos ajudar a resolver tais problemas, um deles é o "DESMOS".

De acordo com o modelo matemático ensinado na aula passada seria esse:
$Y = b.a^x$ → TAXA ~~DE~~ CRESCIMENTO } MODELO DE CRESC. EXPONENCIAL é $Y = b.a^x$
↳ VALOR INICIAL.

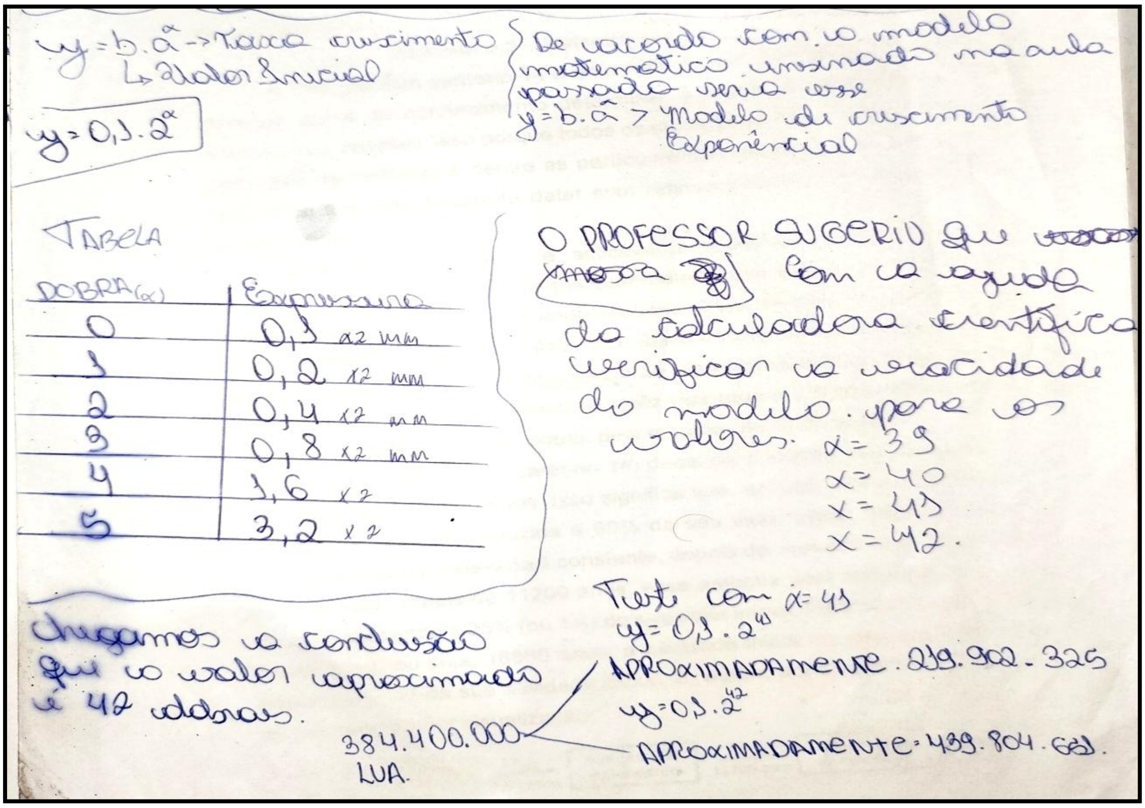
DOBRA	ESPESSURA
0	0,1 mm
1	0,2 mm
2	0,4 mm
3	0,8 mm
4	0,16 mm
5	0,32 mm

Professor sugeriu que ~~usassemos~~ a gente testa-se usar a calculadora para usarmos os modelos
x = 39 para ver a variedade do modelo.
x = 40
x = 41 TESTE:
x = 42 $Y = 0,1.2^{41}$

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

O aluno **G₁** conseguiu, de fato, chegar à resposta correta após fazer o teste, que, no caso, corresponde a 42 dobraduras, aproximadamente. Ele percebeu que com 42 dobraduras teríamos um valor cerca de $439.804.650.000\ mm$, que é mais próximo da distância média da Terra à Lua de $384.400.000.000\ mm$, e com 41 dobraduras teríamos um valor aproximado de $201.902.325.000\ mm$, conforme podemos observar na Figura 28.

Figura 28. Resposta do aluno **G₁**.


$y = b.a^x$ -> Taxa crescimento
↳ Valor Inicial

$\boxed{y = 0,1.2^x}$

De acordo com o modelo matemático ensinado na aula passada seria esse
$y = b.a^x$ > Modelo de crescimento Exponencial

TABELA

DOBRA(x)	Expressão
0	0,1 x2 mm
1	0,2 x2 mm
2	0,4 x2 mm
3	0,8 x2 mm
4	1,6 x2
5	3,2 x2

O PROFESSOR SUGERIU que ~~xxxx~~ com a ajuda da calculadora científica verificar a veracidade do modelo. para os valores. $x = 39$ $x = 40$ $x = 41$ $x = 42$.

Teste com $x = 41$
$y = 0,1.2^{41}$
APROXIMADAMENTE . 219.902.325
$y = 0,1.2^{42}$
APROXIMADAMENTE. 439.804.651.

Chegamos a conclusão que o valor aproximado é 42 dobras.

384.400.000
LUA.

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

O equívoco cometido por alguns estudantes ao indicarem 41 ou 42 dobraduras como resposta poderia ter sido evitado caso fossem considerados valores decimais para a variável x entre esses dois inteiros. Dado que eles tinham à disposição calculadoras científicas, seria plenamente viável realizar testes com valores fracionários, como $x = 41,6$; $x = 41,7$; $x = 41,8$; $x = 41,9$ e $x = 42$. Com isso, seria possível identificar que $x = 41,8$ apresentava o resultado mais próximo do valor esperado, conduzindo logicamente à conclusão de que 42 dobraduras seria a solução mais adequada. Esse ponto foi posteriormente esclarecido e demonstrado aos alunos assim que identificamos o equívoco. Ressaltamos que a utilização de valores decimais permitiria maior precisão na verificação e, consequentemente, na validação do modelo proposto, proporcionando uma estimativa mais acurada. Essa observação apresenta-se como um importante indicativo de aprimoramento para aplicações futuras da sequência didática.

Quarto Encontro

Encontramo-nos pela quarta vez no dia 13/06/2024, às 19h, para realizar a terceira atividade proposta, intitulada "Datação por Carbono-14". Organizamos previamente os materiais necessários para a aplicação da sequência didática e arrumamos a sala enquanto aguardávamos a chegada dos participantes. Nesse dia contamos com a presença de 13 estudantes que se propuseram a fazer a quarta atividade, e foram eles: B, C_2, G, G_1, I, J, K, L, M_1, M_2, P_1, P_2, S. Informamos que a dinâmica da atividade seguiria o mesmo formato da primeira e da segunda. Após distribuirmos as folhas com a atividade 3, exibimos o vídeo relacionado ao tema.

Neste instante apresentamos um vídeo explicativo acerca dos princípios que regem a datação por carbono-14, complementando com a leitura e análise dos textos indicados na atividade. Essa abordagem teve como objetivo fomentar uma discussão crítica sobre o tema, bem como examinar a viabilidade da construção de um modelo matemático que descreva, de forma satisfatória, o comportamento do decaimento radioativo do carbono-14 ao longo do tempo. Esse momento, como dito nas outras experimentações, trata da primeira etapa da aplicação da nossa sequência didática: **a interação com o problema**.

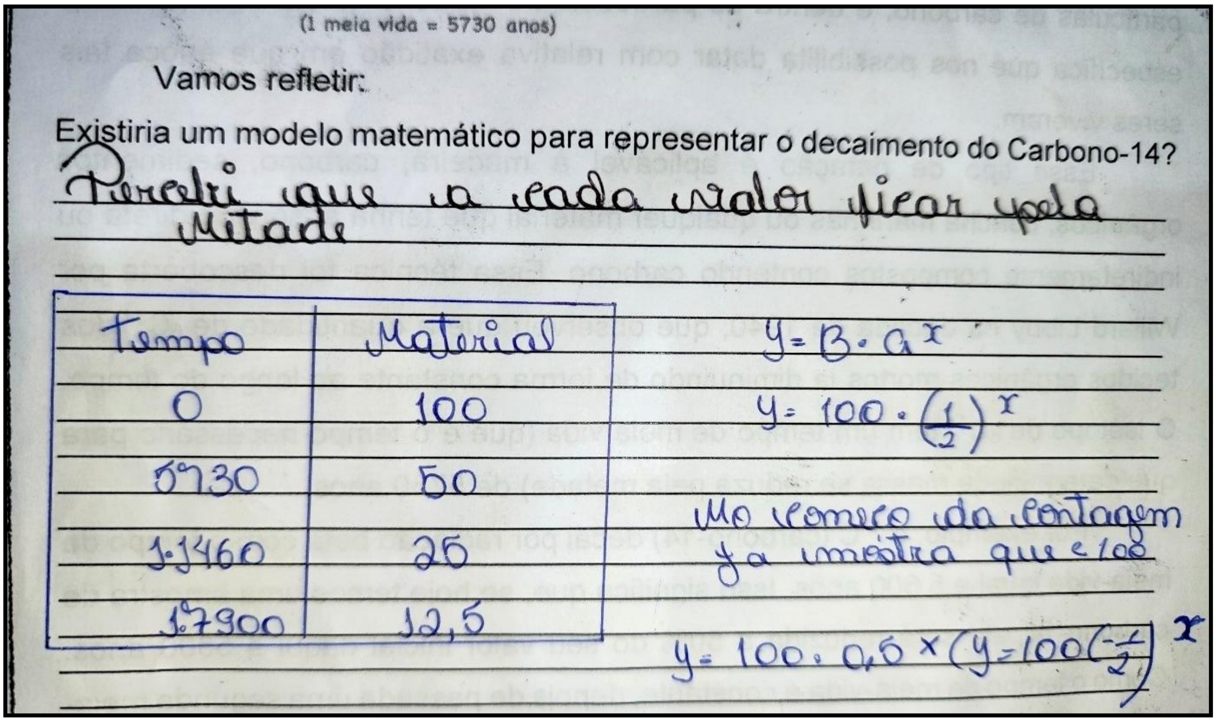
Primeiramente, reproduzimos o vídeo intitulado "Como a datação por carbono funciona?", que nos mostra que podemos medir a idade de um organismo que estava vivo por meio da quantidade de C-14 nele presente. O vídeo segue explicando que o organismo, depois de morto, para de ingerir C-14. E, como esse elemento é radioativo, ele vai diminuindo com o tempo, levando cerca de 5.730 anos para que metade do C-14 de uma amostra demore para desaparecer. Com base nesta informação, os cientistas conseguem medir a idade de algo que estava vivo apenas medindo a quantidade de carbono-14 presente.

Também apresentamos os textos de apoio, "DNA de mamute é revelado" e "Pesquisadores recuperaram DNA de ossos de mamute – Datação de carbono-14", que revelam que pesquisadores recuperaram DNA de ossos de mamute (*Mammuthus primigenius*) encontrados na Sibéria e que tiveram sua idade de cerca de 28 mil anos confirmada pela técnica do C-14, de onde extraímos os dados para elaboração da questão. Em seguida, pedimos aos alunos para refletirem sobre o vídeo e os textos da situação-problema, cuja finalidade era saber se é possível criar um modelo matemático que represente o decaimento do C-14?

A realização desta atividade representou um desafio significativo para os estudantes. A maioria deles não conseguiu desenvolvê-la adequadamente, principalmente devido à dificuldade em construírem a tabela com base nos dados apresentados na situação-problema. Isso se deve, em grande parte, ao fato de que a lógica envolvida nesta questão diferia substancialmente das duas atividades anteriores, nas quais o valor da variável y dobrava em determinados intervalos de tempo. No presente caso, foi necessária uma intervenção pontual por parte do professor-pesquisador, esclarecendo que a variável y, expressa em termos percentuais, se reduzia à metade a cada intervalo de *5.730* anos — valor correspondente à variável x. A partir dessa explicação, alguns alunos conseguiram organizar a tabela corretamente, compreendendo que, assim como na primeira atividade, tínhamos ciclos de *20* minutos, e aqui os ciclos seriam de *5.730* anos. Esse intervalo marca o tempo necessário para que a quantidade inicial da amostra seja reduzida pela metade, caracterizando o conceito de meia-vida do carbono-14, o qual se repete ciclicamente a cada novo período.

Após a intervenção pelo pesquisador, os estudantes identificados como **M_1**, **G, C_2** e **B** foram capazes de compreender que seria necessário ajustar o parâmetro *a* do modelo matemático. Ao contrário dos exemplos anteriores, nos quais o valor de *a* era igual a 2, representando a duplicação da quantidade, neste caso o valor apropriado para o parâmetro passou a ser 0,5 ou 1/2 (meio), de modo a refletir a redução da amostra à metade a cada ciclo. Contudo, ao aplicarem essa nova compreensão, os alunos, por analogia à atividade anterior, elevaram diretamente a base *a* ao valor de x = 5.730, isto é, ao tempo correspondente à meia-vida do carbono-14, construindo, assim, o modelo $\boldsymbol{y = 100 \,.\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}$, a exemplo da Figura 29, relativa ao aluno **M_1**.

Figura 29. Resposta do aluno **M₁**..



(1 meia vida = 5730 anos)

Vamos refletir:

Existiria um modelo matemático para representar o decaimento do Carbono-14?

Percebi que a cada valor ficar pela metade

Tempo	Material
0	100
5730	50
1.1460	25
1.7900	12,5

$y = B \cdot a^x$

$y = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

No começo da contagem já a amostra que é 100

$y = 100 \cdot 0{,}5^x \left(y = 100\left(\frac{1}{2}\right)^x\right)$

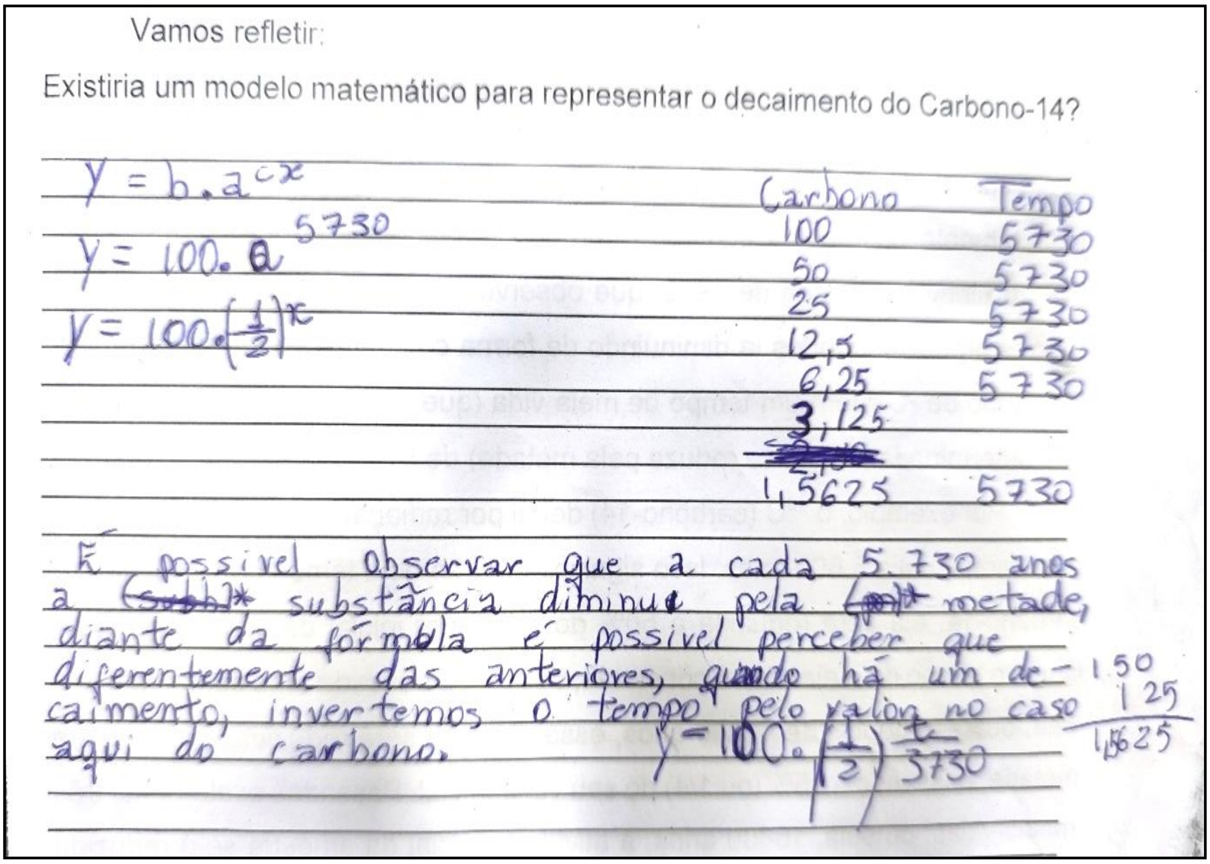
Fonte: Dados da pesquisa (2024).

O modelo construído por parte dos alunos apresentou grande proximidade com a modelagem esperada para representar o decaimento radioativo do carbono-14, que era o objetivo almejado nesta etapa da atividade. Notou-se um progresso significativo na compreensão dos estudantes, resultado direto das experimentações anteriores. Eles demonstraram ter assimilado a estrutura padrão da fórmula aplicada para estudar esse tipo de fenômeno, ora adotando uma base a igual a *2* — como nas situações de crescimento exponencial anteriores —, ora utilizando uma base a igual a **0,5** para representar processos de decaimento. Embora, durante a experimentação, os valores obtidos nas substituições da variável **x** pelos tempos tabelados não tenham gerado resultados exatos — o que era esperado —, isso não compromete a importância dos avanços observados no processo de aprendizagem.

Por outro lado, os estudantes identificados como **G₁** e **K** demonstraram maior atenção às orientações fornecidas durante a intervenção didática e conseguiram formular o modelo adequado à situação-problema. Assim como na primeira atividade, em que os ciclos de crescimento ocorriam a cada *20 minutos*, neste caso a dinâmica envolvia ciclos de *5.730* anos, correspondentes à meia-vida do carbono-14.

Importa destacar que a modelagem apresentada por **M₁**, **G**, **C₂** e **B** não pode ser considerada incorreta, desde que se compreenda a variável *x* como representando a quantidade de ciclos completos de meia-vida. Para se alcançar esse entendimento, seria necessário dividir os valores de tempo tabelados — como *5.730, 11.470, 17.960*, entre outros — pelo valor da meia-vida. Essa estratégia foi corretamente adotada pelos alunos **G₁** e **K**, conforme evidenciado, por exemplo, no modelo registrado na Figura 30, elaborado pelo aluno **K**.

Figura 30. Resposta do aluno **K**.


Vamos refletir:

Existiria um modelo matemático para representar o decaimento do Carbono-14?

$y = b \cdot a^{cx}$

$y = 100 \cdot a^{5730}$

$y = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

Carbono	Tempo
100	5730
50	5730
25	5730
12,5	5730
6,25	5730
3,125	
~~2,10~~	
1,5625	5730

É possivel observar que a cada 5 730 anos a ~~(subs)~~* substância diminue pela ~~(met)~~* metade, diante da fórmula é possivel perceber que diferentemente das anteriores, quando há um decaimento, invertemos o tempo pelo valor no caso aqui do carbono.

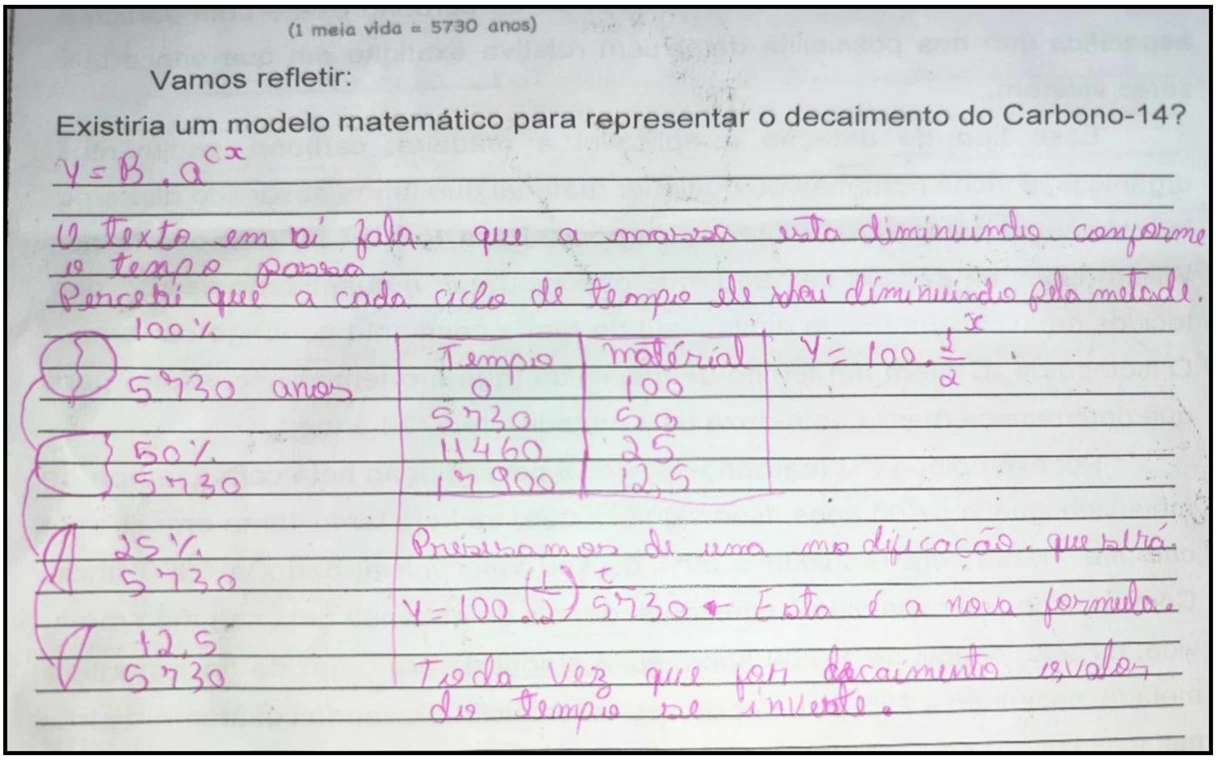
$y = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$

1.50
1 25
1,5625

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

É interessante perceber, na figura acima, que o aluno **K** tentou reproduzir, primeiramente, o modelo parecido com o da segunda atividade, onde apenas trocou os valores da variável *a* de *2* para *1/2* (meio) e aplicou o valor *5.730* diretamente na varável *t*. Todavia, o aluno aprimorou o modelo quando inverteu o tempo de meia-vida, encontrando a seguinte modelação para solucionar o problema proposto na situação $\boldsymbol{y = 100 \, . \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}}$. Solução esta também proposta pelo aluno **G₁**, como podemos averiguar na Figura 31. Salientamos que este momento corresponde à segunda etapa da nossa sequência didática: **a matematização**.

Figura 31. Resposta do aluno $\mathbf{G_1}$.


(1 meia vida = 5730 anos)

Vamos refletir:

Existiria um modelo matemático para representar o decaimento do Carbono-14?

$Y = B \cdot a^{cx}$

O texto em si fala que a massa esta diminuindo conforme o tempo passa

Percebi que a cada ciclo de tempo ele vai diminuindo pela metade.

100%
5730 anos
50%
5730
25%
5730
12,5
5730

Tempo	material
0	100
5730	50
11460	25
17900	12,5

$Y = 100 \cdot \frac{1}{2}^{x}$

Precisamos de uma modificação que será:

$Y = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$ ← Esta é a nova formula.

Toda vez que for decaimento o valor do tempo se inverte.

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Dando prosseguimento à fase de experimentação e à efetivação dos procedimentos delineados na implementação da sequência didática, recorremos ao segundo passo das estratégias de aplicação, o qual envolve a construção de tabelas e o ajuste de curvas aos dados da situação-problema, com o suporte do aplicativo Desmos. A partir dessa etapa, elaboramos a tabela correspondente e apresentamos aos estudantes o modelo de crescimento exponencial, frequentemente empregado para descrever fenômenos no estudo do decaimento radioativo do carbono-14. Em consonância com a metodologia adotada, propusemos a utilização do modelo exponencial do tipo $\boldsymbol{y = b.a^{cx}}$, já conhecido pelos estudantes.

Considerando os ajustes dos parâmetros do modelo da curva exponencial da situação-problema, sugerimos, por meio do aplicativo Desmos, o seguinte modelo matemático para descrever o decaimento radioativo do C-14: $\boldsymbol{y = 100\,.\,(0,5)^{0,000017x}}$. Ressaltamos aos alunos que o parâmetro $c \simeq 0{,}000017$ aparece da inversão do tempo de meia-vida na variável x. Portanto, temos que $\boldsymbol{\frac{1}{5730} \simeq 0,00017}$, que surge para se adequar ao modelo exponencial matemático do aplicativo. Logo, o modelo matemático que chegamos, $\boldsymbol{y = 100\,.\,(0,5)^{0,000017x}}$, é somente outra forma de reescrever o modelo $\boldsymbol{y = 100 \,.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}}$ encontrado pelos alunos.

Por fim, houve o momento de fazermos a aferição para comprovarmos que o modelo matemático é adequado para solucionar a situação-problema proposta, como componente da terceira e última fase da nossa sequência didática: **o modelo matemático**. Por meio de um simples teste, solicitamos aos estudantes, a utilização na calculadora para a seguinte fórmula de averiguação: ***Y = 100.(0,5)^(0,000017. 22920)***. Eles chegaram à conclusão de que quando se passassem ***x = 22.920*** anos, teríamos aproximadamente ***y ≃ 6,71 %*** da amostra de carbono-14. Finalizamos, assim, nosso quarto encontro de experimentação didática.

Quinto Encontro

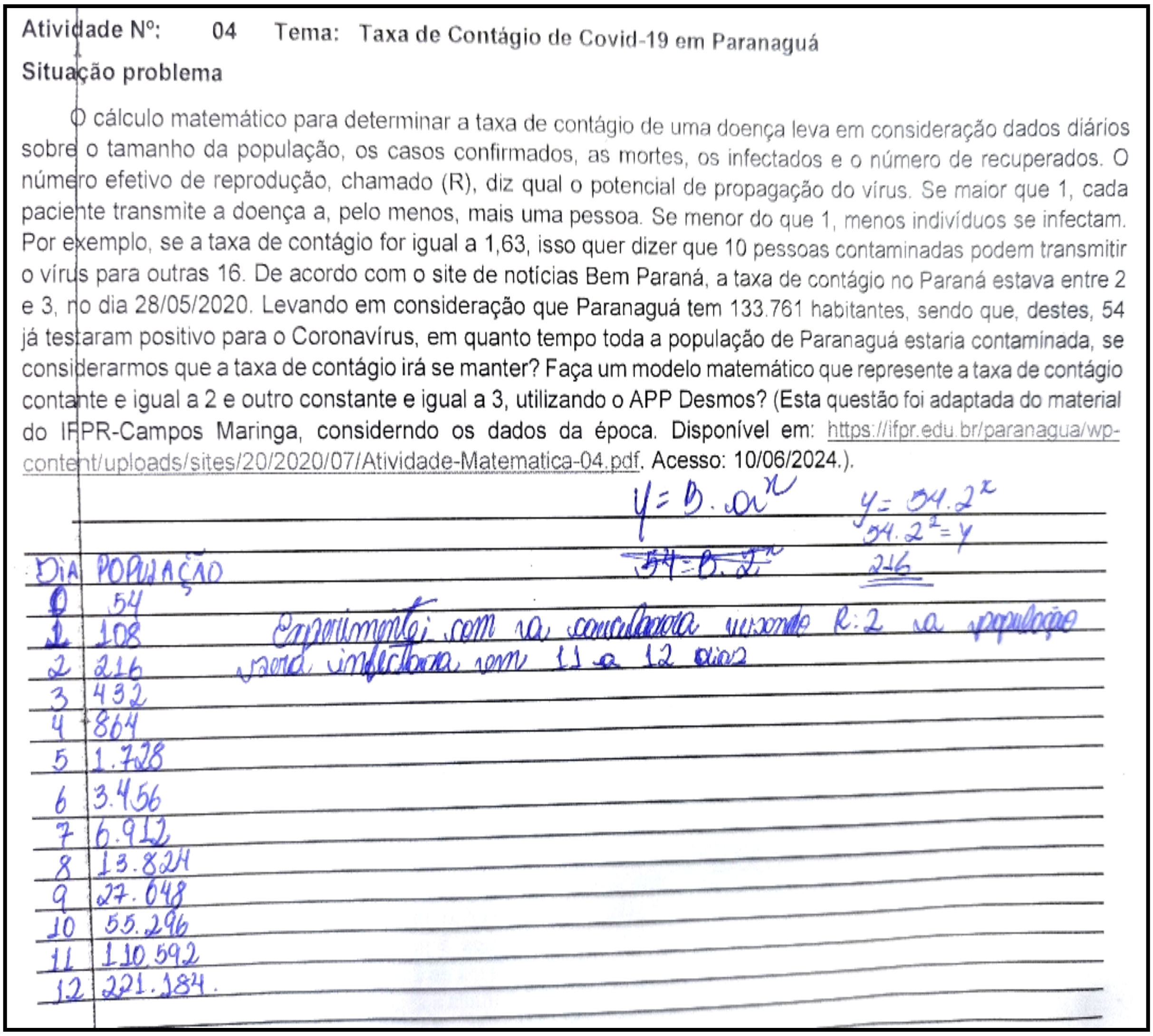
O quinto encontro da sequência didática foi realizado no dia 17 de junho de 2024, às 19h, conforme previamente acordado. Uma das premissas centrais da proposta de intervenção didática consistia em adotar uma postura de mediação, buscando intervir o mínimo possível no processo de construção do conhecimento por parte dos alunos. O objetivo era permitir que os discentes elaborassem sua própria compreensão sobre os conceitos matemáticos, com base na vivência das atividades propostas. Assim, optamos por adiar a apresentação formal dos conteúdos teóricos, reservando este momento para uma etapa posterior, em que a aprendizagem já estivesse em desenvolvimento. Somente neste quinto encontro foi ministrada uma aula expositiva, com foco nos elementos teóricos da função exponencial, incluindo sua definição, formas algébricas, representações gráficas, aplicações e os modelos de crescimento e decaimento associados.

Para este propósito, foi elaborada uma apostila didática, apresentada aos estudantes juntamente com uma atividade final, conforme descrito nos apêndices do trabalho. Além da resolução de uma situação-problema, a apostila propunha uma avaliação qualitativa da metodologia adotada, solicitando aos alunos que refletissem sobre o que haviam aprendido ao longo da sequência e em que medida a proposta didática contribuiu para sua compreensão da função exponencial. Participaram desse encontro 17 alunos (C_1, C_2, G, G_1, J, L, K, M, M_1, P_1, P_2, R_1, R_2, S, T, T_1 e W). Todos os recursos necessários foram previamente organizados, e o espaço da sala de aula foi preparado para o bom desenvolvimento da atividade. Após a chegada dos estudantes, foram distribuídas as apostilas com o conteúdo teórico e a proposta de atividade. Em seguida, iniciamos a aula expositiva, abordando sistematicamente os fundamentos da função exponencial e sua aplicabilidade em fenômenos reais, tais como crescimento populacional, decaimento radioativo e propagação de doenças.

Como conclusão das atividades, foi proposta uma quarta situação-problema, relacionada à taxa de contágio da Covid-19 no município de Paranaguá. A atividade explicava que o índice de contágio (R) pode ser interpretado como a quantidade média de pessoas para as quais um indivíduo infectado transmite o vírus. Por exemplo, um valor de R igual a ***1,63*** indica que ***10 infectados*** podem contagiar aproximadamente ***16 novos indivíduos***. Dados oficiais da época indicavam que o R variava entre ***2*** e ***3***. Considerando uma população de ***133.761 habitantes*** e ***54 casos positivos*** no início do surto, foi solicitado que os alunos construíssem dois modelos matemáticos distintos, um com taxa constante de contágio igual a ***2*** e outro igual a ***3***, utilizando o aplicativo Desmos como ferramenta de apoio à modelagem e análise do problema.

Eles não encontraram dificuldades em resolver esta situação-problema, justamente pelo fato de a mesma ter uma modelação de crescimento semelhante ao modelo proposto na atividade 2. E a aula expositiva, explicando o assunto, facilitou ainda mais a apropriação, o desenvolvimento do conhecimento e a consequente solução do problema. A maioria chegou facilmente ao modelo $\boldsymbol{y = 54 \,.\, 2^x}$ para a taxa de contágio constante e igual a 2, e $\boldsymbol{y = 54 \,.\, 3^x}$ para a taxa de contágio constante e igual a 3. Além de fazerem os testes experimentais com a calculadora científica, eles concluíram que para uma taxa de contágio igual a ***3***, demoraria entre ***7 a 8 dias*** para a cidade toda ficar contaminada, e para uma taxa contágio igual a ***2***, levaria de ***11 a 12 dias***, conforme observado na Figura 32 do aluno **P$_2$**.

Figura 32. Resposta do aluno **P₂**.



Atividade Nº: 04 Tema: Taxa de Contágio de Covid-19 em Paranaguá

Situação problema

O cálculo matemático para determinar a taxa de contágio de uma doença leva em consideração dados diários sobre o tamanho da população, os casos confirmados, as mortes, os infectados e o número de recuperados. O número efetivo de reprodução, chamado (R), diz qual o potencial de propagação do vírus. Se maior que 1, cada paciente transmite a doença a, pelo menos, mais uma pessoa. Se menor do que 1, menos indivíduos se infectam. Por exemplo, se a taxa de contágio for igual a 1,63, isso quer dizer que 10 pessoas contaminadas podem transmitir o vírus para outras 16. De acordo com o site de notícias Bem Paraná, a taxa de contágio no Paraná estava entre 2 e 3, no dia 28/05/2020. Levando em consideração que Paranaguá tem 133.761 habitantes, sendo que, destes, 54 já testaram positivo para o Coronavírus, em quanto tempo toda a população de Paranaguá estaria contaminada, se considerarmos que a taxa de contágio irá se manter? Faça um modelo matemático que represente a taxa de contágio contante e igual a 2 e outro constante e igual a 3, utilizando o APP Desmos? (Esta questão foi adaptada do material do IFPR-Campos Maringa, considerndo os dados da época. Disponível em: https://ifpr.edu.br/paranagua/wp-content/uploads/sites/20/2020/07/Atividade-Matematica-04.pdf. Acesso: 10/06/2024.).

$y = B \cdot a^x$ $y = 54 \cdot 2^x$

$54 \cdot 2^2 = y$

$\cancel{54 = B \cdot 2^x}$ 216

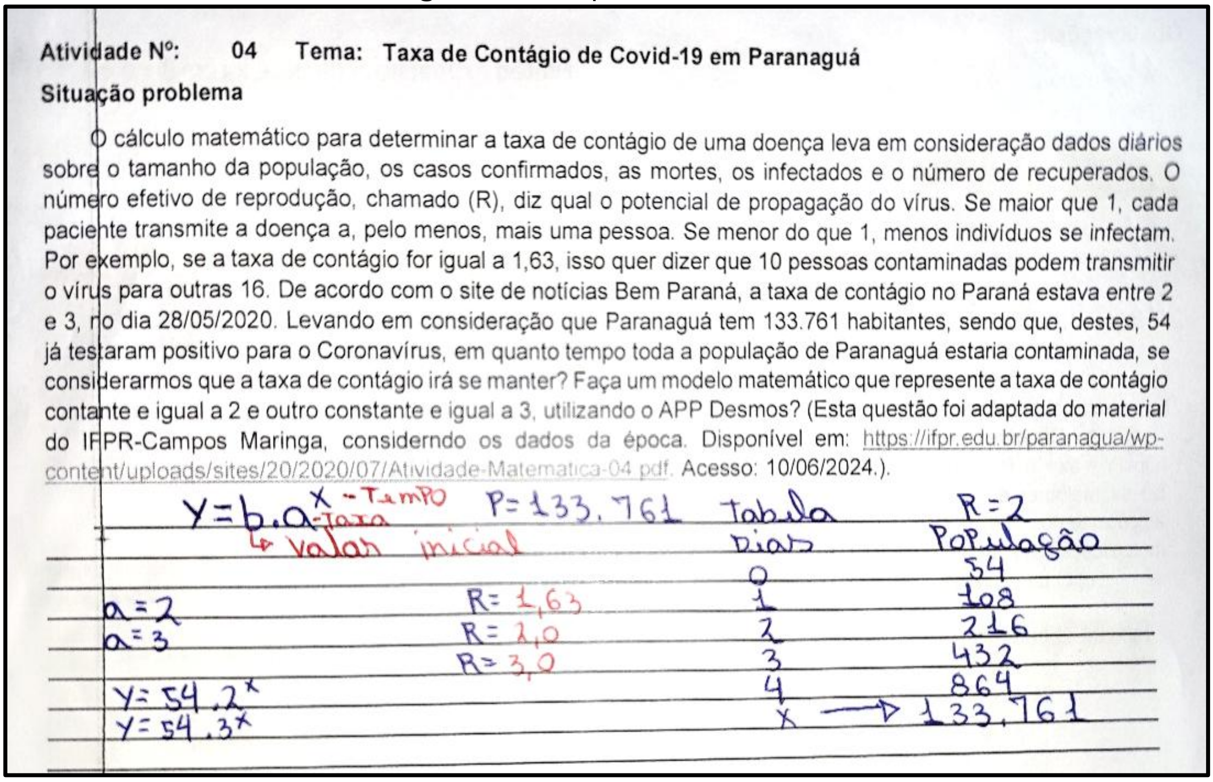
DIA	POPULAÇÃO
0	54
1	108
2	216
3	432
4	864
5	1.728
6	3.456
7	6.912
8	13.824
9	27.648
10	55.296
11	110.592
12	221.184

Experimentei com a calculadora usando R: 2 a população será infectada em 11 a 12 dias

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Conforme evidenciado na figura supracitada, o estudante **P₂** realizou a experimentação do modelo matemático proposto com diferentes valores para a variável x, representando os dias decorridos desde o início da contaminação. Os testes realizados, organizados em forma de tabela, indicaram que caso a taxa de contágio permanecesse constante e igual a *2*, a totalidade da população estaria infectada entre o ***11º e o 12º dia***. Tal resultado demonstra que o aluno desenvolveu a competência necessária para alcançar a terceira e última etapa da sequência didática — a construção do modelo matemático. Esse desempenho evidencia a eficácia da proposta metodológica aplicada. Além disso, outros estudantes também apresentaram resoluções satisfatórias da atividade, conforme ilustrado nas produções dos alunos **G**, **R₁** e **W**, reproduzidas nas Figuras 33, 34 e 35, respectivamente.

Figura 33. Resposta do aluno **G**.



Atividade Nº: 04 Tema: Taxa de Contágio de Covid-19 em Paranaguá

Situação problema

O cálculo matemático para determinar a taxa de contágio de uma doença leva em consideração dados diários sobre o tamanho da população, os casos confirmados, as mortes, os infectados e o número de recuperados. O número efetivo de reprodução, chamado (R), diz qual o potencial de propagação do vírus. Se maior que 1, cada paciente transmite a doença a, pelo menos, mais uma pessoa. Se menor do que 1, menos indivíduos se infectam. Por exemplo, se a taxa de contágio for igual a 1,63, isso quer dizer que 10 pessoas contaminadas podem transmitir o vírus para outras 16. De acordo com o site de notícias Bem Paraná, a taxa de contágio no Paraná estava entre 2 e 3, no dia 28/05/2020. Levando em consideração que Paranaguá tem 133.761 habitantes, sendo que, destes, 54 já testaram positivo para o Coronavírus, em quanto tempo toda a população de Paranaguá estaria contaminada, se considerarmos que a taxa de contágio irá se manter? Faça um modelo matemático que represente a taxa de contágio contante e igual a 2 e outro constante e igual a 3, utilizando o APP Desmos? (Esta questão foi adaptada do material do IFPR-Campos Maringa, considerndo os dados da época. Disponível em: https://ifpr.edu.br/paranagua/wp-content/uploads/sites/20/2020/07/Atividade-Matematica-04.pdf. Acesso: 10/06/2024.).

$Y = b.a^{x}$ x - Tempo; a - taxa; b - valor inicial

P= 133.761

a=2

a=3

R= 1,63

R= 2,0

R= 3,0

$Y = 54.2^x$

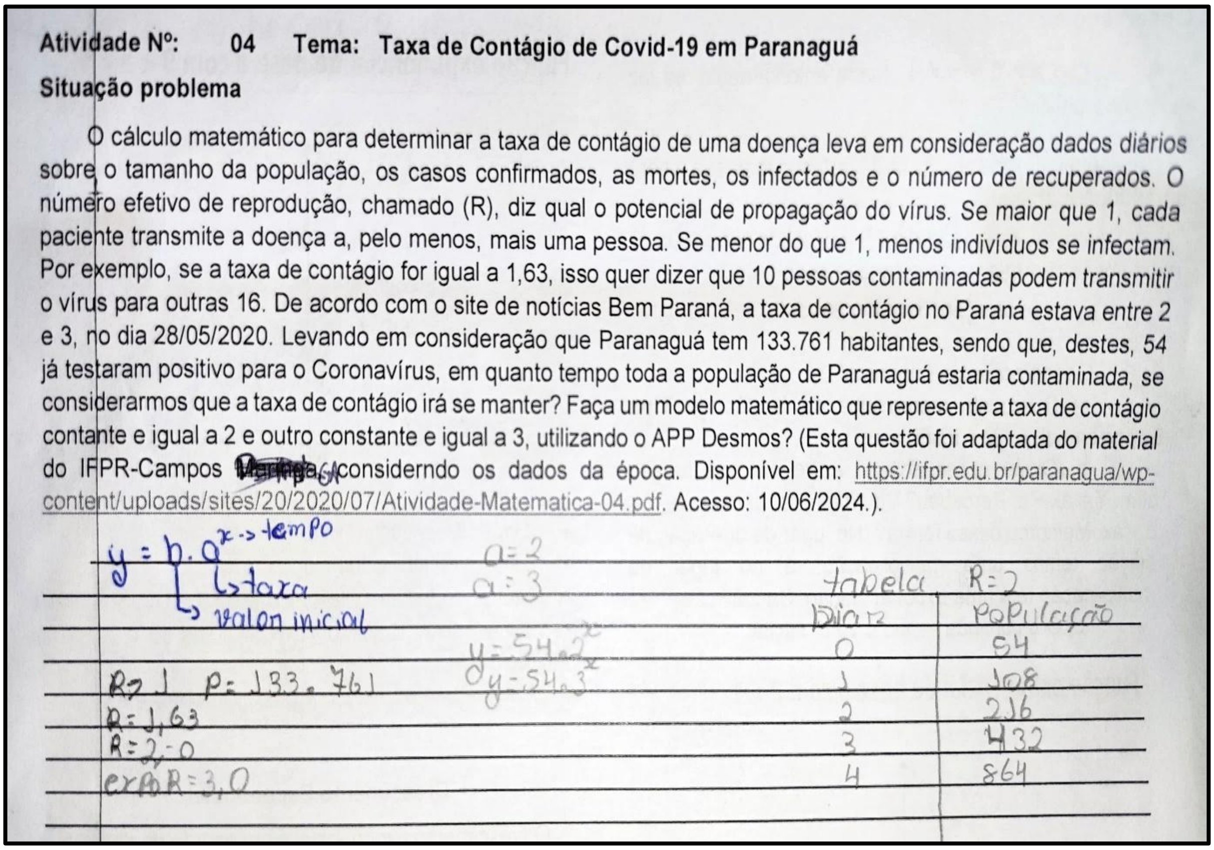
$Y = 54.3^x$

Tabela R=2

Dias	População
0	54
1	108
2	216
3	432
4	864
x ⟶	133.761

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Figura 34. Resposta do aluno **R_1**.



Atividade Nº: 04 Tema: Taxa de Contágio de Covid-19 em Paranaguá

Situação problema

O cálculo matemático para determinar a taxa de contágio de uma doença leva em consideração dados diários sobre o tamanho da população, os casos confirmados, as mortes, os infectados e o número de recuperados. O número efetivo de reprodução, chamado (R), diz qual o potencial de propagação do vírus. Se maior que 1, cada paciente transmite a doença a, pelo menos, mais uma pessoa. Se menor do que 1, menos indivíduos se infectam. Por exemplo, se a taxa de contágio for igual a 1,63, isso quer dizer que 10 pessoas contaminadas podem transmitir o vírus para outras 16. De acordo com o site de notícias Bem Paraná, a taxa de contágio no Paraná estava entre 2 e 3, no dia 28/05/2020. Levando em consideração que Paranaguá tem 133.761 habitantes, sendo que, destes, 54 já testaram positivo para o Coronavírus, em quanto tempo toda a população de Paranaguá estaria contaminada, se considerarmos que a taxa de contágio irá se manter? Faça um modelo matemático que represente a taxa de contágio contante e igual a 2 e outro constante e igual a 3, utilizando o APP Desmos? (Esta questão foi adaptada do material do IFPR-Campos ~~Maringa~~ considerndo os dados da época. Disponível em: https://ifpr.edu.br/paranagua/wp-content/uploads/sites/20/2020/07/Atividade-Matematica-04.pdf. Acesso: 10/06/2024.).

$y = b.a^{x}$ x -> tempo; a -> taxa; b -> valor inicial

a=2

a=3

$y = 54.2^x$

$y = 54.3^x$

R> 1 P= 133.761

R= 1,63

R= 2,0

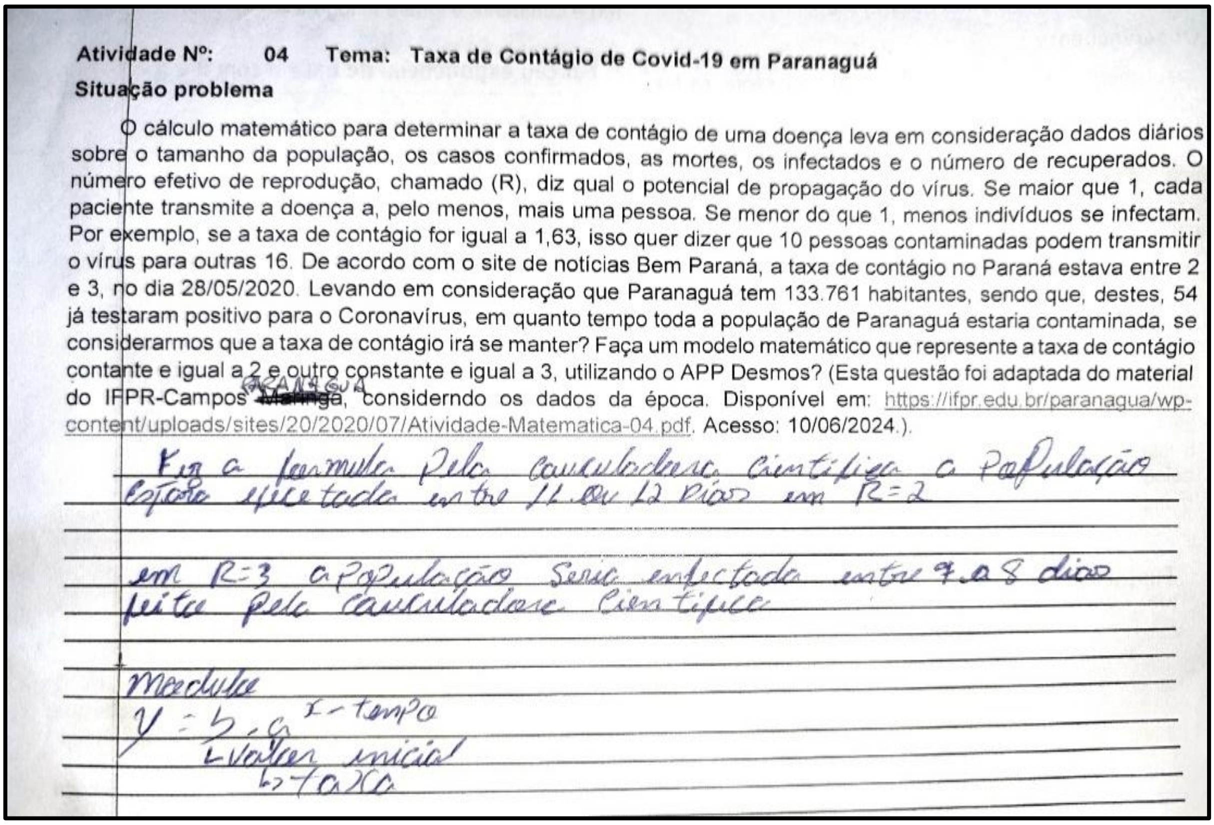
ex R= 3,0

Tabela R=2

Dias	População
0	54
1	108
2	216
3	432
4	864

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Figura 35. Resposta do aluno **W**.



Atividade Nº: 04 Tema: Taxa de Contágio de Covid-19 em Paranaguá

Situação problema

O cálculo matemático para determinar a taxa de contágio de uma doença leva em consideração dados diários sobre o tamanho da população, os casos confirmados, as mortes, os infectados e o número de recuperados. O número efetivo de reprodução, chamado (R), diz qual o potencial de propagação do vírus. Se maior que 1, cada paciente transmite a doença a, pelo menos, mais uma pessoa. Se menor do que 1, menos indivíduos se infectam. Por exemplo, se a taxa de contágio for igual a 1,63, isso quer dizer que 10 pessoas contaminadas podem transmitir o vírus para outras 16. De acordo com o site de notícias Bem Paraná, a taxa de contágio no Paraná estava entre 2 e 3, no dia 28/05/2020. Levando em consideração que Paranaguá tem 133.761 habitantes, sendo que, destes, 54 já testaram positivo para o Coronavírus, em quanto tempo toda a população de Paranaguá estaria contaminada, se considerarmos que a taxa de contágio irá se manter? Faça um modelo matemático que represente a taxa de contágio contante e igual a 2 e outro constante e igual a 3, utilizando o APP Desmos? (Esta questão foi adaptada do material do IFPR-Campos ~~Maringa~~ Paranaguá, considerndo os dados da época. Disponível em: https://ifpr.edu.br/paranagua/wp-content/uploads/sites/20/2020/07/Atividade-Matematica-04.pdf. Acesso: 10/06/2024.).

Fiz a formula pela calculadora cientifica a População estaria efectada entre 11 ou 12 Dias em R=2

em R=3 a População seria enfectada entre 7 a 8 dias feita pela calculadora cientifica

Modulo

$y = b.a^{x}$ x→tempo

b→valor inicial

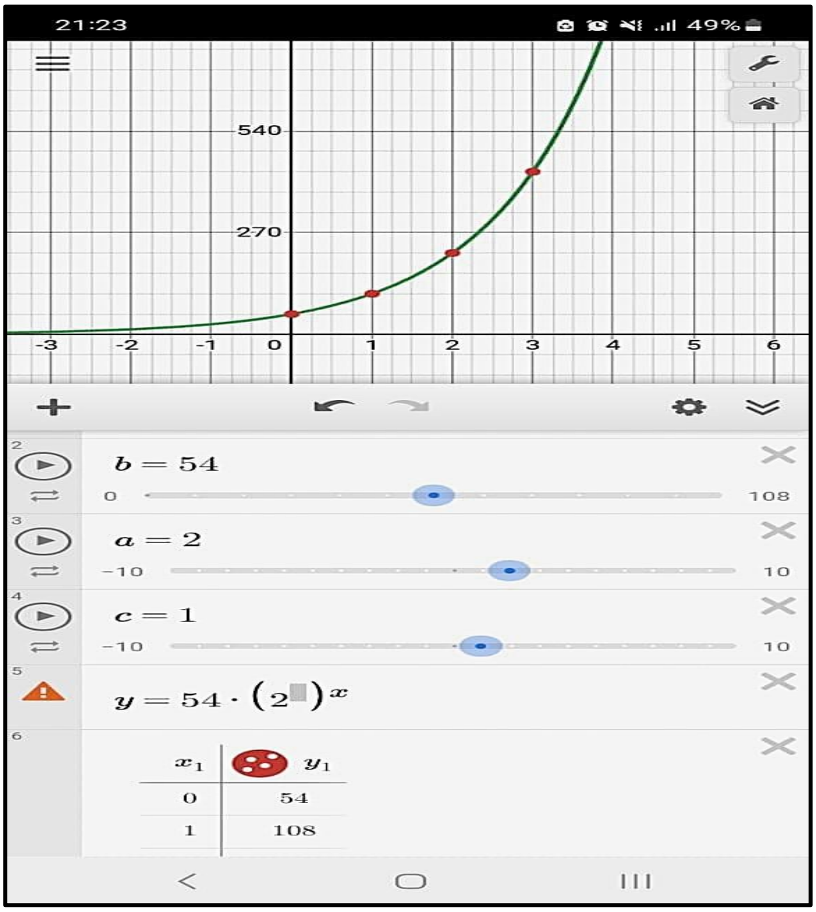
a→taxa

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Em um segundo momento da aula, solicitamos aos alunos que estavam com acesso à internet que pegassem seus celulares e construíssem o modelo exponencial com a taxa de contágio *2*, por meio do aplicativo Desmos. Desta forma, eles conseguiriam visualizar o comportamento, o formato do gráfico e aprenderiam a manipular o aplicativo. Somente os estudantes **C**$_1$ e **M** estavam com internet nos celulares, de modo que prosseguimos com o desenvolvimento da atividade com foco neles, enquanto os outros observavam o desempenho dos colegas e acompanhavam o ajuste de curva do gráfico pelo *datashow*.

Assim sendo, utilizando o modelo exponencial $\boldsymbol{y = ba^{cx}}$ e os dados já tabelados do problema pedimos que eles ajustassem o parâmetro *b* variando de ***0 até 108***; o parâmetro *a* variando de ***-10 até 10***; e, por fim o parâmetro *c* variando de ***-10 até 10***, para que, assim, eles testassem e concluíssem que o melhor ajuste exponencial, de fato, é $\boldsymbol{b = 54,\ a = 2\ e\ c = 1}$, e obtendo o modelo que descreve o crescimento exponencial de contágio: $\boldsymbol{y = 54.2^{x}}$, conforme podemos observar na Figura 36, do aluno **M**.

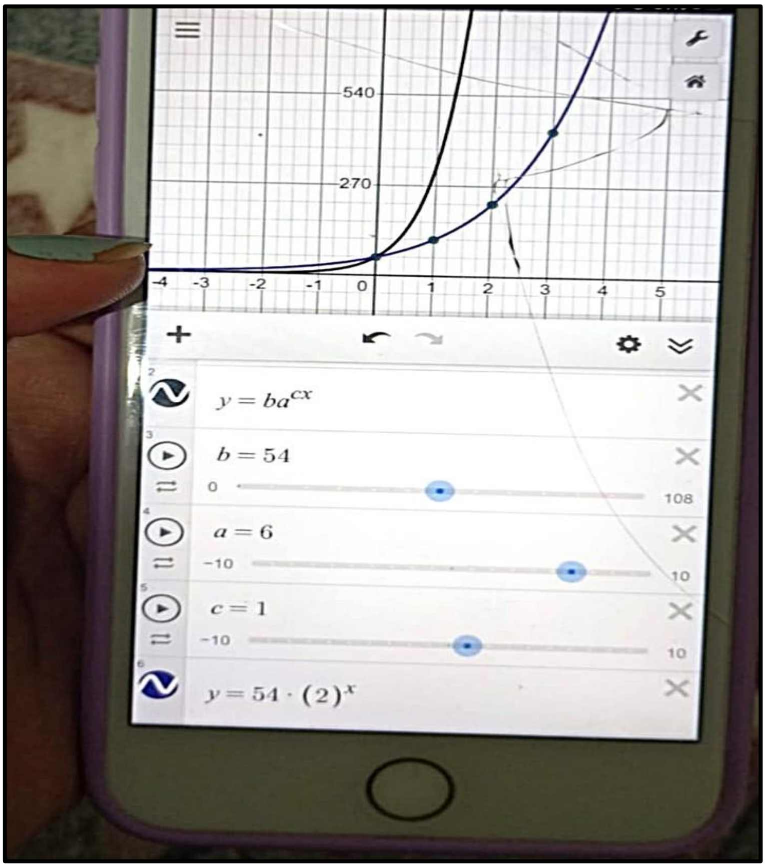
Figura 36. Resposta do aluno **M**.



Fonte: Dados da pesquisa (2024).

A Figura 37, do aluno **C**$_1$, mostra bem a tentativa de ajuste de curva do gráfico feita por ele. O aplicativo forneceu dois gráficos, um com o ajuste do parâmetro *a* valendo 6, obtendo um gráfico com um grande desvio em relação aos pontos dos dados tabelados da questão, e outro com o ajuste correto com a = 2, provando, por meio do aplicativo Desmos, que o modelo é o mais adequado à solução da situação-problema.

Figura 37. Resposta do aluno $\mathbf{C_1}$.

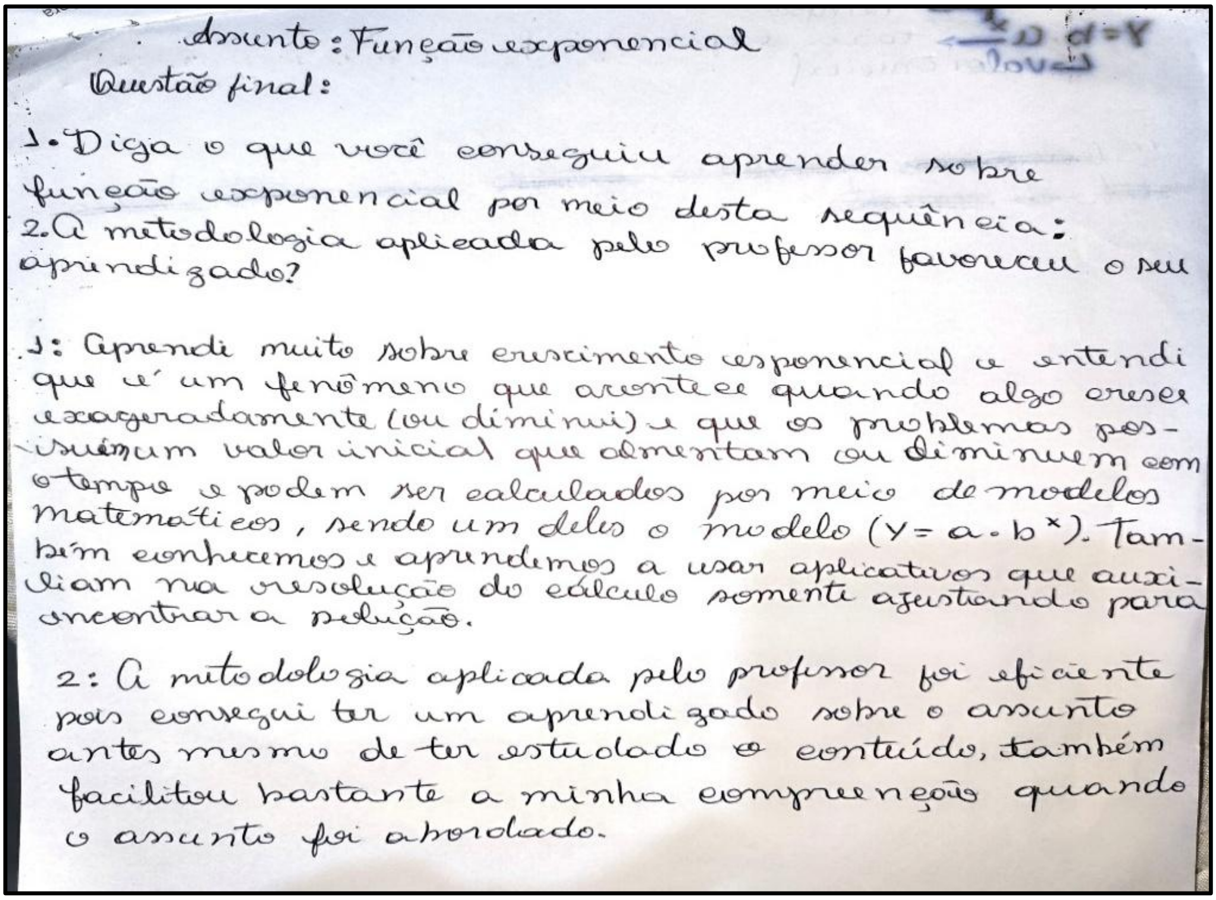


Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Os estudantes demonstraram capacidade para desenvolver o modelo exponencial com o auxílio do aplicativo Desmos, o que reforçou significativamente a aprendizagem dos conceitos apresentados na aula expositiva. A utilização dessa ferramenta digital proporcionou uma visualização mais clara do comportamento da curva exponencial, contribuindo efetivamente para a consolidação dos conhecimentos. Tal resultado confirma a pertinência e a viabilidade da proposta de intervenção, ampliando as potencialidades da sequência didática. Vale destacar que, embora inicialmente não estivesse previsto o manuseio direto do aplicativo pelos alunos, essa decisão mostrou-se acertada, assim como a inclusão de uma questão final que os instigasse a refletirem sobre os conhecimentos adquiridos e a efetividade do processo de aprendizagem.

Como estratégia complementar, foi proposto que os alunos respondessem, por escrito, duas questões reflexivas: (1) o que aprenderam sobre função exponencial ao longo da sequência didática, e (2) se a metodologia utilizada pelo professor-pesquisador contribuiu para sua aprendizagem. Os retornos obtidos foram bastante positivos. Muitos relataram que, mesmo antes da abordagem formal do conteúdo na aula expositiva, já se sentiam familiarizados com os conceitos relacionados aos fenômenos de crescimento e decaimento exponencial presentes na natureza. Além disso, demonstraram ter compreendido a estrutura do modelo matemático exponencial capaz de descrever tais fenômenos, bem como o papel dos recursos tecnológicos — como o aplicativo Desmos — na construção e análise desses modelos. Essa percepção foi evidenciada, por exemplo, no registro do aluno **L**, apresentado na Figura 38.

Figura 38. Resposta do aluno **L**.



Assunto: Função exponencial

Questão final:

1. Diga o que você conseguiu aprender sobre função exponencial por meio desta sequência:
2. A metodologia aplicada pelo professor favoreceu o seu aprendizado?

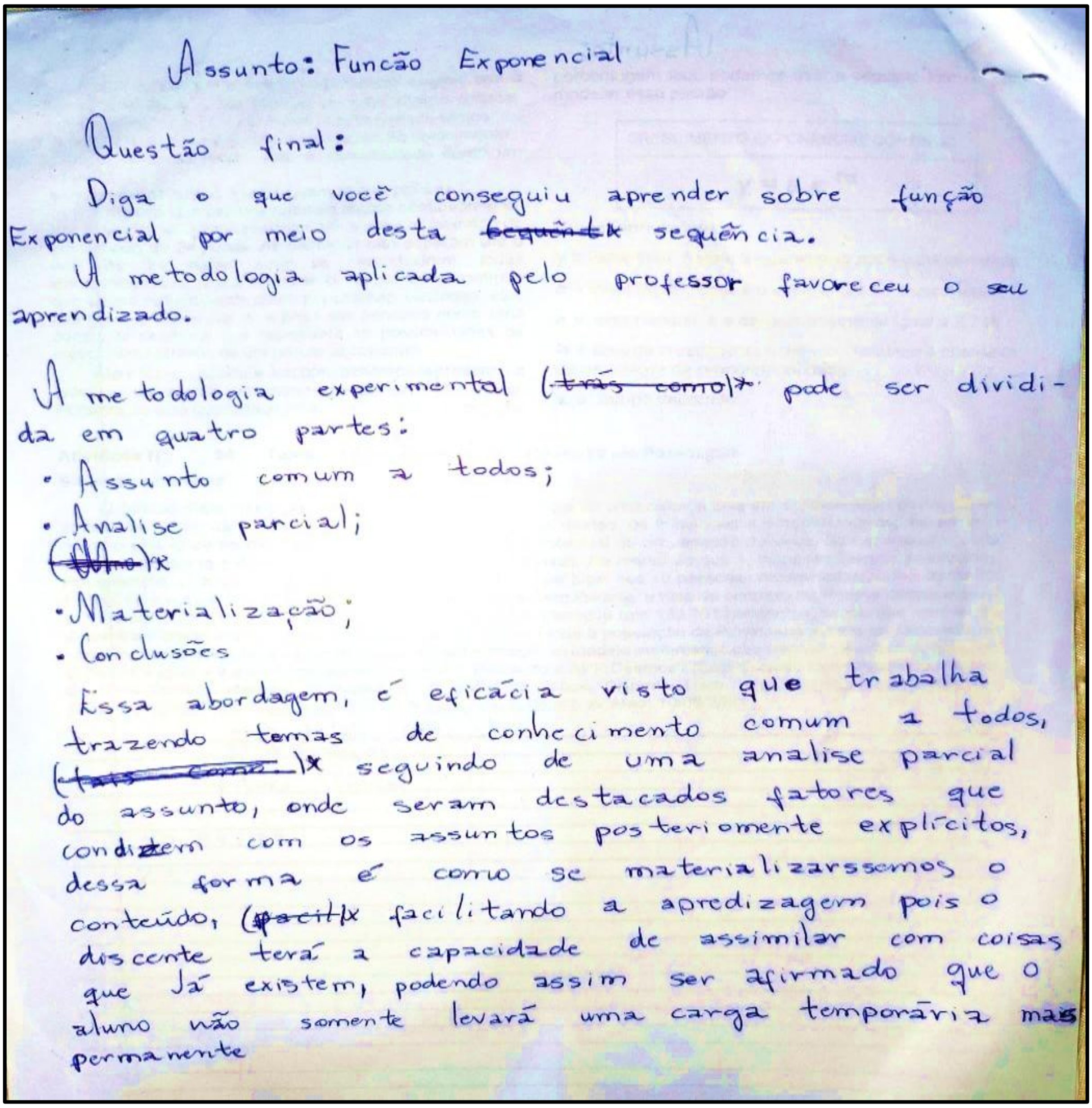
1: Aprendi muito sobre crescimento esponencial e entendi que é um fenômeno que acontece quando algo cresce exageradamente (ou diminui) e que os problemas possuem um valor inicial que almentam ou diminuem com o tempo e podem ser calculados por meio de modelos matemáticos, sendo um deles o modelo ($y = a \cdot b^x$). Também conhecemos e aprendemos a usar aplicativos que auxiliam na resolução do cálculo somente ajustando para encontrar a solução.

2: A metodologia aplicada pelo professor foi eficiente pois consegui ter um aprendizado sobre o assunto antes mesmo de ter estudado o conteúdo, também facilitou bastante a minha compreenção quando o assunto foi abordado.

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Para finalizar esta seção, mostraremos a resposta do aluno **K**, mediante a Figura 39, que corrobora a validação da nossa proposta de intervenção metodológica. Em sua resposta à questão final, ele tenta descrever a eficácia que a metodologia desempenhou em seu aprendizado de função exponencial. Ele divide a sequência didática em quatro partes: (1) assunto comum a todos; (2) análise parcial; (3) materialização; (4) conclusão.

Figura 39. Resposta do aluno **K**.



Assunto: Funcão Exponencial

Questão final:

Diga o que você conseguiu aprender sobre função Exponencial por meio desta ~~bequênk~~ sequência.

A metodologia aplicada pelo professor favoreceu o seu aprendizado.

A metodologia experimental (~~três como~~)* pode ser dividida em quatro partes:

- Assunto comum a todos;
- Analise parcial;

(~~[illegible]~~)x

- Materialização;
- Conclusões

Essa abordagem, é eficácia visto que trabalha trazendo temas de conhecimento comum a todos, (~~tais como~~)x seguindo de uma analise parcial do assunto, onde seram destacados fatores que condizem com os assuntos posteriomente explícitos, dessa forma é como se materializarssemos o conteúdo, (~~pacit~~)x facilitando a apredizagem pois o discente terá a capacidade de assimilar com coisas que já existem, podendo assim ser afirmado que o aluno não somente levará uma carga temporária mas permanente

Fonte: Dados da pesquisa (2024).

Ao indagarmos o estudante sobre o porquê de ele ter dividido nossa metologia desta maneira, ele explicou que a parte do assunto em comum é quando apresentamos os vídeos a todos antes da questão. Após apresentarmos a questão, fizemos uma análise parcial do assunto e como ele se relaciona com os textos e o vídeo. A materialização é quando buscávamos obter o modelo que seria a resposta para a questão proposta. E a fase da conclusão é quando fazíamos os testes para ver se o modelo apresentado estava correto.

Estabelecendo uma analogia com a estrutura da nossa sequência didática, é possível afirmar que o aluno, de forma intuitiva, reconheceu as três etapas fundamentais da proposta de intervenção. O que ele classificou como “assunto em comum” e “análise parcial” corresponde à primeira etapa da sequência: a **interação com o problema**, fase em que os estudantes são introduzidos ao contexto da situação a ser explorada. A etapa identificada como “materialização” refere-se, na verdade, à **matematização**, segundo momento da sequência, quando os discentes constroem o modelo matemático apropriado. Por fim, a fase que o aluno nomeou como “conclusão” diz respeito à terceira e última etapa da proposta: **o modelo matemático**, que corresponde à fase de validação. É quando são realizados testes para se verificar a compatibilidade da solução com os dados da situação.

Desta maneira, demos por encerrado o nosso quinto e último dia de experimentação didática. Foi um dia onde o desenvolvimento das atividades escritas nos cadernos e no aplicativo Desmos ocorreram de forma bem sucedida, e com uma avaliação favorável à metodologia por parte dos alunos. No próximo capítulo, realizaremos a análise dos resultados da aplicação desta sequência didática.

7. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Nesta investigação, propusemo-nos a examinar cuidadosamente as produções escritas e manifestações verbais e comportamentais dos alunos à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval. Nosso foco principal foram os processos de conversão e tratamento entre diferentes registros semióticos a fim de buscarmos evidências de aprendizagem efetiva. Para alcançar esse objetivo, analisamos não somente os registros escritos, mas também as gravações em áudio realizadas nas atividades. Isso nos permitiu identificar nuances de compreensão expressas por meio de entonações e intervenções verbais. A influência da atuação do pesquisador durante a sequência didática, embora marcada por intervenções mínimas, foi observada no desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

A análise das interações entre os discentes e o pesquisador revelou elementos ricos, como perguntas espontâneas, comentários reflexivos e mudanças de entonação, que indicaram processos internos de construção do conhecimento. Nosso objetivo foi registrar e interpretar, de maneira sensível e criteriosa, um conjunto significativo de manifestações expressivas que emergiram ao longo das atividades propostas. As interações, conduzidas sob a mediação do professor-pesquisador, mostraram-se fundamentais para o avanço no processo de ensino e aprendizagem da função exponencial.

A finalidade da metodologia adotada foi favorecer a compreensão da função exponencial por meio da Modelagem Matemática de situações contextualizadas, com uso de dados reais e de recursos tecnológicos, o que facilitou o engajamento dos educandos e revelou-se fértil para o florescimento da aprendizagem significativa.

É digno de nota que tivemos uma dificuldade no momento da coleta dos dados de nossa experimentação, uma vez que os agentes participantes do experimento não foram frequentes durantes os dias de aplicação da sequência didática. De forma que baseamos nossa análise nas produções feitas pelos alunos que se mantiveram frequentes durantes os cinco dias do desenvolvimento do nosso estudo. Fizemos uma análise alicerçada nos avanços alcançados por estes estudantes desde a primeira atividade até a última, com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. Realizamos, assim, uma apreciação qualitativa destas produções, e apresentaremos a evolução das assertividades dos alunos após a aplicação de cada atividade, provando a validade da utilização de nossa sequência didática.

Como dito, este capítulo apresenta uma análise da aprendizagem de alunos do 1º ano do Ensino Médio a partir de uma sequência didática sobre a função exponencial, fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, o qual afirma que a compreensão matemática só é possível quando o educando é capaz de operar com diferentes registros de representação — como linguagem verbal, simbólica, gráfica e tabular — e, principalmente, de converter informações entre esses registros (Duval, 2003).

A aprendizagem significativa em matemática exige mais do que a simples manipulação de cálculos ou aplicação de fórmulas. Segundo Duval (2003), compreender conceitos matemáticos passa necessariamente pela capacidade de mobilizar diferentes registros de representação semiótica e realizar conversões entre eles.

Raymond Duval afirma que “a atividade matemática consiste essencialmente na mobilização de diferentes registros de representação semiótica” (Duval, 2003, p. 16). Para o autor, aprender matemática implica não apenas reconhecer informações em diferentes formas (como textos, gráficos, tabelas, expressões simbólicas), mas ser capaz de converter essas representações umas nas outras, compreendendo que cada registro possui suas especificidades e limitações.

Duval (2003) distingue dois tipos de transformações cognitivas essenciais: o tratamento, que ocorre dentro do mesmo registro, e a conversão, que ocorre entre registros distintos. A conversão é considerada mais complexa e essencial para a aprendizagem, pois é através dela que se dá a compreensão profunda dos conceitos matemáticos. Este foi o motivo por que optamos pelo autor para embasarmos a apreciação e avaliação de nossa sequência didática, acreditando que a mesma se encaixa nos preceitos preconizados em sua teoria.

A proposta envolveu quatro atividades com base em dados de situações reais, nas quais os alunos construíram modelos matemáticos, empregaram tecnologias e mobilizaram diferentes registros de representação. A análise demonstrou que a aprendizagem ocorreu à medida que os estudantes conseguiram realizar conversões entre registros, conforme apregoa a teoria de Duval. O professor atuou como pesquisador, apenas com intervenções pontuais. As atividades foram acompanhadas por recursos como vídeos, textos com dados reais, uso de tabelas e aplicações tecnológicas como o aplicativo Desmos.

Análise das Atividades

Atividade 1 – Reprodução de Bactérias

Nesta atividade, os alunos leram um texto com dados reais e assistiram a dois vídeos sobre a reprodução bacteriana que mostravam a duplicação da população de bactérias a cada 20 minutos. A tarefa era construir um modelo matemático representando essa situação.

Inicialmente, os 19 alunos participantes (B, C_1, C_2, E, F, G, G_1, I, J, L, K, M_1, M_2, P_1, P_2, R_1, R_2, S, W) não conseguiram estabelecer o modelo. Somente após a revisão dos vídeos e a releitura do texto, e de os termos instigado com indagações sobre quais aspectos matemáticos eles observaram, é que os estudantes perceberam os padrões matemáticos e entenderam que a população de bactérias dobrava a cada 20 minutos. Foi solicitado, então, que organizassem os dados em forma de tabela, o que facilitou ainda mais a observação do padrão de crescimento.

Com isso, seis alunos (E, G, J, K, R_2, R_1, S) construíram modelos lineares e apenas dois (C_2 e P_2) conseguiram elaborar o modelo exponencial correto. O restante não conseguiu converter o registro de tabela para um modelo matemático. Após testarem os valores com calculadoras científicas, eles validaram seus modelos. Por fim, com o uso do Desmos, mostramos o modelo de crescimento exponencial e a curva exponencial ajustada, de modo que eles pudessem visualizar o comportamento do gráfico. Aqui, foi observada a dificuldade na conversão do registro verbal e icônico (vídeos e texto) para os registros de expressões simbólicas e gráfico. A mediação com a tabela foi crucial, funcionando como ponte entre os registros.

Atividade 2 – Dobramento de Papel até a Lua

Nesta segunda proposta, os alunos receberam um problema desafiador: calcular quantas dobras de papel seriam necessárias para se alcançar a distância da Terra à Lua. Mais uma vez, foram utilizados vídeos e textos com dados reais, seguindo os procedimentos adotados na atividade anterior. Participaram desta atividade 16 educandos (B, C_1, C_2, G, G_1, I, J, L, K, M_1, M_2, P_1, P_2, R_1, R_2, S). Neste ponto, eles já estavam familiarizados com o modelo de crescimento exponencial devido ao contato que tiveram com o aplicativo Desmos e com a representação dos dados em forma de tabela, o que facilitou a percepção dos padrões de crescimento e a montagem do modelo matemático. Deste modo, eles construíram tabelas e aplicaram o conhecimento adquirido na atividade anterior.

Diferentemente da primeira proposta, desta vez 12 alunos (B, C_2, G, G, J, K, L, M_1, M_2, P_1, P_2,S,) conseguiram encontrar o modelo corretamente, aplicar o conceito de duplicação e validar os resultados. O uso prévio de tabelas facilitou a identificação do padrão exponencial. A visualização da curva no Desmos consolidou o entendimento. Notamos aqui a retomada e ampliação de registros já trabalhados, com maior fluência na conversão entre eles, o que evidencia um avanço conceitual.

Atividade 3 – Decaimento do Carbono-14

Esta atividade abordou o decaimento radioativo do carbono-14. Os dados foram apresentados já em forma tabular, acompanhados de vídeo e texto explicativo. Como se tratava de um modelo de decaimento (e não de crescimento), os educandos enfrentaram dificuldades em reconhecer o padrão. Foi necessário um momento de mediação para que percebessem a lógica da redução pela metade a cada 5.730 anos. Tivemos de auxiliar na construção da tabela, fazendo a soma das meias-vidas, o que corresponde à redução da massa da amostra pela metade, considerando-se uma amostra inicialmente de 100%. Participaram desta atividade 14 alunos (B, C_1, C_2, G, G_1, I, J, L, K, M_1, M_2, P_1, P_2, S), dos quais a metade não conseguiu converter os dados da tabela para um modelo matemático sem intervenção. Com isso, somente sete deles (C2, K, P2, G1, M2, M1, B1,) construíram o modelo de decaimento e compreenderam seu funcionamento.

O gráfico no Desmos ajudou a consolidar essa nova perspectiva da função exponencial, mostrando que, apesar de manter a estrutura, a curva assume comportamento distinto. A dificuldade enfrentada ressalta a importância da conversão ativa entre registros e da mediação pedagógica.

Com o conhecimento adquirido nesta atividade, quando os alunos se defrontarem novamente com um problema que envolva decaimento radioativo ou outro que se refira a decrescimento exponencial, é bem provável que conseguirão modelar e, consequentemente, solucionar a questão.

Atividade 4 – Taxa de Crescimento de Contágio de COVID-19 na Cidade de Paranaguá

Esta última atividade não estava nos planos originais da proposta da sequência didática. Nossa metodologia foi pensada com o intuito de os estudantes construírem o conhecimento do objeto matemático antes mesmo de terem contato direto com o assunto. De modo que só após executarmos as três atividades anteriores é que realizaríamos uma aula expositiva sobre o conteúdo de função exponencial, para que eles soubessem de qual assunto matemático as atividades tratavam. Por isso, para alcançar este fim, o professor-pesquisador atuaria apenas como mediador do conhecimento, e não sendo o protagonista do saber, repassando “todo” os conhecimentos, como é de praxe das aulas expositivas tradicionais.

Por conta disso, na última atividade, houve uma mudança metodológica: iniciamos com uma aula expositiva abordando diretamente os conceitos de função exponencial, crescimento e decaimento, modelos matemáticos e suas representações gráficas. Em seguida, foi proposta uma tarefa semelhante às duas primeiras anteriores, agora sobre a taxa de contágio da Covid-19 na cidade de Paranaguá, o que também serviria como um modo de avaliar a aprendizagem adquirida por meio de nossa experimentação.

Desta vez, contamos com a presença de 16 estudantes (C_1, C_2, G, G_1, J, L, K, M, M_1, P_1, P_2, R_1, R_2, S, T e W). Os alunos, já familiarizados com a estrutura da função exponencial e os registros utilizados, construíram modelos com sucesso. Após tabelarem os dados e aplicarem os conhecimentos obtidos, quase todos chegaram ao modelo correto, à exceção dos alunos T e W, por conta da infrequência.

Por fim, ainda conseguimos uma última conversão de registro, quando os estudantes C_1 e M, ao utilizarem o Desmos, reproduziram o modelo exponencial após ajustarem as curvas e conseguiram visualizar os gráficos feitos em seus próprios celulares. Deste modo, foi possível observar claramente que, ao longo da sequência, eles não só mobilizaram, mas passaram a fazer conversões com mais autonomia entre os registros verbal, simbólico, gráfico e tecnológico. Isso revela indícios de uma aprendizagem significativa e efetiva aos moldes da teoria preconizada por Durval.

Ao final da sequência, foram feitas duas perguntas aos alunos: “O que vocês aprenderam sobre função exponencial por meio desta sequência?” e “A metodologia aplicada favoreceu seu aprendizado?”

A maioria afirmou que, mesmo antes da aula expositiva, já compreendia o que era uma função exponencial. Eles demonstraram reconhecer o modelo de crescimento e decrescimento, a forma de construção dos modelos e o uso de tecnologias como o Desmos para apoiar a aprendizagem. Isso aponta que a sequência propiciou um ambiente de aprendizagem construtivo e significativo, além de despertar o interesse dos educandos.

A Teoria dos Registros de Duval afirma que o verdadeiro obstáculo à compreensão matemática está na dificuldade de conversão entre diferentes formas de representação. Ao longo da sequência, observamos esse processo com clareza:

- Na **primeira atividade**, os alunos estavam restritos ao registro verbal e icônico e tiveram dificuldades para alcançar o simbólico.
- A **tabela** funcionou como registro intermediário fundamental.
- Com o **uso sucessivo e variado dos registros**, os alunos começaram a converter entre eles com mais fluência.
- O **Desmos**, como ferramenta tecnológica, não apenas facilitou a visualização gráfica, mas promoveu uma compreensão integrada da função exponencial como uma curva.

Essa sequência evidenciou que o domínio de um registro (como a tabela) pode funcionar como ponte para outro mais abstrato (expressões simbólicas), e que a aprendizagem matemática se dá quando alunos estudantes não somente reconhecem, mas conseguem transitar entre registros distintos.

Conforme destaca Duval (2003, p. 18), “a aprendizagem de um conceito matemático não pode se dar em um único registro, pois sua compreensão exige a conversão entre diferentes registros”. A sequência didática mostrou que, com o tempo e com a experiência de transitar por diferentes representações (verbal, simbólica, tabular, gráfica e digital), os alunos tornaram-se mais capazes de compreender e aplicar o conceito de função exponencial.

Nas primeiras atividades, eles tiveram dificuldades na conversão entre registros. No entanto, com o apoio da tabela e da tecnologia, essas barreiras foram superadas. A visualização das curvas exponenciais no Desmos, por exemplo, promoveu compreensão gráfica do conceito, permitindo que os alunos identificassem padrões e consolidassem os modelos construídos.

A sequência também revelou que, mesmo antes da aula expositiva formal, os educandos já haviam internalizado aspectos essenciais da função exponencial, indicando que a abordagem investigativa favorece a aprendizagem significativa. Como eles próprios relataram, a metodologia facilitou a compreensão, o reconhecimento de padrões e o uso de ferramentas tecnológicas para resolver problemas reais.

Apesar das limitações, como a necessidade de intervenções pontuais e a diversidade de níveis de compreensão entre os alunos, a sequência didática demonstrou sua eficácia. A teoria de Duval mostrou-se adequada para compreender os processos de aprendizagem observados, uma vez que os discentes evoluíram na mobilização e conversão de registros de representação, construindo conhecimentos matemáticos mais consistentes.

A despeito dos obstáculos naturais de uma intervenção em turmas regulares, como tempo reduzido, infrequência e diferentes níveis de familiaridade com tecnologias, a sequência didática mostrou-se eficiente no ensino de função exponencial. O uso combinado de vídeos, textos, tabelas e *softwares* proporcionou aos alunos a oportunidade de desenvolverem uma compreensão sólida e significativa.

Ainda com relação às dificuldades, entendemos que a sala de aula está em constante movimento; não é algo estático, ela é fluida. Na realidade, não teremos os alunos subordinados e atentos a nossa vontade todo o tempo, para agirem da maneira como queremos, semelhante a um laboratório. A sala de aula é dinâmica. Teremos alunos que realizarão de bom gosto as atividades, outros não. Outros ainda podem não realizar as atividades, mas se estiverem atentos, acabarão por aprender e conseguir executar uma próxima atividade solicitada. A sala de aula avança nessas relações mutáveis.

Olhando por este ângulo, nossa experimentação sofreu por conta da infrequência e consequente inconstância da participação de alguns alunos durante a aplicação da sequência didática. Isso prejudicou e limitou, de certa forma, a coleta dos dados e a análise das atividades para avaliação do nosso estudo. O aluno que por ventura veio no segundo dia e só reapareceu no último impossibilitou-nos de constatar se poderia ter aprendido ou não o conteúdo. Isto serve de orientação para as próximas pesquisas: que se mantenham os agentes participantes da experimentação frequentes do começo ao fim. Por outro lado, nossa experimentação pode ter chegado ao ponto mais real possível de uma situação que um professor encontrará em um cenário verdadeiro de sala de aula, caso resolva aplicá-la. Portanto, concluímos que a Modelagem Matemática, aliada ao uso de tecnologias, pode ser uma estratégia eficaz para o ensino de funções exponenciais.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação teve como objetivo investigar as potencialidades de uma sequência didática construída com base na Modelagem Matemática para o ensino e aprendizagem de função exponencial. O desenvolvimento deste estudo partiu do reconhecimento das dificuldades enfrentadas por docentes e discentes no trato com esse conteúdo, juntamente com a necessidade de se propor práticas pedagógicas para a construção ativa do conhecimento, tornando o ensino da matemática mais próximo da realidade dos alunos e mais significativo em sua vivência escolar.

Para este propósito, realizamos um levantamento do que foi produzido referente ao ensino de função exponencial nos últimos 10 anos, com a finalidade de identificarmos as metodologias utilizadas no processo de ensino e a aprendizagem deste assunto. Além disso, fizemos um breve prognóstico (por meio de uma pesquisa pelo Google Forms) de quais tendências matemáticas de ensino sobre função exponencial os professores do estado do Pará estão utilizando e suas percepções dos obstáculos no processo de ensino desse tema.

O problema de pesquisa que norteou esta investigação, “Quais as potencialidades de uma sequência didática construída com base na Modelagem Matemática para a aprendizagem de função exponencial?”, foi explorado por meio de uma abordagem qualitativa e experimental, fundamentada em autores como Biembegut (2003), Burak e Klüber (2008), Barbosa (2003) e Raymond Duval (2003, 2009). A sequência didática foi elaborada considerando os princípios da Modelagem Matemática associada ao uso de recursos tecnológicos (como o aplicativo Desmos), e teve sua eficácia avaliada através de um experimento didático aplicado a uma turma de alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual da cidade de Parauapebas, Pará.

A metodologia adotada contemplou o planejamento de atividades baseadas em problemas contextualizados, que permitissem aos alunos explorar o conceito de crescimento exponencial a partir da observação e análise de dados reais. A primeira atividade da sequência abordou a reprodução bacteriana como forma de introduzir, de maneira concreta e contextualizada, o comportamento exponencial. A sequência foi organizada em três etapas fundamentais da Modelagem Matemática: (1) interação com o problema, (2) matematização e (3) validação do modelo. Em todas essas fases, buscamos garantir a mediação ativa do professor-pesquisador, cuja função principal era estimular a reflexão, a investigação e o diálogo, em vez de apenas transmitir conteúdos de forma expositiva.

Os resultados obtidos indicaram avanços significativos na aprendizagem dos educandos, especialmente no que se refere à capacidade de interpretarem e representarem matematicamente situações-problema por meio de diferentes registros. A análise foi feita à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval (2003), que nos permitiu compreender os obstáculos enfrentados pelos alunos nos processos de conversão e tratamento entre os registros — do verbal ao algébrico, do tabular ao gráfico — e identificar momentos em que tais conversões e tratamentos foram bem-sucedidos, sugerindo uma apropriação ativa do conceito de função exponencial.

Observamos que, nas etapas iniciais, muitos estudantes apresentaram dificuldades na conversão de registros, especialmente ao passarem do discurso verbal e icônico (vídeo e texto) à linguagem matemática formal. No entanto, ao longo da sequência didática, tais obstáculos foram sendo superados com o auxílio das atividades propostas, das mediações realizadas pelo pesquisador e, sobretudo, do aplicativo Desmos. A visualização gráfica das funções ajustadas a partir de dados reais foi uma ferramenta crucial para promover a compreensão do comportamento exponencial. Os alunos puderam, de modo interativo e intuitivo, identificar padrões de crescimento, comparar modelos e validar hipóteses, o que demonstra a importância do uso de tecnologias digitais no ensino de matemática.

Outro aspecto importante revelado pela pesquisa foi a aprendizagem de conceitos matemáticos antes mesmo da realização da aula expositiva. Ao resolverem os problemas propostos nas atividades, os alunos anteciparam construções conceituais que seriam consolidadas posteriormente, o que reforça o potencial da Modelagem Matemática como estratégia para uma aprendizagem significativa e investigativa. Como apontam os relatos dos próprios estudantes, a abordagem utilizada proporcionou maior interesse, participação e autonomia no processo de aprendizagem.

A atuação do pesquisador durante a aplicação da sequência didática se deu de maneira intencionalmente, porém não totalmente direta, buscando criar um ambiente propício à investigação e à construção coletiva do conhecimento. A mediação consistiu principalmente em fomentar questionamentos, propor comparações entre modelos e estimular a reflexão crítica sobre os dados e os fenômenos observados. Esta postura contribuiu para o fortalecimento do protagonismo dos alunos, que passaram a se perceber como sujeitos ativos na construção de saberes matemáticos.

Em termos de contribuições, esta dissertação propõe um material pedagógico estruturado e a constituição de um Produto Educacional que pode ser incorporado à prática docente como recurso complementar ao ensino de função exponencial. A sequência didática desenvolvida é uma alternativa metodológica relevante para professores que desejam superar as limitações do ensino tradicional, oferecendo aos estudantes experiências matemáticas mais contextualizadas, significativas e alinhadas com as competências e habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

No que tange à formação docente, acreditamos que este trabalho também oferece subsídios interessantes para a reflexão sobre a prática pedagógica no ensino de matemática. A proposta de uma sequência didática baseada em Modelagem Matemática e aliada ao uso de tecnologias educacionais contribui para o repertório metodológico dos docentes, incentivando práticas mais investigativas, dialógicas e conectadas à realidade dos educandos.

Contudo, é importante destacar as limitações enfrentadas durante a pesquisa. A principal delas foi a infrequência de alguns alunos durante os dias de aplicação da sequência, o que comprometeu parcialmente a coleta e a análise dos dados. Apesar disso, tal dificuldade reflete uma realidade comum das salas de aula da rede pública de ensino, o que, de certo modo, auxilia no realismo e aplicabilidade dos resultados obtidos. O dinamismo inerente ao ambiente escolar, com seus múltiplos fatores de influência, torna qualquer experimento educacional suscetível a variações e imprevistos — o que deve ser levado em consideração em futuras investigações.

Como sugestões para próximas investigações, destacamos a importância de explorar a aplicação da Modelagem Matemática em contextos diversos e com outros conteúdos matemáticos, como funções logarítmicas, decaimento radioativo ou crescimento populacional. Também recomendamos que novas sequências didáticas incluam propostas comparativas entre diferentes tipos de comportamento exponencial (crescimento e decrescimento), possibilitando que os alunos desenvolvam uma compreensão mais ampla e articulada do conceito.

Em síntese, os resultados aqui apresentados confirmam que a Modelagem Matemática, quando adequadamente planejada e mediada, associada ao emprego de tecnologias digitais e fundamentada em teorias como a dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, constitui uma estratégia promissora para o ensino e aprendizagem de função exponencial.

Acreditamos que esta dissertação colabora, assim, com o campo da Educação Matemática ao propor e analisar uma experiência concreta que visa aproximar o ensino da matemática da realidade dos educandos, promovendo aprendizagens mais significativas e críticas. Esperamos observar que os alunos mostrem interesse em aprender matemática ao resolverem problemas reais, e esperamos observar que eles desenvolvam raciocínio lógico e habilidade de leitura, além de compreender e vincular a matemática escolar às situações do dia a dia.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Editora da UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **Revemat – Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 3, n. 1, p. 62-77, 2008. Disponível em: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2008v3n1p62. Acesso em: 21 dez. 2023.

ALVES, Cícero dos Santos. **As funções exponenciais e logarítmicas**: uma abordagem para o professor do ensino básico. 2014. 65 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2014. Disponível em: http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/8740. Acesso em: 29 maio 2023.

ANGELUCCI, Michel. **Uma abordagem diferente para o ensino da função exponencial no ensino médio**. 2014. 150 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/7266. Acesso em : 29 maio 2023.

ARAGÃO, M. F. A.; BARBOSA, J. L. C. A história da modelagem matemática: uma perspectiva de didática no ensino básico. *In*: ENCONTRO PARAIBANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2016, Campina Grande. **Anais...** Campina Grande: UEPB, 2016.

ARTIGUE, M. Engenharia didática. *In*: BRUN, J. (Org.). **Didática das matemáticas.** Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa (Portugal): Instituto Piaget, 1996. Cap. 4. p. 193-217.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches em Didactique dês Mathématiques**, Grenoble (Suíça), v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

AZEVEDO, Angela Maria Schramm de. **Resolução de problemas como estratégia para a aprendizagem de função exponencial**. 2021. 83 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas, 2021. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=6324&id2=171053875. Acesso em: 29 maio 2023.

BACICH, Lilian; MORAN, José. **Metodologias ativas para uma educação inovadora**: uma abordagem téorico-prática. *E-book*. Porto Alegre: Penso, 2018. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/7722229/mod_resource/content/1/Metodologias-Ativas-para-uma-Educacao-Inovadora-Bacich-e-Moran.pdf. Acesso em : 23 fev. 2024.

BARBOSA, J. C. A prática dos alunos no ambiente de modelagem matemática: pespectiva: o esboço de um framework. *In*: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.;

ARAÚJO, J. L. (Orgs.). **Modelagem matemática na educação brasileira**: pesquisas práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática na sala de aula:o esboço de um framework. *In*: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). **Modelagem matemática na educação brasileira**: pesquisas práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2014.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BERTONE, Ana Maria Amarillo; BASSANEZI, Rodney Carlos; JAFELICE, Rosana Sueli da Motta. **Modelagem matemática**. Uberlândia: UFU, 2014.

BEZERRA, Vicente Ferrer Trajano. **O ensino das funções exponenciais e logarítmicas com a utilização da planilha Excel na forma de aplicativo**. 2014. 78 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) – Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2014. Disponível em: http://www.ri.unir.br/jspui/handle/123456789/1723. Acesso em: 29 maio 2023.

BIEMBENGUT. M. S. Concepções e Tendências de Modelagem Matemática na Educação Básica. **Tópicos Educacionais**, Recife, v. 18 n. 1-2, p. 118-138, 2012).

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2003. 127 p.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem matemática & implicações no ensino-aprendizagem de matemática**. Blumenau: Furb, 1999.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br . Acesso em: 02 jul. 2022.

BRAZ, Ricardo Antônio Faustino da Silva. **Uma proposta de utilização de material manipulativo no aprendizado da função exponencial**. 2007. 125 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2007. Disponível em: http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/5952. Acesso em: 29 maio 2023.

BRUCKI, C. M. **O uso de modelagem no ensino de função exponencial**. 2011. 140 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10900. Acesso em: 29 maio 2023.

BROUSSEAU, G**. Os diferentes papéis do professor**. *In*: PARRA, C.; SAIZ, I.

Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas. Tradução de Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: ArtMed, 1996, cap. 4, p. 48-72.

BURAK, Dionísio. **A modelagem matemática e relações com a aprendizagem significativa**. 1. ed. São Paulo: CRV, 2010.

BURAK, Dionísio; KLUBER, Tiago Emanuel. **Modelagem matemática**: uma perspectiva para a educação básica. Curitiba: CRV, 2008.

CORREIA, Gleidson Santos; CAZORLA, Irene Mauricio. A função exponencial na pesquisa em educação matemática: como dialoga com a BNCC? **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, v. 12, n. 4, [s.p.], out. 2021. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/249017/pdf. Acesso em: 10 jul. 2022.

CORREIA, Gleidson Santos. **Subsídios teóricos para a construção de uma sequência didática para o ensino da função exponencial na educação básica, visando o letramento estatístico**. 2021. 181 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, 2021. Disponível em: http://www.biblioteca.uesc.br/biblioteca/bdtd/202011527D.pdf. Acesso em: 29 maio 2023.

COSTA, Luis Claúdio Pinto. **O ensino-aprendizagem de equação exponencial auxiliado pelo Geogebra**. 2022. 121 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2022. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/646397/1/LU%C3%8DS%20CL%C3%81UDIO%20PINTO%20COSTA%20Disserta%C3%A7%C3%A3o.pdf. Acesso em: 29 maio 2023.

COSTA, C. P. **A abstração da função exponencial de interações entre engrenagens Lego®**. 2020. 196 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2020. Disponível em: http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/br/. Acesso em: 29 maio 2023.

COSTA, Atílio Vieira. **Função exponencial**: uma abordagem guiada pela BNCC. 2021. 72 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2021. Disponível em: https://www.repositorio.ufal.br/bitstream/123456789/8242/1/Fun%C3%A7%C3%A3o%20exponencial%20-%20uma%20abordagem%20guiada%20pela%20BNCC.pdf. Acesso em: 29 maio 2023.

D'AMORE, B. Epistemologia, didática da matemática e práticas de ensino. **Bolema**, Rio Claro, a. 20, n. 28, p. 179-205, 2007. Disponível em: www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore. Acesso em: 17 dez. 2008.

DANTAS, Emerson de Oliveira. **A função exponencial**. 2014. 59 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2014. Disponível em: http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/6703. Acesso em: 29 maio 2023.

D'AVILA, Cássia Gonçalves. **Uma estratégia didática para o ensino de funções exponenciais e logarítmicas**. 2018. 98 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande, 2018. Disponível em: https://profmat.furg.br/images/TCC/Dissertao_Mestrado_Cassia.pdf. Acesso em: 29 maio 2023.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento matemático. *In*: MACHADO, S. D. (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p. 11-59.

EMER, Silvana. **Modelagem matemática aliada à experimentação no ensino de funções exponenciais**. 2020. 105 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade do Vale do Taquari, Lajeado, 2020. Disponível em: http://hdl.handle.net/10737/2919. Acesso em: 29 maio 2023.

ESPINDOLA, Elisângela. Trabalho documental do professor de matemática e projeto de ensino da função exponencial. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo: SBEM, 2016. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6563_4105_ID.pdf. Acesso em: 10 jul. 2022.

FERREIRA, N. S. A. As pesquisas denominadas "estado da arte". **Educação e Sociedade**, Campinas, a. 23, n. 79, p. 257-272, ago. 2002. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/es/v23n79/10857.pdf. Acesso em: 15 jul. 2023.

FERREIRA, ROBSON DOS SANTOS. **Introdução ao conceito de função**: uma proposta com o software SimCalc no ensino fundamental. 2016. 197 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3815790. Acesso em: DD MMM. AAAA.

FERREIRA, Rodrigo dos Santos. **Função exponencial e GeoGebra**: um estudo sobre abordagens e tarefas para o ensino médio. 2021. 153 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal do Oeste da Bahia, Barreiras, 2021. Disponível em: https://ufob.edu.br/ensino/pos-graduacao/profmat/dissertacoes-e-teses/dissertacoes-e-teses-2021/mestrando-rodrigo-dos-santos-ferreira-defesa-08-06-2021-orientador-andre-pereira-da-costa.pdf. Acesso em: 29 maio 2023.

GADIOLI, Anderson Oliveira. **Função exponencial**: definição, caracterização e aplicações. 2015. 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2015. Disponível em:

https://repositorio.ufes.br/handle/10/4828. Acesso em: 10 jul. 2022.

GÁLVEZ, G. A didática da matemática. *In*: PARRA, C.; SAIZ, I. (Orgs.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Tradução de Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: ArtMed, 1996, cap. 2, p. 26-35.

GODOY, E. V.; SANTOS, V. M. O cenário do ensino de matemática e o debate sobre o currículo de matemática. **Práxis Educacional**, Vitória da Conquista, v. 08, n. 13, p. 253-280, jul.-dez. 2012.

GRANDO, Regina Célia. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. 2000. 224 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000. Disponível em: http://matpraticas.pbworks.com/w/file/fetch/124818583/tese_grando(1).pdf. Acesso em: 23 fev. 2024.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA (Inep). **Resumo técnico do censo escolar da educação básica 2021**. Brasília: MEC, 2021. Disponível em: https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/estatisticas_e_indicadores/resumo_tecnico_censo_escolar_2021.pdf. Acesso em: 10 jul. 2022.

LAVAQUI, Vanderlei; BATISTA, Irinéa de Lourdes. Interdisciplinaridade em ensino de ciências e de matemática no ensino médio. **Ciência & Educação**, Rio Claro, v. 13, p. 399-420, 2007.

LEITE, Yoshie Ussami. **A formação de professores nos cursos de licenciatura**: algumas diretrizes e práticas. Unesp. 2007. Disponível em: https://docplayer.com.br/20934916-A-formacao-de-professores-nos-cursos-de-licenciatura-algumas-diretrizes-e-praticas.html. Acesso em: 22 fev. 2024.

LOPES, T. B.; PALMA, R. C. D.; SÁ, P. F. Engenharia didática como metodologia de pesquisa nos projetos publicados no EBRAPEM (2014-2016). **Educação Matemática Pesquisa – Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 20, n. 1, p. 159-181, 2018. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/34925. Acesso em: 03 nov. 2023.

MACHADO, S. D. A. Engenharia didática. *In*: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação matemática**: uma introdução. 2. ed. São Paulo: Educ, 2002, p. 197-208.

MARCONNI, Augusto Pock de. **Sequência didática para o ensino de função exponencial**. 2018. 279 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018. Disponível em: file:///C:/Users/user/Downloads/MARCONNI%20AUGUSTO%20POCK%20DE%20OLIVEIRA-1%20(1).pdf. Acesso em: 29 maio 2023.

MARTINE, Alexandre Henrique de. **Analiticidade da função exponencial**

generalizada para argumentos complexos e suas implicações. 2020. 159 f. Tese (Doutorado em Ciências) –Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, 2020. Disponível em : https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/59/59135/tde-31072020-212051/publico/Corrigida_AlexandreMartini.pdf. Acesso em: 29 maio 2023.

MENEZES, José Augusto Freitas de. **O ensino da função exponencial por meio de atividades**. 2018. 247 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018. Disponível em: http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/559508. Acesso em: 29 maio 2023.

MENEZES, M. B.; LESSA, M. M. L.; MENEZES, A. P. A. B. **A emergência de fenômenos didáticos em sala de aula**: a negociação de uma seqüência didática em álgebra inicial. 2006. Disponível em: www.rc.unesp.br/igce/matematica/bolema/.pdf. Acesso em: 15 dez. 2023.

MIGUEL, A.; MOURA, R.; SANTOS, V. **Modelagem matemática no ensino e na aprendizagem**: reflexões e experiências. São Paulo: Contexto, 2010.

MIGUEL, Ivania Célia. Uma proposta de modelagem matemática aplicada à produção da farinha de trigo. **Dia a Dia Educação**, Curitiba, 2009. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1498-8.pdf. Acesso em: 20 dez. 2023.

NARCIZO, Ricardo Nogueira Viana. **Investigando a modelagem matemática no ensino de funções afins e exponenciais**. 2016. 84 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2016. Disponível em: http://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/6402. Acesso em: 29 maio 2023.

OLIVEIRA, Andreia Maria Pereira de; BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem matemática e situações de tensão na prática pedagógica dos professores. **Bolema**, Rio Claro, v. 24, n. 38, p. 265-296, abr. 2011.

OLIVEIRA, Michelle Noberta Araújo de. **Análise da contextualização da função exponencial e da função logarítmica nos livros didáticos do ensino médio**. 2014. 118 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, Brasil, 2014. Disponível em: http://dspace.sti.ufcg.edu.br:8080/jspui/handle/riufcg/2235. Acesso em: 29 maio 2023.

OLIVEIRA, Nelúcio Martins de. **Exponencial, matrizes**: uma reflexão para o ensino médio. 2019. 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) –Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Teófilo Otoni, 2019. Disponível em: http://acervo.ufvjm.edu.br/jspui/handle/1/2001. Acesso em: 16 maio 2023.

OLIVEIRA, Rafael Henrique de. **Um estudo sobre a função exponencial**. 2015. 73 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual Paulista, 2015. Disponível em: http://hdl.handle.net/11449/132123. Acesso: 29 maio 2023.

PAIS, L. C. **Didática da matemática**: uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PENHA, Olegario Kleiton Costa. **As funções exponenciais e suas aplicações no modelo epidêmico**. 2021. 51 f. Dissertação (Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, 2021. Disponível em: https://repositorio.uema.br/jspui/bitstream/123456789/1307/1/disserta%C3%A7%C3%A3o%20pos%20defesa%202.pdf. Acesso: 29 maio 2023.

RODRIGUES, Rochelande Felipe. **Percurso de estudo e pesquisa no conceito de função**: analisando o processo de ensino e aprendizagem e as influências na formação do professor de matemática. 2019. 350 f. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2019. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=7727405. Acesso em : 18 nov. 2023.

RODRIGUES, Andrea Maria Rocha; OLIVEIRA, Gilson de Sousa. Avaliação da aprendizagem em matemática: o que dizem os indicadores educacionais no Brasil? CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 6., 2019, Fortaleza. **Anais...** Fortaleza: Editora Realize, 2019. Disponível em: https://editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2019/TRABALHO_EV127_MD1_SA13_ID8629_03102019195301.pdf. Acesso em: DD MMM. AAAA.

ROZANSKI, Emilene Funez. **Metodologia de ensino do conceito de função exponencial à luz da teoria das situações didáticas**. 2015. 116 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2015. Disponível em: http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/1734. Acesso em: 29 maio 2023.

SANCHO, JUANA. **Para uma tecnologia educacional**. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

SANTOS, E. F.; ROSA, M. A. **Modelagem Matemática no ensino da Trigonometria**. 2008. 50 f. Monografia (Graduação em ???????????) – Universidade Estadual de Goiás, Posse, 2008.

SILVA, Adnielson Lima da. **O ensino de função exponencial para além das aparências**. 2018. 158 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciêcias e Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018. Disponível em: https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/57385/R%20-%20D%20-%20ADNIELSON%20LIMA%20DA%20SILVA.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 30 maio 2023.

SILVA, Ricardo José Aguiar. **Contexto e aplicações das funções exponenciais no ensino médio**: uma abordagem interdisciplinar. 2015. 86 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2015. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=2125&id2=89725. Acesso em: 29 maio 2023.

SILVA, Francisco Maciel dos A. **Aproximação entre teoria e prática**: a modelagem matemática como método facilitador para o ensino de funções exponenciais. 2019. 62 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semi-árido, Mossoró, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufersa.edu.br/bitstream/prefix/5205/1/FranciscoMSS_DISSERT.pdf. Acesso em: 29 maio 2023.

SILVA, Rodrigo Sychocki da. **O uso de problemas no ensino e aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas na escola básica**. 2012. 159 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica_artigos/tese_rodrigo_sychocki_da_silva.pdf. Acesso em: 29 maio 2023.

SOARES, M. B.; MACIEL, F. P. **Alfabetização**. Brasília: MEC/Inep/Comped, 2000. 173 p. Disponível em: http://www. publicacoes.inep.gov.br/arquivos/%7BE35088B3-B51D-482A-827D -66061A4AE11E%7D_alfabetiza%C3%A7%C3%A3o.pdf. Acesso em: 28 fev. 2013.

UTSUMI, M. C. **Pesquisas em psicologia da educação matemática**: avanços e atualidades. São Carlos: Pedro & João Editores, 2020. 312 p.

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/ppgem