rfb editora

DIÁLOGOS SOBRE PROPOSTAS DIDÁTICAS EM MATEMÁTICA

VOLUME 2

Org.
Marilena Bittar
Katy Leão

Realização:
DDMat Grupo de Estudos em Didática da Matemática

Apoio:
UFMS UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

DIÁLOGOS SOBRE PROPOSTAS DIDÁTICAS EM MATEMÁTICA
Volume 2

Nossa missão é a difusão do conhecimento gerado no âmbito acadêmico por meio da organização e da publicação de livros científicos de fácil acesso, de baixo custo financeiro e de alta qualidade!

Nossa inspiração é acreditar que a ampla divulgação do conhecimento científico pode mudar para melhor o mundo em que vivemos!

Equipe RFB Editora

Agnes Turra

Alexandre Luis de Souza Barros

Cintia Melo dos Santos

Douglas Willian Nogueira de Souza

Edelweis José Tavares Barbosa

Janielly Taila dos Santos Verbisck

Jessé Fragoso da Cruz

Jéssica Serra Corrêa da Costa

Jhonattan Gonçalves de Araújo

José Luiz Magalhães de Freitas

Katy Leão (Org.)

Marilena Bittar (Org.)

Renan Gustavo Araújo de Lima

Rosane Corsini Silva

Susilene Garcia Oliveira

Tatiani Garcia Neves

Vitoria Lourenço Luges Da Silva

DIÁLOGOS SOBRE PROPOSTAS DIDÁTICAS EM MATEMÁTICA
Volume 2

Belém-PA
RFB Editora
2026

RFB Editora
CNPJ: 39.242.488/0001-07
91985661194
www.rfbeditora.com
adm@rfbeditora.com
Tv. Quintino Bocaiúva, 2301, Sala 713, Batista Campos, Belém - PA, CEP: 66045-315

Editor-Chefe
Prof. Dr. Ednilson Ramalho
Diagramação
Worges Editoração
Revisão de texto e capa
Organizadores

Bibliotecária
Janaina Karina Alves Trigo Ramos-CRB 8/9166
Produtor editorial
Nazareno Da Luz

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

L434
Diálogos sobre propostas didáticas em matemática: volume 2 / Bittar, Marilena (Org.), Leão, Katy (Org.); Araújo, Jhonattan Gonçalves de; Barbosa, Edelweis José Tavares; Barros, Alexandre Luis de Souza; Corrêa da Costa, Jéssica Serra; Corsini, Rosane Silva; Cruz, Jessé Fragoso da; Freitas, José Luiz Magalhães de; Garcia Oliveira, Susilene; Lima, Renan Gustavo Araújo de; Neves, Tatiani Garcia; Santos, Cintia Melo dos; Silva, Vitoria Lourenço Luges Da; Souza, Douglas Willian Nogueira de; Turra, Agnes; Verbisck, Janielly Taila dos Santos. – Belém: RFB Editora, 2026.

Livro digital em PDF
192 p.

ISBN 978-65-5337-124-8
DOI 10.46898/rfb.bbe222faa4dd

1. Educação matemática. 2. Propostas didáticas. 3. Ensino fundamental II. 4. Ensino médio. I. Bittar, Marilena (Organizadora). II. Leão, Katy (Organizadora). III. Título.

CDD 372.7

Índice para catálogo sistemático:

I. Educação matemática 372.7

AGRADECIMENTO

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ) pelo apoio ao projeto Oficinas on-line para professores de matemática da educação básica, proposta vinculada ao projeto de pesquisa "*Estudo de decisões didáticas relativas à elaboração e implementação de aulas propostas por um grupo de professores*", aprovado na Chamada Universal, Edital MCTI/CNPq n° 28/2018 e a bolsa de Produtividade em Pesquisa aprovada no edital n° 4/2021 da professora Marilena Bittar.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelas bolsas de estudo disponibilizadas aos nossos alunos de pós-graduação do PPGEduMat.

À todos professores, licenciandos, apoio escolar e colegas que participaram das oficinas, contribuíram enviando questões e comentários durante as ações, que nos mandaram e-mail e apoiaram nosso projeto.

Ao Grupo de Estudos em Didática da Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (DDMat-UFMS) pelo apoio durante as oficinas e preparação deste material, comentando nas apresentações, divulgando, participando da preparação das *lives* e discussões.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O Grupo de Estudos em Didática da Matemática, DDMat, liderado por Marilena Bittar e com sede em Campo Grande – MS, na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, sempre se preocupou com a formação de professores e o ensino de Matemática. Em anos anteriores, o grupo oferecia formação para professores de Matemática em diversas cidades de Mato Grosso do Sul e, durante o período de pandemia, o grupo resolveu produzir uma série de oficinas com propostas didáticas de Matemática para todo o ensino básico.

Durante os anos de 2021, 2022 e 2023, o grupo produziu 22 oficinas com duração de 90 a 120 minutos sobre conteúdos diversos da Matemática para professores atuantes nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio em um projeto intitulado *Oficinas on-line: diálogos sobre propostas didáticas em Matemática*. Os temas foram escolhidos com base em pesquisas realizadas pelos membros do grupo e experiências em sala de aula e acompanhamento das dificuldades enfrentadas por professores e alunos da educação básica.

O retorno obtido durante e após as oficinas foi muito positivo, levando-nos à proposta de transformá-las em livros. O primeiro volume, **Diálogos sobre propostas didáticas em matemática – Volume 1**, foi lançado em 2024 e tem como público-alvo professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental (https://grupoddmat.pro.br/index.php/publicacoes/e-books/). Os conteúdos trabalhados neste primeiro livro caminham entre o sistema de numeração decimal, operações básicas, geometria, grandezas área e comprimento, frações e cálculos mentais, com propostas de atividades e situações que podem auxiliar na compreensão de conceitos importantes da Matemática.

Já o segundo volume, **Diálogos sobre propostas didáticas em Matemática - Volume 2**, também organizado por Marilena Bittar e Katy Leão, é baseado nas oficinas realizadas nos anos de 2022 e 2023 pelos membros do grupo e professores convidados. Os textos foram produzidos tendo como público-alvo professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, trabalhando temas diversos, como geometria, operações numéricas, grandezas e medidas, números decimais, combinatória, estatística, geometria analítica, educação financeira, entre outros.

Esta obra reúne e detalha as discussões e propostas didáticas exploradas nas oficinas, priorizando a reflexão sobre o ensino de diversos conteúdos da Matemática para a Educação Básica. Todas as oficinas foram preparadas com muito carinho e foram fruto de incansáveis pesquisas dos referidos autores. Embora todos os textos tenham uma fundamentação teórica robusta em sua concepção, decidimos não sobrecarregar o e-book com discussões teóricas, apresentamos propostas didáticas de forma simples e direta para serem aplicadas em sala de aula e/ou repensadas em sua formação.

Os seis primeiros capítulos trazem conteúdos voltados para os anos finais do Ensino Fundamental, enquanto os cinco capítulos posteriores, 7 ao 11, são voltados para o Ensino Médio. Algumas habilidades da BNCC são descritas no início de cada capítulo, esclarecendo quais tópicos podem ser abordados durante a proposta e vinculando-o à realidade do professor que necessita seguir o que é proposto no documento oficial.

No Capítulo 1, intitulado *Decimais no Ensino Fundamental: Dúvidas Comuns, Significado, Representações*, são apresentadas reflexões sobre o ensino de números decimais e estratégias para a superação de dificuldades comuns, como a aplicação de "regras" operacionais. No texto são propostas atividades que utilizam o material dourado e o Quadro Valor Lugar (QVL) para auxiliar na compreensão do sistema de numeração decimal e do valor posicional, diferenciando números decimais de números com representação decimal

Em seguida, no Capítulo 2, são discutidas *As relações e confusões entre volume e capacidade*, a distinção entre volume (o espaço que um sólido ocupa) e capacidade (o espaço interno ocupado), tratando-os como um mesmo objeto matemático utilizado em situações distintas. Neste capítulo são sugeridas atividades que ajudam na construção da tridimensionalidade do volume, como a contagem de blocos, a diferenciação dessas grandezas com área e perímetro, e a evolução do uso de materiais concretos para a generalização do cálculo do volume por meio de fórmulas.

O Capítulo 3, *Estatística nos anos finais do Ensino Fundamental: Uma amostra de propostas para a sala de aula*, tem foco em propostas de atividades que promovem o desenvolvimento do letramento estatístico e do pensamento crítico. Os tópicos incluem a formulação de questões investigativas, a coleta e consideração de dados, a organização em tabelas de distribuição de frequências, e a representação gráfica por meio de gráficos de barras, setores e pictogramas.

A introdução do pensamento algébrico no Ensino Fundamental é abordada no Capítulo 4, discutindo o reconhecimento de padrões e regularidades. Os autores sugerem atividades práticas, como sequências e pirâmides, e discutem a importância de compreender as propriedades da igualdade (reflexividade, simetria e transitividade) para evitar dificuldades futuras com técnicas algébricas formais.

No Capítulo 5, *No caminho a geometria: Plana ou espacial?*, é apresentada uma proposta didática para a discussão integrada dos elementos da geometria plana e espacial. Defende-se que estes conceitos devem ser trabalhados em conjunto, e não de forma linear, sugerindo atividades que utilizam sólidos geométricos para transitar entre a geometria plana e espacial, mobilizando a intuição dos alunos e a experimentação de novas propostas.

No Capítulo 6 é discutido o Projeto de Vida como um componente curricular essencial para o desenvolvimento integral dos estudantes, que vai além do aspecto cognitivo, focando em competências socioemocionais. É apresentada a proposta da Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso do Sul e detalhados os quatro pilares para as práticas pedagógicas: autoconhecimento, gerenciamento das emoções, mediação e resolução de conflitos, e compromisso ético, encerrando a primeira parte do e-book voltada para os anos finais do Ensino Fundamental.

Grandezas: Quais relações podemos estabelecer em sala de aula? é o tema do Capítulo 7, no qual são propostas atividades que permitem conexões e reflexões entre grandezas diversas, como volume, capacidade, massa, densidade e vazão. O foco é no desenvolvimento do senso crítico e na compreensão de conceitos compostos e das diferenças entre as grandezas, apresentando atividades que podem impulsionar discussões e minimizar erros comuns ao lidar com grandezas e medidas.

No Capítulo 8 é tratada a geometria analítica, abordando sua introdução no Ensino Médio e resgatando sua relevância histórica e suas aplicações, como o GPS, na engenharia e informática. Os autores sugerem atividades que articulam representações algébricas e geométricas no plano cartesiano, incluindo a marcação de pontos formando regiões, transformações de simetria e homotetia, e a determinação da equação da reta e da circunferência, além de propor o uso de *softwares* como *GeoGebra* e *GrafEquation*.

No Capítulo 9, *Combinação, arranjo ou permutação?*, é proposta uma sequência didática para o ensino de análise combinatória, enfatizando o uso do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) como estratégia central, de modo a evitar a memorização de fórmulas. Discute-se ainda a classificação dos problemas de contagem (permutação, arranjo, combinação e produto cartesiano) a partir das características básicas, como o uso de todos os elementos do conjunto e se a ordem dos fatores é significativa na questão.

Educação financeira: Sonhos planejados, consumo consciente é o tema do Capítulo 10, que relata uma experiência em um Itinerário Formativo do Novo Ensino Médio realizado no Estado de Mato Grosso do Sul. Com o objetivo de reconhecer a importância da Educação Financeira para o crescimento pessoal e a reflexão crítica, utiliza-se debates e planilhas orçamentárias para desenvolver a autogestão e a responsabilidade dos estudantes.

Por fim, no Capítulo 11, *Temas contemporâneos transversais e a pesquisa em sala de aula: O caso da produção de vacinas no Brasil*, é apresentada uma proposta de trabalho investigativo focada na articulação de Temas Contemporâneos Transversais (TCT), como Saúde e Ciência, com o ensino de Matemática. É sugerida a utilização de uma "questão geratriz" para promover o protagonismo estudantil e a interdisciplinaridade, utilizando modelagem matemática e análise de dados na busca por soluções para a questão posta aos alunos.

Este volume oferece, em suma, um valioso conjunto de reflexões e propostas metodológicas que visam aprimorar o ensino de Matemática, incentivando práticas pedagógicas que estimulem o raciocínio lógico, a experimentação e a conexão dos conteúdos com o cotidiano e a formação integral dos estudantes.

CAPÍTULO 1

DECIMAIS NO ENSINO FUNDAMENTAL: DÚVIDAS COMUNS, SIGNIFICADO, REPRESENTAÇÕES ...

[Oficina 1 no YouTube]

Renan Gustavo Araújo de Lima[1]

Marilena Bittar[2]

Tatiani Garcia Neves[3]

Público-alvo: Destinada a estudantes dos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental.

Objetivo: Apresentar e refletir sobre situações que envolvem a compreensão de números decimais.

Habilidades da BNCC

- *(EF06MA08)* Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.

Materiais a serem utilizados:

- **Material Dourado** para a representação do número decimal[4].

[1] Professor Dr. do Instituto Federal de Mato Grosso do Sul - IFMS- Campus Coxim; e-mail: renan.lima@ifms.edu.br; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9931-0962.
[2] Professora Dra. da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul - UFMS; e-mail: marilenabittar@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9989-7871
[3] Professora Dra. da Secretaria Municipal de Educação - SEMED – Dourados/MS; e-mail: tatianigarcianeves@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1518-2156.
[4] Uma possibilidade é o uso da versão digital do material dourado, disponível em: https://www.coolmath4kids.com/manipulatives/base-ten-blocks.

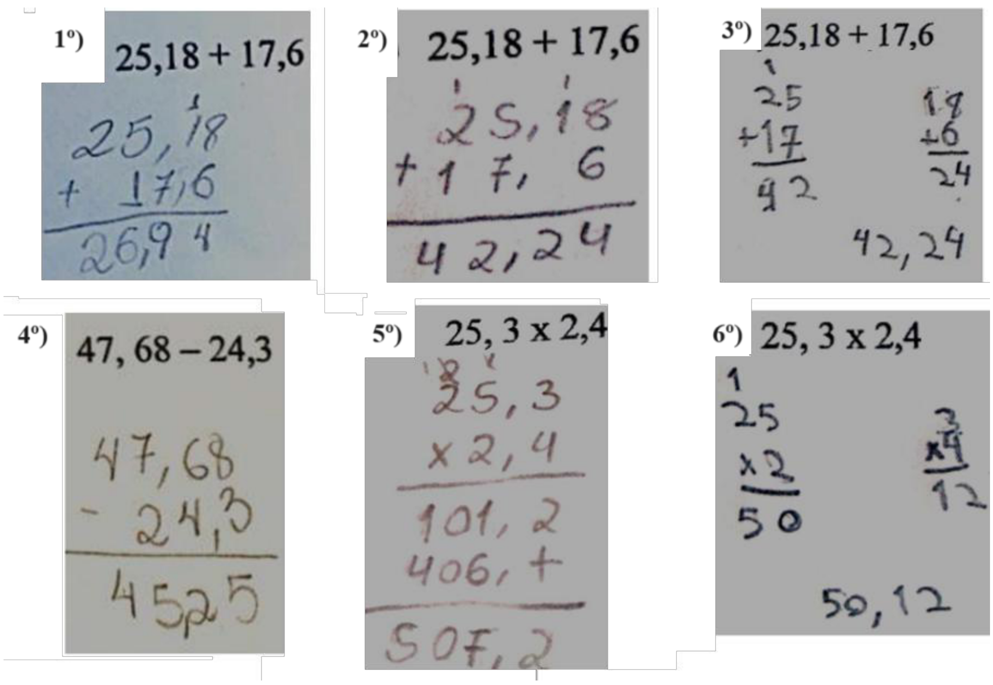
DOI: 10.46898/rfb.bbe222faa4dd.1

A PROPOSTA DA OFICINA

Quando trabalhamos com números decimais, especialmente nas operações, nos deparamos com diversas “regras” que indicam alguns procedimentos necessários para realizá-las. Por exemplo, na adição e subtração é comum considerar a necessidade de *“colocar vírgula embaixo de vírgula sempre”*; na multiplicação *“fazemos os cálculos desconsiderando a vírgula e depois contamos as casas decimais de cada um dos fatores para colocar a vírgula no resultado”*; na divisão *“igualamos a quantidade de casas decimais do dividendo e do divisor e depois cortamos a vírgula”*.

Entretanto, quando trabalhamos com os estudantes as operações com números decimais, verificamos que apenas a apresentação dessas regras não garante o sucesso na realização das operações, como é possível observar na figura 1:

Figura 1: Protocolo de resolução de operações com números decimais



Fonte: Acervo dos autores.

Ao analisarmos as resoluções apresentadas no protocolo, vemos que as operações de adição, subtração e multiplicação foram realizadas por procedimentos diferentes, podendo identificar três estratégias distintas: na 1ª e na 4ª resolução, houve o posicionamento dos algarismos da direita para a esquerda (independentemente do seu valor posicional); na 2ª e na 5ª resolução, houve o posicionamento da vírgula embaixo de vírgula, mantendo-a até a resposta final, independentemente da operação realizada; e na 3ª e 6ª resoluções , houve a separação da parte inteira e da parte decimal, como se fossem dois números diferentes.

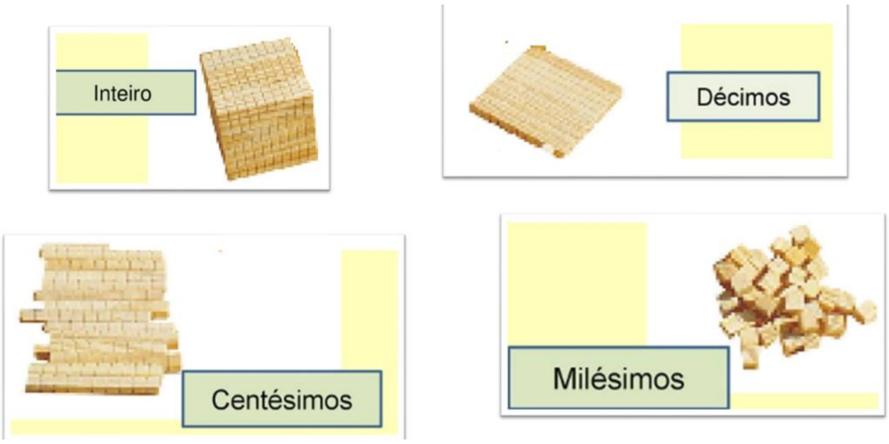
Essas resoluções exemplificam algumas dificuldades enfrentadas pelos estudantes, que podem estar relacionadas à compreensão do número decimal e ao significado das operações entre esses números. À vista disso, neste texto apresentamos reflexões acerca de alguns tópicos sobre números decimais, com proposição de diferentes situações que podem ser mobilizadas em sala de aula, de modo que as dificuldades observadas no protocolo anterior possam ser superadas pelos alunos.

O NÚMERO DECIMAL

No início do trabalho com números decimais, deparamo-nos com termos como décimos, centésimos, milésimos, que nos levam aos seguintes questionamentos: afinal, o que é um número decimal? O que é um décimo? E um centésimo? Dois décimos são quantos milésimos? Três centésimos são quantos décimos?

Para responder esses questionamentos, é necessária a compreensão da ideia de número decimal e seu funcionamento no Sistema de Numeração Decimal. Para isso, é recomendável a utilização do material dourado para a representação e compreensão do número decimal. O material dourado é composto por quatro tipos de peças diferentes, sendo elas: um cubinho, a barra, a placa e o cubo grande. Cabe relembrar que no estudo com os números naturais, um cubinho representa a unidade, a barra representa a dezena, a placa representa a centena e o cubo grande representa a unidade de milhar. Entretanto, no estudo dos números decimais é possível utilizar o material dourado a partir de uma mudança na forma de relacionar as peças do material com os valores no Sistema de Numeração Decimal. Assim, no contexto de trabalho com números decimais, pode-se considerar que o cubo grande, que antes representava a unidade de milhar, passe a representar apenas a unidade (o inteiro); as placas representarão os décimos; as barras representarão os centésimos; e os cubinhos representarão os milésimos.

Figura 2: Material dourado e os elementos dos números decimais

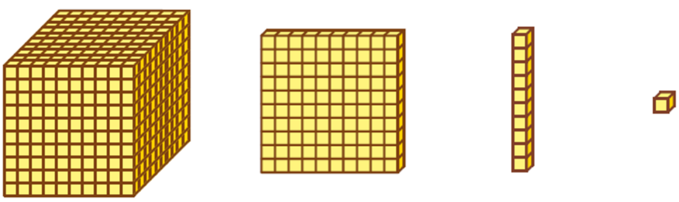


Fonte: Acervo dos autores.

Essa situação pode ser apresentada aos estudantes em sala de aula, com a disponibilização do material dourado e a identificação de cada peça com seu nome, conforme figura 2. Nesse contexto, é possível retomar alguns dos questionamentos realizados no início deste tópico, como: O que é um décimo? E um centésimo?

Ao manipularmos o material dourado, percebemos que o inteiro (cubo grande) pode ser dividido em 10 placas, que são chamadas de décimos. Cada placa também pode ser dividida em 10 barras, chamadas de centésimos. Por fim, cada barra é composta por 10 milésimos (os cubinhos). Dessa maneira, identifica-se que o décimo representa 1/10 do inteiro, o centésimo 1/10 do décimo e o milésimo 1/10 do centésimo:

Figura 3: Representação decimal com o material dourado



Fonte: Acervo dos autores.

Por meio da manipulação do material, e com a mediação do professor, os estudantes têm condições de compreender as relações existentes entre os termos do número decimal, relacionando-os com a ideia do Sistema de Numeração Decimal. Nesse contexto, os termos décimos, centésimos e milésimos podem ser compreendidos, pois os alunos relacionam o seu valor ao inteiro e entre si, buscando respostas a questões como: dois décimos são quantos milésimos? Três centésimos são quantos décimos?

Ao realizar a comparação entre as peças do material dourado, percebe-se que cada décimo, representado pela placa, é composto por 100 cubinhos, que representam os milésimos. Assim, verificamos que dois décimos são equivalentes a 200 milésimos. De maneira análoga, observa-se que três centésimos equivalem a 3 partes de 10 (3/10) de um décimo.

Durante o trabalho em sala de aula, o professor pode explorar situações semelhantes às apresentadas, com uma diversidade de problemas que levem os estudantes à comparação, adequando-se à realidade de sua turma. Cabe ressaltar que é importante trabalhar com uma variedade de situações, comparando diferentes peças, seja da maior para a menor valor ou da menor para a maior valor. Além disso, é importante ter em mente que não se trata de explorar estas relações em uma ou duas aulas, pois se trata de um processo (de aprendizagem) que demanda tempo.

Para o gerenciamento da atividade em sala de aula, é possível organizar os estudantes em pequenos grupos para que debatam sobre as relações existentes, manipulando o material dourado, quando necessário. Caso não haja materiais suficientes para cada grupo, uma possibilidade é a organização dos alunos em grupos e a disponibilização dos materiais dourados disponíveis em "ilhas" espalhadas pela sala, com os estudantes dirigindo-se até o material quando necessário. Ao final desse grupo de atividades espera-se que os estudantes consigam compreender o significado do inteiro, do décimo, do centésimo e do milésimo, além das relações existentes entre eles.

UM DIVIDIDO POR QUATRO NÃO DÁ...[5]

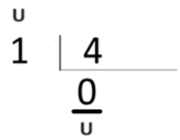
Em um segundo momento, após a reflexão sobre o Sistema de Numeração Decimal para valores menores que o inteiro, é possível iniciar a representação do número decimal. Uma atividade que pode ser discutida com os estudantes é a ideia da divisão entre dois

[5] Ao leitor interessado em uma discussão mais aprofundada sobre esta discussão indicamos a leitura do texto da Oficina 06 do primeiro volume desta coleção. Além disso, há a respectiva oficina indicada nas referências.

números. A escolha dessa atividade deve-se ao fato de os estudantes já estarem familiarizados com a divisão entre números naturais, podendo ser exata ou com resto.

Propomos, então, o trabalho com a seguinte situação: qual é o resultado da divisão de um por quatro? Se considerarmos apenas o conjunto dos números naturais, essa divisão não é possível, visto que o dividendo é menor que o divisor. Apesar disso, ao considerar alguns contextos cotidianos, encontramos situações em que é possível realizar essa divisão, por exemplo: dividir uma barra de chocolate ou R$1,00 para quatro pessoas. Nesse contexto, uma possibilidade de debater essa situação com os estudantes é retomar as ideias trabalhadas com o material dourado.

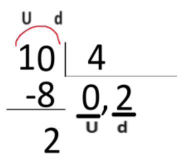
Figura 4: Divisão entre números naturais



Fonte: Acervo dos autores.

Considerando o Sistema de Numeração Decimal, percebe-se que não é possível dividir uma unidade por quatro, distribuindo uma unidade inteira para cada parte. Apesar disso, se retomarmos a ideia trabalhada no material dourado, sabemos que uma unidade (o cubo grande) equivale a 10 décimos (10 placas). Assim, a partir dessa equivalência, podemos continuar a divisão do seguinte modo: trocamos o cubo grande (a unidade) por dez placas (dez décimos) e ao dividirmos 10 décimos por quatro, é possível distribuir dois décimos para cada parte, restando ainda dois décimos (Figura 5).

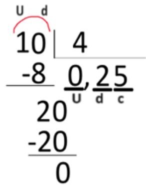
Figura 5: A ideia do número decimal na divisão entre números naturais



Fonte: Acervo dos autores.

Ao analisarmos a imagem apresentada, percebe-se que é preciso diferenciar a parte inteira e a parte decimal do quociente, para evitar a confusão se 02 representa duas unidades, dois décimos, dois centésimos, e assim por diante. Assim, separar a parte inteira da parte decimal usa-se a vírgula (,) ficando claro que 0,2 representa zero inteiro e dois décimos. Continuando a divisão, observa-se que restam dois décimos para dividir por quatro, e para efetuar esta divisão é preciso trocar esses dois décimos por 20 centésimos. Assim, ao dividirmos 20 centésimos por quatro, obtemos cinco centésimos para cada, não sobrando nenhum centésimo para continuar a divisão.

Figura 6: A ideia do número decimal na divisão entre números naturais

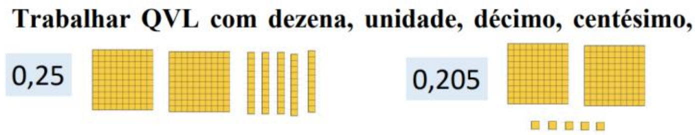


Fonte: Acervo dos autores.

Cabe ressaltar que, ao realizar as equivalências trabalhadas com o material dourado, é possível realizar a divisão com valores menores que um inteiro, como nesse caso, que resultou em dois décimos e cinco centésimos que pode também ser lido como vinte e cinco centésimos.

Outro recurso didático que pode ser utilizado com os estudantes para a compreensão da representação do número decimal é a utilização do Quadro Valor Lugar (QVL) para organizar os valores encontrados na divisão, do seguinte modo:

Figura 7: Representação do número decimal no Quadro Valor Lugar



D *dezena*	U *unidade*	d *décimo*	c *centésimo*	m *milésimo*
	0 ,	2	5	
	0 ,	2	0	5

Fonte: Acervo dos autores.

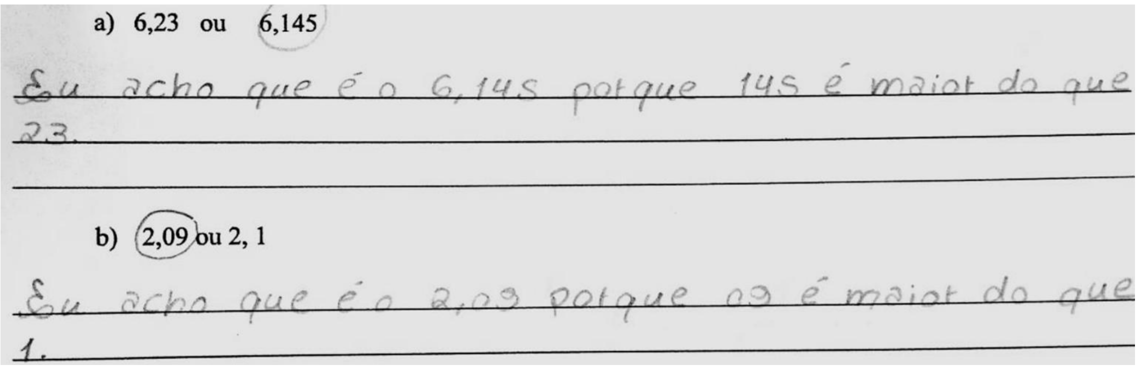
No caso da atividade da divisão de um por quatro, que resultou em 0,25, observa-se que dois décimos e cinco centésimos equivalem a 25 centésimos, podendo ser representados tanto no QVL quanto no material dourado. No caso do número 0,205, verifica-se que esse número representa zero inteiro, dois décimos e cinco milésimos. Ao representarmos no QVL, percebe-se que o algarismo 2 é colocado na casa dos décimos e o algarismo 5 na casa dos milésimos. Faz-se necessário utilizar o algarismo 0 na casa dos centésimos, visto que não utilizamos nenhuma barrinha para representar o número 0,205. Este exemplo evidencia a importância do ZERO, uma das maiores invenções da matemática.

Outro ponto importante a considerar no trabalho com os números decimais é o contexto abordado com os estudantes. Ao propor a atividade de um dividido por quatro, alguns estudantes podem relacionar com o Sistema Monetário, concluindo que dividindo R$1,00 (um real) para quatro pessoas daria R$0,25 (vinte e cinco centavos) para cada, o que está correto. Entretanto, durante as discussões, cabe ressaltar que ao considerar a conversão de um inteiro para 10 décimos, no Sistema Monetário não há o décimo de real. Essas diferenças podem ser abordadas em sala de aula, refletindo sobre possibilidades e limitações de utilizar sempre o contexto monetário para o trabalho com números decimais.

COMPARAÇÃO DE DECIMAIS: QUAL O MAIOR?

Um tópico que gera dificuldades para os estudantes envolve a comparação entre números decimais. Vamos considerar a comparação entre os números 6,23 e 6,145. Ao apresentarmos essa atividade para alunos do 8º ano do ensino fundamental, obtivemos a seguinte resolução:

Figura 8: Estratégia do estudante para a comparação entre números decimais


a) 6,23 ou 6,145

Eu acho que é o 6,145 porque 145 é maior do que 23.

b) 2,09 ou 2, 1

Eu acho que é o 2,09 porque 09 é maior do que 1.

Fonte: Acervo dos autores.

Pesquisas identificam que uma possível dificuldade é a ideia de que os números decimais são dois números separados por uma vírgula (Esteves, Souza, 2012). Dessa maneira, ao utilizar esse conhecimento, os estudantes podem realizar a comparação entre os números decimais, comparando qual número depois da vírgula é maior. Esta estratégia poderia dar resultado correto, por exemplo, ao comparar 3,4 com 3,2. Vejamos o que ocorre ao utilizá-la nos exemplos da figura 8: no caso do item (a), o estudante conclui que o número 6,145 é maior que 6,23, pois 145 é maior que 23 gerando um resultado incorreto; no item (b), o estudante aplica a mesma estratégia e conclui que 2,09 é maior que 2,1, pois 09 é maior que 1, o que também gera resultado incorreto. Assim, para que essa estratégia seja válida em todas as situações de comparação entre números decimais é necessário que a quantidade de casas decimais seja a mesma. Dessa forma, ao comparar dois números decimais primeiramente igualam-se as casas decimais para, em seguida, realizar a comparação.

Para superar essa dificuldade evidenciada na estratégia do estudante, uma possibilidade é retomar as estratégias apresentadas ao longo deste texto, como o uso do QVL e do material dourado na comparação. Ao representar a primeira situação com o QVL, identificamos que o número 6,145 representa seis unidades, um décimo, quatro centésimos e cinco milésimos. Já o segundo número - 6,23 - equivale a seis unidades, dois décimos e três centésimos. Com o uso do material dourado, verificamos que a parte inteira é a mesma nos dois números (seis unidades – seis cubos grandes). Em relação à parte decimal, no número 6,145 há uma placa, quatro barras e 5 cubinhos, enquanto no número 6,23 há duas placas e três barras. Ao comparar as peças do material dourado, observa-se que o número 6,23 é maior que 6,145, pois mesmo se agruparmos as peças do segundo número não obtemos duas placas (dois décimos).

O QUE É UM NÚMERO DECIMAL?

Considerando os conjuntos numéricos que são abordados no ensino básico, como podemos definir um número decimal? Todos os números com vírgula podem ser chamados de números decimais? Se estiver correto considerar todos os números com vírgula como números decimais, as dízimas periódicas e não periódicas também são consideradas números decimais?

Para entendermos melhor essas questões, é necessário compreender a diferença entre números decimais e números com a representação decimal. Sabendo que a definição de um número racional é todo número que pode ser escrito como uma fração $\frac{a}{b}$, com a,$b \in Z$ e $b \neq 0$ (Dante; Viana, 2022). Dentre todas as frações que compõem o conjunto dos números racionais, podemos chamar de frações decimais aquelas cujos denominadores podem ser escritos como uma potência de 10, por exemplo:

- $\frac{3}{10}, \frac{23}{100}, \frac{343}{1000}$ são consideradas frações decimais;
- $\frac{2}{5}$ e $\frac{12}{25}$ também são consideradas frações decimais, pois podem ser representadas por frações equivalentes com denominadores com potência de 10, como $\frac{4}{10}$ e $\frac{48}{100}$, respectivamente;
- $\frac{2}{3}$ e $\frac{12}{7}$ são números racionais, mas não são frações decimais.

No caso dos números com vírgula, nem todos podem ser classificados como números decimais, *pois o número decimal é todo número que pode ser escrito na forma de uma fração decimal*. Portanto, os números decimais são aqueles que possuem um número finito de casas decimais, como 4,3 e 12,25 que podem ser escritos como $\frac{43}{10}$ e $\frac{1225}{100}$, respectivamente.

Diante desta definição de números decimais, as dízimas periódicas e não periódicas não são consideradas números decimais, sendo que as mesmas apenas possuem representação na forma decimal. As dízimas periódicas, quando escritas na forma de fração, não possuem potências de 10 nos denominadores, e as dízimas não periódicas não pertencem ao conjunto dos números racionais, pois não podem ser escritas na forma $\frac{a}{b}$, com $a, b \in Z$, e $b \neq 0$.

Cabe ressaltar que durante o trabalho com os números decimais, o professor pode explorar diferentes representações desses números, como a representação do número decimal na forma fracionária.

VOLTANDO AOS PROTOCOLOS

Após o trabalho com o conceito de números decimais, é possível retomar e refletir sobre algumas "regras", que apresentamos no início desse texto, que são mobilizadas no trabalho com operações entre esses números, buscando compreendê-las.

Adição e subtração - Vírgula embaixo de vírgula sempre?

Ao realizar uma adição ou subtração entre números inteiros, organizamos os algarismos da direita para a esquerda e operamos entre os algarismos das mesmas casas decimais (unidades com unidades, dezenas com dezenas, centenas com centenas etc.). Essa mesma ideia se estende para os números decimais, em que é necessário operar entre os algarismos correspondentes nas mesmas posições decimais, como décimos com décimos, centésimos com centésimos, e assim por diante. Dessa forma, a vírgula separa a parte inteira da parte decimal. Ao alinhar as vírgulas dos números a serem somados ou subtraídos, os algarismos de cada posição decimal no primeiro número são alinhados com seus respectivos algarismos no segundo número, facilitando a execução da operação. Por exemplo:

Figura 9: Adição de números decimais

$$
\begin{array}{rcccc}
 & D & U, & d & c \\
 & 2 & 5, & 1 & 8 \\
+ & 1 & 7, & 6 & \\
\hline
 & 4 & 2, & 7 & 8
\end{array}
$$

Fonte: Acervo dos autores.

No exemplo apresentado, mobilizando a ideia do Quadro Valor Lugar, ao alinhar vírgula embaixo de vírgula, os algarismos que representam os décimos (1 e 6) e as unidades (5 e 7) ficam corretamente posicionados para a operação. Dessa forma, evita-se o equívoco de somar os primeiros algarismos à direita entre si, como o algarismo 8 com o algarismo 6. Isso ocorre porque o algarismo 8 representa oito centésimos e o algarismo 6 representa seis décimos, o que significa que eles não estão na mesma casa decimal para serem somados diretamente.

Multiplicação - Por que na multiplicação fazemos os cálculos desconsiderando a vírgula e depois contamos as casas decimais de cada um dos fatores para colocar a vírgula no resultado?

Vamos considerar a multiplicação de $25{,}3 \; x \; 2{,}4$. Ao realizar a multiplicação sem considerar a vírgula, obtêm-se o resultado de 6072. Após aplicarmos o algoritmo da multiplicação, observamos que cada fator da multiplicação possui uma casa decimal, totalizando duas casas decimais no produto final. Portanto, ao considerarmos as duas casas decimais que devem ser alocadas no resultado na multiplicação, encontramos que a resposta correta é 60,72.

E como explicar esta regra? Por que ela dá certo? Por que desconsideramos a vírgula durante o algoritmo e retomamos apenas no final? Vejamos uma forma de explicar esta regra.

Como mencionado anteriormente, os números decimais podem ser representados na forma de frações. Ao realizar a multiplicação de fração, obtêm-se o seguinte resultado:

Figura 10: Multiplicação de números decimais

$$25{,}3 \text{ x } 2{,}4 = \frac{253}{10} \text{ X } \frac{24}{10} = \frac{253x24}{10x10} = \frac{6072}{100} = 60{,}72$$

Fonte: Acervo dos autores.

Ao representar os números decimais por meio de frações decimais, o produto obtido será a fração com denominador 100. Ao converter a fração $\frac{6072}{100}$ para sua forma decimal, obtém-se o número 60,72. Essa abordagem pode ser aplicada em outras situações que envolvem a multiplicação de números decimais, explicando a quantidade de casas decimais presentes no produto final.

Divisão - Por que na divisão igualamos a quantidade de casas decimais do dividendo e do divisor e depois cortamos a vírgula?

Para compreender a regra da divisão de números decimais, pode-se seguir uma abordagem semelhante à utilizada na multiplicação, convertendo os números para sua representação fracionária. Vejamos duas formas de dividir $6{,}72\ por\ 2{,}1$ utilizando a representação fracionária:

Figura 11: Divisão de números decimais

$$1^{\underline{o}})\ 6{,}72 : 2{,}1 = \frac{6{,}72}{2{,}1} = \frac{6{,}72x100}{2{,}1x100} = \frac{672}{210}$$

$$2^{\underline{o}})\ 6{,}72 : 2{,}1 = \frac{672}{100} : \frac{21}{10} = \frac{672}{100} x \frac{10}{21} = \frac{6720}{2100} = \frac{672}{210}$$

Fonte: Acervo dos autores.

Analisando as duas estratégias, percebe-se que a partir da representação fracionária é mobilizada a ideia de fração equivalente durante a resolução. Na primeira estratégia, representa-se a divisão de números decimais por meio da fração $\frac{6{,}72}{2{,}1}$ e multiplica-se o numerador e o denominador por 100, resultando em uma fração equivalente com numerador e denominador com números naturais $(\frac{672}{210})$. Na segunda estratégia, após representar os números decimais na forma fracionária, realiza-se a divisão entre as frações e a simplificação, obtendo a mesma fração da primeira resolução. Por meio dessas estratégias, mostramos que ao igualar as casas decimais para realizar a divisão, mobilizamos a ideia de equivalência da divisão entre os números, pois realizar $6{,}72 : 2{,}1$ é equivalente a $672 : 210$.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES PARA SALA DE AULA

Ao longo deste texto discutimos possibilidades para o ensino de números decimais, visando contribuir para a superação de dificuldades enfrentadas pelos alunos durante o processo de aprendizagem desse tema. Uma das formas de superar essas dificuldades é pela compreensão do que é um número decimal e seus elementos fundamentais, como décimos, centésimos e milésimos. Propusemos atividades que utilizam diferentes formas de representação do número decimal, como o uso do material dourado e o Quadro Valor Lugar para auxiliar na compreensão da ideia posicional do número decimal e das relações existentes entre seus elementos.

É importante destacar que a organização dos estudantes pode ser feita de acordo com a realidade do professor, a disponibilidade de materiais e as características da turma, podendo organizá-los em duplas ou trios para trabalhos colaborativos. Outro aspecto fundamental é a importância do registro numérico na lousa, pois a partir do trabalho em conjunto com diferentes representações e materiais (numéricas, material dourado, Quadro Valor Lugar), os estudantes podem transitar de maneira gradual do trabalho com materiais concretos para o abstrato.

Por fim, apesar de não abordarmos neste texto, é possível realizar outras atividades exploratórias em grupo, como a organização de um piquenique entre os estudantes, sendo que eles definirão os custos para a organização e o orçamento das compras necessárias para a realização do evento[6]. Dessa forma, os estudantes podem mobilizar os conhecimentos sobre números decimais, realizando diferentes operações durante a atividade, além de estimular a autonomia e a criticidade do que é essencial para a execução de um piquenique.

[6] Essa situação foi explorada na oficina do DDMAT: *Decimais no ensino fundamental: Dúvidas comuns, significados, representações, ...* disponível em https://www.youtube.com/live/qz2deSvBLJ8?si=Rx86B-Jezds9dunc

REFERÊNCIAS

BITTAR, Marilena, OLIVEIRA, Susilene Garcia da Silva. **Um dividido por quatro não dá...** Oficinas on-line 2021: diálogos sobre propostas em matemática, 2021. Disponível em: https://grupoddmat.pro.br/index.php/oficina-on-line-v.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Teláris Essencial - Matemática: 8º ano**. São Paulo: Ática, 1ª ed., 2022.

ESTEVES, Anelisa Kisielewski; SOUZA, Neusa Maria Marques de. Números decimais na Sala de aula: os conhecimentos de um grupo de professores e a relação com sua prática pedagógica**. In: Revista Eletrônica de Educação**. v.6, n. 1, p. 188 – 205, 2012.

LIMA, Renan Gustavo Araújo de; BITTAR, Marilena. **Decimais no ensino fundamental: Dúvidas comuns, significados, representações, ...** , Oficinas on-line 2022: diálogos sobre propostas em matemática, 2022. Disponível em: https://grupoddmat.pro.br/index.php/oficinas-online/oficinas-on-line-2022/oficina-on-line-i-2022/.

CAPÍTULO 2

AS RELAÇÕES E CONFUSÕES ENTRE VOLUME E CAPACIDADE

Oficina 2 no YouTube

Katy Leão[7]

Alexandre Luis de Souza Barros[8]

Público-alvo: Estudantes do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental.

Objetivo: Apresentar atividades de volume e capacidade, exemplificando situações que podem ser trabalhadas por meio destas e pontuando algumas relações entre grandezas.

Habilidades da BNCC

- *(EF06MA24)* Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
- (*EF07MA30*) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).

[7] Professora Dra. da Secretaria de Educação de Pernambuco; e-mail:katywellen@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2265-1133.

[8] Professor Dr. do colégio Don Agostinho da Universidade Federal Rural de Pernambuco (CODAI-UFRPE); e-mail: alexandrelsbarros@ufrpe.br; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9051-2602.

DOI: 10.46898/rfb.bbe222faa4dd.2

- *(EF08MA20)* Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes.
- *(EF08MA21)* Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular
- *(EF09MA19)* Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.

Materiais a serem utilizados:

- **Recipientes diversos graduados e não graduados** para medir sua capacidade e fazer experimentos e brincadeiras em sala de aula.
- **Bloco grande do material dourado** para desafiar os alunos no cálculo do volume sem que ele possa ver todas as secções do sólido.

INTRODUÇÃO

No ensino de **Grandezas e Medidas** é comum nos perguntarmos *o que danado é isso?* Bem, sabemos por meio dos livros didáticos e de documentos oficiais que elas são: área, perímetro, volume, capacidade, massa etc., mas o que, de fato, são Grandezas? Por onde vivem? Qual a sua importância? Por que ensiná-las? São muitas perguntas e seria muita presunção de nossa parte tentar respondê-las todas neste texto, mas faremos um esforço de apresentar contribuições que julgamos relevantes para o debate.

O primeiro aspecto que buscamos discutir é sua presença no nosso dia a dia. Quando vamos a uma farmácia e compramos um remédio para dor e febre, por exemplo, cuja oferta pode ser em comprimidos ou em gotas. A composição do comprimido pode ser de 500 mg ou de 750 mg do composto principal ou 200 mg/ml no caso do líquido. Ainda temos que decidir entre levar uma cartela com 12 ou 20 comprimidos, ou entre 15 ou 60 ml do líquido. Como saber qual o melhor custo-benefício? Como escolhemos qual remédio levar? Bem, inicialmente precisamos considerar a recomendação médica e/ou procurar o farmacêutico, mas e se o remédio já está em casa e precisamos saber quantas gotas precisamos dar para uma criança de 22 kg?

Desejamos que todos estejam bem de saúde, mas o parágrafo anterior nos remete às situações de uso da noção de algumas grandezas. Perceberam que embora seja corriqueira ela envolve as noções de: volume, massa e valor monetário? E se vamos nos mudar e estamos procurando um novo apartamento ou casa, o tamanho desse imóvel é dado em m², certo? Precisamos ter noção se aquela área do imóvel é ou não adequada às nossas necessidades.

E o que dizer das dimensões das paredes para móveis projetados? E quando estamos pensando se os móveis cabem dentro dos cômodos ou queremos mudar os móveis de lugar? Precisamos medir o comprimento de suas dimensões para ter noção de sua área e/ou volume que ocuparão. Agora vamos para outro cômodo da casa, a cozinha. Estamos fazendo suco e precisamos colocá-lo numa jarra: como saber se o suco cabe todo naquela jarra? Utilizar fritadeira elétrica é aplicar imediatamente a noção de intervalo de tempo e temperatura, pois precisamos determinar de antemão por quanto tempo o alimento ficará exposto à certa temperatura.

A utilização das grandezas e medidas no dia a dia é indiscutível e temos a necessidade de saber operá-las e compreendê-las, como apontam Lima e Bellemain (2010, p. 170) ter "conhecimentos limitados nesse campo da Matemática restringem a capacidade das pessoas de exercerem plenamente sua cidadania". Mas diante disso tudo, ainda não trouxemos uma definição para tal.

Entendemos que grandezas são características associadas a objetos ou fenômenos e que podem ser medidas: em muitos casos necessitamos de um instrumento de medição e uma unidade de medida. Por exemplo, uma jarra de suco é um objeto e pode ser de plástico, vidro etc. A ela podemos associar o quanto de líquido "cabe" no seu interior, isso será uma característica da jarra, assim como o material do qual ela foi fabricada.

Em nossa oficina, e consequentemente neste texto, focamos nas grandezas volume e capacidade. O volume é definido como o espaço que um sólido ocupa e a sua capacidade como o espaço interno ocupado. Ao associar essa quantidade de espaço com um número, recorre-se a uma unidade de medida, [...] (Lima Carvalho, Wagner & Morgado, 2006).

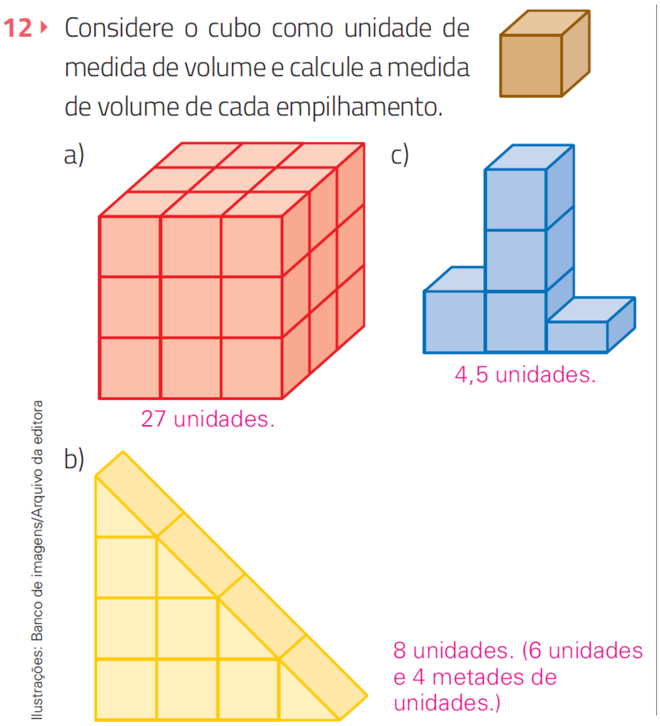
Nós entendemos que volume e capacidade fazem referência à noção de espaço, podendo ser vistos como um mesmo objeto matemático, mas que são utilizados em situações distintas. Esse aspecto intrínseco deve ser discutido no momento de estudo dessas grandezas. O fato de poderem ser associadas a diferentes situações nos leva a considerar possibilidades para abordar diferenças entre os dois conceitos nesses momentos.

ATIVIDADES PROPOSTAS

Se há possibilidade de diferenciação então pode haver confusão por parte dos estudantes quando os vivenciam em sala de aula e em seu dia a dia. E para chamar atenção do professor para tal, trouxemos tanto atividades retiradas de livros didáticos quanto outras que propomos serem feitas com os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Por que contar? Lembre-se que os alunos do 6° ano são egressos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, quando a noção de contagem foi fortemente utilizada para inserção de vários conteúdos matemáticos e podemos resgatá-la neste momento. Fato novo é a forma de disposição dos objetos a serem contados.

Figura 1: Atividade de contagem de bloquinhos – 6° ano



Fonte: Dante (2018a, p. 281).

Essa atividade (Figura 1) é interessante para auxiliar na construção da tridimensionalidade do volume. Muito possivelmente, ao trabalhar o conceito de área, o aluno já deve ter realizado contagem de quadradinhos dispostos em configuração retangular. Agora, o aluno deve perceber que na figura do cubo existem três camadas de nove cubinhos cada uma, e que cada camada é formada por três fileiras de três cubinhos. Nos itens b e c podemos ver a utilização do cubinho seccionado, ou seja, objetos cujo volume seja a metade do cubinho, tanto em uma de suas diagonais, formando um prisma de base triangular, quanto em sua altura, formando um paralelepípedo.

Desta forma, haverá uma sofisticação no procedimento de contagem. Utilizar os cubinhos divididos ao meio, ou um terço e outras frações, pode auxiliar na construção da necessidade do uso da fórmula, indicando ao aluno que a contagem de cubinhos não é um procedimento adequado para aquela situação, fazendo-o buscar alternativas diversas para descobrir aquele volume, e é quando entra a fórmula, que dá um resultado exato em poucos passos.

Entendemos que esse processo de generalização, que resulta na construção da fórmula, deve vir inicialmente da criança, que pode já ter construído esse conceito ou não ao chegar ao 6° ano. A construção gradual da tridimensionalidade e a percepção geométrica devem ser trabalhadas desde os anos iniciais e preparam o aluno para visualizar o sólido sem apoio, seja o material dourado ou outros recursos táteis. A utilização da fórmula de volume e de outras fórmulas "simples", já trabalhadas ou a trabalhar, auxiliam o aluno a formar a ideia de generalização e entender a ideia por trás da utilização de uma fórmula, características que podem ser de difícil apreensão quando as fórmulas ficam maiores, mais difíceis e partem de conceitos mais complexos.

Figura 2: Atividade de estimativa de capacidade - 6° ano

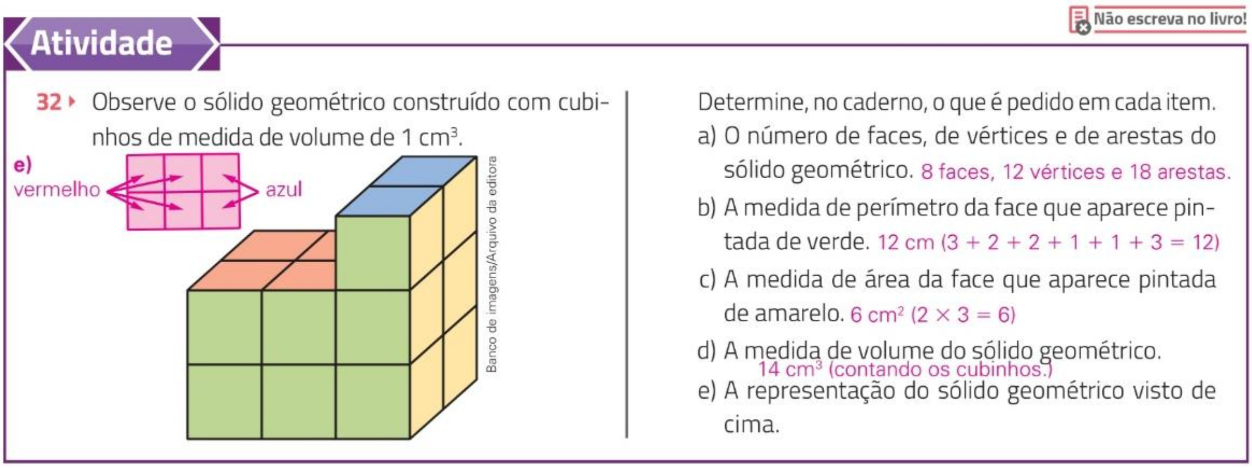
23 Estime quantas colheres de sopa com água são necessárias para encher um copo comum. Faça a experiência e verifique se sua estimativa foi boa ou não. Exemplo de resposta: Aproximadamente 13 colheres de sopa.

Fonte: Dante (2018a, p. 282).

De acordo com Leão (2020), as atividades de volume e capacidade que envolvem estimar volume e capacidade são bastante trabalhadas nos primeiros anos dos anos iniciais do Ensino Fundamental e aos poucos desaparecem, por esse motivo resgatamos esse tipo de atividade no texto. Estimar é uma habilidade que utilizamos com muita frequência e que merece ser trabalhada com mais afinco inclusive com experimentações práticas, como levar recipientes para a sala de aula e estimular os alunos a desvendar a capacidade do recipiente, ou a quantidade de colheres de sopa necessária para encher tal pote. Cada um pode dar uma resposta e essa ser anotada no quadro.

A capacidade como "volume interno" é algo que pode ser bastante trabalhado com estimativa. O copo medidor como elemento que apresenta unidades padrões de medidas acompanhado de outros objetos que permitem comportar água no seu interior são objetos interessantes para uma dinâmica em sala de aula.

Figura 3: Atividade de área, perímetro e volume



Atividade

Não escreva no livro!

32 ▸ Observe o sólido geométrico construído com cubinhos de medida de volume de 1 cm^3.

Determine, no caderno, o que é pedido em cada item.

a) O número de faces, de vértices e de arestas do sólido geométrico. 8 faces, 12 vértices e 18 arestas.

b) A medida de perímetro da face que aparece pintada de verde. 12 cm (3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 3 = 12)

c) A medida de área da face que aparece pintada de amarelo. 6 cm^2 (2 × 3 = 6)

d) A medida de volume do sólido geométrico. 14 cm^3 (contando os cubinhos.)

e) A representação do sólido geométrico visto de cima.

Fonte: Dante (2018b, p. 293).

A diferenciação entre as grandezas área, perímetro, volume e capacidade ainda é uma dificuldade em diversos níveis de escolaridade. Dentre outros fatores, ressaltamos que há várias grandezas que podem ser associadas ao mesmo objeto, no caso da atividade, o sólido em questão. Por isso é importante trazer para a sala de aula atividades que deixem claro essas diferenças (Figura 3) e, ao propô-las aos alunos, é preciso dialogar sobre outras situações nas quais utilizamos tais grandezas e como podemos fazer para diferenciá-las.

Vamos fazer um paralelo com aspectos da saúde. Glicemia, triglicerídeos e colesterol são características associadas ao nosso sangue e que correspondem respectivamente à concentração de açúcar, massa e gordura no sangue, não é? Mas quando vamos fazer uma busca na internet encontramos que triglicerídeo e colesterol são gorduras. Saber diferenciar é importante se desejamos nosso bem-estar; uma alimentação saudável é necessária para possibilitar o exercício pleno da cidadania.

Uma atividade interessante que pode ser proposta nessa mesma temática é dar aos alunos unidades de medidas que não são capazes de medir um objeto proposto, como por exemplo um barbante para um aluno medir a capacidade de uma caixa, ou um litro d'água para calcular a área da sala de aula, ou até mesmo uma unidade que seja muito grande para medir um objeto, como km para medir a altura de um aluno. Ou unidades associadas à grandeza em jogo, mas que não sejam adequadas para a situação posta, a exemplo, medir a capacidade de um copo com cubinhos do material dourado.

Essas "brincadeiras" mostram que as unidades de medidas são associadas a grandezas específicas e as grandezas são diferentes entre si, além de mostrar que para medir precisamos de instrumentos e unidades de medidas adequadas. No caso de capacidade, um líquido pode fazer parte do conjunto de instrumentos a serem utilizados.

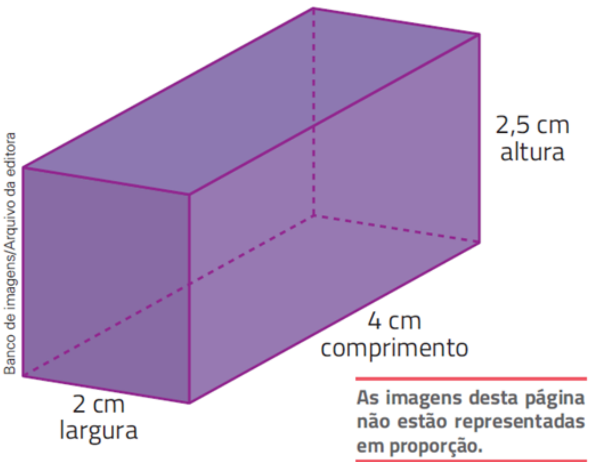
Desejando saber a capacidade de determinado recipiente, podemos utilizar como estratégia preenchê-lo com água, pois um líquido tem como característica adequar-se ao recipiente que o comporta, completando-o, depois transpomos essa quantidade de água para um copo medidor, determinando assim o volume de água que cabe naquele recipiente, sua capacidade. Indo um pouco além, o fato de a densidade da água ser 1, essa estratégia determina o peso de água presente no recipiente quando totalmente cheio. Podemos decidir pesar o recipiente antes e depois de cheio, sendo a massa de água equivalente ao seu volume.

Mas não apenas de contagem vive a matemática. Caminhar para generalizações, explorar um pouco da álgebra é fundamental para esta etapa da escolaridade.

Na Figura 4 a atividade constrói a necessidade no aluno de utilizar a fórmula, mas especificando que no recipiente não caberá uma fileira completa de cubinhos, sendo necessário um procedimento mais custoso do que a multiplicação para cortar os cubinhos no meio e preencher a camada superior.

Figura 4: Construção da fórmula de capacidade/volume - 7° ano

34 ▸ Examine esta caixa cuja forma lembra um paralelepípedo. Ela tem uma tampa na parte de cima.



As imagens desta página não estão representadas em proporção.

a) É possível preencher esta caixa com cubinhos inteiros de medida de volume de 1 cm^3? Não.

b) Você pode colocar uma camada de cubinhos inteiros no fundo da caixa? Sim.

c) Você pode colocar uma segunda camada de cubinhos inteiros sobre a primeira? Sim.

d) E uma terceira camada? Não.

e) O que você precisaria fazer com os cubinhos para poder preencher a caixa? Cortar os cubinhos pela metade.

f) De quantas metades de cubinhos você precisaria? 8 metades.

g) De quantos cubinhos você precisaria para providenciar essas metades? 4 cubinhos.

h) Então, de quantos cubinhos você precisaria ao todo para preencher esta caixa? 20 cubinhos.

i) Qual é a medida de volume da caixa preenchida? 20 cm^3

j) Você concorda que pode determinar o número de cubinhos necessários para preencher a caixa pela multiplicação $(4 \times 2) \times 2{,}5$? Sim, pois $4 \times 2 \times 2{,}5 = 20$.

k) O resultado dessa multiplicação é igual ao número da resposta que você deu no item **h**? Sim.

Fonte: Dante (2018b, p. 295).

Um pouco antes desse tipo de atividade, o professor pode levar uma caixa de sapato e questionar os estudantes sobre possíveis estratégias para determinação de seu volume.

É importante também que os alunos tenham contato com situações diversas e que envolvam outras grandezas e conteúdos de dentro da matemática ou não na resolução das atividades, uma vez que quando nos deparamos com um problema de cálculo de volume ou capacidade no nosso dia a dia dificilmente ele será “calcule o volume do sólido cujas dimensões são 100 cm por 40 cm por 45 cm”. Em geral quando esbarramos com problemas de grandezas temos números decimais, frações, proporções e outras relações também envolvidas e precisamos preparar os alunos para lidar com elas.

Alertamos aos nossos leitores que tomem cuidado para que atividades como estas não se resumam à conversão entre unidades de medidas e aplicação de fórmula. O processo de ensino e aprendizagem demanda tempo. Muitas vezes, em sala de aula, achamos que ganhamos tempo quando a abordagem inicia com a apresentação da definição seguida pela fórmula, passando a impressão de que a matemática pode ser experimentada exclusivamente por regras e letras. Entretanto, acreditamos que tal escolha metodológica não permite que seja explorado o processo criativo tão presente neste componente curricular, além de limitar olhares e perspectivas diversas de um mesmo conteúdo que podemos trabalhar.

Figura 5: Atividade de volume e proporção – 8° ano


($V = 1 \times 2 \times 1 = 2$; $2\ m^3 \rightarrow 2000$ L)

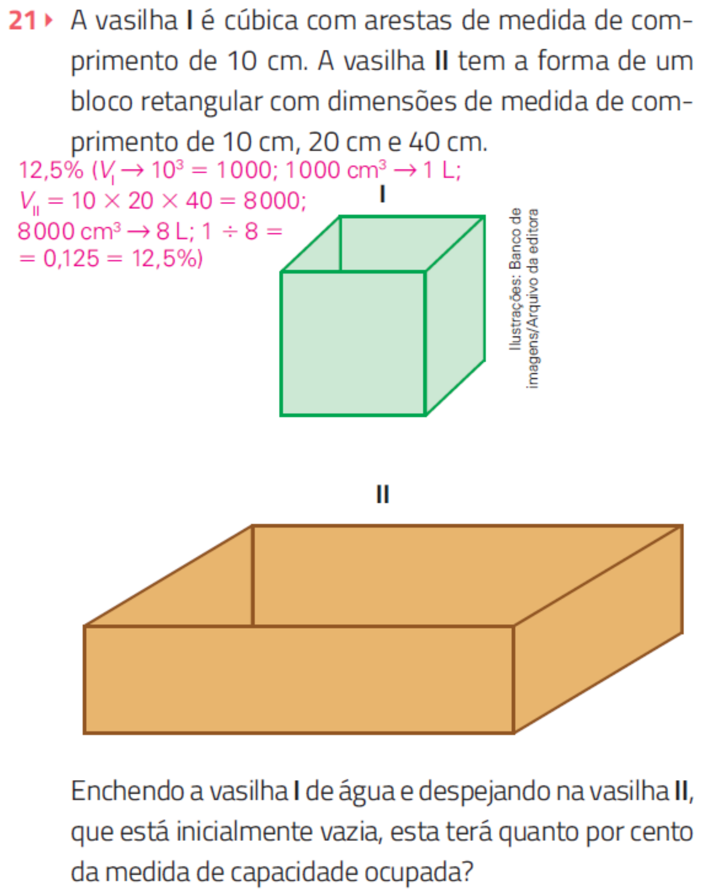
41 O nível de água neste aquário corresponde a $\frac{2}{3}$ da medida de altura dele. Sabendo que a forma deste aquário é de um paralelepípedo, calcule no caderno quantos litros há nele.

Fonte: Dante (2018c, p. 180).

Na questão apresentada na Figura 5, pede-se o cálculo do volume de água presente no aquário, porém para isso precisamos calcular a proporção de 2/3 de sua altura e então calcular seu volume. Percebam aqui que a espessura do vidro foi desconsiderada na questão, atitude comum nas questões que envolvem capacidade. Esse aspecto pode ser explorado na turma como forma de refletir sobre as situações presentes nos livros e outras do cotidiano, mas que segundo o material didático possui "certa" semelhança.

A atividade proposta na figura 6 explora volume e capacidade de duas caixas diferentes e incorpora a porcentagem em sua resposta, relacionando conceitos matemáticos diversos em uma única atividade. As Grandezas e Medidas nos permitem relacionar objetos matemáticos diversos, pois estão longe de ser um conceito fechado em si, ao contrário, talvez seja aquele que mais dialoga com outros conteúdos da matemática escolar.

Figura 6: Atividade de volume, capacidade e porcentagem – 8° ano



21 A vasilha **I** é cúbica com arestas de medida de comprimento de 10 cm. A vasilha **II** tem a forma de um bloco retangular com dimensões de medida de comprimento de 10 cm, 20 cm e 40 cm.

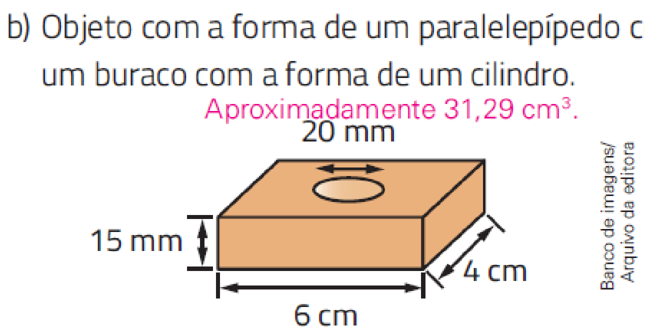
12,5% ($V_I \rightarrow 10^3 = 1000$; $1000\ cm^3 \rightarrow 1$ L; $V_{II} = 10 \times 20 \times 40 = 8000$; $8000\ cm^3 \rightarrow 8$ L; $1 \div 8 = 0{,}125 = 12{,}5\%$)

Enchendo a vasilha **I** de água e despejando na vasilha **II**, que está inicialmente vazia, esta terá quanto por cento da medida de capacidade ocupada?

Fonte: Dante (2018c, p. 187).

Na atividade da Figura 7, o autor aproveita sólidos diferentes para trabalhar volume, sendo necessário que o aluno conheça a fórmula do volume do paralelepípedo e do cilindro para a sua resolução. Além disso, o enunciado mistura as unidades de medida, utilizando o centímetro e o milímetro, exigindo do aluno a realização da conversão entre unidades de medida estando presentes ora números decimais, ora números na casa das centenas.

Figura 7: Atividade de volume com sólidos diferentes - 8° ano



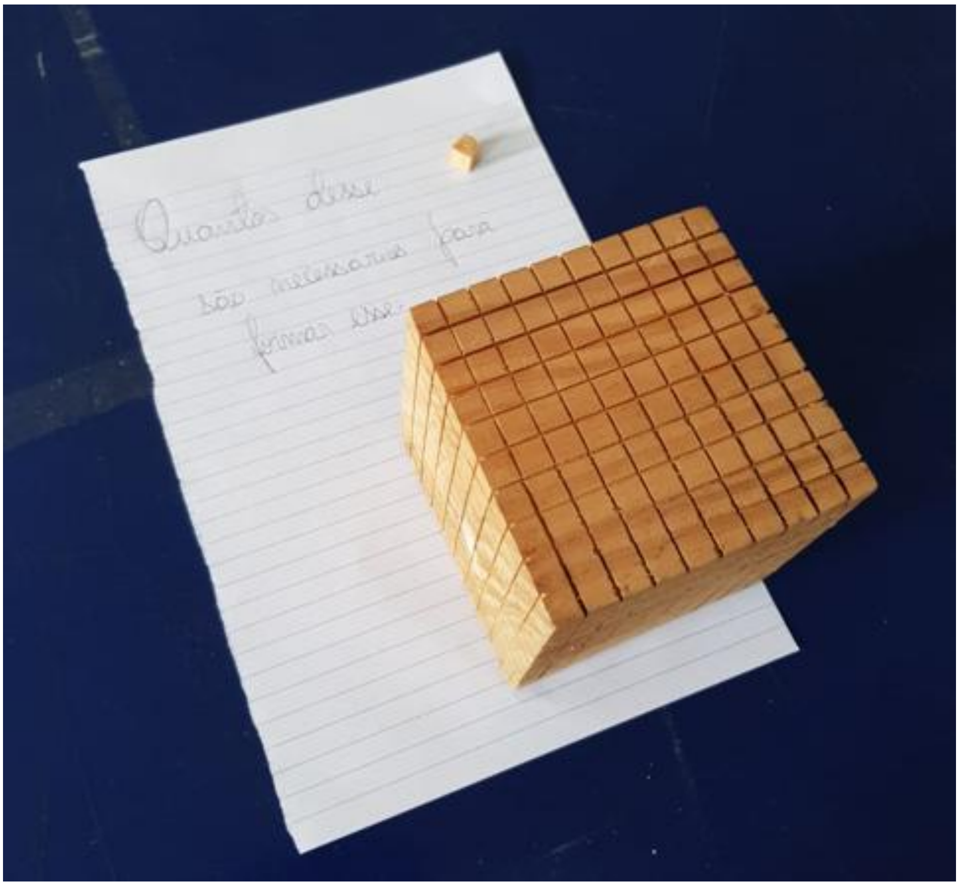
b) Objeto com a forma de um paralelepípedo com um buraco com a forma de um cilindro.

Aproximadamente $31{,}29\ cm^3$.

Fonte: Dante (2018c, p. 184).

Uma outra atividade recomendada e que julgamos ser interessante é apresentar aos alunos um cubo grande de material dourado e pedir o volume em centímetros cúbicos (figura 8), considerando que cada cubinho menor tenha aresta de comprimento 1 cm. Os alunos podem fazer confusão e calcular sua área, tentar somar várias áreas, calcular o perímetro ou até mesmo deixar de contar os primeiros cubinhos de cada face, além de não se atentar para todos os cubinhos não aparentes do sólido em questão.

Figura 8: Atividade com material dourado



Fonte: Acervo da pesquisa

Esta atividade em particular, “Quantos desse (cubo unitário do material dourado) são necessários para formar esse (cubo grande do material dourado – 1000 unidades)?”, foi experimentada por um dos autores, numa turma de terceiro ano do Ensino Médio. E para nossa surpresa, tivemos muitas interações entre os estudantes que remetem aos aspectos mencionados no parágrafo anterior. Mas o porquê da nossa surpresa? Imaginávamos que por serem alunos do último ano da educação básica, resolveriam o problema proposto de forma rápida, utilizando noções de generalização e o princípio multiplicativo. Não foi bem assim. Inicialmente, os alunos sentiram-se incomodados com a cena: sobre a cadeira uma folha, nela escrita uma pergunta na qual dois sólidos faziam parte do questionamento.

Os alunos foram convidados a se dirigir até a cadeira, ler a pergunta, podendo ser em voz alta ou não, podendo ir em grupos ou não. Após a leitura e primeira interpretação, ficavam à vontade para retornar às suas cadeiras, reunirem em grupos, retornar à pergunta e reler quantas vezes julgassem necessárias. E o professor? Ficou aguardando uma sugestão deles, uma explicação convincente da resposta apresentada pelos estudantes/grupos de estudantes. Sim, alguns preferiram resolver em grupo, até porque eles queriam apresentar suas estratégias de cálculo e no primeiro momento, preferimos incentivar o diálogo entre alunos.

Observamos um movimento entre vários alunos e que já era observado décadas atrás por Vergnaud et. al (1983) que chamam de Incidente crítico do cubo de canto, no qual ao contar a quantidade de cubinhos em cada uma das dimensões de um sólido, para utilizar a fórmula do volume, o aluno não conta o cubo do canto, pois "não se pode contar o mesmo cubo duas vezes". Ao contarmos bloquinhos, de fato não podemos contá-los duas vezes, mas ao utilizar as dimensões para a multiplicação a quantidade de cubos vira um escalar, logo, precisa ser contado. Percebemos que os alunos chegaram nessa dificuldade e discutiam em grupo para tentar superá-la e chegar à resposta correta.

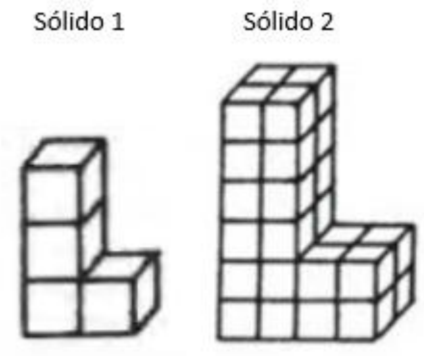
Retirar os alunos da comodidade do assento escolar e promover o diálogo baseado na apresentação de estratégia convincente de cálculo é incentivar uma sala de aula barulhenta (no bom sentido) onde o principal tema da conversa é a matemática.

Uma outra proposta que trazemos é a de expansão das arestas de um sólido, que também trabalha com a dimensionalidade do volume. As questões 1 e 2 apresentadas a seguir incitam o aluno a ampliar as arestas de um sólido/recipiente e pede o seu volume, o que mostra que embora a ampliação das arestas seja linear, o aumento do volume não será, por se tratar de uma grandeza tridimensional

1. Senhor Carlos tem um aquário bem pequeno em sua cozinha e um grande em sua sala, todos em formatos de paralelepípedos retos. O da sala é duas vezes mais longo, 3 vezes mais largo e duas vezes mais profundo que o da cozinha. Quantas vezes o da sala é maior do que o da cozinha?

2. Considerando que os dois sólidos (figura 9) são formados por cubinhos idênticos, tendo o sólido 1, quantos cubinhos são necessários adicionar para que tenhamos o sólido 2?

Figura 9: Proposta de atividade de volume



Fonte: Acervo da pesquisa

Construir junto com os alunos a noção de tridimensionalidade do volume e capacidade é muito importante para que entendam esse objeto matemático por completo, além de auxiliar no entendimento da bidimensionalidade da área e na aprendizagem de conceitos físicos mais tarde.

Lembramos que explorar as relações entre as grandezas área e perímetro, incluindo a bidimensionalidade da grandeza área é a habilidade EF06MAT29: Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área. O professor pode propor atividade do tipo: tenho um recipiente cúbico de 1m de aresta, dobrando o comprimento de todas as arestas, qual o volume do novo sólido? Compare-o com o volume do recipiente original.

Mas nem tudo são flores. Trouxemos também alguns excertos dessa mesma coleção de livros didáticos que contém equívocos. Embora sejam uma possibilidade para o professor explorar aspectos conceituais, pois sim, aprendemos muito com nossos erros, eles podem passar despercebidos pelo professor e reforçar erros que podem representar dificuldades de aprendizagem difíceis de superar, fortalecendo uma construção conceitual equivocada por parte do aluno.

Figura 10: Unidade de medida de área incorreta - 7° ano

19 Há várias situações nas quais está envolvida a ideia de área. Com um colega, examine os anúncios.

TERRENOS
Águas Claras: 3 600 m^3. Ótimo local.
Alan Gray: 1 000 m^3 (20 × 50). R$ 90 0000,00.
Jd. S. Paulo: 400 m^3. R$ 600 000,00.

CASAS
R$ 360 000,00 – Cd. Jardim: Casa totalmente reformada com sala de estar, sala de jantar, 2 dormitórios, sendo 1 suíte, banheiro social, cozinha, lavanderia e quintal. Terreno: 10 m × 10 m e 170 m^3 aprox. de construção.

SÍTIOS
B. Ferraz: 31 alqueires com casa construída, 3 barracões de granja para 30 000 frangos, estábulo novo, 3 represas.
B. dos Pereiras: Piraju: 26 alqueires.

Nesses anúncios, aparecem 2 unidades de medida de área diferentes. Pesquisem e descubram quais são e o significado de cada uma. Registrem as conclusões no caderno.

Fonte: Dante (2018b, p. 299).

Embora não seja a grandeza tema do nosso texto, área é uma noção muito interessante. Qual foi o equívoco no anúncio (figura 10)? A unidade de medida de volume foi empregada como unidade de medida de área, a atividade utiliza o metro cúbico e não o metro quadrado ao tratar de unidade de medida de área. Poderíamos considerar como um "erro de digitação", mas por estarmos na intenção de ensinar algo para alguém, isso é uma oportunidade para trazer à tona tal equívoco, ou mesmo pedir aos alunos que o encontrem. A dificuldade de diferenciar área de volume já é uma dificuldade conhecida por professores e pesquisadores há muitas décadas.

Na figura seguinte, presente no livro do 5° ano do mesmo autor, encontramos essa explicação do que é a medida do volume, porém é perceptível que se trata da capacidade da caixa de dominó. E por que consideramos que se trata de capacidade e não de volume? Lembramos que capacidade é referente ao interior do sólido, fato que julgamos ser mais coerente para o exemplo posto. Além do que podemos ver que a caixa tem bordas grossas e a sua capacidade será razoavelmente menor do que o seu volume.

Esse "detalhe" pode parecer preciosismo, mas precisamos dar grande atenção à construção dos conceitos, para isto é fundamental sempre nos perguntarmos: qual é a nossa concepção do referido conceito? Ou seja, para você professor: o que é volume? O que é capacidade? É necessário fazer diferenciações?

Figura 11: Confusão entre medidas de volume e capacidade - livro do 5° ano

Medida de volume

A ideia de volume

A caixa que Vítor arrumou ficou cheia quando ele colocou nela as 28 peças do jogo de dominó, como vemos nesta foto. Considerando o volume de 1 peça como unidade, podemos dizer nesse caso que a **medida do volume** da caixa é 28 unidades.

Caixa com peças de dominó.

Fonte: Dante (2017, p. 220).

Observe que neste caso o volume e a capacidade da caixa de dominó são diferentes e essa troca pode criar ou fortalecer uma dificuldade na aprendizagem do aluno. Outros exemplos como esse são bem comuns em atividades de volume e capacidade, como o volume de um aquário que desconsidera a espessura do vidro, como presente na Figura 5, que pode ser razoavelmente grande, ou atividades que calculam o volume de areia retirada de um buraco ou necessária para tapá-lo, sem contar com a dispersão das partículas de areia, que terá um volume diferente ao ser comprimido ou expandido.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES PARA SALA DE AULA

Pensando em nossa proposta para esse material didático, procuramos unir aqui alguns aspectos conceituais discutidos no texto. O objetivo é que tal discussão possa auxiliar o trabalho do professor em sala de aula e o processo de aprendizagem do aluno.

- Unidade de medida não determina a grandeza, no caso do volume ou capacidade. Tanto volume quanto capacidade podem ser medidos em m^3 ou litros, seus múltiplos e submúltiplos. Portanto, grandeza não é a unidade de medida, mas sim uma característica associada ao objeto e /ou um fenômeno. No caso de volume quando vemos situações do tipo: a vazão de certo reservatório é 5 metros cúbicos por segundo, choveu 20 milímetros (um resumo de: choveu o equivalente a capacidade de um recipiente no formato de paralelepípedo com dimensões: 1m por 1m por 20 milímetros de altura), temos a noção de capacidade associada aos fenômenos.

- Confundir os procedimentos de cálculo de volume com área ou comprimento é um erro comum. Para vencer essa dificuldade é importante reiterar o processo de medição do volume passando da contagem dos blocos para a multiplicação das medidas das arestas, que fortalece o entendimento tanto do volume quanto da área e perímetro. Lembre-se que são grandezas (características) diferentes, porém associadas ao mesmo objeto, fato que pode gerar tal confusão.
- É importante propor questões que relacionem diferentes grandezas, como área, comprimento e tempo, e que trabalhem o volume e a capacidade. Embora as questões do tipo "calcule" sejam importantes para fixar um conteúdo e/ou procedimento, elas apenas não são suficientes para concretizar a aprendizagem. Relacionar o conteúdo com outros já aprendidos auxilia na formação de relações com outros conceitos e na apresentação de diferentes situações que fazem o aluno ter uma melhor ideia do objeto.

As atividades contidas neste capítulo são de uma mesma coleção de livros didáticos por ser de fácil acesso aos autores e fazer parte da pesquisa de mestrado de um deles (Leão, 2020), e embora tenhamos achado alguns erros que podem prejudicar a aprendizagem dos alunos, encontramos erros semelhantes em outras coleções. Não vemos problema em encontrar um ou outro erro nos materiais didáticos; entendemos que errar faz parte da nossa natureza, mas deixando claro que precisamos estar atentos para erros conceituais nossos e em qualquer material que venhamos a utilizar. Inclusive vemos no erro uma oportunidade de discutir aspectos conceituais e aprender muita coisa boa. Não queremos apontar falhas de ninguém, apenas relembrar a importância de nos mantermos vigilantes.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação. Brasília-DF: MEC, SEB, 2018a. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf.

DANTE, Luiz Roberto. **Ápis: Matemática – 5º ano**. São Paulo: Ática, 3ª ed., 2017

DANTE, Luiz Roberto. **Teláris matemática, 6º ano**. São Paulo: Ática, 3ª ed., 2018a.

DANTE, Luiz Roberto. **Teláris matemática, 7º ano**. São Paulo: Ática, 3ª ed., 2018b

DANTE, Luiz Roberto. **Teláris matemática, 8º ano**. São Paulo: Ática, 3ª ed., 2018c

DANTE, Luiz Roberto. **Teláris matemática, 9º ano**. São Paulo: Ática, 3ª ed., 2018d

LEÃO, Katy Wellen Meneses; BARROS, Alexandre Luiz de Souza. **Relações e confusões entre volume e capacidade.** Oficinas on-line 2022: diálogos sobre propostas em matemática. Disponível em: https://www.youtube.com/live/tN43YHG14LQ?si=z47_hroOpJWiQauw.

LEÃO, Katy Wellen Meneses. **Abordagem de Volume e Capacidade em uma coleção de livros didáticos: uma análise à luz da Teoria Antropológica do Didático**. 2020. 152f. Dissertação. Recife-PE: UFPE, 2020. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/39777.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cezar de Oliveira. **A Matemática do Ensino Médio: vol. 2**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Paulo Figueiredo; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. Grandezas e Medidas. In: **Matemática: Ensino Fundamental (Coleção Explorando o Ensino)**. 1ª ed., v. 17, p. 167-200, Brasília-DF: MEC-SEB, 2010.

VERGNAUD, Gérard. Introduction. In Didactique et acquisition du concept de volume. **Recherches en Didactique des Mathématiques – RDM**, v. 4, n. 1, p. 9-25, 1983.

VERGNAUD, Gérard et al. Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12 à 13 ans). In Didactique et acquisition du concept de volume. **Recherches en Didactique des Mathématiques – RDM**, v. 4, n. 1. p. 71-120, 1983.

CAPÍTULO 3

ESTATÍSTICA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA AMOSTRA DE PROPOSTAS PARA A SALA DE AULA

Oficina 3 no YouTube

Janielly Taila dos Santos Verbisck[9]

Douglas Willian Nogueira de Souza[10]

Público-alvo: Destinado a professores do sexto ao nono ano do ensino fundamental.

Objetivo: Apresentar e refletir sobre possibilidades de atividades que contribuem para o desenvolvimento de habilidades relacionadas ao ensino de estatística nos anos finais do ensino fundamental.

Habilidades da BNCC:

- *(EF06MA31)* Identificar as variáveis e suas frequências e os elementos constitutivos (título, eixos, legendas, fontes e datas) em diferentes tipos de gráficos.
- *(EF06MA32)* Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões.

[9] Professora Dra. em Educação Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil, janielly.verbisck@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9703-5135.

[10] Professor Me. em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Amazonas, Doutorando em Educação Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil, douglas.willian@ufms.br, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6900-8970.

DOI: 10.46898/rfb.bbe222faa4dd.3

- *(EF06MA33)* Planejar e coletar dados de pesquisa referente a práticas sociais escolhidas pelos alunos e fazer uso de planilhas eletrônicas para registro, representação e interpretação das informações, em tabelas, vários tipos de gráficos e textos.
- *(EF06MA34)* Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados (por exemplo, posição de cidades considerando as estradas que as unem, hierarquia dos funcionários de uma empresa etc.).
- *(EF07MA35)* Compreender, em contextos significativos, o significado de média estatística como indicador da tendência de uma pesquisa, calcular seu valor e relacioná-lo, intuitivamente, com a amplitude do conjunto de dados.
- *(EF07MA36)* Planejar e realizar pesquisa envolvendo tema da realidade social, identificando a necessidade de ser censitária ou de usar amostra, e interpretar os dados para comunicá-los por meio de relatório escrito, tabelas e gráficos, com o apoio de planilhas eletrônicas.
- *(EF07MA37)* Interpretar e analisar dados apresentados em gráfico de setores divulgados pela mídia e compreender quando é possível ou conveniente sua utilização.
- *(EF08MA23)* Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.
- *(EF08MA24)* Classificar as frequências de uma variável contínua de uma pesquisa em classes, de modo que resumam os dados de maneira adequada para a tomada de decisões.
- *(EF08MA25)* Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicada pela amplitude.
- *(EF08MA26)* Selecionar razões, de diferentes naturezas (física, ética ou econômica), que justificam a realização de pesquisas amostrais e não censitárias, e reconhecer que a seleção da amostra pode ser feita de diferentes maneiras (amostra casual simples, sistemática e estratificada).

- *(EF08MA27)* Planejar e executar pesquisa amostral, selecionando uma técnica de amostragem adequada, e escrever relatório que contenha os gráficos apropriados para representar os conjuntos de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central, a amplitude e as conclusões.
- *(EF09MA21)* Analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros.
- *(EF09MA22)* Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.
- *(EF09MA23)* Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, devido à revolução digital, os dados formam parte de muitas áreas da sociedade e são facilmente acessíveis. Com isso, tem-se observado que a estatística vem recebendo atenção por possibilitar o desenvolvimento de habilidades relacionadas a coleta, organização, representação, interpretação e análise de dados "em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos" (BRASIL, 2018, p. 274).

Assim como no Brasil, em currículos de vários países, o ensino de estatística tem recebido destaque. Por exemplo, no caso dos Estados Unidos, as *Diretrizes para avaliação e instrução em educação estatística para o ensino básico: uma estrutura para a Educação em Estatística e Ciência de Dados*[11], elaboradas pelo Conselho Nacional de Professores de Matemática

[11] Nesta coluna são apresentadas sugestões de "nome" ("etiqueta") para a variável a ser estudada na questão proposta.

(*National Council of Teachers of Mathematics*) e endossadas pela Associação Americana de Estatística, afirma que: "É necessário uma boa qualidade de dados para ler facilmente as notícias e participar da sociedade como um membro bem informado. Portanto, é essencial que todos os alunos saiam do ensino médio preparados para viver e trabalhar em um mundo orientado por dados" (GAISE II, 2020, p. 1, tradução nossa).

Diante do exposto, apresentamos neste capítulo algumas propostas de atividades que acreditamos corroborar com o desenvolvimento destas habilidades e do pensamento crítico, que aqui chamaremos de letramento estatístico (MONTEIRO; CARVALHO, 2021). São atividades que poderiam ser trabalhadas com estudantes dos anos finais do ensino fundamental com enfoque principal nos seguintes aspectos: formulação de questões investigativas estatísticas, coleta/consideração de dados, organização, representação e análise de dados, comunicação de resultados.

Formulação de questões investigativas estatísticas

A elaboração de uma questão investigativa estatística (bem como o tipo de questão proposta) é muito importante e está fortemente relacionada ao objetivo de aprendizagem que se propõe e ao nível de escolaridade. Por exemplo, para trabalhar sobre os diferentes tipos de variáveis – qualitativas (ou categóricas) nominal ou ordinal e quantitativas (ou numéricas) discretas ou contínuas – apresentamos o quadro a seguir com exemplos de questões que poderiam ser abordadas:

Quadro 1: Exemplos de questões e tipo de variáveis

VARIÁVEL[12]	QUESTÃO	TIPO DE VARIÁVEL
REDES SOCIAIS	Qual rede social você mais utiliza?	Categórica nominal
APLICATIVO	Qual aplicativo você mais utiliza diariamente?	Categórica nominal
FILME	Qual seu estilo de filme favorito?	Categórica nominal
ESPORTE	Qual seu esporte favorito?	Categórica nominal
MATEMÁTICA	Quanto você gosta de matemática? (1 nada – 5 muito)	Categórica ordinal
SEMANA	Em qual dia da semana você mais gosta de ir à escola?	Categórica ordinal
VACINA	Quantas doses da vacina contra a Covid-19 você tem?	Numérica discreta
PETS	Quantos animais de estimação você tem?	Numérica discreta
POPULAÇÃO	Qual a distribuição da população brasileira por regiões (ou estados) segundo o último censo demográfico?	Numérica discreta
FAMÍLIA	Quantas pessoas vivem com você?	Numérica discreta
ESPORTE	Quantas horas de atividade física você pratica por semana?	Numérica contínua
PÉ	Qual a medida do seu pé em centímetros?	Numérica contínua
ALTURA	Qual a sua altura em centímetros?	Numérica contínua
ANO	Quantos anos você completou ou completará este ano?	Numérica contínua
REDES SOCIAIS	Quantas horas você gasta em redes sociais diariamente?	Numérica contínua
RECURSOS HÍDRICOS	Qual a distribuição de recursos hídricos por regiões (ou estados, biomas, etc.) do Brasil?	Numérica contínua

Também é conveniente propor para os próprios estudantes a elaboração de uma questão (ou várias questões) a ser estudada, com isso eles podem se sentir motivados a estudar temas de seus interesses. A quantidade de questões a serem estudadas dependerá de quantas horas/aula serão planejadas para tal. Para o estudo de questões em aulas de estatística, também recomendamos a proposta de organização e disposição dos estudantes

[12] Em inglês: *Pre-K-12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II: A framework for Statistics and Data Science Education – GAISEII.*

em pequenos grupos (entre três, quatro ou cinco componentes) para proporcionar o trabalho coletivo.

COLETA/CONSIDERAÇÃO DE DADOS[13]

Tem-se observado que esta etapa de planejamento e coleta de dados é pouco explorada dentro de sala de aula visto que, geralmente, o livro didático (um dos recursos mais utilizados) já apresenta um conjunto de dados e, ao estudante, cabe o ofício de utilizá-lo para realizar tarefas como cálculo de medidas de tendência central, elaboração de tabelas ou gráficos, dentre outros. Entretanto, o momento de planejar a coleta e consideração de dados para buscar respostas às questões levantadas possibilita o desenvolvimento de várias habilidades, tais como: a elaboração de questionários com categorias de respostas objetivas ou respostas subjetivas, a maneira de os dados serem coletados (manualmente, com papel impresso para cada respondente, por meio digital etc)[14], a escolha do perfil e amostra de respondentes, onde e quando os dados serão coletados, e quem serão os responsáveis pela coleta.

Nos sexto e sétimo anos, por exemplo, a coleta manual e dentro da sala de aula pode ser a mais viável, pois facilita uma coleta cujo conjunto de respostas não será muito grande (considerando uma sala de aula com a quantidade de estudantes variando entre trinta e quarenta). Um dos integrantes do grupo pode elaborar, individualmente ou com a ajuda dos demais colegas, uma estratégia de coleta, a ser feita no próprio caderno. Já nos oitavo e nono anos, pode-se planejar uma proposta de coleta de dados utilizando tanto meios manuais como digitais, por exemplo: imprimir questionários e distribuí-los a respondentes participantes, utilizar o *Google Formulários* como plataforma de elaboração do questionário e coleta de respostas, planilhas eletrônicas ou outras ferramentas.

Outra forma de considerar os dados é por meio da busca de dados em bancos de dados oficiais e disponíveis. Tomemos como exemplo as questões “Qual a distribuição de recursos hídricos por regiões (ou estados, biomas etc.) do Brasil?” e “Qual a distribuição da população brasileira por regiões (ou estados) segundo o último censo demográfico?”. Dada

[13] Habilidades que se podem desenvolver: EF06MA33, EF07MA36, EF08MA26, EF08MA27 e EF09MA23..

[14] Sugerimos que o leitor assista a Oficina 3, em que apresentamos detalhes sobre possíveis maneiras de propor a coleta de dados com os estudantes.

a complexidade destas questões, pode-se pensar em estratégias de busca de dados oficiais disponíveis na internet, em que os próprios estudantes realizem estas buscas em diferentes bancos de dados e a escolha de um dos conjuntos de dados que eles julguem úteis para responder à questão em estudo. A própria Base Nacional Comum Curricular (BNCC) sugere que a realização de consultas a páginas de institutos de pesquisas "como a do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) pode oferecer contextos potencialmente ricos não apenas para aprender conceitos e procedimentos estatísticos, mas também para utilizá-los com o intuito de compreender a realidade" (BRASIL, 2018, p. 274). Com estes dois tipos diferentes de obtenção de dados é possível construir a compreensão de "que os dados podem ser coletados (dados primários) ou que os dados existentes podem ser obtidos de outras fontes (dados secundários)" (GAISE II, 2020, p. 17, tradução nossa).

ORGANIZAÇÃO, REPRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

As etapas de organização e representação de dados promovem o desenvolvimento de diversas habilidades. Por um lado, se a coleta foi realizada manualmente, os estudantes desenvolvem a estratégia de contagem das respostas, a organização e representação em tabelas de distribuição de frequências absolutas e/ou relativas, a escolha de quais tipos de gráficos que melhor representaria os dados (habilidades **EF08MA23 e EF09MA22)**, os cálculos de resumos dos dados (tais como medidas de tendência central e dispersão). Por outro lado, também é possível promover o desenvolvimento destas habilidades juntamente com o desenvolvimento de habilidades de uso de dispositivos digitais, como o *Excel* e o *Geogebra*[15] (habilidade **EF09MA23)**.

TABELAS DE DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS

As tabelas de distribuição de frequências absolutas são consideradas no sexto ano. É importante apresentar aos estudantes os elementos constitutivos das tabelas para evitar possíveis erros no momento de representar os dados. Indicamos a seguir estes elementos (habilidade **EF06MA31)**:

---

[15] Sugerimos que o leitor assista a Oficina 4, de 25 de maio de 2023, em que apresentamos uma proposta de trabalho com o *Geogebra*. Link de acesso: https://www.youtube.com/watch?v=O0MHwknvI7U

Figura 1: Principais elementos constitutivos de uma tabela

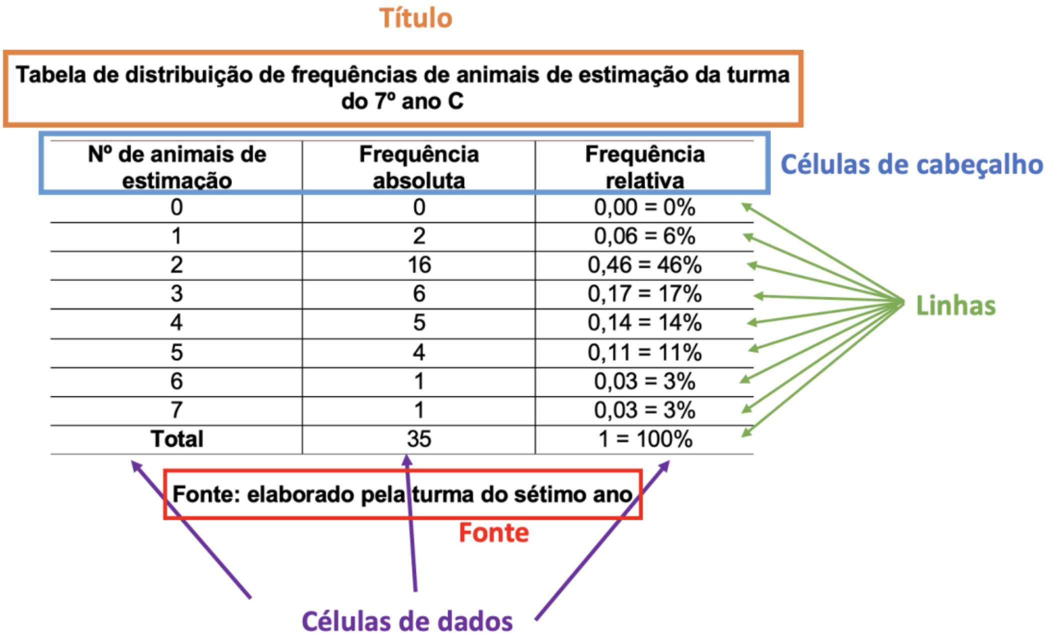


Tabela de distribuição de frequências de animais de estimação da turma do 7º ano C

Nº de animais de estimação	Frequência absoluta	Frequência relativa
0	0	0,00 = 0%
1	2	0,06 = 6%
2	16	0,46 = 46%
3	6	0,17 = 17%
4	5	0,14 = 14%
5	4	0,11 = 11%
6	1	0,03 = 3%
7	1	0,03 = 3%
Total	35	1 = 100%

Fonte: elaborado pela turma do sétimo ano

Fonte: Acervo dos autores.

No sétimo ano, a introdução do conceito de porcentagens (suas representações fracionárias e decimais) pode ser correlacionada com o trabalho com tabelas de distribuição de frequências absolutas e relativas, assim como sua retomada nos oitavo e nono anos. As tabelas de distribuição de frequências são utilizadas para representar tanto dados qualitativos (ou categóricos) quanto quantitativos (ou numéricos).

O QUE FAZER COM VARIÁVEIS QUANTITATIVAS OU NUMÉRICAS?

Com variáveis numéricas podemos lidar com **valores discretos** ou **valores contínuos**. As variáveis numéricas discretas apresentam características mensuráveis que assumem apenas um número finito ou infinito contável de valores[16] (ano de nascimento das crianças em uma sala de aula, quantidade de membros de uma família etc.), fazendo sentido o uso

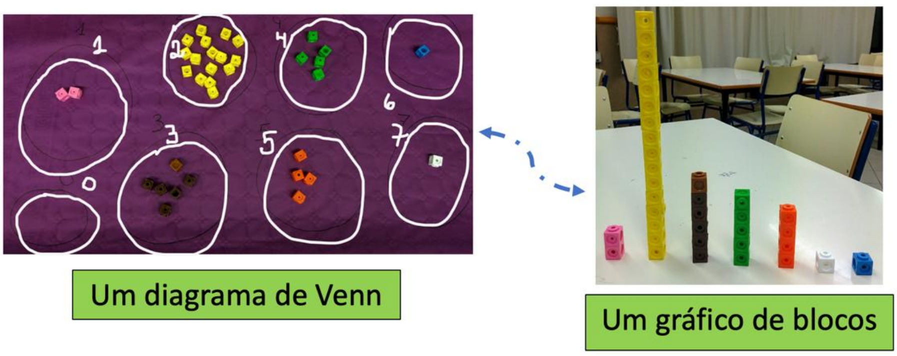
[16] Este conceito de "infinito contável" é um termo matemático usado para descrever um conjunto que, embora tenha infinitos elementos, pode ser contado, ou seja, seus elementos podem ser listados de forma ordenada. Os conjuntos infinitos contáveis apresentam duas características principais: possuem infinitos elementos e é possível associar cada elemento a um número inteiro positivo (1,2,3,…). Ou seja, é possível enumerar os elementos, mesmo que nunca terminemos a contagem. Portanto, uma variável discreta é aquela que assume valores isolados, sem intervalos contínuos. Se esses valores forem infinitos, mas puderem ser contados, dizemos que ela tem um "infinito contável de valores". Exemplificamos este conceito com o *ano de nascimento:* o intervalo de anos possíveis é finito em um contexto realista (ex.: 2010 a 2020). Mas, se quisermos teorizar sobre todos os anos possíveis no passado ou no futuro, o conjunto seria infinito contável ({…,2000,2001,…,2023,… }).

de números inteiros. As variáveis numéricas contínuas podem tomar quaisquer valores (comprimento, área, volume, massa, tempo, temperatura etc.), sejam inteiros ou fracionários.

- A variável quantitativa ou numérica indica as **quantidades**;
- Podemos **operar** com seus valores;
- A forma de distribuição pode ser resumida numericamente por meio da: **média**, **mediana**, **moda**, **amplitude** e sua variabilidade;
- Elas podem ser representadas por meio de **histogramas, gráficos de barras ou gráficos de linhas (ou segmentos)**.

Consideremos o exemplo da questão "Quantos animais de estimação você tem?" (variável quantitativa/numérica discreta). Se o trabalho for proposto com blocos na representação dos dados, pode ser feito o trabalho manipulativo de blocos representando, primeiramente, como conjuntos de respostas e, em seguida como gráfico de barra:

Figura 2: Trabalho manipulativo em estatística



Fonte: Acervo dos autores.

O trabalho manipulativo como representado no exemplo da Figura 2 possibilita a aprendizagem da habilidade de classificar os dados de acordo com determinados critérios, que é a base da contagem e do tratamento destes. Transitar entre diferentes representações dos dados também é importante no desenvolvimento do letramento estatístico (Figura 3).

Figura 3: Exemplo de diferentes representações de um conjunto de dados (variável quantitativa discreta)

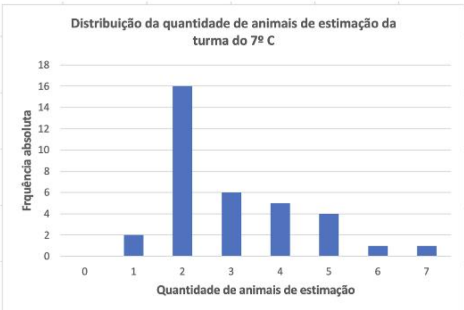
Gráfico de blocos

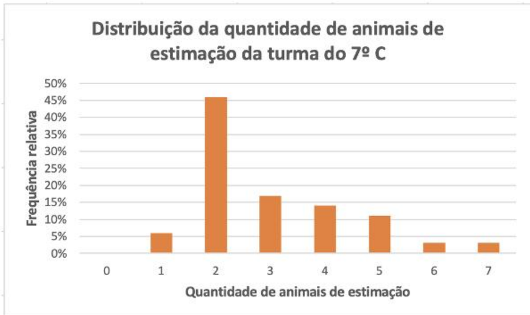
Tabela de distribuição de frequências de animais de estimação da turma do 7º ano C

Nº de animais de estimação	Frequência absoluta	Frequência relativa
0	0	0,00 = 0%
1	2	0,06 = 6%
2	16	0,46 = 46%
3	6	0,17 = 17%
4	5	0,14 = 14%
5	4	0,11 = 11%
6	1	0,03 = 3%
7	1	0,03 = 3%
Total	35	1 = 100%

Fonte: elaborado pela turma do sétimo ano

Tabela de distribuição de frequências





Gráficos de barras (ou colunas)

Fonte: Acervo dos autores.

O **gráfico de blocos** e o **gráfico de barras** são duas etapas importantes no desenvolvimento da representação gráfica de frequências. Neste **gráfico de blocos** (parte superior esquerda da Figura 3), cada cubo é somado individualmente, pois cada cubo representa uma resposta de um estudante. A quantidade de cubos representa a frequência. O **gráfico de barras** (parte inferior da Figura 3) é uma representação mais sofisticada: as contribuições individuais são perdidas e a altura das colunas indica a frequência. Temos que ler a frequência, estabelecendo uma escala no eixo vertical. Também vale ressaltar a importância de considerar as escalas utilizadas para melhor representar os dados e em iniciar o eixo vertical a partir do zero. Estes e outros elementos podem auxiliar na identificação de erros de representações gráficas publicadas em diferentes mídias e esta discussão pode ser levada à sala de aula para promover a criticidade dos estudantes (habilidade **EF09MA21).** Um gráfico de barras (também conhecido como gráfico de colunas) é uma representação gráfica dos dados usando barras ou colunas de diferentes alturas, iguais ou proporcionais à frequência absoluta ou à frequência relativa (acima de 1 ou em porcentagem).

As variáveis quantitativas (ou numéricas) contínuas são as que lidamos com **valores contínuos** (medição de altura, massa, tempo, temperatura, por exemplo) e geralmente são trabalhadas nos oitavo e nono anos. O primeiro passo essencial é que **os dados devem ser agrupados em subconjuntos ou intervalo de classes (EF08MA24)**. Em livros didáticos são apresentadas diversas maneiras de calcular o intervalo de classes. Algumas dicas são:

- O intervalo de valores nos intervalos (0-4, 5-9, 10-14, ...) deve ser o mesmo em cada classe;
- Os intervalos não devem se sobrepor;
- Eles devem cobrir entre eles todos os valores da variável;
- Grupos com frequência zero não devem ser omitidos do gráfico;
- Uma vez definidos os subconjuntos, podemos calcular a tabela de **distribuição de frequência** de acordo com os grupos (ou classes).

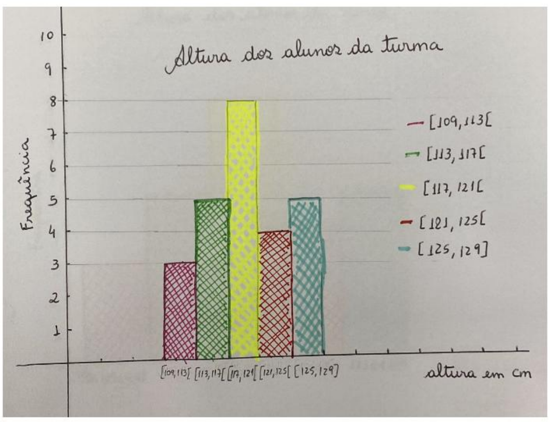
Figura 4: Exemplo de diferentes representações de um conjunto de dados (variável quantitativa contínua)

	Altura (cm)
1	112
2	115
3	123
4	125
5	126
6	109
7	117
8	113
9	119
10	116
11	120
12	110
13	119

	Altura (cm)
14	118
15	128
16	127
17	117
18	114
19	124
20	118
21	113
22	122
23	128
24	120
25	121

Tabela de distribuição de frequências da altura dos alunos do 8º D

Ordem	Intervalos de classe	Frequência absoluta
1	[109,113[	3
2	[113,117[	5
3	[117,121[	8
4	[121,125[	4
5	[125,129]	5



Fonte: Acervo dos autores.

Podemos promover discussões com os estudantes sobre vários aspectos relacionados a uma variável numérica, por exemplo, propor esta questão em diferentes turmas e, assim, obter resultados diferentes. Logo, podem ser levantadas questões como: Qual a altura "típica"[17] de um(a) aluno(a) da turma A? e da turma B? e da Turma C? etc. Qual resumo numérico melhor representa esta altura típica? Aqui, podem ser trabalhados as diferentes medidas de tendência central (média aritmética, moda e mediana) e uma análise crítica do significado de cada um desses resumos numéricos: a média aritmética como a medida de equilíbrio dos dados, a moda como a medida que mostra o valor com maior frequência e a mediana como o valor que divide os dados (de maneira ordenada) ao meio (habilidades **EF07MA35 e EF08MA25)**. Também pode ser discutida sobre a dispersão destes dados com questões norteadoras do tipo: Quão diferentes são os resumos numéricos das diferentes turmas? Em qual turma há mais diferenças ou mais similaridades?

O QUE FAZER COM VARIÁVEIS QUALITATIVAS OU CATEGÓRICAS?

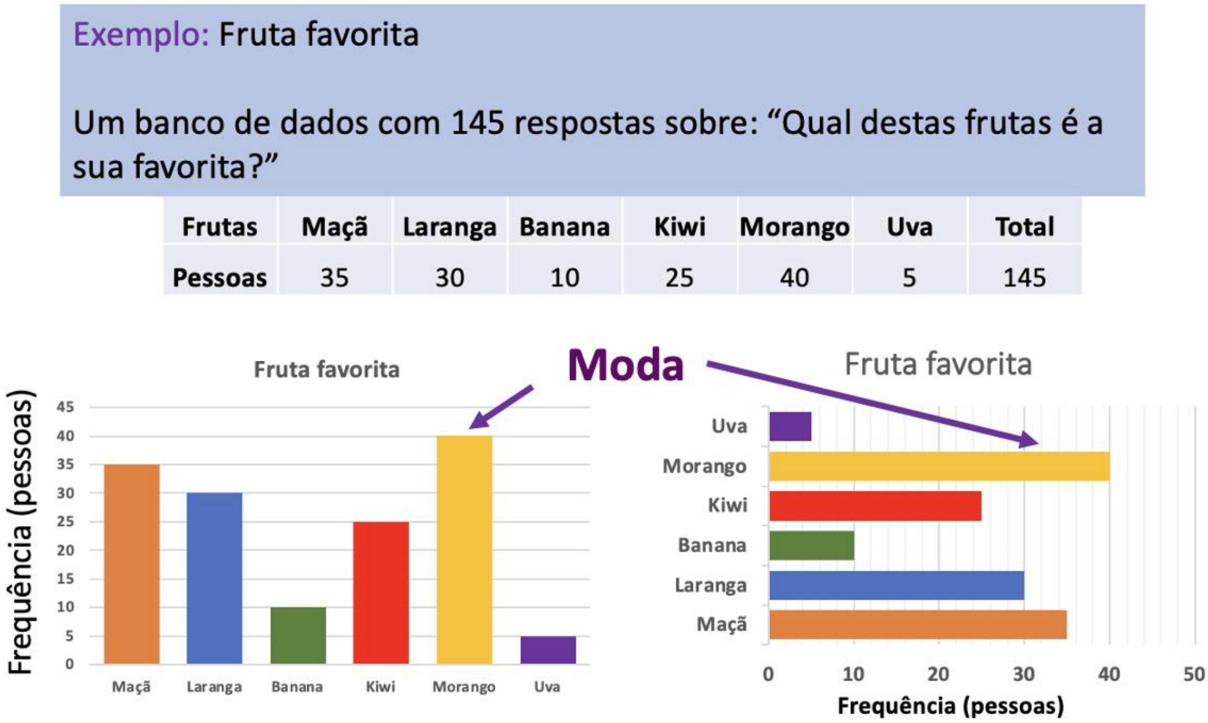
As variáveis qualitativas ou categóricas indicam atributos ou qualidades, **não sendo possível operar** com elas. Dependendo do uso em escala, alguma ordem pode ser distinguida (**ordinal**), mas em outra não (**nominal**).
Podemos determinar:

- **frequências** (frequências relativa e absoluta), acompanhadas da tabela de distribuição de frequências;
- os gráficos de **barras** (ou **colunas**), **pictogramas**, e **gráficos de setores**;
- a moda: o valor em um conjunto de dados que ocorre com mais frequência.

Um primeiro exemplo de trabalho com dados categóricos é a representação gráfica por meio do gráfico de barras ou colunas (Figura 5) e como esta torna a moda bem visível.

[17] Usamos a palavra "típica" em lugar de "média" para não induzir ao cálculo da média aritmética, visto que há diferentes medidas de tendência central.

Figura 5: Exemplo de gráficos de barras ou colunas no trabalho com variáveis categóricas



Frutas	Maçã	Laranga	Banana	Kiwi	Morango	Uva	Total
Pessoas	35	30	10	25	40	5	145

Fonte: Acervo dos autores.

O **gráfico de setores** (ou de pizza) é uma forma de representar dados estatísticos no qual a população é representada por um **círculo** e cada subconjunto (ou parte) é representado por um **setor de um círculo**, com cada setor indicando a frequência. No sétimo ano, como há a introdução da noção de ângulos é uma conexão interessante de ser realizada (habilidade **EF08MA23).** Já no oitavo ano, pode ser proposta a representação de dados por meio da construção de gráficos de setores**.** Como exemplo, consideremos a questão “Qual seu estilo de filme favorito?”. Os cálculos de setores circulares e representação gráfica são apresentados na Figura 6:

Figura 6: Exemplo de cálculos de setores circulares para a construção de gráficos de setores

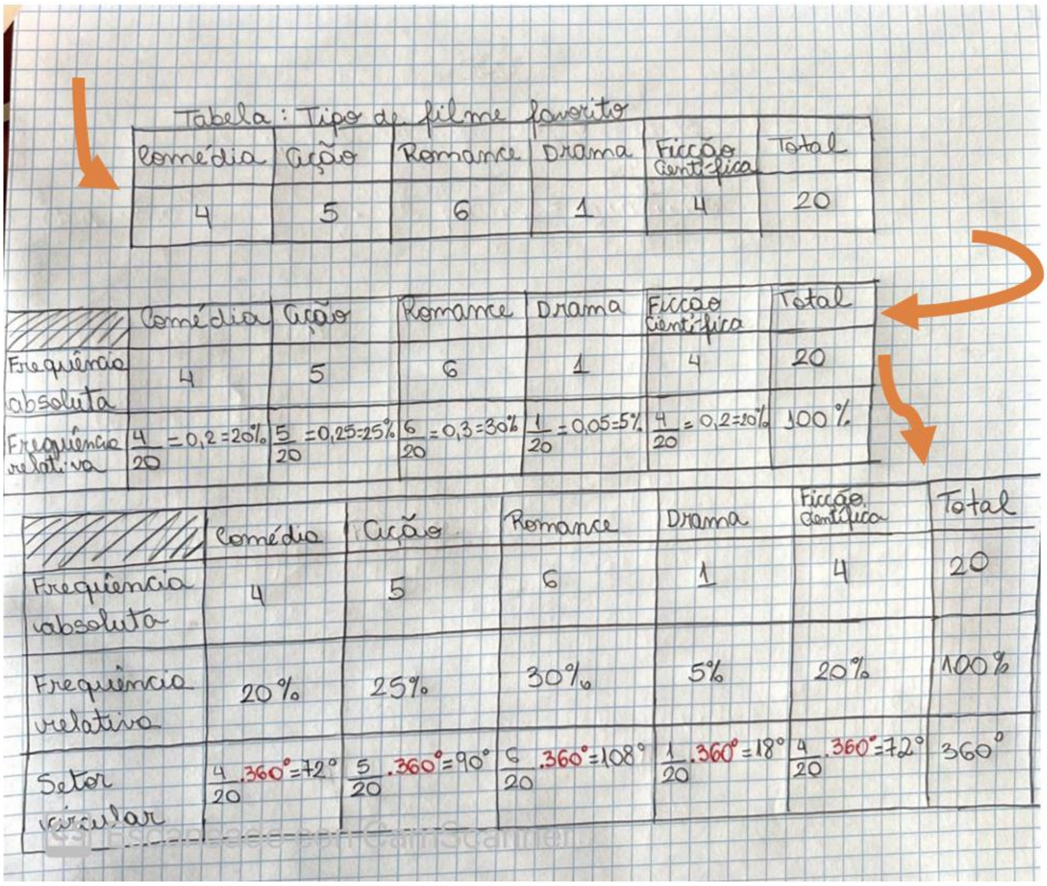
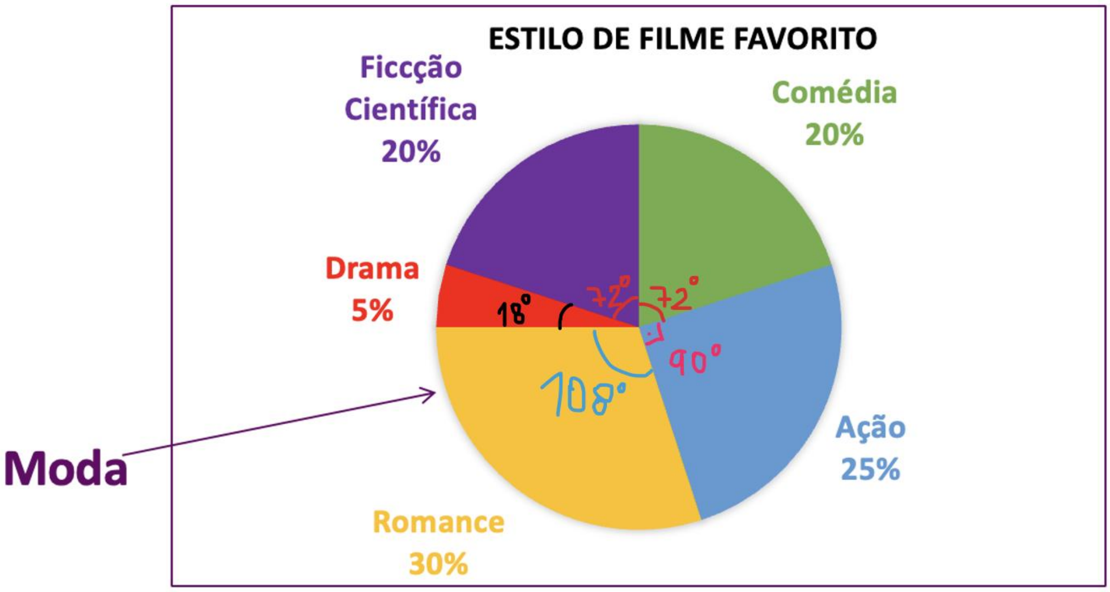


Tabela: Tipo de filme favorito

Comédia	Ação	Romance	Drama	Ficção Científica	Total
4	5	6	1	4	20

	Comédia	Ação	Romance	Drama	Ficção Científica	Total
Frequência absoluta	4	5	6	1	4	20
Frequência relativa	$\frac{4}{20} = 0,2 = 20\%$	$\frac{5}{20} = 0,25 = 25\%$	$\frac{6}{20} = 0,3 = 30\%$	$\frac{1}{20} = 0,05 = 5\%$	$\frac{4}{20} = 0,2 = 20\%$	100%

	Comédia	Ação	Romance	Drama	Ficção Científica	Total
Frequência absoluta	4	5	6	1	4	20
Frequência relativa	20%	25%	30%	5%	20%	100%
Setor circular	$\frac{4}{20} \cdot 360° = 72°$	$\frac{5}{20} \cdot 360° = 90°$	$\frac{6}{20} \cdot 360° = 108°$	$\frac{1}{20} \cdot 360° = 18°$	$\frac{4}{20} \cdot 360° = 72°$	360°



Fonte: Acervo dos autores.

Por fim, o **pictograma** é uma forma de representar dados qualitativos no qual cada membro da população é representado por uma figura, ícone ou objeto individual disposto (na maioria das vezes) em filas ou colunas.

Figura 7: Exemplo de pictograma

Fonte: Acervo dos autores.

A ESCOLHA DO GRÁFICO E SUAS POTENCIALIDADES

Escolher o gráfico adequado para representar dados é essencial para uma comunicação clara e eficaz. Cada tipo de gráfico tem suas potencialidades e é mais adequado para diferentes tipos de análise ou apresentação de informações. A seguir discutiremos as principais características dos tipos comuns de gráficos e suas melhores aplicações.

O gráfico de barras pode ser utilizado para comparar dados discretos e pode apresentar as seguintes potencialidades:

- **Comparação entre categorias:** O gráfico de barras é ideal para comparar diferentes categorias de dados, pois cada barra representa uma categoria e a altura (ou comprimento) da barra mostra a magnitude da variável.
- **Facilidade de leitura:** É fácil de entender, pois as barras permitem uma visualização rápida e clara das diferenças entre as categorias.
- **Flexibilidade:** Pode ser usado tanto na vertical quanto na horizontal, dependendo da necessidade do espaço e da quantidade de categorias.

- **Detalhes específicos:** Permite uma leitura detalhada dos valores específicos de cada categoria, o que é útil para análises comparativas minuciosas.

O histograma[18] pode ser utilizado para analisar a distribuição de uma variável contínua, sendo especialmente útil para visualizar como os dados estão distribuídos em termos de frequência dentro de determinados intervalos. A escolha do número e do tamanho dos intervalos pode afetar a interpretação do histograma. Intervalos muito grandes podem esconder padrões nos dados, enquanto intervalos muito pequenos podem fazer o gráfico parecer ruidoso. Pode apresentar as seguintes potencialidades:

- **Distribuição de dados:** O histograma é utilizado para mostrar a distribuição de uma variável contínua, dividindo os dados em intervalos e mostrando a frequência de dados em cada intervalo.
- **Identificação de padrões:** Ajuda a identificar padrões de distribuição, como normalidade, assimetrias ou a presença de "outliers" ou "valores atípicos" (que são pontos de dados que se desviam significativamente da maioria dos outros dados em um conjunto).
- **Análise de variação e dispersão:** Permite visualizar rapidamente a variação e a dispersão dos dados, sendo útil para análises estatísticas.

O gráfico de setores pode ser utilizado quando há necessidade de mostrar a composição percentual de um total e pode apresentar as seguintes potencialidades:

- **Proporção em relação ao todo:** Este tipo de gráfico é excelente para mostrar como diferentes partes contribuem para o total. Cada "fatia" (setor circular) representa uma proporção específica, facilitando a visualização de percentuais.
- **Comparação simples:** Ajuda a destacar quais categorias são maiores ou menores em comparação com outras, em relação ao todo.

[18] A principal diferença entre o gráfico de barras e o histograma está no tipo de dado que cada um representa e no formato dos seus elementos. O **gráfico de barras** é usado para dados categóricos (qualitativos), onde as barras são separadas e cada uma representa uma categoria distinta, com o comprimento indicando a frequência ou proporção. Já o **histograma** é usado para dados numéricos contínuos (ou discretos agrupados em intervalos), onde as barras são justapostas, representando classes ou intervalos de valores, e sua altura indica a frequência ou densidade dos dados dentro de cada intervalo. Assim, enquanto o gráfico de barras destaca categorias independentes, o histograma mostra a distribuição de uma variável ao longo de um eixo contínuo.

- **Foco em categorias principais:** É útil para destacar uma ou poucas categorias principais, onde os maiores segmentos são imediatamente visíveis.

O gráfico de linhas ou segmentos pode ser utilizado para representar séries temporais e pode apresentar as seguintes potencialidades:

- **Evolução temporal:** O gráfico de linhas é ideal para mostrar mudanças ao longo do tempo. Ele destaca tendências, picos e quedas de forma contínua, facilitando a análise de como os dados evoluem.
- **Detalhamento das variações:** É eficaz para identificar padrões, como sazonalidades ou ciclos, e também para prever tendências futuras com base em dados históricos.
- **Clareza em séries temporais:** Ao conectar pontos de dados por uma linha, o gráfico permite uma visualização clara da continuidade e do fluxo de dados ao longo do tempo.

O pictograma pode ser atualizado para apresentações informais, campanhas publicitárias, infográficos ou materiais educativos, especialmente quando o objetivo é ilustrar informações produzidas com um conjunto de dados de maneira visual e atrativa. Pode apresentar as seguintes potencialidades:

- **Atração visual:** Os pictogramas usam ícones ou imagens para representar dados, o que os torna mais atraentes visualmente e fáceis de entender, especialmente para o público geral.
- **Memorização:** Imagens são mais fáceis de serem memorizadas do que números ou barras, o que pode ser útil em situações publicitárias ou em apresentações onde o objetivo é capturar e manter a atenção do público.
- **Simplicidade:** É ideal para representar dados de uma maneira simples e intuitiva, sem a necessidade de detalhamentos precisos.

A escolha do gráfico adequado deve ser guiada pelo tipo de dado a ser apresentado e pelo objetivo da comunicação. Utilizar o gráfico inadequado pode levar a interpretações incorretas ou dificultar o entendimento dos dados. Portanto, é fundamental considerar as potencialidades de cada gráfico e escolher aquele que melhor se alinha com o propósito da apresentação dos dados e com o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, com o que eles já conhecem. É fundamental que a escolha do tipo de gráfico leve em conta o nível de entendimento e a familiaridade dos estudantes com os dados, assegurando uma representação visual clara e acessível.

COMUNICAÇÃO DE RESULTADOS

A comunicação de resultados é a etapa final que consideramos relevante para a construção do letramento estatístico. Nesta etapa, os estudantes são convidados, juntamente com o professor, a expressar suas conclusões sobre todas as etapas desenvolvidas anteriormente, principalmente, com o objetivo de responder à questão ou as questões que foram propostas no início da atividade de investigação estatística. Esta comunicação também pode ser realizada de diversas formas: por meio da redação de relatórios com todas as etapas desenvolvidas, dados coletados, organizados, representados, analisados e as conclusões do grupo, por meio de resumos curtos que expressam essas conclusões e de discussão coletiva de todo o grupo com a turma etc.

O principal objetivo é que o professor atue como mediador da discussão e tente proporcionar um ambiente que fomente uma discussão crítica e a elaboração de argumentação de todo o trabalho realizado pelos diferentes grupos. Também se trata de um momento de avaliação coletiva, levando em consideração a importância de retomar todas as etapas que foram desenvolvidas e correlacioná-las como partes essenciais de uma investigação estatística (ainda que tenha sido realizada de forma mais reduzida).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso objetivo com este capítulo foi de apresentar uma discussão sobre possibilidades de implementação de atividades que acreditamos possibilitar o desenvolvimento do letramento estatístico, tendo como principais focos o desenvolvimento de habilidades previstas na BNCC e a criticidade nos anos finais do ensino fundamental. Esperamos que, de alguma forma, estas propostas possam servir de inspiração ao leitor professor em sua prática docente.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Ministério da Educação. Brasília-DF: MEC, SEB, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf.

MONTEIRO, Carlos Eduardo Ferreira; CARVALHO, Liliane Maria Teixeira Lima de. **Temas emergentes em letramento estatístico** Recife: Ed. UFPE, 2021. Disponivel em: https://editora.ufpe.br/books/catalog/download/666/677/2080?inline=1.

BARGAGLIOTTI, Anna; FRANKLIN, Christine; ARNOLD, Pip; GOULD, Rob; JOHNSON, Sheri; PEREZ, Letícia. SPANGLER, Denise. **Pre-K-12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) report II**. American Statistical Association, 2ª ed.,. 2020. Disponível em: https://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GAISEIIPreK-12_Full.pdf.

CAPÍTULO 4

A INTRODUÇÃO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NO ENSINO FUNDAMENTAL

Oficina 4 no YouTube

José Luiz Magalhães de Freitas[19]

Rosane Corsini Silva[20]

Público-alvo: Professores que ensinam Matemática no Ensino Fundamental.

Objetivo: Apresentar e refletir sobre aspectos concernentes à introdução do pensamento algébrico no Ensino Fundamental, bem como discutir e apresentar sugestões de atividades práticas, que possam favorecer a construção do conhecimento algébrico mesmo antes de cálculos simbólicos, raciocínios, estratégias e outros aspectos da Álgebra formalizada com os estudantes.

Habilidades da BNCC

- *(EF01MA09).* Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.
- *(EF01MA10)* Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.

[19] Professor Dr. do Mestrado de Ensino de Ciências e Matemática da UNIDERP e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFMS. E-mail: joseluizufms2@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5536-837X
[20] Professora Dra. do Instituto Federal de Mato Grosso do Sul. E-mail: rosanecorsini@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9931-0962.

DOI: 10.46898/rfb.bbe222faa4dd.4

- *(EF03MA11)* Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.
- *(EF04MA14).* Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos.
- *(EF04MA15)* Determinar o número desconhecido que torna verdadeira uma igualdade que envolve as operações fundamentais com números naturais.
- *(EF06MA15)* Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.
- *(EF07MA13)* Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.
- *(EF07MA14)* Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.
- *(EF07MA15)* Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
- (EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
- *(EF07MA17)* Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
- *(EF07MA18)* Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.
- *(EF08MA06)* Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

- *(EF08MA07)* Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
- *(EF08MA08)* Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
- *(EF08MA09)* Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
- *(EF09MA09)* Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

INTRODUÇÃO

A introdução da álgebra no ensino fundamental é um tema bastante discutido em diversos âmbitos, desde os coletivos de pesquisas acadêmicas aos diálogos que envolvem professores que ensinam matemática, principalmente quando se adentra oficialmente ao seu estudo, oportunizando a construção do conhecimento por parte dos estudantes. A complexidade da linguagem, das notações, da abstração necessária para que compreendamos esta área da Matemática, visando obter êxito em estudos que a envolvem, abre margens a interpretações diversas de quando se está ou não trabalhando com entes algébricos e suas técnicas.

Há várias interpretações acerca do que é de fato a álgebra e o que envolve o pensamento algébrico. É comum encontrar quem acredite que a álgebra se limita às **equações e expressões** e que seu estudo consiste, essencialmente, em realizar transformismos algébricos (Ponte et al, 2009). Nessa visão de analisá-los, a álgebra seria introduzida somente por volta do sétimo ano do Ensino Fundamental. Há também aqueles que creem que a Álgebra se caracteriza pelo estudo de **relações, funções e estruturas algébricas de conjuntos** (ibiden). Nesse modo, a álgebra estaria situada em níveis mais abstratos, por meio de linguagem simbólica formal. Entretanto, concordamos que o pensamento algébrico, que poderia ser considerado como embrião da álgebra, está presente nas regularidades, ou seja, consiste em **identificar e compreender padrões e relações**, em diferentes contextos, conforme o PNAIC[21] (Brasil, 2014), passível de ser introduzido desde os anos iniciais do ensino fundamental, na alfabetização matemática.

Nesta perspectiva, para que se possa oportunizar a construção do pensamento algébrico, pode-se possibilitar ao estudante, quando criança, diversas ações, como: estabelecer critérios para agrupar, classificar e ordenar objetos, considerando diferentes atributos; reconhecer padrões de uma sequência para identificação dos próximos elementos, em sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples; produzir padrões em faixas decorativas, em sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples. Propostas de atividades sobre "Pensamento algébrico - Compreender padrões e relações a partir de diferentes contextos" podem ser encontradas no caderno de jogos (Brasil, 2014, p. 48).

Nesta concepção, significa que a Álgebra está presente na vida das pessoas, mesmo que não esteja pautada em uma linguagem simbólica formal. Historicamente, esta álgebra que utilizamos com sua linguagem simbólica formal e econômica demorou a surgir. Antes dela, os matemáticos italianos do renascimento já resolviam equações de terceiro e até quarto grau utilizando a linguagem retórica, com algumas abreviações. Quando olhamos para a evolução histórica da álgebra, podemos concluir que o surgimento da álgebra abstrata ocorreu antes da linguagem algébrica com a utilização de letras e todas as simbologias que esta envolve, e que resolvia equações de grande complexidade como as de terceiro e quarto grau.

Se os matemáticos do renascimento resolviam tais equações sem o uso de uma linguagem formal, não podemos considerar tratar-se de álgebra somente quando se utiliza o rigor da formalidade. Isso nos indica que quando se lança mão dos transformismos algébricos e notações abstratas é preciso ter muita cautela em sua abordagem introdutória, pois muitas vezes eles mais dificultam do que auxiliam no desenvolvimento de determinados tópicos desse campo. São necessários alguns cuidados na introdução do

[21] Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa. Na proposta contida nesse material considera-se que a idade certa para se alfabetizar seja de seis a oito anos; a alfabetização matemática está envolvida desta ação e desde este momento já se trabalha um pouco do pensamento algébrico.

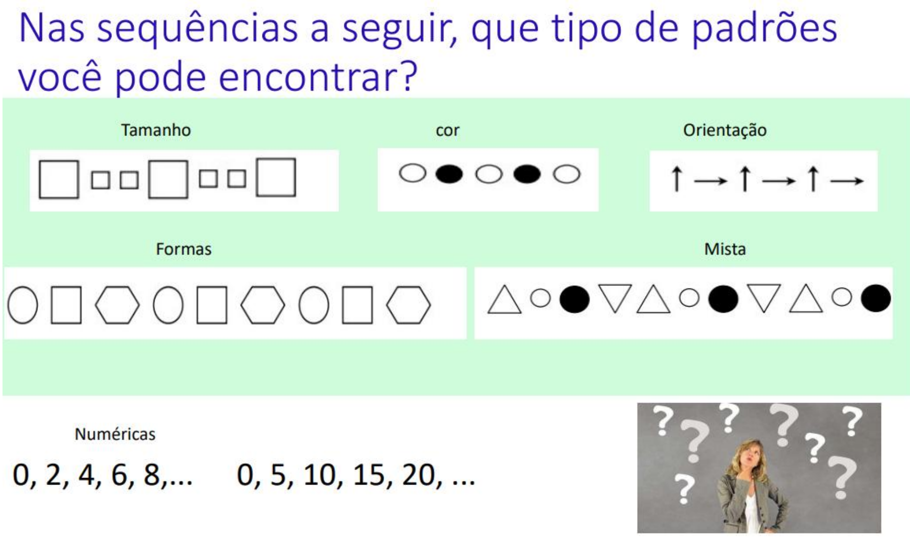
formalismo algébrico para evitar que eles "mais velem do que revelem". Em resumo, a linguagem algébrica é econômica, útil, universal e pode ser muito "generosa", no sentido de dar mais do que esperávamos, mas é preciso muito cuidado ao introduzi-la se quisermos "encantar" nossos alunos.

Nesta oficina discutimos e procuramos lançar luz a esta Álgebra, passível de ser apresentada aos estudantes desde a mais tenra idade. Isto significa que a cada fase da vida e do nível em que se encontra o indivíduo, é possível realizar determinadas atividades práticas que podem favorecer a compreensão, preparar para que não haja grandes dúvidas ou atropelamentos e minimizar as dificuldades quando introduzida a linguagem algébrica formal e suas técnicas nos fazeres discentes. Nesse sentido, buscamos abordar algumas atividades práticas, já trabalhadas com estudantes de diversas idades, que se mostraram eficientes numa abordagem introdutória visando a construção do pensamento algébrico, passíveis de serem adaptadas a diferentes realidades e níveis de escolaridade, desde a alfabetização matemática aos níveis mais elevados.

O PENSAMENTO ALGÉBRICO E SEU DESENVOLVIMENTO

Quando trabalhamos com sequências como as da **Figura 1**, o objetivo é descobrir qual será o próximo elemento o que demanda identificar o padrão presente na referida sequência, podendo envolver cor, forma, orientação, números, quantidades e até mesmo gestos e sons, caso seja trabalhado com crianças em início de escolaridade. Também pode-se aumentar o grau de complexidade apresentando sequências mistas, envolvendo mais de uma simbologia ou sinal que pode ser captado pelos órgãos dos sentidos.

Figura 1: sequências diversas



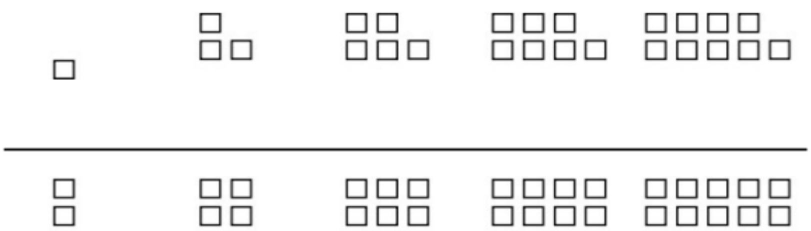
Fonte: Acervo dos autores.

É importante, porém, ouvir as vozes, conjecturas e percepções dos estudantes, pois quando expressam seus entendimentos podem colaborar com os demais, estimular a participação, melhorar a concentração e colaborar com o processo educativo ao mostrar suas percepções e entendimentos, além de dar ao mediador dos estudos a possibilidade de analisar a participação e realizar ajustes e correções caso haja a necessidade.

É necessário explicitar aos estudantes que se tratam de sequências e devemos admitir que a regularidade será mantida. Na proposição de exercícios como estes, ao não especificar sua regularidade, os alunos podem pensar que após determinado elemento a ordem dos demais possam mudar, não sendo possível descobrir qual o próximo a compor a lista de símbolos em questão, preocupação que expressam alguns autores do campo.

Uma outra proposta seria a representação figural na **Figura 1**, como na **Figura 2** a seguir:

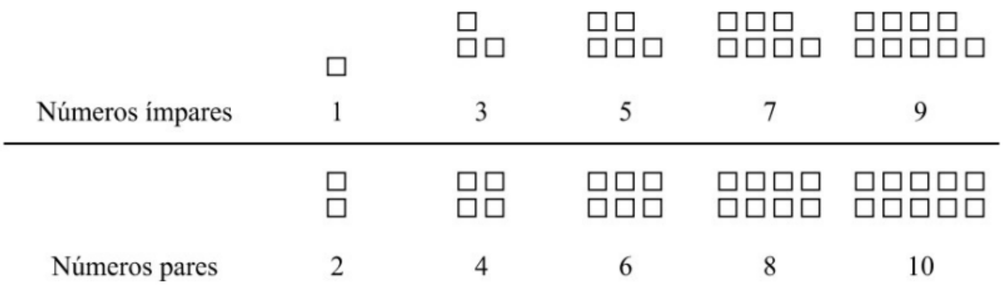
Figura 2: representação figural dos números pares e ímpares



Fonte: Acervo dos autores.

O professor pode solicitar que os estudantes descubram o padrão em cada uma das sequências da Figura 2, e após passado certo tempo no qual os estudantes tiveram a oportunidade de explorar, identificar as sequências, discutir com eles até que percebam se tratar dos números pares e dos números ímpares, conforme observamos na **Figura 3**.

Figura 3: representação figural dos números pares e ímpares

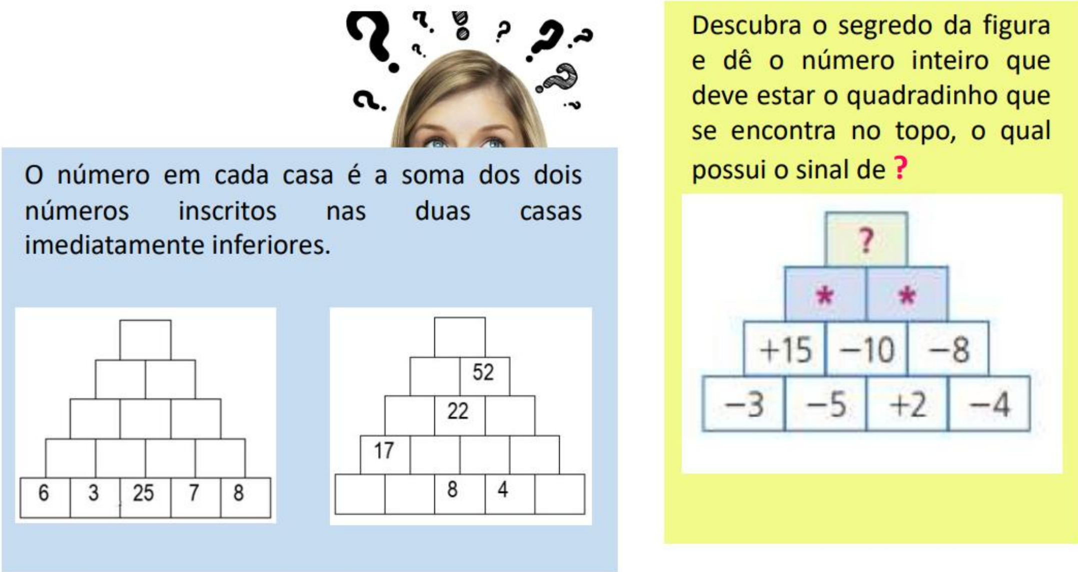


Fonte: Acervo dos autores.

As atividades das pirâmides (**Figura 4**), presentes em diversos livros didáticos, também podem favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico, estimulando a aplicação de técnicas de cálculo mental e o desenvolvimento de estratégias que permitam preencher as lacunas corretamente, respeitando as regras de modo a chegar ao topo com todos os valores descobertos. Nas atividades com pirâmides aditivas, a regra consiste em completar as casas vazias, calculando a soma dos números que se encontram nas casas imediatamente abaixo. Além das pirâmides aditivas há também as multiplicativas, ambas podendo envolver tanto números naturais quanto inteiros negativos. Assim, as pirâmides permitem explorar atividades de complexidade diversa, podendo ser adaptadas ao nível de conhecimento dos alunos.

No primeiro exemplo ilustrativo a seguir (**Figura 4**), o enunciado já informa que são duas pirâmides aditivas, mas observa-se que a complexidade da segunda é um pouco maior, pelo fato de não conter os valores de todos os números da base. No segundo exemplo aparecem números negativos e o enunciado propõe que o aluno "descubra o segredo da figura" e o número "que se encontra no topo". Para isso, é necessário descobrir a regularidade, ou seja, que se trata de uma pirâmide multiplicativa envolvendo números inteiros relativos, bem conhecer regras da multiplicação nesse conjunto numérico.

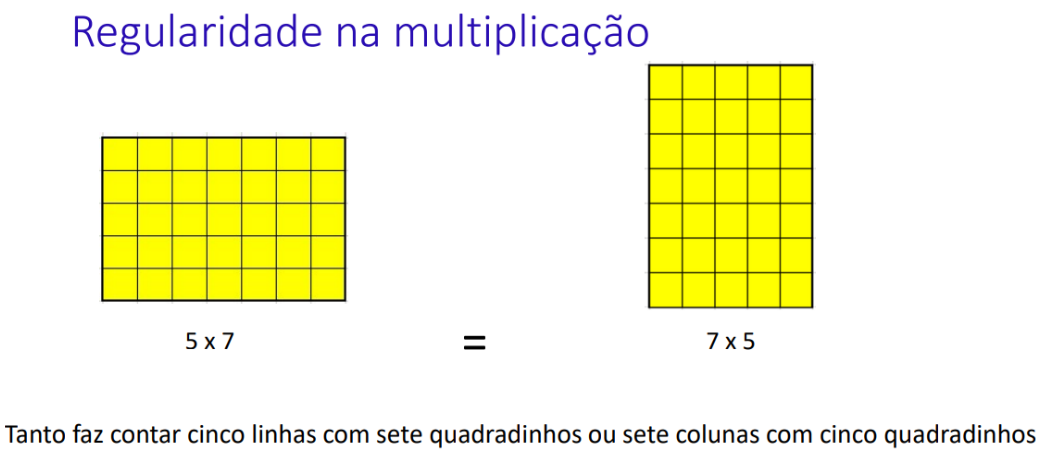
Figura 4: exercícios da pirâmide



Fonte: Dante (2015).

O próximo exemplo trata da regularidade da multiplicação. Este tipo de exercício favorece a compreensão de que independente da ordem de contagem, o resultado não muda quando falamos de multiplicação direta. Deve-se reinvestir para trabalhar outras propriedades, como a associativa e a comutativa, tanto da adição como da multiplicação. Na atividade apresentada na **Figura 5**, além do conceito de área, também pode-se observar estas regularidades:

Figura 5: figuras sobre regularidade da multiplicação



Fonte: Acervo dos autores.

O ESTATUTO DA LETRA E A EVOLUÇÃO DA LINGUAGEM ALGÉBRICA

Quando os estudos vão se aprofundando na construção do conhecimento algébrico, as utilizações de recursos para generalização são introduzidas aos poucos, como as letras e símbolos. Esses recursos podem assumir diversos estatutos, os mais frequentes são:

Rótulo (etiqueta) - significa usar a letra inicial para representar algo, por exemplo, 3 metros ou 3 m; **incógnita** - que demanda encontrar o valor de x numa equação, por exemplo, $3x + 2 = 17$, ou seja, $x = 5$; **número indeterminado** - quando as letras podem assumir valores numéricos diversos, em geral em cálculo algébrico, por exemplo, em produtos notáveis como $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; **variável -** quando expressa relações entre duas ou mais grandezas, com variação em domínios definidos. Por exemplo, na função real de variável real definida por $y = f(x) = 2x - 3$, ou seja, x pode assumir um valor real qualquer.

Importante ressaltar que quando se resolve um problema matemático, os estatutos das letras podem ser diversos, ora como etiqueta, ora como variável, ora como incógnita em uma única situação trabalhada. Vale lembrar que as letras podem assumir diversos estatutos, para além dos apresentados neste texto.

A construção da linguagem algébrica também passou por um longo processo de evolução. De forma sucinta suas fases foram: **Retórica ou verbal** – quando se utiliza somente a língua materna, sem notações simbólicas e nem abreviaturas, que se estende desde os babilônios (1700 a.C) até a publicação do livro Aritmética do matemático grego Diofanto (250 d.C); **Sincopada** – quando passa a fazer uso de abreviações de termos usados com frequência no cálculo algébrico. Essa forma de escrever teria surgido com Diofanto de Alexandria, que introduziu pela primeira vez um símbolo para a incógnita - a letra sigma do alfabeto grego – e utilizou abreviações para expressar suas equações. Por fim o uso intenso de sincopações, deu origem à linguagem **Simbólica,** tendo François Viète (1540 – 1603) como um dos criadores, que teve uma grande importância nesta fase, pois embora utilizasse um estilo sincopado, foi responsável pela introdução das letras e de outros símbolos, como os sinais "+" e "-", na Álgebra.

René Descartes (1596 –1650), foi um dos que contribuiu com a consolidação do uso da linguagem simbólica, em 1637, com a publicação de La Géomètrie (A Geometria), um dos apêndices de sua obra filosófica Discours de la Méthode (Discurso do Método), em que utiliza as últimas letras do alfabeto (x, y, z, ...) como incógnitas (e, implicitamente, como variáveis) e as primeiras letras do alfabeto (a, b, c, d, ...) como quantidades fixas nas equações, por exemplo.

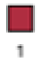
PADRÕES QUE PERMITEM GENERALIZAÇÕES

Nessa oficina apresentamos diversos exemplos, mas não seria possível contemplar todos no presente texto. No entanto, olhando agora para padrões que permitem generalizações, trazemos o exemplo da **Figura 6**, que propõe, por meio do desenvolvimento de cálculos aritméticos envolvendo seus termos, em paralelo com a ilustração deles por meio de figuras sequenciais, chegar ao termo geral da sequência dada, que é uma função de $\mathbb{N}^*$[22] em $\mathbb{N}$, que a cada valor é associado ao seu quadrado. É importante observar que na imagem há várias representações, sendo elas a figural, a numérica e, por fim, a notação de conjuntos utilizando a linguagem algébrica. No exemplo ilustrativo a seguir, a regularidade e consequente generalização envolvendo a soma dos n primeiros números ímpares pode ser identificada tanto por meio da observação geométrica, conforme os números figurados na Grécia antiga, quanto por cálculos de somas de PA de razão 2.

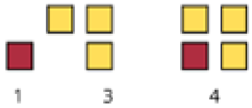
[22] Conjunto dos números naturais excluindo o zero.

Figura 6: sequência em diversos registros

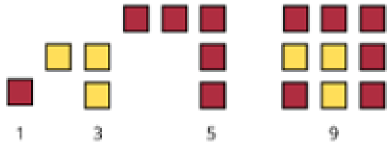
$T_1 = 1 = 2.1 - 1$



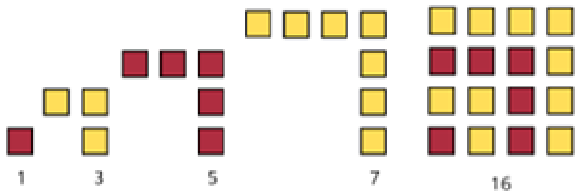
$T_2 = 4 = 1 + 3 = 1 + (2.2 - 1)$



$T_3 = 9 = 1 + 3 + 5 = 1 + 3 + (2.3 - 1)$



$T_4 = 16 = \ 1 + 3 + 5 + 7 = 1 + 3 + 5 + (2.4 - 1)$



$T_n = n^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2.n - 1)$

.

.

.

$T_n = 1, 4, 9, 16, 25, 36, ..$

Fonte: Acervo dos autores baseado em Ponte (2005).

A IMPORTÂNCIA DE SE TRABALHAR AS PROPRIEDADES DA IGUALDADE

Quando as três propriedades presentes na figura 7, são simultaneamente válidas, teremos uma *relação de equivalência*, que auxiliará na resolução de equações, posteriormente, bem como de classes de equivalência de maneira geral.

Figura 7: propriedades da igualdade

Reflexiva

2 = 2

Simétrica

2 + 5 = 7 ⇔ 7 = 2 + 5

Transitiva

2 + 5 = 7 e 7 = 8 – 1 ⇒ 2 + 5 = 8 - 1

Fonte: Acervo dos autores.

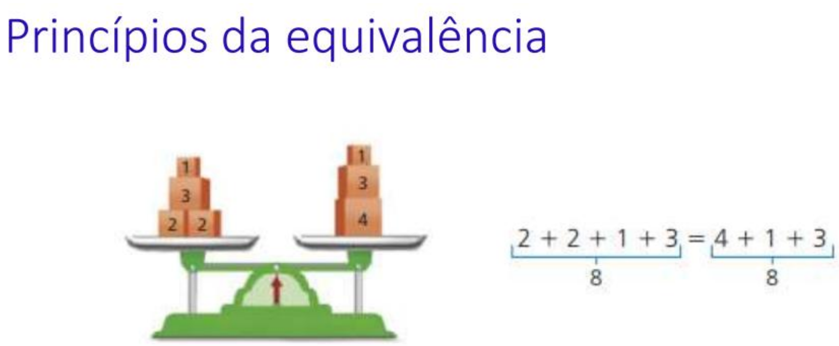
Destacamos que não defendemos que se deva apenas estudar, memorizar estas propriedades e realizar muitos exercícios que as abordem. Acreditamos que é necessário sua compreensão para evitar dificuldades quando precisar reinvestir seu uso em outros campos da matemática, como na resolução de equações; na identificação de frações equivalentes no conjuntos dos números racionais; na partição dos naturais em classes de equivalência, como pares e ímpares, como os que deixam restos 0 ou 1 na divisão por 2; ou de maneira mais geral na identificação de um vetor na geometria analítica, como o conjunto dos segmentos orientados que possuem o mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido.

PRINCÍPIOS DA EQUIVALÊNCIA

Utilizado na resolução de equações, Al-Kouarismi[23] já usava este conceito para criar as técnicas de resolução de equações, trata-se do princípio de que todos os cálculos que operarmos no primeiro membro, devemos operar no segundo membro para que se mantenha a igualdade. Com as crianças menores, sem mostrar a balança, é possível trabalhar este princípio, do seguinte modo: Maria tem dez reais e João também tem dez reais. Maria doa dos seus dez reais, dois reais para sua irmã, e João, de seus dez reais, doa dois reais para seu amigo, Maria e João continuam tendo a mesma quantidade em dinheiro?

A ilustração da **Figura 8** mostra a balança, que pode ser usada para outras propriedades tanto do princípio aditivo como do multiplicativo.

Figura 8: Ilustração da balança em equilíbrio



Fonte: Giovanni (2018).

[23] Foi um matemático, astrônomo, geógrafo e historiador. É de seu nome que deriva o termo "algarismo", em português.

No material apresentado há diversos exemplos e na oficina muitas observações foram feitas a esse respeito. Nós não conseguiremos contemplar todos aqui, mas a figura da balança em equilíbrio é um ótimo recurso para que se compreenda as técnicas de resolução de equações do primeiro grau.

SOBRE A INTRODUÇÃO DA ÁLGEBRA

Para decidirmos se uma atividade é algébrica ou aritmética é necessário obter mais informações do interlocutor do que simplesmente a análise visual da situação apresentada. No caso da situação:

Se diante da atividade $\frac{5+5+5}{3}$, alguém diz que o resultado é 5;

Ao continuarmos com raciocínio e propusermos $\frac{5+5+5+5}{4}$ não é difícil observar que o resultado também será igual a 5. Se repetirmos para 5, 6, 7 etc parcelas iguais a 5 e dividirmos sempre pelo total de parcelas, o resultado daria sempre 5, ou seja, se déssemos continuidade de modo que uma coisa compensasse a outra do seguinte modo $\frac{a+a+\cdots+a}{n}$ (de modo que tivéssemos o "a" soma do a ele mesmo "n" vezes)

Segundo Lins e Gimenez:

> Se a pessoa for um aluno de 4ª série [atual 5º ano], certamente iremos querer que ela explicite sua consciência do fato de que a ideia é geral, mas se for um matemático, é provável que basta falar dos quatro cincos para que nos convençamos que ali sempre esteve em jogo o algébrico (por mais elementar que seja). (Lins e Gimenez, 1997, p. 99)

Sendo assim, entendemos que a Álgebra não se reduz a uma linguagem, depende do nível de conhecimento de quem realiza determinado trabalho, se está usando ou não determinada propriedade com a consciência de estar sendo usada. Neste caso, a forma como a regularidade é apresentada pode ser numérica, em linguagem natural (por meio de palavras) ou algébrica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dentre as muitas atividades, exemplos e observações presentes na oficina, escolhemos trazer para o texto algumas que podem ser adaptadas mais facilmente para os diversos níveis de estudos e aprofundamentos. Queremos reforçar a ideia de que o pensamento algébrico se desenvolve durante toda a vida do estudante, desde os anos iniciais por meio do estudo de padrões e sequências, em brincadeiras, atividades lúdicas, podendo usar imagens, sons, gestos, objetos e o que mais for possível.

Posteriormente, nos momentos em que se tornam possíveis as generalizações e abstrações necessárias para se aprofundar neste campo da Matemática, que causa tantas dificuldades no entendimento por parte dos estudantes, é importante dar uma atenção especial ao estudo das propriedades da igualdade, pois ele favorece o entendimento de técnicas algébricas, como por exemplo a que se apropria da ilustração da balança em equilíbrio na resolução de equações do primeiro grau.

Todos os exercícios comentados nos mostram que ao trabalharmos situações que favoreçam o desenvolvimento do pensamento algébrico, desde a mais tenra idade, nos ajuda a preparar o estudante para utilizar técnicas algébricas, mobilizá-las com consciência na resolução de situações, que em um primeiro olhar nos pareça aritmético, por meio de um raciocínio algébrico.

A Álgebra não se limita a uma linguagem e um aglomerado de técnicas a serem repetidas tal qual um papagaio repete o que aprende a falar, mas depende muito da bagagem intelectual e cognitiva do sujeito que a trabalha, da consciência com que aplica as técnicas e da desenvoltura com que a trabalha e desenvolve, principalmente sendo capaz de transitar entre os estatutos das letras, os registros simbólicos, figurais, geométricos, algébricos. Compreender as propriedades da igualdade, bem como reconhecer padrões, regularidade e generalizações e, enfim, desenvolver a capacidade de abstrair adequadamente obtendo êxito em suas abstrações e raciocínios.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **PNAIC - Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Apresentação:** Ministério da Educação. Brasília-DF: MEC, SEF, 2014. Disponível em: http://www.matematicando.net.br/cadernos-de-alfabetizacao-matematica/.

BITTAR, Marilena; FREITAS, José Luiz Magalhães de. **Fundamentos e metodologia de Matemática para os Ciclos Iniciais do Ensino Fundamental.** Campo Grande: Editora UFMS, 1ª ed., 2004.

DANTE. Luiz Roberto. **Projeto Teláris: matemática: 7º ano**, 2ªed. São Paulo: Ática, 2015.

FREITAS, José Luiz Magalhães de. Reflexões e questionamentos sobre pesquisa em educação algébrica. In: **Educação Matemática Pesquisa - III Fórum de Discussão: Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil**. São Paulo, v.17, n.3, p. 655-665, 2015. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/25808/pdf.

GIOVANNI, José Ruy; CASTRUCCI, Benedito Antônio. **A conquista da Matemática: 7º ano**. São Paulo: FTD, 2018.

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ, Joaquim (Orgs.). **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. Campinas-SP: Papirus, 1997.

NOGUEIRA, Rosane Corsini Silva. **A álgebra nos livros didáticos do ensino fundamental: uma análise praxeológica**. 2008. 125 f. Dissertação. Campo Grande-MS: UFMS, 2008. Disponível em: https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/1543.

PONTE, João Pedro da; BROCADO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. Investigações matemáticas na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 1ª ed., 2005.

CAPÍTULO 5

NO CAMINHO A GEOMETRIA: PLANA OU ESPACIAL: SEPARAR OU JUNTAR

Oficina 6 no YouTube

Susilene Garcia Oliveira[24]

Cintia Melo dos Santos[25]

Público-alvo: professores do 6º ao 9º do ensino fundamental

Objetivo: Apresentar uma discussão integrada de alguns elementos da geometria plana e espacial

Habilidades Associadas às Competências Gerais da BNCC:

- *(EF06MA18)* Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.
- *(EF06MA17)* Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.

[24] Professora Dra. da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - CPAQ/UFMS susilene.oliveira@ufms.br, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1020-2493.
[25] Professora Dra. da Universidade Federal da Grande Dourados - /UFGD cintiasantos@ufgd.edu.br, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2121-3120.

DOI: 10.46898/rfb.bbe222faa4dd.5

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A Geometria é um campo da Matemática que possibilita aos estudantes resolver situações-problemas em diversos contextos do seu cotidiano, como preconiza a Base Nacional Comum Curricular (BNCC): "A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento" (BRASIL, 2018, p. 271). Certamente, a compreensão dos conceitos geométricos que possibilite que o estudante transite em diferentes áreas de conhecimento e entenda diferentes situações-problemas em seu entorno, requer uma prática pedagógica que não seja uma mera aplicação de fórmulas, mas, sim, que estimule o raciocínio lógico do estudante.

Desse modo, corroboramos com Pais (2006, p. 93), ao afirmar que a aprendizagem dos conceitos geométricos "recebe influência de três aspectos que devem ser considerados na condução da prática educativa: intuição, experiência e teoria". Assim, o ensino de Geometria deve propiciar a abstração dos seus conceitos, por meio da experimentação, de modo a mobilizar diferentes representações geométricas em materiais manipuláveis impulsionando a descoberta, a conjectura e a construção dos conceitos geométricos pelo estudante.

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é apresentar uma discussão integrada de alguns elementos da geometria plana e espacial, explicitando uma possibilidade de prática em sala de aula, no que diz respeito aos conteúdos geométricos, de modo a impulsionar a experimentação, por meio de materiais manipuláveis e de softwares. Cabe pontuar que essa oficina é uma proposta, entre outras, que apresenta possibilidades e não um modelo a ser seguido, de modo que cada professor pode, a partir da sua realidade, realizar modificações no que julgar necessário.

A seguir apresentaremos a caracterização da oficina, os materiais utilizados e a problematização inicial que norteou as nossas discussões, seguidas de algumas propostas de atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula.

CONVERSANDO SOBRE GEOMETRIA

O ensino de geometria já foi reduzido, um tempo atrás, ao domínio de fórmulas e resolução de exercícios. Entendemos que essa abordagem também se faz necessária, mas está reduzida a uma repetição mecânica sem real aprendizado. Mudanças foram e estão sendo propostas para implementar o processo de ensino de geometria, dentre outros campos, ao longo dos últimos 20 anos, desde a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), juntamente a outras orientações e documentos oficiais até chegarmos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

> A geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nesta unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência. (BRASIL, pp. 271 e 272, 2018).

Sendo assim, a BNCC atribui a necessidade de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento, incluindo-os no cotidiano escolar.

Essas mudanças têm abarcado todos os níveis de ensino, desde a educação infantil, na qual há oportunidades de construir conhecimentos relacionados à geometria, a partir da percepção de si, das formas e do espaço que os objetos e pessoas ocupam, até o ensino fundamental, no qual este conhecimento é aprofundado. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para os anos iniciais do ensino fundamental, as expectativas de aprendizagem incluem localização, estimativas, identificação de características geométricas de figuras bi e tridimensionais, associação de figuras espaciais a suas planificações e vice-versa, o uso de recurso de softwares de geometria dinâmica, dentre outros. Pontos que são discutidos e ampliados também nos anos finais do ensino fundamental.

O currículo de Referência do Estado de Mato Grosso do Sul, lançado em 2018 e implementado nas escolas sul-mato-grossenses a partir de 2019, apresenta "um currículo contextualizado com a diversidade sul-mato-grossense e norteado pelas dez competências gerais da BNCC" (MATO GROSSO DO SUL, p. 20, 2018). Esse documento oficial estadual

> é instrumento basilar para a Secretaria de Estado de Educação, as Secretarias Municipais de Educação e as Instituições Privadas de Ensino elaborarem orientações curriculares e auxiliarem nos processos de revisão dos projetos pedagógicos das escolas a partir de suas próprias necessidades, sempre em regime de colaboração, com orientações aos envolvidos na gestão administrativa, formativa e pedagógica de todo o processo educativo. (MATO GROSSO DO SUL, p. 23, 2019).

Neste documento é possível identificar um item a mais que não aparece na BNCC, além do quadro com uma coluna apresentando objetos de conhecimento e outra com as habilidades presentes na BNCC. A proposta acrescenta, de forma pedagógica, caminhos que o professor pode seguir na tentativa da promoção efetiva de aprendizagem de seus alunos, chamados de ações didáticas. Nessa coluna é possível, descrevendo aqui particularmente as indicações relacionadas à geometria, encontrar orientações que indiquem o uso de softwares de geometria dinâmica, ideias para a realização de um trabalho interdisciplinar com outras disciplinas, o trabalho integrado entre geometria plana e espacial, dentre outras indicações. Entretanto, não temos por objetivo, neste momento, avaliar se algumas dessas orientações corroboram com as ideias presentes nesse texto.

CARACTERIZAÇÃO DA PROPOSTA

As atividades e discussões propostas nesta oficina tiveram por objetivo refletir sobre ideias relacionadas a alguns conceitos da geometria plana e espacial, a partir de alguns questionamentos: Por onde iniciar o ensino de Geometria? Os conceitos mobilizados na geometria plana são pré-requisitos para a geometria espacial? É importante a experimentação no ensino dos conteúdos geométricos? Para este trabalho, temos a intenção de dialogar sobre esses questionamentos, como uma proposta de ensino.

Compreendemos que, para a atribuição de significados é fundamental o trabalho baseado na integração de conceitos pertencentes tanto à geometria plana quanto à geometria espacial. Recomendamos, caso seja de seu interesse, assistir a Oficina 5 Introdução à Geometria na Educação Básica: por onde começar? https://www.youtube.com/watch?v=hbTPexJo7kI, que pode ajudar nessa significação.

MATERIAIS A SEREM UTILIZADOS

Para realizar as atividades propostas com os estudantes, é preciso ter em mãos os seguintes materiais:

- **Sólidos Geométricos (de diferentes tamanhos e materiais)**
- **Cubos de madeira**
- **Software geogebra (opcional)**

PROBLEMATIZAÇÃO INICIAL

O primeiro momento tem como objetivo fazer um levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos por meio de questionamentos como: O que vocês entendem por geometria plana e espacial? O que diferencia uma figura plana de uma espacial? Em seguida, deve ser feito um diálogo com os alunos abordando a importância da geometria e sua aplicação no cotidiano. Essa conversa pode ser preparada a partir da leitura do texto, intitulado "Medidas e Geometria" (Bittar e Freitas, 2005, p. 93).

A partir dessa introdução, sugerimos começar as reflexões com uma nova pergunta: "o que sei sobre os sólidos geométricos?", deixar os alunos responderem, anotar as respostas no quadro, caso ache necessário. Neste momento, não há uma preocupação em relação ao certo ou errado e sim, somente uma forma de fazer com que os alunos se sintam à vontade em relação a participarem da aula, quase uma preparação para o encaminhamento futuro da aula. Após as respostas partimos para a primeira atividade.

ATIVIDADE 1. Organize a sala em grupos. Distribua os sólidos geométricos para os alunos.

Nesse momento, essa divisão em grupo pode ser gerenciada pelo professor com critérios que ele mesmo estabeleça.

Uma dica: tente formar grupos com um mínimo de 03 e máximo de 05 alunos. A lista de sólidos está indicada na lista de materiais.

Encaminhamento

Peça para os alunos agruparem os sólidos geométricos e escreverem como fizeram o agrupamento. Na sequência, cada grupo apresenta aos outros grupos da sala a separação feita. É interessante que todos os grupos escrevam todas as separações feitas pelos outros grupos.

A classificação é uma atividade fundamental, que deve ser introduzida desde os primeiros anos de escolarização, com a qual pode-se iniciar o estudo de qualquer assunto. Todo esse material deve ser classificado segundo critérios que os próprios estudantes escolhem (tamanho, tons de cor etc.). Por exemplo, se classificarem por material (papel, acrílico) ou ainda, por cores, ou pelas faces dos sólidos geométricos (quadradas, retangulares, triangulares), deixe o aluno manipular e realizar as suas escolhas.

O Professor

Nesse momento é importante que se atente a todas as possibilidades de classificação; peça que eles compartilhem, favoreça essa partilha, incentive-os a falarem sobre as suas possibilidades. Crie um ambiente que possibilite uma discussão sobre essas possibilidades e oportunize para que todos apresentem.

Um segundo passo, a partir das discussões e do agrupamento feito pelos alunos junto com seus colegas, será preencher o quadro, a partir das respostas apresentadas pelos estudantes, com as seguintes informações:

Grupo	O que você sabe sobre esse sólido	características	Nome do sólido

Posteriormente à exploração inicial desses sólidos, algumas noções básicas sobre eles podem ser comentadas. Por exemplo: a palavra poliedro tem origem grega; poli significa vários e edro, face, daí o nome poliedro ser usado para denominar uma figura espacial que possui várias faces. Além das faces, os poliedros possuem "quinas", encontro de duas faces, que são chamadas de arestas e "bicos", encontro de arestas, que são os vértices.

Nesse diálogo sobre essas noções básicas podem ser exploradas o que são figuras tri, bi e unidimensionais, a partir da identificação, em um poliedro qualquer, indicando o número de faces, arestas e vértices que ele possui. E ainda, podemos considerar que em cada face do sólido, tem-se a representação de um polígono que determina uma superfície plana. Esta superfície é a reunião do polígono com seu interior e será chamada região poligonal. Círculo também é uma curva fechada simples. A reunião do círculo com seu interior será chamada de região circular. Nesse cenário, apesar de iniciar a atividade com os sólidos geométricos (geometria espacial), as discussões em torno da atividade possibilitam transitar pela geometria plana, fazendo um movimento de idas e vindas, entre os conceitos geométricos da geometria plana e da geometria espacial.

Integrando conceitos: mudar não é preciso!

Para continuar a explorar a ideia de geometria espacial, é importante retornar à atividade um e aos conceitos que puderam ser discutidos a partir do quadro. Essa segunda atividade tem por objetivo explorar mais sistematicamente os conceitos envolvidos em uma figura espacial específica, o cubo, relembrar alguns conceitos e sistematizar outros.

Encaminhamentos

Retome algumas definições. Neste momento pode-se falar sobre os sólidos geométricos mais conhecidos, como pirâmides, prismas, paralelepípedos, cubo, cone, cilindro e esfera, sólidos esses já apresentados na atividade anterior. Neste momento elegeremos o cubo como um representante dos sólidos para iniciar as discussões. O cubo é um prisma, mas como são suas faces? Mas o que é um prisma mesmo? Essas perguntas encaminharão as discussões para uma retomada de conceitos, não esperamos que os alunos respondam exatamente o que são prismas, mas que as respostas se aproximem de: *"são poliedros que possuem faces paralelas e congruentes (mesma forma e mesmo tamanho), chamadas bases, e a faces laterais têm a forma de paralelogramos"*. (Bittar e Freitas, 2005, p. 101). Nesse momento o professor pode tentar ouvir a todos e conduzir para uma sistematização da definição e talvez, ainda, explorar e avançar nessas definições. A figura 1, na qual apresentamos as classificações dos sólidos, pode ser usada pelo professor para relembrar/conhecer/estudar como as classes se relacionam e propor discussões para os estudantes. Antigamente, pedia-se que os estudantes decorassem estas classificações/inclusões, não é isso o que defendemos. Assim, apresentamos esta figura apenas para auxiliar o professor em seu estudo.

Figura 1: Classificação dos sólidos geométricos

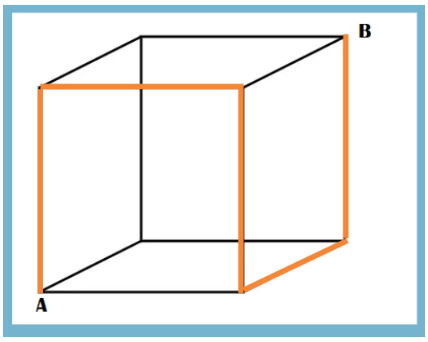
- Sólidos geométricos
  - Poliedros
    - Prisma
      - Cubos ou hexaedros regulares
      - Paralelepípedos
      - Prisma de base triangular, quadrangular, ...
    - Pirâmide
      - Poliedros de 4 faces (tetraedro)
      - Pirâmides de base triangular, quadrangular, ...
    - Outros Poliedros
  - Corpos redondos
    - Cilindro
    - Cone
    - Esfera
  - Outros sólidos

Fonte: Bittar e Freitas (2005, p. 102).

Na continuidade, apresentamos a seguinte atividade:

ATIVIDADE 2. Uma formiga sai do vértice A para o vértice B (conforme figura 2) de um cubo de madeira, com arestas iguais a 10 cm. Pergunta-se: 1) Qual o maior caminho que ela poderá percorrer sobre as arestas, indo de A a B, mas sem passar pela mesma aresta mais de uma vez?

Figura 2: Indo do vértice A para o vértice B



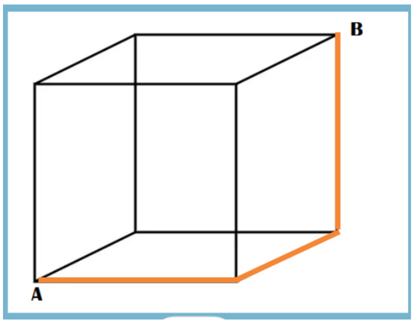
Fonte: Acervo dos autores.

Encaminhamentos

Seria interessante, se possível, levar um cubo, em tamanho significativo, para a aula, ou ainda disponibilizar um para cada estudante, ou formar grupos em sala, a depender da sua metodologia para a aula. Estimule os alunos a elaborarem conjecturas sobre os possíveis caminhos, marcarem essas possibilidades de caminho e apresentarem-nas à sala. As estratégias propostas são as mesmas? Como podemos "provar" isso? Coloque todas as respostas no quadro, discuta com eles sobre as respostas, encontre pontos em comum. Essa não será uma atividade demorada e ajudará na discussão dos próximos passos. O importante é que trilhem os diferentes caminhos, manuseando o cubo. Na sequência, apresentamos um novo questionamento, complemento da atividade: 2) Qual o menor caminho que ela poderia percorrer, podendo caminhar apenas pelas arestas?

Neste momento, após o primeiro questionamento, acreditamos que os alunos estejam mais envolvidos nas discussões e inclusive já tenham apresentado a resposta para essa atividade. O objetivo aqui é explorar a oralidade e a visualização, as conjecturas que podem surgir na verbalização de respostas, que os estudantes pensem nas possibilidades e cheguem a uma resposta parecida como caminho laranja da figura 3.

Figura 3: Representação do menor caminho percorrido



Fonte: Acervo dos autores.

Os estudantes devem compreender que, independentemente da direção a seguir, o menor caminho percorrido sobre as arestas é sempre o mesmo.

Continuando com a atividade, podemos acrescentar, um outro questionamento: 3) Qual o menor caminho possível a ser percorrido não necessariamente ao longo das arestas? A construção da atividade até chegar a este momento foi uma "preparação" para discutir conceitos mais complexos, que apresentaremos mais adiante, a partir de atividades que consideramos serem mais simples. É importante deixar claro que a realidade de cada sala de aula e a complexidade das relações que podem influenciar no encaminhamento da aula, fazem parte da realidade de cada professor e não as estamos desconsiderando: voltamos a lembrar que possíveis alterações e direcionamentos ficarão a critério de cada professor e de sua realidade.

O objetivo ao longo dos questionamentos, referente à atividade 2, foi fazer com que os alunos visualizassem as possíveis respostas e construíssem seu conhecimento em relação aos conceitos envolvidos. O próximo passo será inserir uma nova problematização dando-lhes a oportunidade de explorar a figura agora sem a limitação de "andar somente pelas arestas". Diante disso, podemos propor alguns questionamentos, como: podemos andar por dentro? posso andar pelo lado/face? os caminhos serão diferentes? Dê um tempo para que os alunos possam confrontar suas respostas, conjecturar, levantar hipóteses, apresentar soluções. Nesse momento um novo objeto de conhecimento poderá aparecer: a planificação de figuras geométricas, pois "Em relação às formas, espera-se que os alunos indiquem características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associem figuras espaciais a suas planificações e vice-versa". (Brasil, p. 272, 2018).

Cabe ressaltar que a manipulação e a visualização dos objetos são muito importantes no ensino da Geometria, no entanto, a compreensão, de que esses objetos são representações dos sólidos geométricos e não propriamente o sólido, é necessária. Nos livros didáticos, podemos observar, como sugestão para a prática em sala de aula, que é solicitado aos alunos que levem diferentes caixas, objetos que representam os sólidos geométricos. Nestas sugestões os objetos em papelão conduzem à planificação do objeto com a ação apenas de desmontar a caixa.

Tal situação pode conduzir o aluno a uma dificuldade na compreensão desse conceito, de modo a entender que a planificação de um sólido geométrico (figura com três dimensões), é simplesmente desmontar o sólido. E quando nos deparamos com essa situação, na qual o sólido geométrico é de madeira, vemos a importância de disponibilizar diferentes representações de sólidos geométricos, para que o aluno não faça conjecturas errôneas com relação às representações mobilizadas, pois na planificação dos sólidos, não planificamos os sólidos propriamente ditos, mas sim, as superfícies que o compõem.

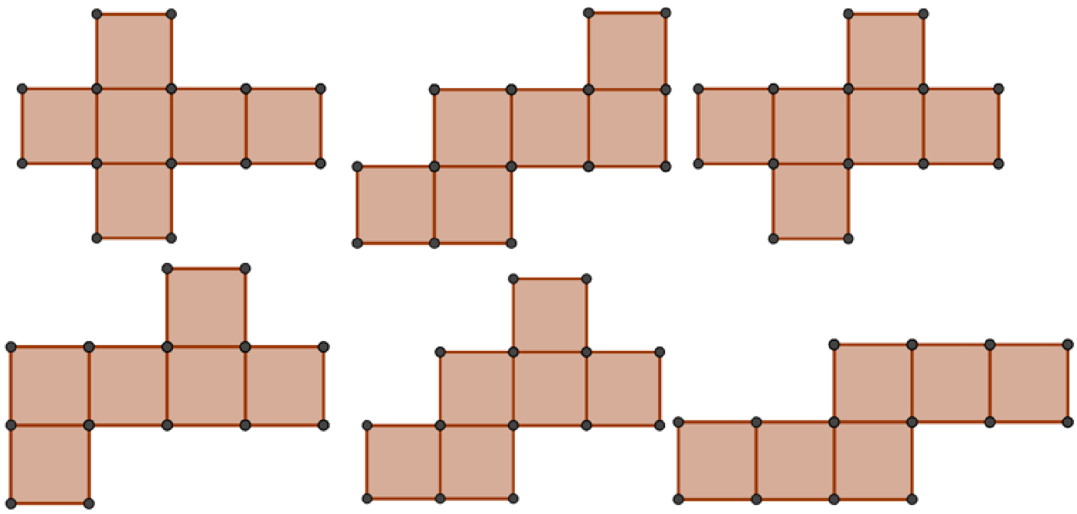
O pensamento geométrico, engloba a análise das representações das figuras geométricas e operacionalização sobre essas representações de modo a responder questionamentos sobre os conceitos geométricos envolvidos. Diante disso, podemos continuar a nossa discussão, com o seguinte questionamento: como planificar um cubo de madeira? O professor poderá encaminhar as discussões pertinentes à planificação: como planificar? Pode-se planificar tudo? Planificamos sólidos geométricos? **Como planificamos sólidos de madeira?**

PLANIFICAÇÃO DO CUBO

No seguimento da aula, trabalharemos com a planificação do cubo, com objetivo de fazer uma primeira passagem de figuras do espaço tridimensional (sólidos) para o bidimensional (planas) e vice-versa. Visa-se também aprimorar o reconhecimento de figuras e identificação de algumas formas planificadas contemplando assim uma das habilidades descritas na BNCC*: "(EF03MA14) Descrever características de algumas figuras geométricas espaciais (prismas retos, pirâmides, cilindros, cones), relacionando-as com suas planificações" (Brasil, 2018, p. 287).*

No desenvolvimento da planificação do cubo, acreditamos ser interessante o uso de um software de geometria dinâmica para explorar a planificação do cubo. Nesse link https://www.geogebra.org/m/m5tmtahb é possível ter acesso a diversas planificações do cubo (figura 3) assim como as vistas da figura em questão, levando em consideração uma outra habilidade, proposta na BNCC, no 6º ano do ensino fundamental *"(EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva".* (Brasil, 2018, p. 319)

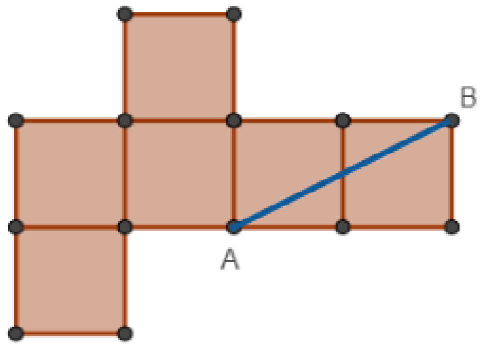
Figura 4: Algumas planificações do cubo apresentadas a partir do uso do Geogebra



Fonte: https://www.geogebra.org/m/m5tmtahb.

Após essa exploração que também poderá ser feita com o uso do material concreto, bem como, com as planificações do cubo disponíveis em encartes nos livros didáticos ou ainda, as disponíveis na internet, retomamos o questionamento feito inicialmente: Uma formiga sai do vértice A para o vértice B de um cubo sólido, com arestas iguais a 10 cm. Qual o menor caminho possível a ser percorrido não necessariamente ao longo das arestas? Tendo em vista as atividades desenvolvidas, espera-se que os alunos já mobilizem a resolução dessa atividade; de acordo com a figura a seguir

Figura 5: planificação do cubo descrito na atividade anterior

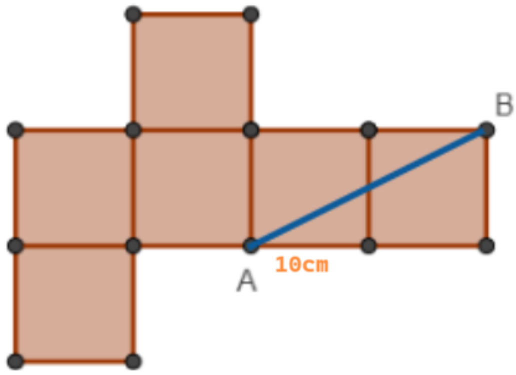


Fonte: Acervo dos autores.

No decorrer dessas atividades, temos a visualização da situação apresentada, mobilizando a figura tridimensional, uso do sólido cubo, e da figura bidimensional, uso da planificação do cubo, como possível solução para o problema. A geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nesta unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais favorece o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos, de modo que possam estabelecer relações entre o plano e o espacial, bem como, integrá-las.

Nessa proposta de atividade, ao explorar as resoluções propostas pelos alunos, o professor pode interferir e inserir alguns objetos de conhecimento, como o Teorema de Pitágoras, pois o caminho de A até B, é a hipotenusa dos triângulos retângulos obtidos, conforme podemos visualizar, na figura 6.

Figura 6: planificação do cubo



Fonte: Acervo dos autores.

Sugerimos a exploração das figuras geométricas representadas nessa planificação: que figuras podemos identificar? E quanto às medidas dos lados das figuras, é possível obtê-las? Pode ser que os alunos não participem ativamente respondendo as perguntas feitas, mas incentive-os, vamos começar com pequenos passos. Caso não consiga uma participação mais significativa, apresente algumas considerações por ser essa uma das planificações do cubo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste texto, apresentamos uma sugestão, entre outras, de atividades que permitem mobilizar os conteúdos geométricos de maneira integrada, com o propósito de que as discussões em torno dessas atividades possibilitam transitar no campo da geometria, de modo a permear o estudo desses conceitos, tanto da geometria plana, quanto da geometria espacial. Nesse viés, acreditamos que esses conceitos geométricos devem ser trabalhados concomitantes, e que a proposta de um ensino linear, que compreende que os conceitos da geometria plana devem ser pré-requisitos para o desenvolvimento dos conceitos mobilizados na geometria espacial, inviabiliza um estudo dos conteúdos geométricos com foco na construção do conhecimento pelo aluno.

Cabe salientar que no decorrer das atividades desenvolvidas utilizamos representações dos sólidos geométricos, figuras planas, e o software Geogebra para melhor compreensão dessas representações. Todavia, o uso dessas representações precisa ser mediado pelo professor para que os alunos compreendam que essas representações são recursos que permitem visualizar, experimentar e explorar figuras geométricas, porém, as representações são limitadas quando, somente elas, são usadas para a compreensão integral dos conceitos geométricos, sendo imprescindível a mediação do professor, como apresentado na atividade de planificação do cubo de madeira.

REFERÊNCIAS

BITTAR, Marilena; FREITAS, José Luiz Magalhães de. **Fundamentos e metodologia de Matemática para os Ciclos Iniciais do Ensino Fundamental.** Campo Grande: Editora UFMS, 2ª ed., 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Ministério da Educação. Brasília-DF: MEC, SEB, 2018a. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf.

MATO GROSSO DO SUL. Secretaria de Estado de Educação. **Currículo de referência de Mato Grosso do Sul: educação infantil e ensino fundamental.** Campo Grande: SED, 2019.

CORREIA, Paulo. **Planificação do cubo**. Geogebra, 2021. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/m5tmtahb. Acesso em 03 de novembro de 2022.

RÊGO, Rogério; RÊGO, Rômulo; VIEIRA, Kleber. **Laboratório de Ensino de Geometria**. Campinas: Autores Associados, 1ª ed., 2012.

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

CAPÍTULO 6

PROJETO DE VIDA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Oficina 7 no YouTube

Jéssica Serra Corrêa da Costa[26]

Jessé Fragoso da Cruz[27]

Público-alvo: Professores da Educação Básica

Objetivo: Discutir possibilidades e potencialidade do Projeto de Vida como componente curricular no Ensino Fundamental.

Habilidades da BNCC

- *(EM13LGG503)* Vivenciar práticas corporais e significá-las em seu Projeto de Vida, como forma de autoconhecimento, autocuidado com o corpo e com a saúde, socialização e entretenimento.
- *Competência Geral da BNCC: 6.* Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu Projeto de Vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

[26] Professora Dra. da Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso do Sul (SED/MS); e-mail:jessica.correa@ufms.br; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9989-7871.

[27]Subsecretário de Estado de Políticas Públicas para Juventude; e-mail: jessepessoal01@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0009-0004-6860-9274.

DOI: 10.46898/rfb.bbe222faa4dd.6

INTRODUÇÃO

Considerando as frequentes mudanças que a sociedade vem sofrendo no decorrer dos últimos anos, é importante iniciarmos este texto fazendo um recorte histórico de Mato Grosso do Sul neste contexto; a educação também tem passado por essas transformações. Em décadas passadas o que era em essência mais valorizado era o aspecto cognitivo, a transmissão de conhecimento. Entretanto, cabe observar que naquele período aquilo era muito importante nos diversos componentes curriculares. Hoje, percebeu-se que privilegiar apenas os aspectos cognitivos não atende as demandas do século XXI.

Panoramicamente, faz sentido compreender porque se fala tanto de Educação Integral, competências socioemocionais e Projeto de vida. O que isso tem a ver com matemática?

Em 1932, o Manifesto dos Pioneiros da Educação Nova, liderado por Anísio Teixeira e Fernando de Azevedo, constitui um marco legal que permite que as visões acerca da educação sejam ampliadas, no sentido de olhar para o estudante em sua completude. Embora houvesse, naquele momento, um cunho também assistencialista ali iniciava uma ação que prezava pela educação para além do aspecto cognitivo.

Ao encontro desta ação, a Constituição de 1988, em seu artigo 205, reafirma uma preocupação com o desenvolvimento pleno do indivíduo, possibilitando um olhar nas suas diversas dimensões. Nesse sentido, outros marcos legais contribuem com o desenvolvimento de uma educação plena, a saber: o Plano Nacional de Educação, o Plano Estadual de Educação e as diretrizes e bases da educação nacional (LDB).

No cenário educacional todas essas ações e prescrições resultam em um documento normativo, que é a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que define as aprendizagens essenciais. Neste sentido, o que pulsa neste documento é a educação integral, que visa que o estudante seja olhado de forma plena, sendo este o eixo do Projeto de Vida.

A BNCC traz o Projeto de Vida do estudante como um eixo central de tudo que é desenvolvido como competências, habilidades, objetos do conhecimento e itinerários formativos. Cabe dizer que o objetivo não é olhar o Projeto de Vida do estudante apenas de maneira individualista, mas, considerar o contexto regional também. Dessa forma, é possível pensar nas diferentes realidades, como a de uma escola localizada na zona rural, que possui características distintas de uma escola que é urbana ou quilombola.

Assim, cabe a nós, educadores, olhar para o público que estamos atendendo para que possamos mediar a construção de conhecimentos e que estes façam sentido para o Projeto de Vida daquela comunidade, daquele estudante.

Após a pandemia, estamos vivenciando um período complexo com a necessidade de ressignificar a educação. Com isso, não queremos nos desfazer do que aconteceu no passado, mas, sim, entender que as demandas atuais são diferentes. Hoje a vida acontece de forma acelerada, em um cenário em que as coisas acontecem e propagam de maneira imediata e que nos fazem refletir acerca das profissões (des)necessárias daqui dez anos, por exemplo.

De acordo com Baumann (2011), onde há o imediatismo, não há espaço para a reflexão. Se não há espaço para reflexão, não há espaço para aprendizagem. Então, como levar o estudante, neste contexto imediatista e midiático, a refletir para aprender?

O acesso à tecnologia, com informações, permite que muitas das vezes os estudantes estejam conectados com o mundo e desconectados consigo. Em outras vezes, nós, estudantes e professores, estamos próximos dos distantes e distantes dos próximos. Veja, pensar apenas no aspecto cognitivo nessa situação não faz sentido. Precisamos mediar um desenvolvimento que potencialize a convivência, o acolhimento, o pertencimento e o engajamento.

Por que fazemos o que fazemos? Que problemas ajudamos a resolver?

PROJETO DE VIDA: O QUE É?

O Projeto de Vida é uma iniciativa educacional que integra o currículo escolar com o objetivo de orientar os estudantes a refletirem sobre suas metas e aspirações pessoais e profissionais. Nesse contexto, o componente de Projeto de Vida se incorpora ao currículo como uma ferramenta pedagógica destinada a enriquecer, desenvolver e aprimorar as habilidades e competências dos estudantes, visando o seu crescimento integral.

A proposta do trabalho com o Projeto de Vida permite a promoção do desenvolvimento tanto das competências cognitivas quanto das socioemocionais, com ênfase no autoconhecimento e no fortalecimento das relações interpessoais e intrapessoais.

Esse desenvolvimento acontece em um ambiente escolar que deve ser acolhedor, inclusivo e propício, utilizando metodologias ativas e integradoras. Assim, o Projeto de Vida incentiva os estudantes a refletirem sobre suas jornadas pessoais, aumentando a compreensão das interações humanas e promovendo uma visão crítica, cidadã, solidária e consciente, alinhada à 6ª Competência Geral da Educação Básica estabelecida pela BNCC (Brasil, 2018, p.9):

> Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao seu Projeto de Vida pessoal, profissional e social, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

Baseado no desenvolvimento de competências socioemocionais, nas relações sociais saudáveis, nos valores humanos e na educação para a vida, o Projeto de Vida conduz o estudante à reflexão, construção e realização de seu plano pessoal, desmistificando a ideia de que essa construção começa apenas nas últimas etapas da educação básica ou que é focada exclusivamente na carreira desejada. A proposta envolve um processo em que tanto o estudante quanto o educador encontram relevância e significado no aprendizado, integrando suas vivências, reflexões, consciência e visão de mundo.

Como parte do currículo, o Projeto de Vida inclui um conjunto de atividades didáticas intencionais que ajudam os estudantes a se conhecerem melhor, a descobrirem seus potenciais, a superarem dificuldades e, assim, a encontrarem os caminhos mais assertivos para seu desenvolvimento integral.

É fundamental que os professores, em parceria com a gestão escolar, promovam ações colaborativas com as famílias para esclarecer, divulgar e valorizar a importância do componente curricular Projeto de Vida e das competências socioemocionais no desenvolvimento integral dos estudantes e da comunidade escolar.

Destaca-se a relevância de reforçar a presença e o envolvimento da família, fortalecendo a relação entre família, escola e estudante no processo de aprendizagem, já que todos fazem parte de uma sociedade em constante transformação, em que decisões e escolhas impactam o futuro. A participação ativa da família e da equipe escolar é essencial na experiência de construção do Projeto de Vida.

Quando os estudantes compartilham suas experiências, toda a comunidade escolar se torna co-autora do Projeto de Vida, assumindo um compromisso social no desenvolvimento integral dos educandos. Dessa forma, a articulação entre a comunidade escolar pode intensificar a eficácia das práticas em sala de aula e fortalecer esses laços. Não entramos em sala de aula e viramos uma chave e nos tornamos professores, deixando de ser quem somos.

POSSIBILIDADES E POTENCIALIDADES

A Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso do Sul (SED/MS) reconhece o Projeto de Vida como um componente curricular essencial para o desenvolvimento integral dos estudantes do Ensino Fundamental. A iniciativa visa proporcionar um ambiente educacional que vai além do conteúdo acadêmico tradicional, incluindo o desenvolvimento de competências socioemocionais

Nesta perspectiva, a SED/MS entende que esse componente curricular incentiva a autonomia, favorece o autoconhecimento e desenvolve a habilidade de tomar decisões conscientes, preparando os estudantes para enfrentar os desafios da vida moderna e cultivando uma perspectiva crítica, cidadã e solidária. Por isso, considera o Projeto de Vida como um componente curricular, presente na matriz curricular do ensino fundamental e médio ofertado nas unidades escolares urbanas, campo e indígenas, salvo os projetos específicos.

Em um dos documentos orientativos publicado pela instituição, são apontadas algumas possibilidades às quais o Projeto de Vida está relacionado:

> As atividades do componente curricular Projeto de vida devem estar respaldadas por metodologias diversificadas como: Presença Pedagógica, Aprendizagem Colaborativa, Problematização, Multiletramentos, Educação por Projetos, literaturas diversas, rodas de diálogos, partilhas de experiências e dúvidas, informações e discussões sobre assuntos que envolvem os estudantes, potencializando um ambiente acolhedor e o desenvolvimento das competências socioemocionais. (Mato Grosso do Sul, 2021, p. 21)

Ao utilizar uma variedade de metodologias, como a Aprendizagem Colaborativa, a Problematização, e os Multiletramentos, entre outras, o componente curricular Projeto de

Vida promove um ambiente acolhedor e estimulante. Essas abordagens diversificadas permitem que os estudantes participem ativamente de rodas de diálogos, compartilhem experiências e discutam temas relevantes, o que fortalece o desenvolvimento das competências socioemocionais. Dessa forma, o Projeto de Vida contribui significativamente para a formação integral dos estudantes, ajudando-os a desenvolver autonomia, autoconhecimento e habilidades de tomada de decisão consciente, essenciais para enfrentar os desafios da vida moderna com uma visão crítica e cidadã.

O professor, peça central deste processo, atua não apenas como mediador, mas também como pesquisador, autor e protagonista. Sua presença constante e empática nas aulas é fundamental para criar um ambiente onde os estudantes se sintam seguros para expressar suas experiências através de várias formas de linguagem, sejam elas verbais, corporais, visuais, sonoras ou digitais.

O papel do professor vai além da transmissão de conhecimento; ele é responsável por inspirar e expandir os horizontes dos estudantes, conforme ilustrado pela metáfora de Manoel de Barros, "um esticador de horizontes". Ele deve facilitar atividades e utilizar recursos diversificados que incentivem os estudantes a sonhar e planejar suas vidas, compreendendo tanto os sucessos quanto os desafios que possam surgir nesse processo.

A utilização de metodologias ativas, como diálogos, partilhas de experiências e discussões sobre temas relevantes, cria um ambiente acolhedor e favorece o desenvolvimento de competências socioemocionais. O professor deve promover um espaço seguro para que os estudantes compartilhem suas esperanças, angústias, conquistas e frustrações, estando atento para intervir de maneira cuidadosa e responsável quando necessário.

Além de impactar positivamente os estudantes, o envolvimento do professor com o Projeto de Vida também pode levar a uma reflexão sobre seu próprio percurso, despertando seus próprios sonhos e angústias. Este componente curricular, portanto, não apenas contribui para o desenvolvimento dos estudantes, mas também estimula os educadores a se engajarem em um processo contínuo de construção e reconstrução pessoal e profissional. Dessa forma, promove-se uma cultura escolar onde todos são protagonistas, autores e corresponsáveis por experiências que ultrapassam os limites da sala de aula.

No ensino fundamental o Projeto de Vida tem o objetivo de alicerçar, investir no invisível: nos anos iniciais priorizamos a alfabetização emocional e nos anos finais o aprender a ser, fazer, se conhecer.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES PARA SALA DE AULA

Ao longo deste artigo, exploramos diversas abordagens para o Projeto de Vida em sala de aula, valorizando a diversidade de sonhos e realidades dos estudantes.

Em uma sala de aula diversa, onde um aluno pode sonhar em ser cozinheiro enquanto outro apenas deseja fazer três refeições diárias, como a matemática pode contribuir? Podemos acolher os estudantes e desenvolver habilidades como responsabilidade, foco e organização, essenciais para o gerenciamento de seus projetos de vida, que estão intimamente ligados aos aspectos socioemocionais.

Identificamos quatro pilares fundamentais para as práticas pedagógicas: o autoconhecimento, que incentiva os alunos a explorarem quem são, seus gostos, habilidades e o contexto em que vivem, promovendo uma jornada introspectiva que conecta coração e mente; o gerenciamento das emoções, que cria um ambiente acolhedor permitindo aos alunos expressarem suas opiniões e sentimentos, pois um contexto que acolhe o coração é mais propício para a aprendizagem; a mediação e a resolução de conflitos, que proporciona atividades colaborativas nas quais os alunos aprendem a trabalhar em conjunto e a viver coletivamente, desenvolvendo habilidades sociais cruciais; e o compromisso ético, que fomenta o hábito de questionar e refletir, ao invés de apenas fornecer respostas.

O professor deve ser um facilitador de perguntas que instiguem profundas reflexões. O papel do professor neste processo não é como transmissor de conhecimento, mas como guia que ajuda os estudantes a se conhecerem melhor e a encontrarem suas próprias respostas. Ao questionar suas motivações e impactos na comunidade, o educador se torna um exemplo de comprometimento e ética. Essas práticas visam preparar os estudantes não só para os desafios acadêmicos, mas para a vida como um todo, fortalecendo uma educação que vai além do currículo tradicional e promovendo um desenvolvimento integral.

Em conclusão, acredita-se que o Projeto de Vida impacta diretamente no processo de ensino e aprendizagem, resultando em benefícios significativos. Ao integrar os projetos de vida dos estudantes ao ambiente escolar, não apenas se fortalece a conexão entre as disciplinas e a realidade pessoal de cada aluno, mas também se promove o desenvolvimento de habilidades socioemocionais essenciais para o sucesso acadêmico e pessoal. A valorização da diversidade de sonhos e realidades dos estudantes, aliada ao suporte pedagógico nos pilares de autoconhecimento, gerenciamento das emoções, resolução de conflitos e compromisso ético, cria uma atmosfera educacional que potencializa o aprendizado e prepara os jovens para enfrentar os desafios da vida com confiança e resiliência. Assim, uma educação que dialoga com Projeto de Vida contribui para formar indivíduos mais conscientes, responsáveis e comprometidos com seu desenvolvimento integral e com a sociedade.

Ao sair de casa, pergunte-se: por que eu faço o que eu faço? Quais são as pessoas beneficiadas pelo que eu faço? Quais os problemas que eu ajudo a resolver ou minimizar nessa comunidade onde eu atuo?

Para exemplificar, se um estudante revela em seu Projeto de Vida o desejo de se tornar engenheiro civil e de resolver problemas de infraestrutura em sua comunidade, como a falta de saneamento básico, o que pode fazer o professor, ao identificar essa meta? Pode propor, por exemplo, que participe de um projeto prático em que, em grupo, os estudantes projetem um sistema de coleta de água da chuva para áreas carentes do bairro.

Nesta atividade, além de aprender conceitos de física e matemática aplicados à engenharia, é possível desenvolver uma pesquisa sobre materiais acessíveis e métodos de construção sustentáveis. A entrevista aos moradores locais para entender suas necessidades e apresentar soluções viáveis também constitui uma etapa importante do processo, uma vez que a construção do Projeto de Vida vai além das expectativas profissionais. Dessa forma, note que o projeto em questão não só desenvolve as habilidades técnicas, mas também o engaja diretamente na resolução de um problema real de sua comunidade, fortalecendo seu senso de responsabilidade social e ética.

REFERÊNCIAS

AUGUSTO, Andrea Eliane Stahlke; CRUZ, Jessé Fragoso. **Projeto de vida: caminhos e práticas de uma jornada viva**. Campo Grande: SED, 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação. Brasília-DF: MEC, SEB, 2018a. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 8, jun 2024.

BAUMANN, Zygmunt. Fronteiras do Pensamento. YouTube. 10 ago. 2011. Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=POZcBNo-D4A. Acesso em 30 ago. 2024.

CEBEL, Hanna Danza. **Conservação e mudança dos projetos de vida dos jovens.** Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação Educação, Linguagem e Psicologia - Faculdade de Psicologia, Universidade de São Paulo, 2019. 246p.

DDMAT. **Oficina 7: Projeto de Vida no ensino fundamental.** YouTube, 01, set. 2022, Duração: 1h:31m. Disponível em: https://www.youtube.com/live/tN43YHG14LQ?si=z47_hroOpJWiQauw, Acesso em 15, jun. 2024.

INSTITUTO AYRTON SENNA. **Metodologias para a Educação Integral.** Disponível em https://institutoayrtonsenna.org.br/app/uploads/2022/11/DSE_Revista-Metodologias-para-a-EI.pdf. Acesso em 25 jul. 2024.

MATO GROSSO DO SUL. Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso do Sul. **Projeto de Vida nos anos finais do Ensino Fundamental.** Campo Grande: SED, 2021.

CAPÍTULO 7

GRANDEZAS: QUAIS RELAÇÕES PODEMOS ESTABELECER EM SALA DE AULA?

Oficina 1 no YouTube

Katy Leão[28]

Marilena Bittar[29]

Público-alvo: Professores do Ensino Médio.

Objetivo: Apresentar e refletir sobre atividades propostas em materiais didáticos e possibilidades de conexões e reflexões entre conteúdos diversos.

Habilidades da BNCC

- *(EM13MAT309)* Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados.
- *(EM13MAT314)* Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas compostas, determinadas pela razão ou pelo produto de duas outras, como velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.

[28] Professora Dra. da Secretaria de Educação de Pernambuco (SEE-PE). e-mail:katywellen@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2265-1133

[29] Professora Dra. da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). e-mail:marilenabittar@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9989-7871.

DOI: 10.46898/rfb.bbe222faa4dd.7

- *(EM13MAT504)* Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras
- *(EM13MAT201)* Propor ações comunitárias, como as voltadas aos locais de moradia dos estudantes, dentre outras, envolvendo cálculos das medidas de área, de volume, de capacidade ou de massa, adequados às demandas da região.
- *(EM13MAT103)* Interpretar e compreender o emprego de unidades de medida de diferentes grandezas, inclusive de novas unidades, como as de armazenamento de dados e de distâncias astronômicas e microscópicas, ligadas aos avanços tecnológicos, amplamente divulgadas na sociedade

Materiais a serem utilizados:

- **Recipiente com água, sal e ovo cru** para experimento da densidade.
- **Recipientes de diferentes tamanhos** para trabalhar estimativas de capacidade.

INTRODUÇÃO

As Grandezas e Medidas são estudadas durante todo o ciclo da educação básica, da Educação Infantil ao Ensino Médio, como área, comprimento, capacidade, volume, abertura de ângulo, que são grandezas geométricas, mas também as grandezas valor monetário, massa, densidade, temperatura, entre outras. Com o passar dos anos escolares sua frequência vai diminuindo, dando lugar a outros conteúdos e a outras grandezas, como as grandezas físicas como força, peso, pressão, aceleração, energia, trabalho, entre outras. Entretanto, sua utilidade ainda é inegável para a vivência em sociedade, como afirmam Lima e Bellemain (2010).

Neste texto propomos uma conversa sobre algumas atividades que podem ser levadas à sala de aula, que abrem margem para discussões diversas e que têm potencial de auxiliar o aluno a compreender melhor o mundo que o cerca, além de desenvolver o senso crítico e despertar a curiosidade. Observamos a contextualização das questões, o potencial que têm para o desenvolvimento de pesquisas em sala de aula, de aguçar a criatividade do aluno e de gerar mais questionamentos, possibilitando a construção de conhecimentos dentro e fora da matemática.

Trazemos algumas questões retiradas de livros didáticos cujo tema principal aborda as grandezas geométricas que podem também ser tratadas em sala de aula como forma de introduzir tais conteúdos e/ou promover discussões entre as grandezas por elas abordadas, sendo uma possível estratégia de superação de dificuldades de aprendizagem.

Todo o material aqui presente foi apresentado na Oficina 1: Volume, capacidade, massa, densidade e vazão: atividades e propostas apresentada pelas autoras no ano de 2023, vinculado ao projeto de extensão do Grupo de Estudos em Didática da Matemática – DDMat: *Oficinas Online para professores da educação básica* da UFMS.

Apresentamos, a seguir, as atividades desenvolvidas na oficina, que giraram em torno de algumas grandezas geométricas e/ou físicas.

VOLUME E CAPACIDADE

Para começar trazemos uma questão (figura 1) que solicita ao aluno que estime a capacidade de uma embalagem de gel e modifique o seu formato preservando seu volume, indicando a nova figura e suas dimensões. Algumas ideias nos saltam aos olhos nesta questão, como por exemplo: se a capacidade do recipiente pode ser muito menor do que seu volume externo, qual seria o formato da embalagem com o melhor custo-benefício? Quais conceitos podemos trabalhar simultaneamente nesta atividade?

Figura 1: Atividade de produção de embalagem.

67. Para armazenar o gel fixador de cabelo, contido na embalagem a seguir, uma empresa planeja criar uma embalagem com outro formato.

Elabore o projeto de uma nova embalagem para o armazenamento do gel fixador, de maneira que esta tenha formato diferente do apresentado,

mas com capacidade aproximadamente igual. Para isso, represente essa nova embalagem com desenho, indicando suas medidas, e apresente os respectivos cálculos.

Com base nas informações do enunciado e no seu projeto de embalagem, elabore um problema em que seja necessário utilizar ideias associadas a volume e área de figuras geométricas espaciais. Em seguida, troque seu problema com um colega para que um resolva o do outro. Juntos, verifiquem se as respostas estão corretas. Resposta pessoal.

Fonte: Souza (2020, p. 123).

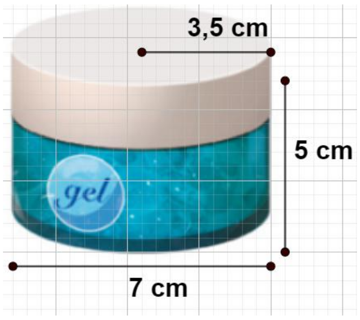
Pode-se questionar os alunos as razões de as empresas de cosméticos muitas vezes utilizarem uma embalagem muito grande para pouco conteúdo, incitando-os a pesquisar a respeito para discutir em sala de aula como funciona o marketing das empresas e sobre a percepção do cliente de estar levando mais do que de fato está, ou que uma embalagem maior e de melhor qualidade parece significar um produto de qualidade superior.

Entrando na matemática, o professor pode levar os alunos a uma pesquisa de recipientes com melhor custo-benefício, pensando em embalagens com mesmo volume externo e calculando seu custo de matéria prima, ou um cálculo de área e capacidade, que nos leva a relações entre volume, capacidade, área e valor monetário. Nesta atividade o professor pode também apontar as diferenças entre o volume e capacidade, uma vez que podem apresentar valores muito diferentes uma da outra.

Compreendemos o volume e a capacidade como diferentes lados de um mesmo objeto matemático: o volume como espaço externo e a capacidade como espaço interno. Muitas vezes estes dois conceitos se apresentam em situações distintas e, portanto, diferenciáveis didaticamente. Em Leão (2020) podemos compreender um pouco melhor a importância de sua diferenciação para a compreensão de seus conceitos.

Voltando à atividade proposta, vamos atribuir valores arbitrários à embalagem e calcular seu volume externo, uma vez que não é possível calcular sua capacidade real com as informações dadas, mas apenas aproximações que dependem de diversos fatores, como a espessura do material que compõe o objeto. Com os dados da figura 2, o seu volume é de $61{,}25\pi\ cm^3$, aproximadamente 192,43 cm^3. Entretanto, não podemos dizer que cabem 192,43 cm^3 de gel dentro do recipiente, correto? Afinal, este é o volume de todo o recipiente, que engloba a espessura do pote e algum espaço vazio em seu interior, já que ele não vem preenchido até a tampa. Então todo valor que podemos associar à sua capacidade será uma aproximação.

Figura 2: embalagem de gel da atividade anterior.

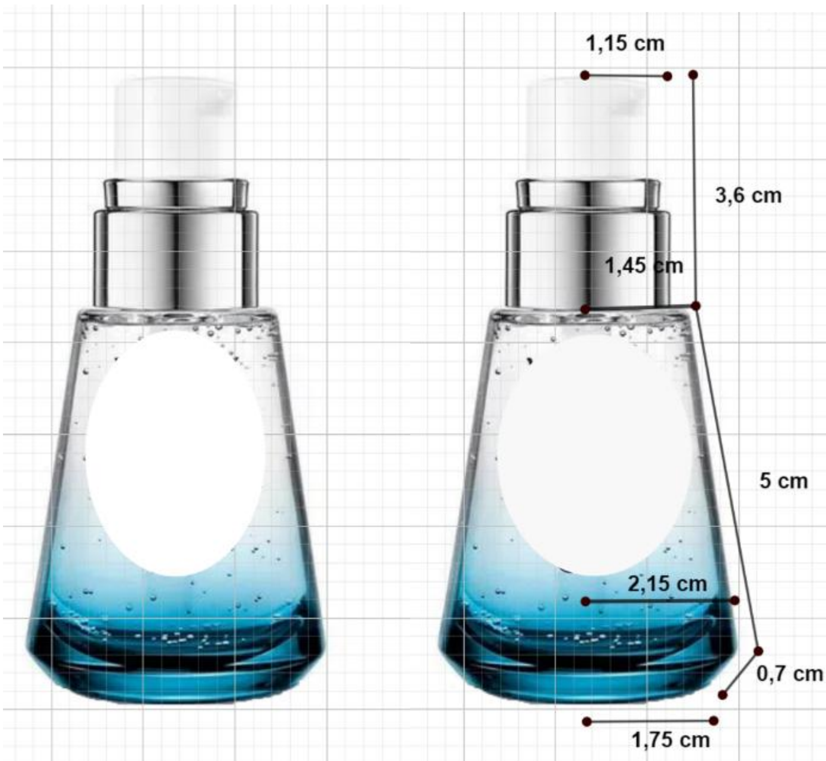


$$V_{emb} = \pi h r^2 cm^3$$
$$V_{emb} = \pi \times 5 \times (3{,}5)^2 cm^3$$
$$V_{emb} = 61{,}25\pi \ cm^3$$
$$V_{emb} \cong 192{,}43 \ cm^3 \ ou \ 192{,}43ml$$

Fonte: Souza (2020, p. 123).

E se pegarmos um exemplo real e compararmos seu volume com sua capacidade? Na figura 3 temos um exemplo de recipiente de creme facial cuja embalagem é de fácil acesso e retiramos sua imagem do Google. De forma aproximada, dado os erros de medição com instrumentos não adequados a uma medição precisa, chegamos ao volume de 64,49cm³ (64,49ml) com a tampa e 49,52cm³ (49,52ml) sem a tampa.

Figura 3: Embalagens de creme.



Fonte: Imagens do Google.

Este creme, em específico, que vem da loja praticamente cheio até a borda do vidro, contém apenas 30ml de produto, bem diferente dos quase 50 ml de capacidade calculados.

O que este exemplo nos mostra? **Não existe recipiente de borda nula**. Claro que neste exemplo é perceptível que o vidro da embalagem é grosso e que o seu volume externo deve ser bem maior do que o interno, mas isso não se aplica a qualquer recipiente?

Guardadas as devidas proporções, mesmo com uma espessura ínfima de um recipiente, ele nunca é nulo. Ao tratarmos de questões de volume e capacidade é sempre bom nos atentarmos a este fato, não para coibir certos tipos de questões, mas para deixar claro aos alunos que o volume interno *pode se aproximar* do volume externo quando a espessura do recipiente é pequena, ou quando se deseja desconsiderá-la, mas *nunca se igualar* ao volume externo.

DENSIDADE

A grandeza densidade é uma grandeza composta, pois se apresenta como o quociente entre duas outras, a massa e o volume, assim como as grandezas força ou volume. Na figura 4 trazemos uma questão que fala da densidade do mar morto no qual, devido a grande quantidade de sal ali presente, é mais fácil boiar. A partir desta observação é retratado um experimento que pode ser feito em sala de aula para mostrar a mudança na densidade da água doce para a salgada.

Figura 4: Atividade experimental da densidade com ovo e sal no livro didático.

24. Vimos anteriormente que, no mar Morto, a concentração de sal é muito grande, fazendo com que a densidade da água nesse local seja em torno de 1,3 g/cm³ ou 1300 kg/m³. Como consequência, os visitantes do local boiam com facilidade na água, pois a densidade do corpo humano é menor do que esse valor.

Uma experiência usual para verificar o comportamento de objetos na água doce e na água salgada é a indicada a seguir.

Sempre que trabalhar em grupo e também nos momentos recreativos evite brincadeiras e comentários que possam ser considerados *bullying*. Valorize a diversidade, seja solidário e interaja com todos.

Coloca-se um ovo dentro de um copo com água.

Adiciona-se aproximadamente quatro colheres de sal na água e mistura-se para dissolver o sal.

O ovo, que estava no fundo, sobe e fica na superfície.

a) Qual é a relação entre a densidade da água doce e a densidade do ovo?
Possível resposta: A densidade da água doce é menor do que a densidade do ovo.

b) Qual é a relação entre a densidade de água salgada e a densidade do ovo?
Possível resposta: A densidade da água salgada é maior do que a densidade do ovo.

c) **Em grupo** Repitam o mesmo procedimento colocando outros objetos na água doce e na água salgada. Analisem o comportamento desses objetos e a densidade deles em relação à água doce e à água salgada. Registrem as conclusões a que chegaram e compartilhem essas informações com os demais colegas. Resposta pessoal.

Fonte: Chavante, Prestes (2020a, p. 42).

A densidade é um conceito interessante para trabalhar com os alunos, pois envolve outras disciplinas além da Matemática, ao buscar, por exemplo, a razão de o ovo boiar na água salgada e não boiar na água doce. Como uma propriedade física que representa a quantidade de massa de um material em certo volume que ele ocupa, quanto mais massa em um determinado espaço, mais pesado o material é, o que pode fazê-lo afundar em certo líquido com densidade menor. Podemos levar à sala de aula também outros experimentos como do óleo e da água, do gelo e do óleo, da água fria e quente, ou outros experimentos que podem ser encontrados no vídeo "5 experimentos com densidade" (Exploradores, 2022).

VOLUME, ÁREA E PERÍMETRO

A questão seguinte (figura 5) parece uma ótima opção para discutir as relações entre volume, área e perímetro. Sabemos que há muita dificuldade na diferenciação desses conceitos, como mostram pesquisas anteriores (Oliveira, 2002; Figueiredo, 2013; Morais, 2013).

Figura 5: Atividade com caixa de sabão em pó.

Fonte: Conexões (2020b, p. 98).

É importante ressaltar que a área é uma grandeza bidimensional e o volume tridimensional: ao fazer modificações nas dimensões da caixa, duplicar ou triplicar mais de uma aresta, a sua área e volume não aumentarão de forma linear, por exemplo não serão duplicadas ou triplicadas. Isto é válido apenas quando uma aresta é alterada. Esse conceito é significativo para uma boa compreensão dessas grandezas e muitas vezes passa despercebido, como a relação entre massa e volume. Embora o volume das caixas seja similar, não acharemos um resultado próximo de 1L ou $1000cm^3$, uma vez que 1kg de sabão tem o volume muito maior do que 1L de água, isto é, sua densidade é menor.

Sugestão: É importante ressaltar que a variação de uma grandeza bidimensional - no caso área - ou de uma grandeza tridimensional - volume - não é a mesma que ocorre para grandezas unidimensionais como o comprimento, por exemplo, duplicar os lados de um quadrado não causa por consequência a duplicação da sua área, a nova área é quatro vezes igual a área anterior. Ao fazer modificações nas dimensões da caixa, duplicar ou triplicar uma aresta, a sua área e volume não duplicarão ou triplicarão. Desenvolver tal conceito, associado à noção de proporcionalidade, é significativo para uma boa compreensão das grandezas envolvidas e muitas vezes passa despercebido, como a relação entre massa e volume. Embora o volume das caixas seja similar, não acharemos um resultado próximo de 1L ou $1000cm^3$, uma vez que 1kg de sabão tem o volume muito maior do que 1L de água, isto é, sua densidade é menor.

VOLUME, CAPACIDADE E MASSA

A relação entre massa e volume é de fundamental importância e pode parecer simples, mas quem nunca viu uma vasilha de 1L e pensou que cabia 1kg de alimento, mesmo que por um instante? Nossos erros e falhas também apontam onde os alunos sentem mais dificuldades e muitas vezes nem percebem. Lembramos também que a relação entre essas duas grandezas está no cerne da compreensão do conceito de densidade. Trazemos aqui como exemplo um comentário (figura 6), na íntegra, feito em uma plataforma de compras online em um recipiente no qual o cliente esperava que em um pote de 250ml coubesse 250g de tempero.

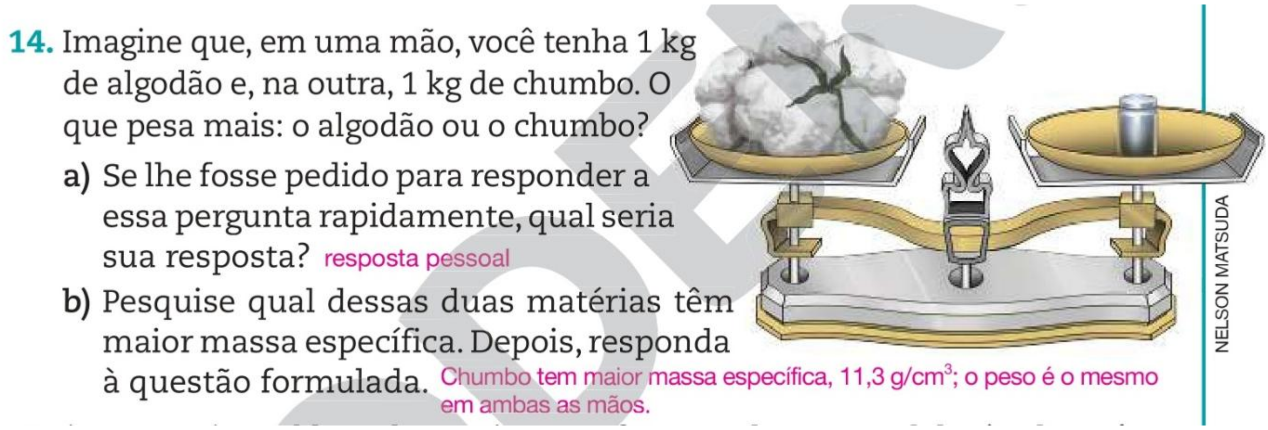
Figura 6: Comentário sobre capacidade de pote e massa de tempero que cabe nele.

> São lindo eu amei entrega super rápido super indico uma crítica no anúncio é informado que a ml dele 250ml porém não é coloquei 250 grama de tempero é não cobe tudo só 150ml
> Só não delvovo porque é muito trabalhoso os potes são lindos são mais oque é vendido é o de 250ml porém vem de 150ml alguém mais aqui nos comentários notou isso por isso vou baixa as estrelas

Fonte: Comentários na plataforma de compras *Shopee* – na íntegra (2024).

É crucial que o professor se atente a essas situações e converse com os alunos sobre diferentes grandezas e como diferenciá-las. O estudante deve conseguir utilizar seus conhecimentos em situações fora da sala de aula, como na questão apresentada na figura 7, que faz uma pegadinha ao comparar 1kg de algodão e 1kg de chumbo, questionando qual deles pesa mais.

Figura 7: Atividade da massa do algodão e chumbo.


14. Imagine que, em uma mão, você tenha 1 kg de algodão e, na outra, 1 kg de chumbo. O que pesa mais: o algodão ou o chumbo?

a) Se lhe fosse pedido para responder a essa pergunta rapidamente, qual seria sua resposta? resposta pessoal

b) Pesquise qual dessas duas matérias têm maior massa específica. Depois, responda à questão formulada. Chumbo tem maior massa específica, 11,3 g/cm^3; o peso é o mesmo em ambas as mãos.

Fonte: Conexões (2020a, p. 28).

Vale lembrar aqui que a percepção visual nos confunde muitas vezes, pois 1kg de algodão, por ser um material muito leve, tem volume muito maior do que o chumbo.

Voltando à discussão sobre volume, é comum vermos situações que envolvem jarros de planta e aquários cujas dimensões do recipiente são ignoradas, como na figura 8, porém, como já discutimos anteriormente, não existe recipiente de borda nula, então o volume externo de um jarro não vai ser equivalente à quantidade de terra que cabe no mesmo.

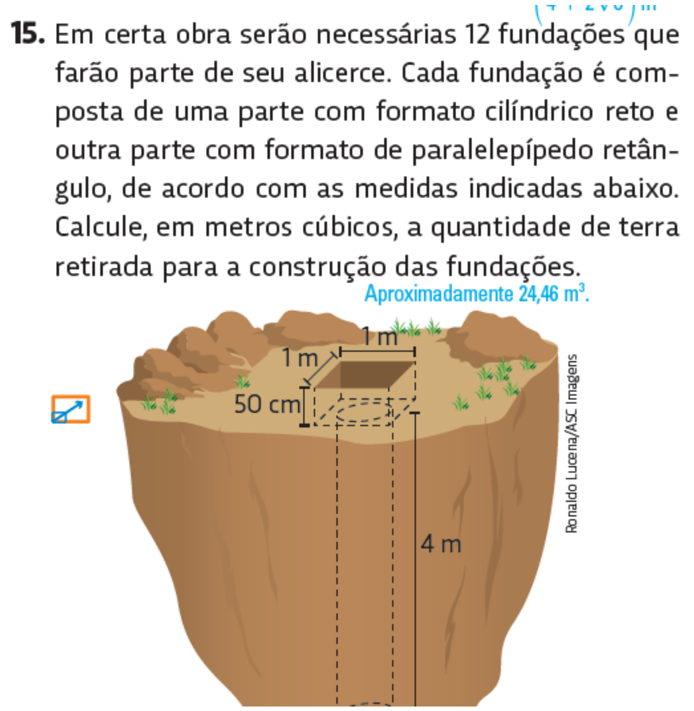
Figura 8: Atividade de capacidade de jarro.

Fonte: Conexões (2020b, p. 117).

Outro ponto que achamos interessante trazer, e entendemos que é de suma importância que o professor se atente e discuta em sala de aula, é que ao colocar a terra no vaso e molhá-la a terra se comprime e cede, logo o vaso não estará mais tão cheio.

No exemplo da figura 9 essa situação é bem evidente, pois calculamos o volume de terra que foi retirado da fundação, porém a mesma quantidade de terra não pode ser utilizada para tapar a fundação, pois as partículas se expandiram e o seu volume foi alterado, logo a terra que estava no buraco tem um volume diferente da terra que já foi retirada e está fora dele. Chamamos essa propriedade de compressibilidade do solo e ela nos permite trabalhar diversos conteúdos matemáticos como volume, capacidade, massa, densidade e até mesmo área. Uma opção de trabalho investigativo com os alunos é questionar o porquê de a terra para adubo ser vendida em quilogramas enquanto areia é vendida em metros cúbicos.

Figura 9: Atividade de retirada de terra para construção de alicerce.


15. Em certa obra serão necessárias 12 fundações que farão parte de seu alicerce. Cada fundação é composta de uma parte com formato cilíndrico reto e outra parte com formato de paralelepípedo retângulo, de acordo com as medidas indicadas abaixo. Calcule, em metros cúbicos, a quantidade de terra retirada para a construção das fundações.

Aproximadamente 24,46 m³.

Fonte: Chavante, Prestes (2020b, p. 124).

Vale a pena questionar os alunos se nessa situação descrita na figura 9 a massa e o volume permanecem os mesmos e a partir das respostas discutir sobre a ideia da compressibilidade.

Um outro bom exemplo é quando colocamos roupas na máquina. As máquinas de lavar roupas indicam quantos quilos de roupa podem ser colocados em seu tambor, mas sabemos que ao lavar apenas calças jeans a máquina ficará muito menos cheia do que ao colocar apenas camisetas, pois as calças pesam bem mais. O volume das roupas secas e molhadas também é alterado, certo? Mesmo enchendo a máquina de lençóis, após finalizar a lavagem parece que nem metade do espaço foi preenchido pelas roupas molhadas e centrifugadas.

RETOMANDO ALGUNS CONCEITOS

Um bom exemplo para trabalhar a tridimensionalidade do volume é ao comparar recipientes similares cujas arestas foram alteradas, como na figura 10, que na embalagem maior cabe o dobro do chocolate em pó da embalagem menor, mas elas não têm o dobro da altura ou da largura uma da outra. É importante que os alunos reflitam sobre o fato de que o volume vem da relação entre três dimensões, então todas elas são levadas em conta em seu cálculo, assim como, para a grandeza área, duas dimensões são relacionadas.

Figura 10: Atividade de recipientes de cacau em pó.

89. Nas prateleiras de supermercados é comum encontrarmos o mesmo produto sendo ofertado em embalagens semelhantes com tamanhos diferentes. Geralmente, quando compramos a maior embalagem, recebemos um desconto em relação à compra de embalagens menores na mesma proporção. Em determinado estabelecimento, 200 g de cacau em pó custam R$ 4,19 e 400 g do mesmo produto e da mesma marca custam R$ 6,99.

Embalagens de tamanhos diferentes.

Apesar de a medida de volume da embalagem maior ser o dobro da menor, a medida de comprimento da altura não corresponde à mesma proporção. Sabendo que a embalagem de 400 g de cacau em pó tem 16 cm de medida de comprimento da altura, qual alternativa corresponde à medida de comprimento da altura aproximada, em centímetros, da embalagem de 200 g? (Use: $\sqrt[3]{2} \simeq 1,26$.) Alternativa **d**.

a) 10,8 **c)** 12,1 **e)** 13,2

b) 11,6 **d)** 12,7

Fonte: Dante, Viana (2020 p. 119).

Ainda dentro desta atividade, pode-se questionar os alunos se o autor considera que o volume do recipiente e a sua capacidade são equivalentes. Também se ele considera que o chocolate ocupa toda a capacidade do recipiente ou desconsidera que deve haver certo espaço vazio em seu interior, levando-os a pensar se a embalagem virá totalmente cheia ou se sobra espaço, ou se podemos comprar um produto apenas porque a embalagem é maior/menor sem olhar sua massa ou volume. Ou ainda, questionar o aluno se é melhor levar a embalagem maior ou a menor, se ele e sua família costumam verificar qual o melhor custo-benefício ao levar um produto para casa que tenha opções em diferentes tamanhos; explicar como realizar de forma simples o cálculo de custo-benefício para que possam fazê-lo no mercado e/ou ensinar seus responsáveis. É interessante também levar alguns exemplos de situações em que levar uma maior quantidade de produto não vale a pena, seja pelo preço superior, potencial de desperdício ou pouca necessidade, conversando também sobre consumismo e desperdício.

Uma proposta interessante que se pode levar à sala de aula é a brincadeira de encher recipientes, seja em formato de quiz ou desafios em grupo, quando os alunos devem estimar a capacidade de diversos recipientes apenas olhando-os de longe, ou se o volume de um líquido dentro de um recipiente cabe exatamente dentro de outro. Dentro desta proposta o professor pode jogar com os alunos enquanto trabalha a ideia de estimativa, que não é mais tão presente após os primeiros anos do Ensino Fundamental, e trabalhar a diferença entre o volume de um líquido e a capacidade de um recipiente.

Na atividade apresentada na Figura 11 o autor compara o formato de um tornado com o formato de um cone e pede para o aluno calcular a massa de ar que está sendo deslocada, aproximando algumas medidas de sua base, topo e altura. Achamos a questão muito interessante quanto ao tema, que pode nos levar a questionar como se forma um tornado, onde eles são mais comuns, a devastação de cidades após sua passagem, por que conseguimos vê-los a olho nu, entre tantas outras questões que os próprios alunos podem levantar por curiosidade.

Figura 11: Atividade de tornado e formato da massa de ar.

86. O tornado é uma massa de ar rodopiante que se desloca a uma medida de velocidade entre 30 km/h e 60 km/h, mas que gira a uma medida de velocidade entre 65 km/h e 500 km/h. O formato de um tornado muitas vezes se assemelha ao de um cone.
Suponha que um meteorologista queira calcular a medida aproximada de "**massa de ar**", em metros cúbicos, que está sendo deslocada em um tornado com comprimento do diâmetro da base medindo 80 m e o comprimento da altura medindo 150 m. Considerando que esse tornado tem o formato de um cone, qual valor será encontrado? Aproximadamente 251 327 m^3.

Massa de ar

Grande volume de ar com característica "homogênea" em relação a temperatura e vapor de água.

Jason Weingart/Barcroft Media/Getty Images

Tornado em Minneola, Kansas (EUA). Foto de 2016.

Fonte: Dante, Viana (2020, p. 118-119).

Embora a imagem não seja a melhor para associarmos a um cone, dado que há diversas imagens na internet que expressam melhor a similaridade, associar a massa de ar que circula com o formato que conseguimos ver talvez não seja tão apurado assim, dado que o que conseguimos ver a olho nu são os detritos carregados e não toda a massa de ar em si. Cabe então ao professor esclarecer aos alunos que fazemos aproximações da realidade a fim de trabalhar conteúdos matemáticos e os tornados, e fenômenos similares, são classificados de acordo com seu potencial de destruição, sua velocidade e não suas dimensões.

VAZÃO

As atividades de vazão não são muito comuns em livros didáticos do Ensino Médio de matemática embora suspeitamos que os livros de física o façam com mais frequência, mas decidimos trazer uma atividade este tipo por ser uma relação entre grandezas que nos permite trabalhar além de volume, os conceitos de tempo, proporção, proporção inversa e valor monetário, entre outras grandezas. A vazão também é uma grandeza composta, assim como a densidade, e está associada a um fenômeno que possui estrita relação com deslocamento de volume em um intervalo de tempo.

Figura 12: Atividade do ENEM sobre vazão.

QUESTÃO 161

Uma caixa-d'água em forma de um paralelepípedo retângulo reto, com 4 m de comprimento, 3 m de largura e 2 m de altura, necessita de higienização. Nessa operação, a caixa precisará ser esvaziada em 20 min, no máximo. A retirada da água será feita com o auxílio de uma bomba de vazão constante, em que vazão é o volume do líquido que passa pela bomba por unidade de tempo.

A vazão mínima, em litro por segundo, que essa bomba deverá ter para que a caixa seja esvaziada no tempo estipulado é

A) 2.
B) 3.
C) 5.
D) 12.
E) 20.

Fonte: INEP, (2016, p. 26) caderno 6 cinza 2ª aplicação.

A atividade da figura 12 foi proposta no ENEM e pode ser interessante para rever o conceito de vazão com os alunos e até mesmo associar a situações cotidianas, como o formato de uma caixa d'água, que muitas vezes é redonda, além de permitir discutir estratégias para aumentar a pressão da água em uma residência, compreender as suas contas de água e trabalhar economia de recursos naturais, como por exemplo o consumo de água da indústria agropecuária e outras indústrias que utilizam uma quantidade enorme de água. As atividades de vazão também podem ser associadas às funções, complementando o estudo das mesmas no currículo.

PALAVRAS FINAIS

Trouxemos algumas atividades e as comentamos com propostas e possibilidades que consideramos interessantes para levar aos alunos para trabalhar conteúdos diversos dentro e fora da matemática, como as relações entre as grandezas volume, capacidade, massa, área, comprimento, vazão, densidade, valor monetário, proporção, tempo, entre outros. Fora da matemática podem ser trabalhadas relações de economia doméstica, consumo, desastres naturais, ecologia, propriedades do solo, construções, entre outros.

O estudo da matemática, seja com a finalidade de realizar avaliações externas ou não, vai muito além de uma prova de ENEM ou vestibular. A matemática ajuda a definir como nos relacionamos com o mundo ao nosso redor e favorece o exercício pleno da cidadania.

A seguir elencamos algumas propriedades que achamos importantes que sejam trabalhadas com os alunos do Ensino Médio, e outros anos de escolaridade, relacionadas ao que tratamos neste artigo:

- Tridimensionalidade do volume: levar questões que utilizem as três dimensões de um objeto, para além da fórmula, e que mostrem que o produto depende dos três fatores de suas dimensões.
- Diferenciar área de volume: embora para nós, professores de matemática, este pareça ser um conceito de fácil assimilação, os alunos costumam confundir tanto os conceitos quanto às unidades de medida, então apresentar atividades que trabalhem os dois conceitos pode ajudar a diferenciá-los.
- Não existe recipiente de borda nula, embora desconsiderar a borda de um recipiente em algumas atividades seja mais prático ou necessário, é bom sempre lembrar que na realidade essa percepção é errônea. Exemplos de planificação são interessantes para este fim.

- Diferenciar a massa do volume e capacidade é de fundamental importância e é um erro bastante comum. Levar experimentos para sala de aula com balanças e produtos com diferentes volumes pode ajudar numa melhor percepção das grandezas pelos alunos, sempre exemplificando e mostrando na prática, quando possível.
- Só faz sentido falar de capacidade de recipientes; líquidos possuem volume, embora sejam usualmente medidos em litros e seus múltiplos e submúltiplos.

Além desses conceitos que achamos importantes, trabalhar em conjunto com outras disciplinas e fazer relações dentro e fora da matemática auxilia os alunos a compreenderem a importância do estudo da matemática para além dos corredores da escola e a exercerem sua cidadania com mais consciência.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação. Brasília-DF: MEC, SEB, 2018a. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 8, jun. 2024.

DDMAT. Oficina 01 - 04/05/2023 Volume, capacidade, massa, densidade e vazão: atividades e propostas, **YouTube**, 04, mai. 2023, Duração: 1h:40m. Disponível em: https://www.youtube.com/live/KgDK8-BzIfw. Acesso em 17, mai. 2024.

LEÃO, Katy Wellen Meneses. **Abordagem de Volume e Capacidade em uma coleção de livros didáticos: uma análise a luz da Teoria Antropológica do Didático**. 2020. 152f. Dissertação (Mestrado), UFPE. Recife, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/39777. Acesso em: 5, jun. 2024.

LIMA, Paulo Figueiredo, BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. Grandezas e Medidas In: Matemática: Ensino Fundamental (**Coleção Explorando o Ensino**).1 ed. Brasília: Ministério da Educação: Secretaria da Educação Básica, 2010, v.17, p. 167-200.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante matemática e suas tecnologias: grandezas, medidas e programação**. São Paulo: Edições SM, 1. ed. 2020a.

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante matemática e suas tecnologias: geometria plana e espacial**. São Paulo: Edições SM, 1. ed. 2020b.

LEONARDO, Fabio Martins de (Org.). CONEXÕES: matemática e suas tecnologias: manual do professor. Grandezas, álgebra e algoritmos. São Paulo: Moderna, 1. ed. 2020a.

LEONARDO, Fabio Martins de (Org.). CONEXÕES: matemática e suas tecnologias: manual do professor. Geometria plana e Espacial. São Paulo: Moderna, 1. ed. 2020b.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. **Matemática em contexto**: Geometria plana e geometria espacial. São Paulo: Ática, 1ª ed. 2020

EXPLORADORES. 5 experimentos com densidade (experimentos de física), **YouTube**, 13 abr. 2022. Duração:7m. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=SXt7pACi6cA. Acesso em 19 jul. 2024.

FIGUEIREDO, Ana Paula Nunes Braz. **Resolução de problemas sobre a grandeza volume por alunos do ensino médio: um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais.** Dissertação (Mestrado), UFPE. Recife, 2013.

INEP. Ministério da Educação. ENEM 2016. Segundo dia caderno 6 cinza, p. 26. Disponível em https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/enem/provas-e-gabaritos.

MORAIS, Leonardo Bernardo de. **Análise da abordagem de Volume em livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) - UFPE. Recife, 2013

OLIVEIRA, Glauco Reinaldo Ferreira de. **Construção do Conceito de Volume no Ensino Fundamental: um estudo de caso**. 2002, 135 F. Dissertação (Mestrado) UFPE, Recife, 2002.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Multiversos Matemática: geometria**. São Paulo: Editora FTD, 1ª ed. 2020.

CAPÍTULO 8

GEOMETRIA ANALÍTICA BÁSICA: POR QUÊ? O QUÊ? COMO?

[Oficina 02 no YouTube]

José Luiz Magalhães de Freitas[30]

Vitoria Lourenço Luges da Silva[31]

Público-alvo: Destinado a estudantes e professores do ensino médio

Objetivo: Apresentar e refletir sobre possibilidades de introdução da geometria analítica no ensino médio

Habilidade da BNCC:

- *(EM13MAT301)* Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Material a ser utilizado:

- Computador com internet para o acesso a softwares.
- Folhas contendo enunciados de atividades.

[30] Professor Dr. do Mestrado de Ensino de Ciências e Matemática da UNIDERP e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFMS. E-mail: joseluizufms2@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5536-837X

[31] Professora Me. da Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso do Sul (SED/MS); e-mail: viluges@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4841-7940.

DOI: 10.46898/rfb.bbe222faa4dd.8

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A proposta a seguir foi desenvolvida com o objetivo de sugerir algumas atividades para o professor abordar a geometria analítica nos anos finais do Ensino Fundamental e primeiros anos do Ensino Médio. Trazemos alguns aspectos históricos, bem como algumas justificativas do porquê ensinar esse conteúdo, articulando com a utilização dos softwares GeoGebra e GrafEq nas atividades propostas.

INTRODUÇÃO

A geometria analítica surgiu em meados do século XVII e seus criadores foram René Descartes (1596-1650), filósofo e matemático francês que introduziu a noção de coordenadas no plano, e Pierre de Fermat (1601-1665), que desenvolveu métodos para representar curvas planas por meio de equações algébricas. As contribuições de Descartes são importantes também na álgebra, com a simbologia que ele utilizava na escrita como os expoentes e as letras, que utilizamos até hoje. Isso abriu as portas para várias subáreas da matemática, por exemplo, a valiosa contribuição para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, com Newton e Leibniz, que deram continuidade aos seus estudos.

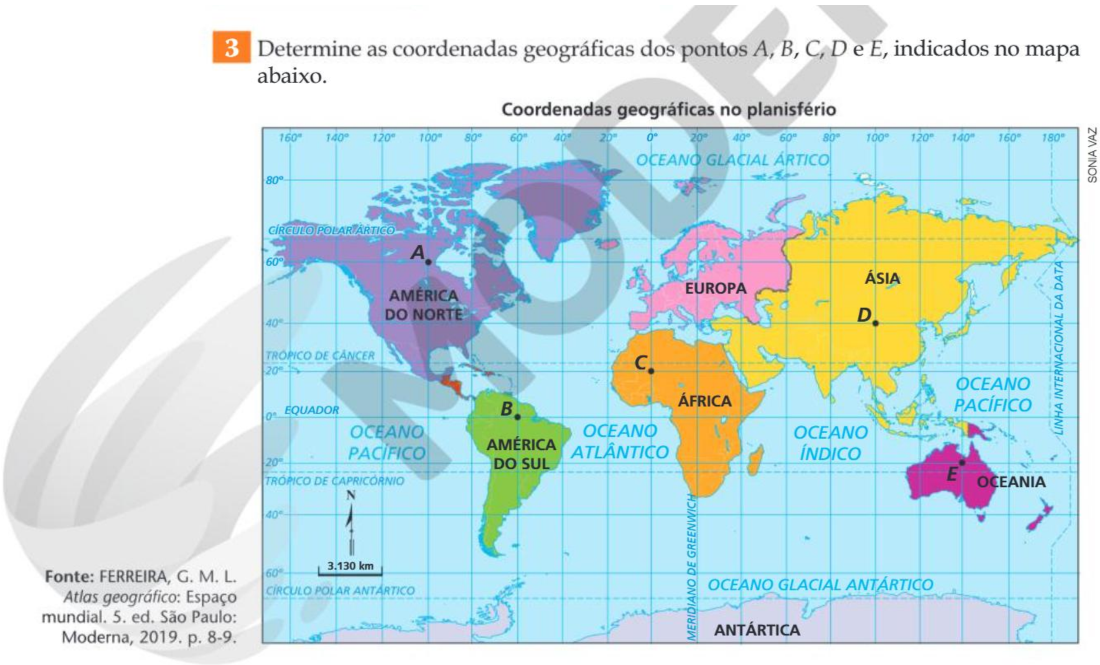
Hoje podemos aplicar a geometria analítica em várias, principalmente na matemática, em construções de gráficos. Pensar no tratamento das funções sem o auxílio dos eixos no plano cartesiano e representá-las graficamente seria muito complicado, então essa conexão entre geometria e álgebra facilitou também os estudos nas outras áreas, como engenharia, na locação de alicerces e localização via satélite (GPS), física, na distância entre dois objetos, e até na informática, na criação de modelos matemáticos com geometria analítica na produção de imagens em telas.

Nosso foco principal é a introdução da geometria analítica no ensino médio, porém, retomaremos algumas habilidades associadas no ensino fundamental. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018), o conteúdo aparece no sexto ano relacionado à seguinte habilidade: *(EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono*. No sétimo ano, aparece da seguinte forma: *(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma, fazendo uso das* *propriedades da igualdade* e, no oitavo ano, aparece a habilidade *(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano*.

MARCAR PONTOS

Uma ideia importante na geometria analítica é marcar pontos. Uma atividade inicial interessante para os alunos começarem a marcar pontos no plano cartesiano é a que pede para determinar as coordenadas geográficas dos pontos A, B, C, D e E, indicados no mapa, de acordo com a Figura 1.

Figura 1: Atividade de coordenadas geográficas

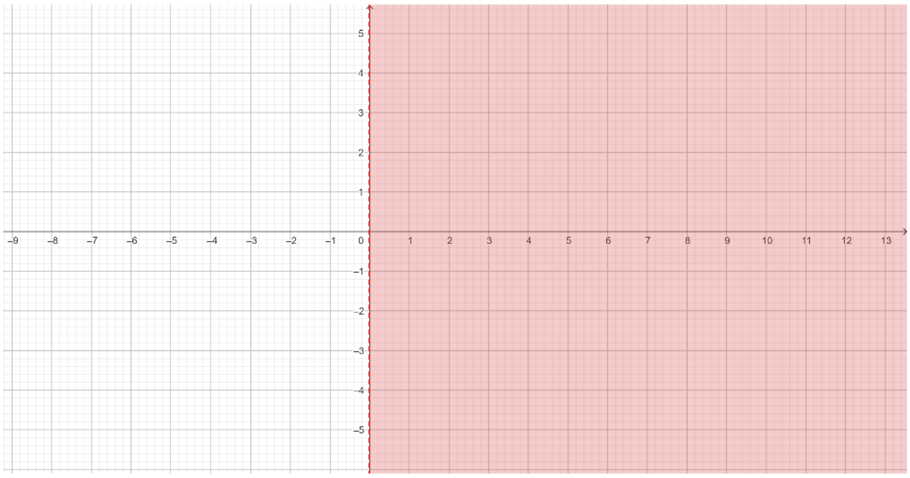


Fonte: PAIVA, M. *et al*., (2020).

A atividade apresenta o planisfério e os pontos demarcados, juntamente com as informações para o aluno identificar as coordenadas e determiná-las. Essa atividade é muito interessante porque ela não envolve apenas o plano cartesiano, mas, também, o planisfério com associação de coordenadas geográficas.

Muitas pessoas pensam que marcar pontos no plano cartesiano é coisa simples, porém, não basta pegar as coordenadas do ponto e marcá-las no plano. A ideia inicial é abordar situações visando o conhecimento sobre a representação, no plano cartesiano, de alguns conjuntos de pontos, por exemplo, podemos iniciar questionando sobre como representamos no plano cartesiano os pontos que fazem parte do conjunto $\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid x>0\}$.

Figura 2: Conjunto de pontos em que $x > 0$

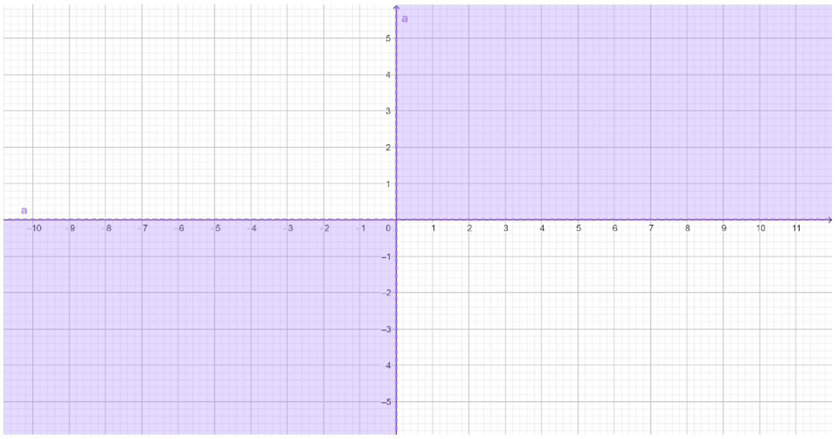


Fonte: Acervo dos autores.

Então, de acordo com a Figura 2, o aluno pode analisar quais são os pontos que fazem parte do conjunto e em que parte do plano eles estariam. Observamos uma linha tracejada paralela ao eixo y e identificamos que todos os pontos situados à direita dela pertencem a esse conjunto, considerando que $x > 0$. Dessa forma, não obtemos somente um ponto, mas sim uma infinidade de pontos, formando uma região ou um semiplano. Esse tipo de atividade é importante, pois envolve realizar a representação geométrica sabendo que são todos os pontos (x, y), no entanto, a única restrição que existe é que o x tem que ser maior que zero. Será que o aluno consegue imaginar que essa parte rosa corresponde aos pontos em que x seria maior que zero? Será que eles percebem que o eixo y é uma reta que limita essa região, mas que não pertence a ela, pois x é igual a zero para os pontos que pertencem ao eixo y.

O professor pode propor atividades semelhantes a essa, por exemplo, como identificamos no plano os pontos $\{(x, y) \in R^2 \mid y > 0\}$, $\{(x, y) \in R^2 \mid x \cdot y > 0\}$ ou $\{(x, y) \in R^2 \mid y = x\}$, refletindo e questionando com os alunos onde estariam esses pontos. No caso de $\{(x, y) \in R^2 \mid x \cdot y > 0\}$, eles podem descobrir que para que o produto de x por y seja positivo, x e y têm que ter o mesmo sinal, então ambos devem pertencer ao primeiro quadrante ou ao terceiro quadrante. Se a inequação fosse $x \cdot y < 0$ eles não estariam nesses quadrantes, mas sim, no segundo e no quarto. Vemos a representação geométrica desse conjunto na Figura 3.

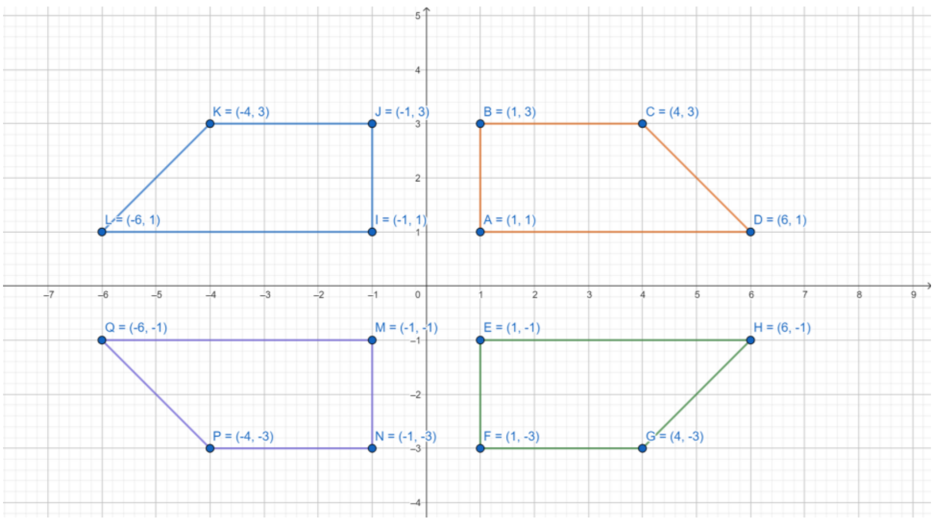
Figura 3: Conjunto de pontos que satisfazem a inequação $x \cdot y > 0$



Fonte: Acervo dos autores.

Consideramos que atividades desse tipo são fundamentais na introdução à geometria analítica, dando uma ideia mais geral de marcação de pontos no plano, inclusive relacionando as representações algébrica e geométrica por meio das coordenadas. Dito isso, avançamos para outra atividade que utiliza a marcação de pontos para discutir sobre deslocamento de figuras. Nesta atividade, podemos questionar os alunos sobre qual o simétrico de uma figura em relação aos eixos x e y e à origem, isto é, onde o simétrico dessa figura estaria?

Figura 4: Figuras simétricas em relação aos eixos e à origem



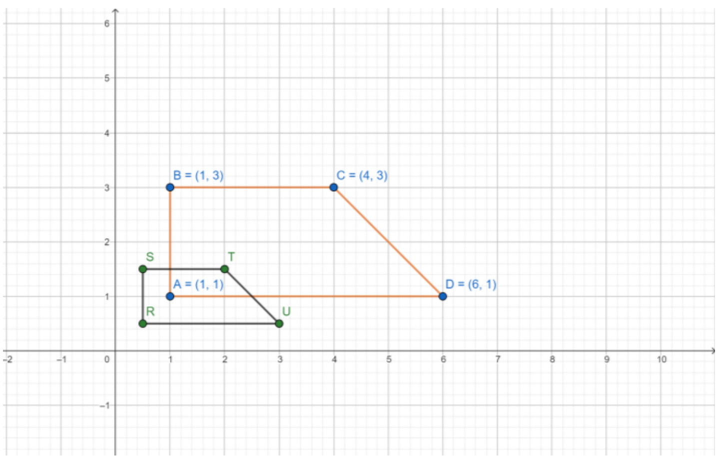
Fonte: Acervo dos autores.

A figura referência é a de cor laranja, no primeiro quadrante do plano. Os alunos poderão analisar, "refletir", que o simétrico de algo é como um espelho. Dessa forma, o simétrico da figura em relação ao eixo x é a figura verde, situada no quarto quadrante, o simétrico dela em relação ao eixo y é a figura azul, situada no segundo quadrante, e em relação à origem (0, 0) é a figura roxa, localizada no terceiro quadrante. Os vértices da figura podem servir como pontos de referência, mas estão sendo considerados, também, os pontos que formam os segmentos de reta, correspondentes aos lados desse polígono.

Ao analisar o simétrico da figura laranja em relação ao eixo x, percebe-se que as abscissas dos pontos não mudaram, porém, foram as ordenadas que alteraram, ou seja, as ordenadas y dos pontos. Por exemplo, o ponto B de coordenadas (1, 3) quando muda de semiplano altera para (1, -3). O mesmo acontecerá com os outros, mas, também, muda o sinal de todas as ordenadas de todos os pontos que pertencem à figura. Essa é uma maneira de fazer a simetria em relação ao eixo x. No entanto, para encontrar o simétrico em relação ao eixo y, o aluno poderá perceber que basta mudar o sinal das abscissas de todos os pontos da figura. Podemos questionar os estudantes o que mais eles acham que alteraria nas coordenadas e a mesma coisa para o deslocamento da figura em relação à origem e, assim por diante.

Outra atividade importante é relacionada à redução e ampliação de figuras, por homotetia. O professor poderá perguntar inicialmente aos alunos "se multiplicarmos por ½ todas as coordenadas dos pontos A, B, C e D (da mesma figura laranja do exemplo anterior), o que acontecerá com o trapézio da figura? E se multiplicarmos por 3?" A Figura 5 abaixo mostra o que acontece com a figura quando multiplicamos suas coordenadas por ½.

Figura 5: Redução da figura

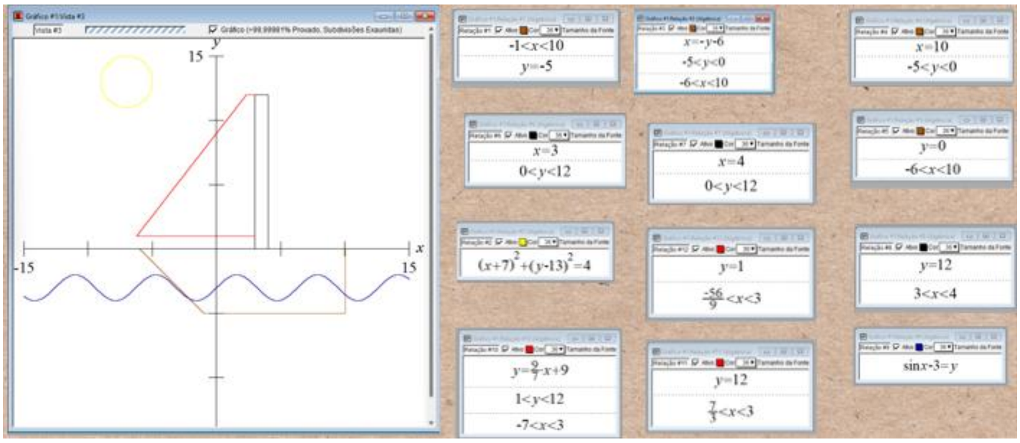


Fonte: Acervo dos autores.

Então, a ideia é induzir os estudantes a notarem que, ao fazer a multiplicação por 1/2 de todas as coordenadas dos pontos da figura, o polígono reduzirá pela metade e ampliará três vezes, respectivamente. Seria interessante propor questões desse tipo para deixar os alunos analisarem a figura e mexerem no *software*, de preferência em pequenos grupos e colocar a situação para discussão entre eles e, em seguida, sistematizar de alguma maneira, concluindo que os segmentos correspondentes alteram, porém, os ângulos permanecerão os mesmos. Além disso, o professor pode questionar os alunos, incitando-os ao debate, como questões como: “será que a área também reduziu/ampliou?”.

A seguir, trazemos uma proposta de atividade utilizando o *software GrafEq* abordando equação de reta e circunferência baseada no trabalho de De Paula (2011), em que trabalha a geometria analítica usando o *GrafEquation*, que relaciona a álgebra e a geometria. Nessa pesquisa com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, o software foi utilizado para investigar a articulação dos conceitos de funções, equações e inequações. Para analisar a mobilização de diferentes tipos de representações foi utilizada a teoria de registros de representação semiótica de Duval (2003), observando a mobilização de quatro tipos de registros: algébrico, língua natural, geométrico figural e gráfico cartesiano.

Figura 6: Desenho reproduzido no *GrafEq*



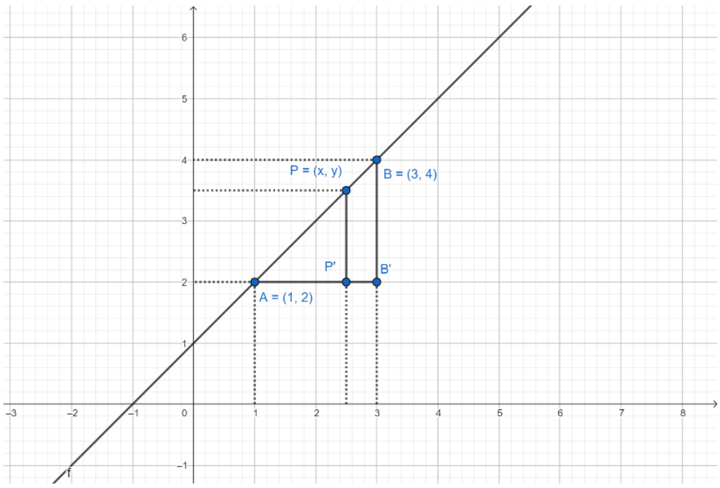
Fonte: De Paula (2011), adaptado.

Na figura 6, observa-se que além da equação da reta e da circunferência, os alunos conseguiram trabalhar com a inclinação da reta e intervalos, inclusive com funções trigonométricas, por exemplo, quando representam no desenho o seno de x. A aba de relação do *software* nos permite representar graficamente essas equações, além de apresentar diversas cores para diferenciar as equações e, inclusive, construir um desenho colorido, despertando a criatividade nos alunos. Ao realizarem essa atividade em grupos, eles tiveram que interagir para conjecturar sobre o que digitar no espaço da equação, testando várias vezes para construir o desenho.

EQUAÇÃO DE RETA

Para discutirmos sobre equação de reta, um questionamento inicial poderá ser "como podemos determinar a equação da reta que passa pelos pontos A (1, 2) e B (3, 4)?". Essa atividade é interessante para construir junto com os estudantes, ao invés de apresentar de forma antecipada a fórmula da reta. Queremos analisar o que ocorre com um ponto (x, y) qualquer dessa reta, como é que seria a equação dos pontos que estão nessa reta?

Figura 7: Reta que passa por A e B no plano



Fonte: Acervo dos autores.

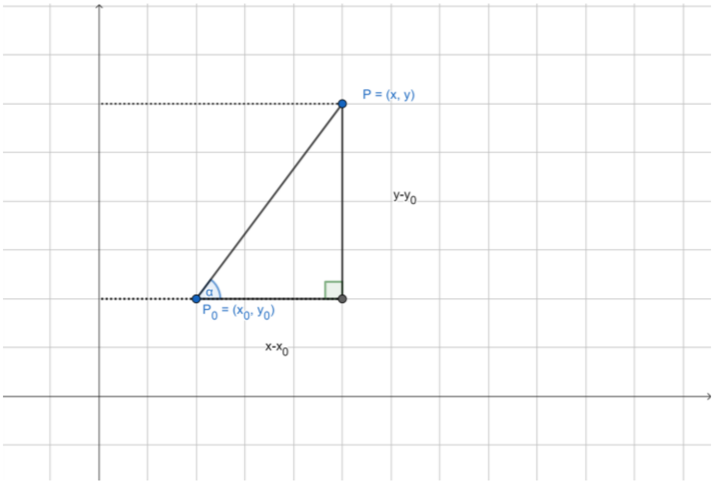
Na Figura 7, se P (x, y) é um ponto da reta que passa pelos pontos A e B, temos $\triangle APP' \approx \triangle ABB'$, isto é, os dois triângulos que aparecem na Figura 7 são semelhantes, visto que os ângulos correspondentes não mudaram, logo os lados correspondentes são proporcionais. Como os triângulos têm dois ângulos iguais, eles são semelhantes, logo temos que $\frac{PP'}{BB'} = \frac{AP'}{AB'}$. Essa razão entre os catetos nos ajudará a determinar a equação da reta na forma reduzida. De fato,

$$\frac{y-2}{4-2} = \frac{x-1}{3-1}$$

$$\frac{y-2}{2} = \frac{x-1}{2}$$

Logo, $y - 2 = x - 1$. Portanto, $y = x + 1$ é a equação da reta que passa por A (1, 2) e B (3, 4). Genericamente, como podemos determinar a equação da reta que passa por um $P_0\ (x_0, y_0)$ e forma um ângulo a com o eixo x?

Figura 8: Equação genérica da reta



Fonte: Acervo dos autores.

Considerando $\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = a$, temos que

$$a = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$a(x - x_0) = y - y_0$$

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

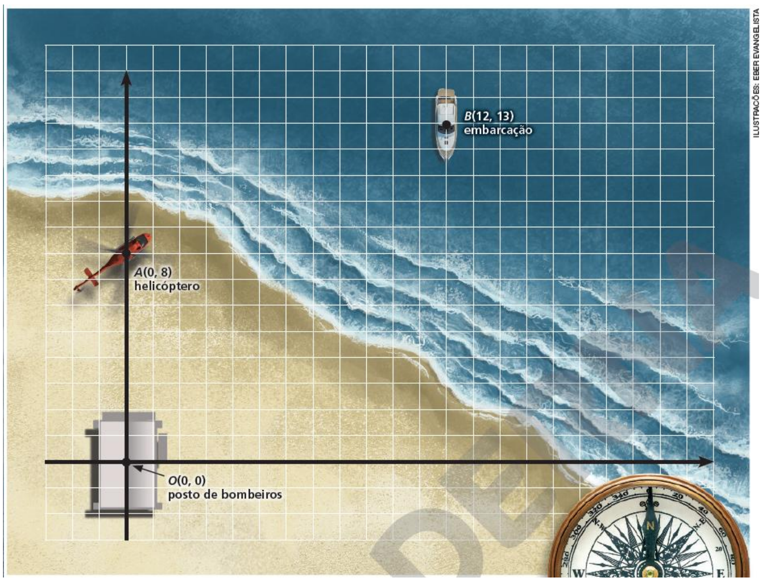
$$y = ax - ax_0 + y_0$$

Logo, $y = ax + b$, sendo a o coeficiente angular da reta e b o coeficiente linear da reta, visto que substituímos $-ax_0 + y_0$ por b por ser um escalar.

Distância entre dois pontos

Para discutir a distância entre dois pontos, temos uma atividade de um livro didático que é enunciada da seguinte maneira: O corpo de bombeiros de certa cidade litorânea recebeu chamado de um grupo de pessoas em uma embarcação avariada. Para o resgate, há um helicóptero, que está posicionado a 8 km ao norte do posto de bombeiros local. Qual é a menor distância que o helicóptero deve percorrer até encontrar a embarcação?

Figura 9: Atividade de distância entre pontos



Fonte: PAIVA, M. *et al*. (2020).

Esse enunciado faz pensar em um resgate por um helicóptero, que precisa chegar o mais rápido possível, então necessita percorrer a menor distância até chegar à embarcação. Observamos o plano cartesiano que mostra o helicóptero e a embarcação com suas respectivas coordenadas e o posto de bombeiros na origem. Então, temos que determinar a distância entre A (0, 8) e B (12, 13) e para isso precisamos de um ponto auxiliar C (12, 8). Assim, podemos chegar a algumas conclusões junto aos alunos, por exemplo, a distância de A até C é 12 quilômetros e a distância de B até C é 5 quilômetros. Queremos descobrir a distância de A até B, que chamamos de *d*. Como os pontos A, B e C são vértices de um triângulo retângulo, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras, logo:

$$\left(d_{A,B}\right)^2 = \left(d_{A,C}\right)^2 + (d_{B,C})^2$$

$$d^2 = 12^2 + 5^2$$

$$d^2 = 144 + 25$$

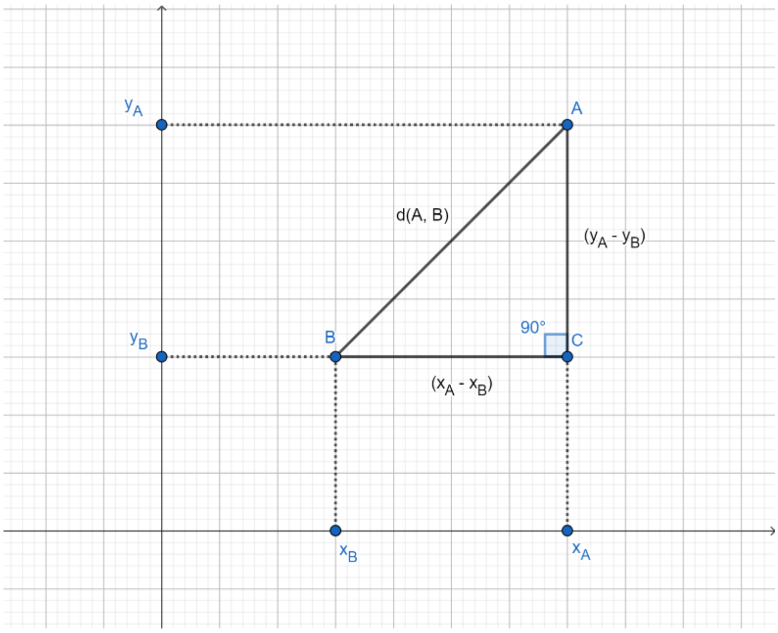
$$d^2 = 169$$

$$d = \pm 13$$

Como a distância é um número não negativo, logo, o helicóptero está a 13 quilômetros de distância da embarcação.

Como podemos, então, deduzir uma fórmula geral para calcular a distância *d (A, B)*, entre dois pontos A e B no plano cartesiano?

Figura 10: Distância entre os pontos A e B



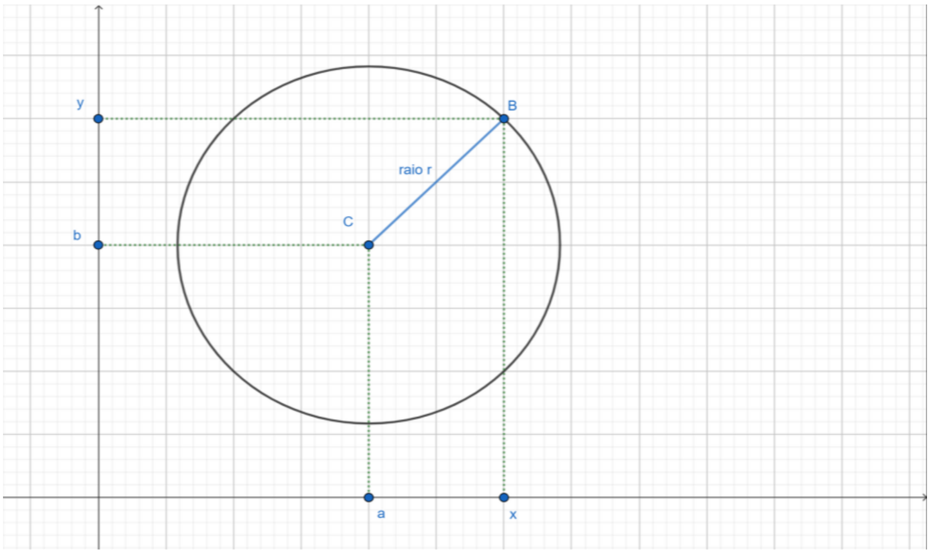
Fonte: Acervo dos autores.

No gráfico, o triângulo ABC é retângulo, $\hat{C} = 90°$ e é a hipotenusa e *d(A, B)* é a medida de $\underline{AB}$. Pelo Teorema de Pitágoras, temos $[d(A,\ B)]^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$. Logo, $d(A,\ B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

Agora, como podemos determinar uma equação da circunferência de centro *C (a, b)* e raio *r*? O raio *r* é a distância de *C* até *B*: $d(C,\ B) = r$, ou seja, $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$. Assim, a equação reduzida da circunferência de centro *C (a, b)* e raio *r* é $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Figura 11: Circunferência de centro *C* e raio *r*



Fonte: Acervo dos autores.

Como então conseguimos encontrar a equação geral da circunferência? A partir da equação reduzida, desenvolvemos os cálculos e obtemos:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by - b^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by - b^2 - r^2 = 0$$

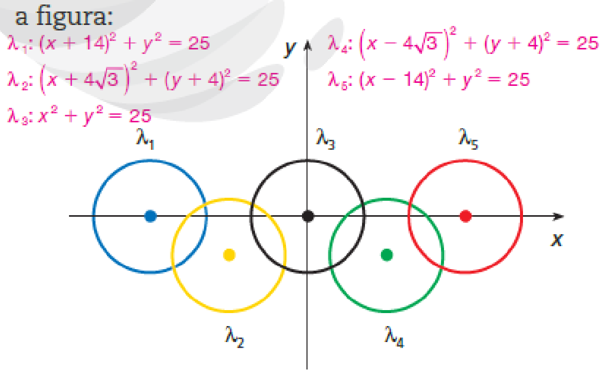
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by - b^2 - r^2 = 0$$

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

Chamada de equação geral da circunferência. Há uma atividade de um livro didático muito interessante que aborda a circunferência com a seguinte figura:

Figura 11: Representação da atividade

16. Imagine a construção do símbolo olímpico conforme a figura:



A circunferência λ_3 com centro na origem tem raio igual a 5 cm. As circunferências λ_1 e λ_5 têm seus centros a 14 cm do centro de λ_3. Os centros de λ_2 e λ_4 estão a $\sqrt{64}$ cm do centro de λ_3 e têm ordenada igual a -4.
Determine a equação das cinco circunferências que representam o símbolo olímpico.

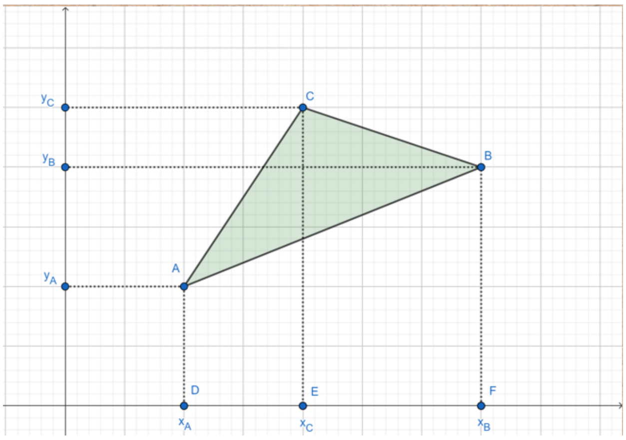
Fonte: PAIVA, M. *et al*. **(**2020).

Essa atividade pede para os estudantes determinarem a equação de cada circunferência. Essa proposta de atividade trazendo as informações necessárias para os alunos resolverem é muito interessante. A passagem do tratamento geométrico para o algébrico é fundamental para a resolução e é um dos ganhos que a geometria analítica trouxe e traz e que deveria ser explorado desde o ensino fundamental.

ÁREA DE UM TRIÂNGULO

Uma questão importante: É possível determinar a área de um triângulo ABC qualquer conhecendo apenas as coordenadas de seus vértices? Ou seja, é possível encontrar uma fórmula geral para calcular a área de um triângulo ABC sabendo somente as coordenadas dos seus vértices?

Figura 12: Área do triângulo ABC



Fonte: Acervo dos autores.

Para encontrar a fórmula devemos observar na figura que:

$$A_{ABC} = A_{ADEC} + A_{CEFB} - A_{ADFB} \quad .$$

Em outras palavras: A área do triângulo ABC é igual à soma das áreas dos trapézios ADEC e CEFB menos a área do trapézio ADFB.

Usando as coordenadas e a fórmula da área do trapézio, concluímos que:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}(x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C)$$

Essa área pode ser dada pelo resultado do determinante formado pelas coordenadas dos vértices A, B e C dividido por dois. Temos então que:

$$|x_A \; y_A \; 1 \; x_B \; y_B \; 1 \; x_C \; y_C \; 1| = D$$

Portanto: $A_{ABC} = \frac{|D|}{2}$, porque a área tem sempre valor positivo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O que apresentamos nesse texto são alguns elementos introdutórios de Geometria Analítica que consideramos fundamentais para estudantes do ensino médio. É claro que eles podem ser complementados com outras atividades, exercícios e situações-problema desse universo conceitual.

Não temos dúvida sobre a necessidade e a importância dos conteúdos e conceitos que abordamos aqui. Infelizmente, o que temos observado é que a maior parte dos alunos iniciantes dos cursos de Licenciatura em Matemática, apesar de terem tido algum contato com conteúdos de geometria analítica na Educação Básica, mostram grande dificuldade diante de situações que demandam marcar pontos, reinvestir conceitos envolvendo a equação analítica e o gráfico da reta, calcular distância entre dois pontos sabendo suas coordenadas, resolver situações-problema envolvendo a equação analítica da circunferência e calcular áreas de triângulos e polígonos, sabendo as coordenadas dos seus vértices.

Em resumo, apesar de esses conteúdos serem importantes acreditamos haver ainda um grande desafio a ser vencido que consiste na realização de um bom trabalho de "alfabetização" concernente aos conteúdos básicos de geometria analítica na Educação Básica. Foi visando contribuir com o preenchimento dessa lacuna, que elaboramos esse material para subsidiar o trabalho dos professores que atuam em sala de aula nesse nível de escolaridade.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Thais Marcelle. **Matemática interligada: matrizes, sistemas lineares e geometria analítica**. 1. ed. São Paulo: Editora Scipione, 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.
Conexões: matemática e suas tecnologias: manual do professor. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020.

DE PAULA, Adnilson Ferreira. **Mobilização e articulação de conceitos de geometria plana e de álgebra em estudos da geometria analítica**. 175 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2011.

PAIVA, Manoel. *et al*. **Moderna plus: ciências humanas e sociais aplicadas e matemática: manual do professor**. 1. ed. São Paulo: Editora Moderna, 2020.

CAPÍTULO 9

COMBINAÇÃO, ARRANJO OU PERMUTAÇÃO?

Oficina 9 no YouTube

Cíntia Melo dos Santos[32]

Renan Gustavo Araújo de Lima[33]

Tatiani Garcia Neves[34]

Público-alvo: Destinada a estudantes do ensino médio.

Objetivo: Apresentar e refletir sobre situações que envolvem o ensino de análise combinatória.

Habilidades da BNCC*:*

- *(EM13MAT310)* Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

[32] Professora Dra. da Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD); e-mail: cintiasantos@ufgd.edu.br , ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2121-3120.
[33] Professor Dr. do Instituto Federal de Mato Grosso do Sul (Campus Coxim); e-mail: renan.lima@ifms.edu.br, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9931-0962.
[34] Professora Dra. da Secretaria Municipal de Educação de Dourados-MS; e-mail: tatianigarcianeves@gmail.com; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1518-2156.

DOI: 10.46898/rfb.bbe222faa4dd.9

A PROPOSTA DA OFICINA

Para o ensino de Matemática no ensino médio, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), faz-se necessário "utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente" (Brasil, 2017, p. 535). Certamente, a mobilização dessa competência pelos estudantes requer um ensino pautado em situações desafiadoras, que estimulem os alunos a levantarem suas próprias conjecturas.

Entre os diversos conteúdos matemáticos a serem ensinados no ensino médio, nos deparamos com o ensino de análise combinatória que, entre as principais noções a serem ensinadas, somos desafiados a levar o aluno à compreensão de diferentes situações que envolvem o tema, como os problemas de arranjo, permutação ou combinação.

Nesse cenário, é possível que, ao se trabalhar esse tema em sala de aula, sejam percebidas algumas dificuldades que os alunos apresentam em relação a esse conteúdo, por exemplo: a mobilização de fórmulas para chegarem ao resultado, sem a compreensão da atividade proposta; dificuldades na identificação das características dos problemas e sua classificação e a mobilização da fórmula combinatória inadequada para a situação proposta (Pessoa, 2009; Santos-Wagner, Bortoloti, Ferreira, 2013). Nesse sentido, neste texto propomos a discussão de uma sequência de atividades, com objetivo de apresentar uma proposta de aula para o início do conteúdo de análise combinatória, por meio do Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

Para tanto, apresentaremos uma sequência de sete situações-problema, que pode contribuir para a compreensão dos conceitos de análise combinatória, por meio do uso do Princípio Fundamental da Contagem (PFC) como estratégia de resolução, sem a preocupação em decorar as fórmulas ou com a classificação das situações propostas. É importante pontuar que as situações a serem discutidas são propostas, sendo que o professor pode modificá-las ou adaptá-las de acordo com as especificidades da sua turma.

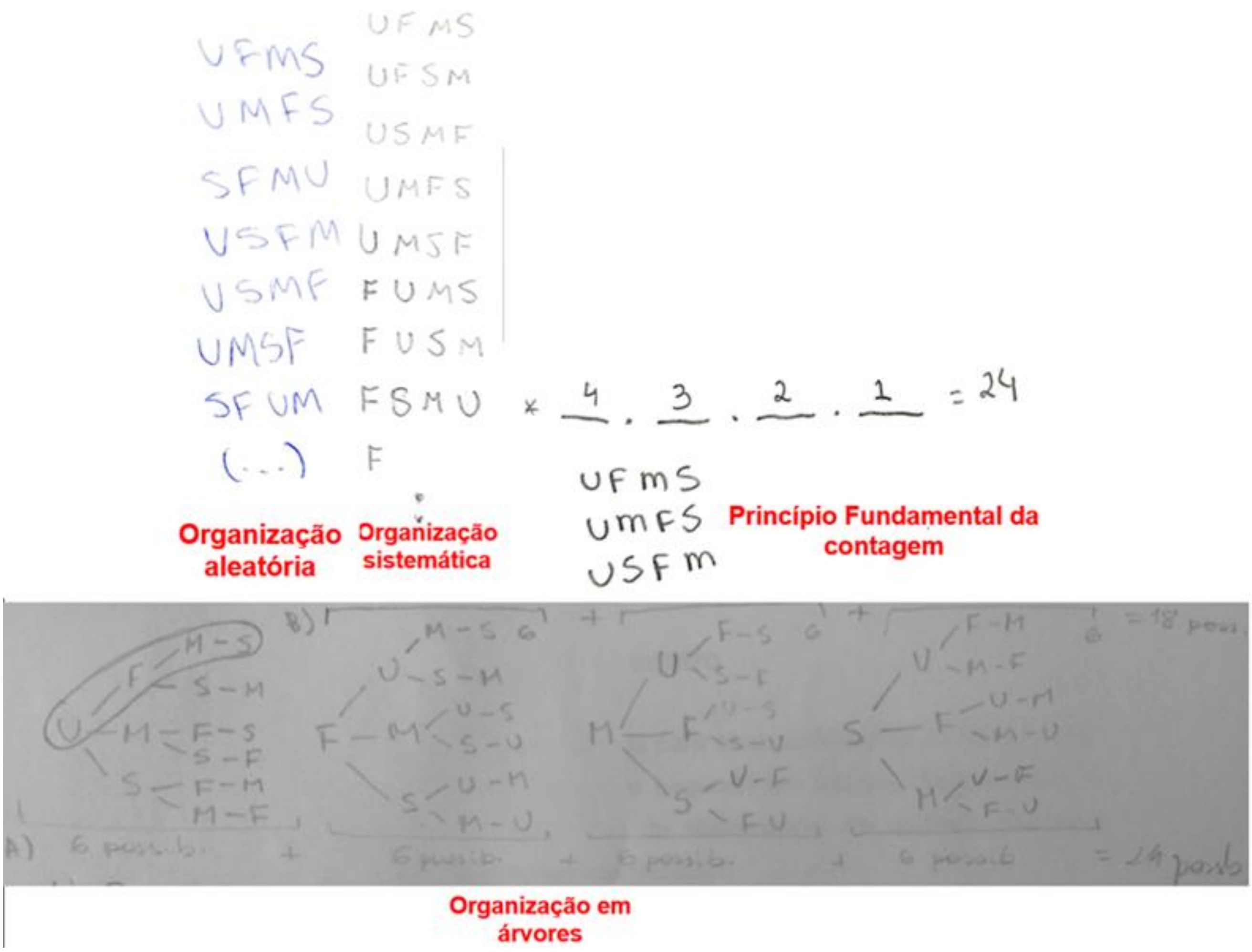
UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

Para iniciar o nosso estudo, começaremos com a discussão do seguinte problema:

***Situação 1**- Quantos anagramas são possíveis de formar com a sigla "UFMS"?*

Para o iniciar o trabalho com o tema, com a proposição dessa situação é possível que os estudantes busquem resolvê-la mobilizando diferentes estratégias, como a listagem das possibilidades, a árvore de possibilidades, entre outras. Ao apresentar a situação, o professor pode incentivar os estudantes a buscarem a solução a partir da interpretação e discussão da situação com os colegas, sem ficarem limitados à classificação e a utilização de uma possível fórmula combinatória. Nesse sentido, durante a resolução, é possível que os estudantes mobilizem diferentes estratégias como: uma organização aleatória dessas respostas; uma organização mais sistematizada, na qual fixa uma consoante e escreve todas as possibilidades possíveis; a resolução por meio da árvore de possibilidades; até a utilização do PFC, como identificado na figura a seguir:

Figura 1: Estratégias de resolução da situação 1



Fonte: Lima (2015)

Nota-se que nessa primeira situação, a proposta é que os alunos possam ir construindo diferentes estratégias com a mediação do professor, sem solicitar que façam uma classificação dessa situação. Durante a resolução, uma discussão que pode surgir é que os alunos observem que em uma listagem aleatória é mais difícil identificar quaisquer regularidades, comparada à estratégia da árvore de possibilidades, que permite ao aluno ter um controle melhor das suas respostas, bem como, da listagem sistemática.

Quando o aluno está diante de problemas de análise combinatória ele pode resolver utilizando diferentes estratégias, sendo que o professor tem um papel importante de identificar essas estratégias e verificar como elas são mobilizadas ao longo das resoluções. Por exemplo, ao analisar a figura 1, percebe-se que a segunda listagem não é tão empírica comparada com a primeira listagem, pois o aluno já começa uma organização mais sistematizada (apesar de faltar uma possibilidade de anagrama com a inicial "U"). Além disso, com o desenvolvimento de situações desse tipo, os alunos podem observar que a estratégia com a listagem aleatória é mais difícil identificar se foram listadas todas as possibilidades e ou outras regularidades.

Na continuidade, vamos propor outras situações de modo a explorar ainda mais essas diferentes estratégias.

Situação 2*- A diretoria de um clube é formada por um presidente, um vice-presidente e um secretário. Se Ana, Bernardo, Carla e Daniel, se candidataram e sabendo que uma pessoa pode ocupar apenas um desses cargos, de quantas maneiras é possível formar uma diretoria?*

Nessa situação, o professor pode propor aos alunos a resolução dessa atividade, de modo que estes mobilizem as possíveis estratégias apresentadas na situação 1. Uma das possibilidades para a resolução dessa situação é a estratégia de listagem sistemática, que pode ser desenvolvida de acordo com o quadro 1, a seguir, utilizando as iniciais dos nomes dos candidatos

Quadro 1: Resolução parcial da situação 2

Presidência	Vice-Presidência	Secretário
A	B	C
A	B	D
A	C	B
A	C	D
A	D	B
A	D	C

Fonte: Acervo dos autores.

Nesse quadro 1, uma possível estratégia mobilizada pelos estudantes é a listagem das possibilidades indicando a Ana como presidente da diretoria. No caso da situação proposta, percebe-se que sempre será possível formar 6 diferentes diretorias, quando escolhida uma pessoa como presidente. Caso os estudantes não identifiquem essa característica do problema, o professor pode levantar o seguinte questionamento aos alunos: ao trocar de presidente, de Ana para o Bernardo, quantas comissões podemos formar? Nessa situação, os alunos podem produzir uma nova listagem com o novo presidente, como ilustrado no quadro 2:

Quadro 2: Resolução parcial da situação 2

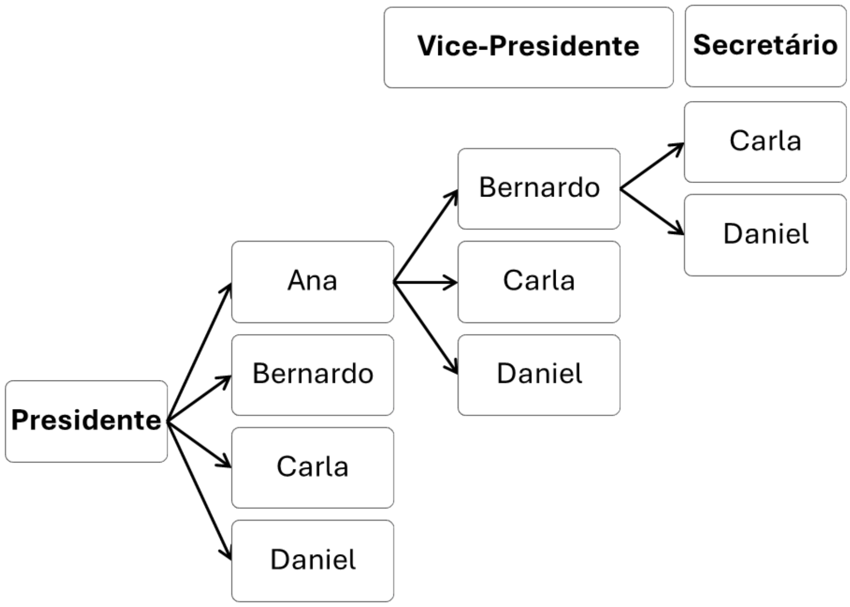
Presidência	Vice-Presidência	Secretário
B	A	C
B	A	D
B	C	A
B	C	D
B	D	A
B	D	C

Fonte: Acervo dos autores.

Observa-se no quadro 2 que o quantitativo de possibilidades para o Bernardo como presidente é o mesmo que listado para a Ana. A mobilização dessa estratégia de listagem sistemática possibilita que os alunos compreendam a situação com técnicas mais triviais e, a cada situação proposta, podem mobilizar gradativamente técnicas mais elaboradas. Nesse contexto, a ideia é que os alunos percebam a regularidade nos dois primeiros casos e como temos dois nomes (Carla e Daniel) que ainda podem ser presidentes, para cada caso teremos mais 6 possibilidades. Logo, a solução da situação proposta é $4 \times 6 = 24$. Ou seja, 24 possibilidades de formar a diretoria com 4 membros.

Outra estratégia, que pode ser evidenciada nessa mesma situação é a árvore de possibilidades, que permite uma outra forma de registro, como apresentado a seguir:

Figura 2: Resolução parcial da Situação 2 com a árvore de possibilidades



Fonte: Acervo dos autores.

Na continuação das situações-problema, apresentamos uma variação da apresentada anteriormente, com a mudança do quantitativo de membros.

Situação 3 *- A diretoria de um clube é formada por um presidente, um vice-presidente e um secretário. Se 26 membros do clube se candidataram e sabendo que uma pessoa pode ocupar apenas um desses cargos, de quantas maneiras é possível formar uma diretoria?*

Nessa situação o aluno pode, inicialmente, buscar a solução por meio da listagem sistemática ou da árvore de possibilidades, começando uma listagem de elementos de A à Z. Durante as discussões da situação, o professor pode questionar a validade das estratégias mobilizadas pelos alunos, além de debater se tais estratégias são sempre viáveis. No caso dessa situação, em que há 15.600 possibilidades de diretorias diferentes, percebe-se que as estratégias de listagem de possibilidades e a árvore de possibilidades são inviáveis (apesar de serem válidas, caso os estudantes consigam listar todas as possibilidades). Nesse sentido, as estratégias mais empíricas apresentam o risco de o aluno se perder e/ou errar, devido ao número expressivo de possibilidades, além de demandar um longo tempo para terminar a resolução da situação.

Apesar disso, a partir da mobilização das estratégias, o professor pode debater sobre algumas regularidades presentes nas situações, como a regularidade de sempre ter a mesma quantidade de opções para vice-presidente, quando escolhido o cargo de presidente. Assim, o professor pode formalizar nesse momento da aula, o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), que expressa que *se uma decisão* d_1 *pode ser tomada de* a *maneiras e se, uma vez tomada a decisão* d_1*, a decisão* d_2 *puder sempre ser tomada de* b *maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões* d_1 *e* d_2 *é* $a \times b$ (Morgado *et al.*, 1991).

A nossa intenção é compreender o PFC e utilizá-lo no ensino de análise combinatória. Desse modo, um aspecto importante no PFC é que após a primeira escolha feita, a quantidade de possibilidades para a segunda escolha é constante, sendo descrita no trecho "*uma vez tomada a decisão* d_1*, a decisão* d_2 *puder sempre ser tomada de* b *maneiras*". Assim, analisaremos essa expressão por meio da situação 3.

Nessa situação temos um grupo de 26 membros para compor uma comissão de presidente, vice-presidente e secretário. Diante disso, podemos questionar: Quantas possibilidades temos para a presidência da diretoria?

Compreendemos que, todos os 26 membros (A, B, C, D, ..., Z) podem ser presidente, temos, então, 26 possibilidades. Uma vez escolhida uma pessoa, vamos supor que a pessoa B seja a presidente, para a vice-presidência teremos 25 possibilidades de membros para escolher. Nesse momento, o professor pode questionar os alunos, com a seguinte pergunta: Se ao invés de ter escolhido a pessoa B para a presidência, escolhermos outro membro, o que muda? Nesse questionamento é importante discutir com os alunos que ao alterar o membro da presidência, o quantitativo de possibilidades para a vice-presidência não muda, mantendo as 25 possibilidades. Por fim, uma vez escolhido o membro para a vice-presidência, restam 24 membros para serem secretários. Assim, temos pelo PFC, que o quantitativo de possibilidades para formar a diretoria é $26 \times 25 \times 24 = 15.600$.

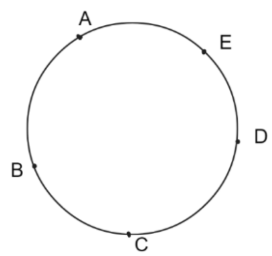
Cabe ressaltar que para a utilização do PFC é necessário que, independentemente das escolhas feitas, a quantidade de possibilidades seja sempre constante. Essa interpretação é interessante para discutir com os alunos, uma vez que as possibilidades não são as mesmas, pois é possível mudar o membro da presidência por outro membro, mas as quantidades de escolhas possíveis para as próximas decisões não mudam.

Nesse sentido, uma possibilidade para o ensino de análise combinatória é a exploração de diferentes situações que podem possibilitar que os alunos mobilizem diversas estratégias, com um número menor de possibilidades. Assim, gradativamente os alunos percebem a necessidade de mobilizar estratégias mais eficazes e possíveis para quaisquer situações. A partir disso, os estudantes têm condições de elaborar conjecturas, identificando regularidades, até chegarem no Princípio Fundamental da Contagem.

Continuamos a sequência de atividades com a exposição da quarta situação:

Situação 4 - *Dada uma circunferência c, são indicados 5 pontos distintos sobre ela. Quantos segmentos de reta com extremidades em dois desses pontos podem ser traçados? Para tal situação temos a seguinte figura:*

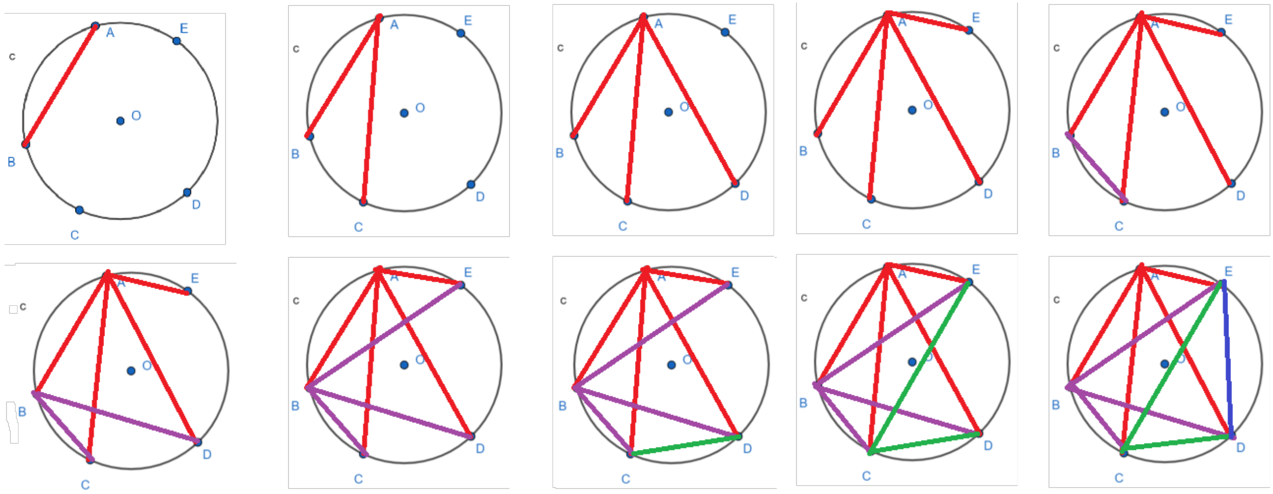
Figura 3: Circunferência da Situação 04



Fonte: Acervo dos autores.

Para a resolução da atividade, é possível que os alunos mobilizem o PFC, com o seguinte encaminhamento: como um segmento é formado por dois pontos, as possibilidades pelo princípio são $5 \times 4 = 20\ segmentos$, pois para o primeiro ponto há 5 possibilidades e para o segundo ponto há 4 possibilidades. Ao resolver essa situação, o professor pode questionar os alunos se a resposta está correta ou não, e propor uma outra estratégia de resolução, como a listagem dos segmentos na circunferência, por exemplo:

Figura 4: Resolução da Situação 03 -Listagem Sistemática



Fonte: Acervo dos autores.

Cabe ressaltar que essa situação possibilita uma contextualização com outros campos da Matemática, como a Geometria, no que se refere ao estudo com diagonais e segmentos de polígono, bem como, no trabalho de progressão aritmética.

Nota-se que, na listagem sistemática da situação 4, são formados 10 segmentos de reta, e não 20, como havia sido inicialmente encontrado ao aplicar o PFC. Isso se deve ao fato de que na formação de um segmento de reta a ordem da escolha dos pontos não importa. Aqui novamente o professor, conduz o seguinte questionamento para os alunos: O que difere a situação 4, das demais situações apresentadas anteriormente? Nesse momento da aula, pode o professor começar o diálogo com os alunos sobre as características das situações da análise combinatória.

DIFERENTES TIPOS DE PROBLEMAS

Quando trabalhamos com problemas de análise combinatória, nos deparamos com quatro classes de situações distintas, podendo identificar duas características em cada classe que as fazem diferir entre si, de acordo com a classificação apresentada por Pessoa e Borba (2010).

Em uma primeira classe temos aquelas situações que se *utilizam de todos os elementos do conjunto* e a *ordem dos elementos importa*, então, quando trocamos a ordem dos elementos, estamos formando um novo conjunto. Os problemas dessa classe de situações são chamados de *permutação*.

Uma segunda classe de situações comporta aquelas que *não utilizam todos os elementos do conjunto* e a *ordem dos elementos continua importando*, logo, em um grupo grande são utilizados apenas alguns elementos, e quando troca a ordem de escolha, temos um outro conjunto. Os problemas com essas características são chamados de problemas de *arranjo.*

Um exemplo de arranjo pode ser visto na situação 1 quando formamos os anagramas utilizando todas as letras. Neste caso, a ordem dos elementos importa, pois quando alteramos a ordem das letras, formam-se novos anagramas. Já nas situações 2 e 3 são escolhidos três membros para formar a diretoria, dentre quatro membros ou 26 membros, respectivamente. Além disso, nessas situações, ao mudar a ordem do presidente, vice-presidente ou secretário, temos outras composições de diretoria, importando a ordem dos membros.

Uma terceira classe de situações é aquela em que os problemas *podem ou não utilizar todos os elementos do conjunto*, e tem-se uma propriedade muito importante em que *a ordem dos elementos não importa*, de modo que se escolhermos um elemento em um primeiro momento e depois escolhermos outro elemento em um segundo momento não faz diferença. Os problemas dessa classe de situações são chamados de problemas de *combinação*. Um exemplo de problema de combinação que se enquadra nesta classe é a apresentada na situação 4, na formação dos segmentos de reta.

Por fim, a quarta classe de situações, nomeada como *produto cartesiano*, é composta por problemas que utilizam *elementos de conjuntos de natureza diferente* e *forma-se um conjunto de natureza diferente dos conjuntos originais*.

Em livros didáticos é possível identificar diferenciações quanto a essas classificações, por exemplo: em alguns livros a *permutação* pode ser vista como um caso de *arranjo*, que se utiliza todos os elementos dos conjuntos. Consideramos a classificação proposta por Pessoa e Borba (2010) bastante *didática,* pois compreendemos que essa organização pode contribuir para superar as dificuldades que os alunos possuem frente à classificação dos problemas de análise combinatória.

Além disso, no caso dos problemas de *produto cartesiano*, evidenciamos que essa classificação não se encontra de maneira explícita em livros didáticos, apesar de ser possível identificar problemas clássicos de contagem que contemplam essa classe de problemas, por exemplo: *Uma menina tem três blusas, duas saias para vestir e três sapatos, de quantas maneiras* *diferentes ela pode compor o seu look?* Nesse problema, teremos que escolher elementos de natureza diferente para compor o *look*, uma blusa, uma saia e um sapato. Ao formar um novo conjunto dos elementos desse problema, formaremos vários *looks* que não estão somente no conjunto composto por blusas, saias, ou sapatos, mas sim, a composição de um conjunto com esses diferentes elementos. Outro exemplo desse tipo de problema pode ser evidenciado quando são iniciadas diferentes situações de contagem, como: *De quantas maneiras consigo montar um prato de comida, com 3 opções de proteínas, dois tipos de arroz e três tipos de saladas, escolhendo uma opção de cada?* Semelhante ao exemplo anterior, não será formado um conjunto só com proteínas, arroz ou saladas, mas sim, o agrupamento desses elementos.

RETOMANDO A SITUAÇÃO 4 – OS SEGMENTOS DE RETA A PARTIR DE PONTOS DE UMA CIRCUNFERÊNCIA

Ao analisarmos a nossa situação 4, quando encontramos 20 possibilidades de segmentos por meio do PFC, faz-se necessário analisar que quando traçamos o segmento $\underline{AB}$ e o segmento $\underline{BA}$, esses são segmentos iguais, sendo que a ordem dos elementos não importa. Nesse caso, cada segmento foi computado duplamente e, para chegar ao resultado correto, precisa-se desconsiderar a quantidade de casos repetidos de cada segmento de reta. Como cada segmento de reta é computado duas vezes, ao realizar a divisão do total obtido por 2, obtemos a resposta correta de $20 \div 2 = 10\ segmentos$.

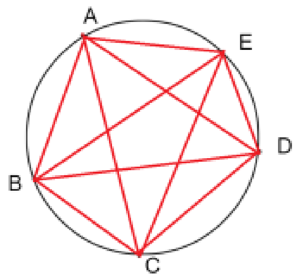
Se considerarmos as características dos problemas que apresentamos anteriormente, percebe-se que na situação 4 a *ordem dos elementos não importa*, por isso esta situação pode ser classificada como um problema de combinação. Diferentemente dos problemas de outras classes, quando utilizamos o Princípio Fundamental da Contagem para resolver problemas de combinação, é necessário desconsiderarmos os elementos contados repetidamente.

Para nos debruçarmos um pouco mais nas nossas discussões, temos a seguinte situação:

Situação 5 *- Dada uma circunferência c, são indicados 5 pontos distintos sobre ela. Quantos triângulos com vértices nesses pontos podem ser traçados?*

Nessa proposta, para formar um triângulo a escolha de três pontos dentre os cinco dados e, utilizando o Princípio Fundamental da Contagem para o primeiro ponto há 5 opções, para o segundo ponto há 4 opções e para o terceiro há 3 opções, totalizando $5 \times 4 \times 3\ = 60\ triângulos$. Nesse contexto, é importante lembrar que essa situação recai na mesma situação 4, no qual a ordem não é importante e os triângulos $ABC = ACB = BAC = BCA = CAB = CBA$ são iguais. Durante o trabalho em sala de aula, o professor pode realizar a discussão da situação a partir das resoluções dos estudantes, levando-os a identificar que dentre as 60 possibilidades encontradas com o PFC há casos repetidos. Desse modo, para encontrar a resposta final é necessário dividir pelo número de repetições - seis repetições - então a resposta correta é $5 \times 4 \times 3\ = 60\ \div 6 = 10\ triângulos$, como podemos visualizar a seguir:

Figura 5: Resolução da Situação 05

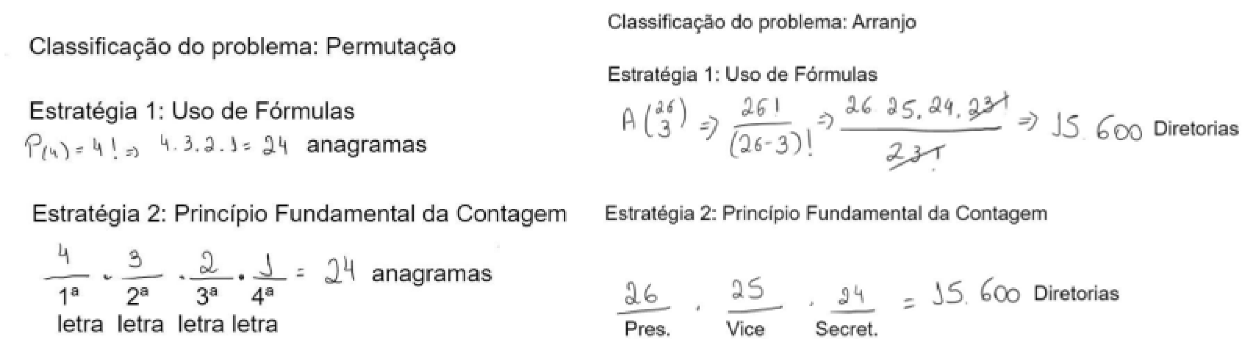


Fonte: Acervo dos autores.

Cabe ressaltar que a proposta didática ora apresentada contribui com a compreensão das classificações desses problemas, a partir da construção do conceito de análise combinatória mediado por situações desafiadoras, que estimulam o aluno a pensar, criar estratégias, levantar conjecturas e identificar as diferentes características dos problemas. Cabe ressaltar que a nossa opção com essa proposta foi de trabalhar com diferentes situações para que, ao apresentar a classificação dos problemas de análise combinatória, essas façam sentido para os alunos.

Até o momento não trabalhamos com o uso das fórmulas e mesmo que o aluno não conheça ou não lembre das fórmulas, eles possuem condições de resolver as situações propostas. Após o trabalho com essas situações, o professor poderá retomar a situação 1, bem como, a situação 3, apresentando as fórmulas de Permutação, $P_n = n!$, e Arranjo, $A_n^p = \left(\frac{n!}{n-p!}\right)$, para cada tipo de situação, bem como, a resolução pelo PFC (Figura 6):

Figura 6: Resolução da Situação 1 e 3



Fonte: Acervo dos autores.

Ao propor que os alunos retomem novamente as situações 1 e 2, e que mobilizem a estratégia do uso de fórmulas, bem como, do PFC, o professor pode enfatizar as discussões feitas anteriormente. O problema do anagrama faz uso de todos os elementos do conjunto, enquanto o segundo problema, utiliza apenas de alguns membros para compor a diretoria. Além disso, é possível identificar que em ambas as situações a ordem dos elementos importa. Isso implica diretamente na composição e significado das fórmulas, na permutação $P_n = n!$, em que o $n!$ significa a mobilização de todos os elementos. Já no arranjo, $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$, a expressão $n - p!$ é um recurso que, nessa situação, expressa a utilização de apenas alguns elementos. Pelo PFC, não há a necessidade de ter que retirar os elementos, pois o processo de resolução é feito por etapas e não para o conjunto de todos os elementos. Na continuidade, ao retomar a situação 4, temos as seguintes resoluções:

Figura 7: Resolução da Situação 05

Classificação do problema: Combinação

Estratégia 1: Uso de Fórmulas

$$C\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} \Rightarrow \frac{5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}.2!} \Rightarrow \frac{5.4}{2.1} = 10 \text{ triângulos}$$

Estratégia 2: Princípio Fundamental da Contagem

$$\underset{1^{\circ}\text{ ponto}}{\underline{5}} \cdot \underset{2^{\circ}\text{ ponto}}{\underline{4}} \cdot \underset{3^{\circ}\text{ ponto}}{\underline{3}} = 60$$ triângulos (com as repetições dos mesmos triângulos)

Desconsiderando os triângulos repetidos

$$\triangle ABC \rightarrow 6 \text{ repetições} \longrightarrow \frac{60}{\underbrace{6}_{\text{Quant. de repetições}}} = 10 \text{ triângulos}$$

Fonte: Acervo dos autores.

Nessa situação, temos que a ordem não é importante, sendo um problema de combinação que, como vemos no livro didático, tem a seguinte fórmula $C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. O que diferencia essa fórmula da fórmula do arranjo? Neste caso, temos que o $p!$ indica as repetições, que nas situações de combinação, como a ordem não importa, precisamos realizar a divisão pelo quantitativo de termos que se repetem para desconsiderar os casos repetidos. Novamente, ressaltamos o quanto o PFC permite a compreensão das fórmulas mobilizadas no ensino de análise combinatória e no entendimento das classificações dos problemas em permutação, arranjo e combinação.

Desse modo, no trabalho com análise combinatória, o PFC é uma ferramenta que possibilita a resolução de diversos problemas, de modo a superar a dificuldade de "decorar" as fórmulas combinatórias e promovendo a compreensão destas. Nesse cenário, é importante ressaltar que, ao mobilizar o PFC para a resolução de problemas combinatórios, pode existir situações com algumas restrições, que devem ser analisadas a partir de algumas etapas.

Segundo Lima et al. (2006), existem três etapas que os alunos devem percorrer no momento de resolver uma situação de combinatória:

- Postura - Para conseguir resolver os problemas de combinatória, uma estratégia bastante utilizada é se colocar no papel de quem vai realizar a ação solicitada;
- Divisão - Consiste em dividir decisões a serem tomadas por decisões mais simples, formando diversas etapas para a resolução;
- Não adiar dificuldades - Nota-se que o fato de tentar adiar dificuldades em um primeiro instante, no final gera grande problema. Temos que, no momento inicial da resolução, começar pela decisão que tiver restrições.

Para entender o proposto por Lima e colaboradores (2006), no que diz respeito ao PFC em situações com restrição que resultam em posturas que o aluno deve ter para resolver os problemas, continuaremos com as discussões por meio de situações problemas.

Situação 06- *Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, quantos números com três algarismos distintos é possível formar?*

A princípio, para essa situação, temos que pensar o seguinte: o número 057 é considerado nesse problema? Nesse contexto, esse número não se enquadra, pois o zero à esquerda não representa um valor com três algarismos. No entanto, em um outro contexto, como em senhas bancárias e de celular, consideramos todos os algarismos do número 057. Outra condição para essa situação é que os algarismos devem ser distintos, então o número 112, por exemplo, não deve ser considerado para a resolução dessa situação.

Assim, vamos resolver essa situação por meio do PFC e, primeiramente, vamos separar o problema em situações menores, o que implica na seguinte questão: Por onde começar a resolução da situação proposta? De acordo com Lima et al. (2006), temos que iniciar a resolução pela maior condição que, neste caso, o número não pode ser iniciado com o algarismo 0. Pelo PFC, na posição da centena temos 7 possibilidades, na posição da dezena temos 7 possibilidades, já que é possível a utilização do algarismo 0, e na posição da unidade restam 6 possibilidades, que resulta em $7 \times 7 \times 6 = 294$ números. Nesta resolução, o professor pode enfatizar a eficiência do princípio, pois estratégias como listagem sistemática e árvores de possibilidade seriam ineficientes para essa situação.

Situação 07- *Quantos números ímpares com 3 algarismos distintos é possível formar utilizando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?*

Vamos começar do mesmo modo como iniciamos a situação anterior? Se iniciarmos pela posição da centena, temos 7 possibilidades (sem o zero), na posição da dezena (com o número zero) temos 7 algarismos, e na posição da unidade, restam quantas possibilidades? Neste caso, como o número deve ser ímpar deve terminar com os algarismos 1, 3, 5 ou 7.

Lembramos que para o PFC, independente da decisão tomada, a quantidade de possibilidades das próximas decisões não se altera. No caso da situação 7, se iniciarmos escolhendo o algarismo da centena, a quantidade de possibilidades para os demais algarismos não se mantém constante, por exemplo: se escolhermos o algarismo 3 na posição da centena, na posição da unidade não serão quatro possibilidades de algarismos (para formar números ímpares) e sim três, pois um algarismo ímpar já foi escolhido.

Desse modo, como apresentado por Lima *et al*. (2006), não devemos iniciar a resolução desse problema pelo algarismo das centenas, visto que a nossa maior condição é que o número formado deve ser um número ímpar (o algarismo da unidade deve ser ímpar). Assim, para essa situação, devemos começar pela posição das unidades, resultando em 4 possibilidades para esta posição; na posição da centena (nossa segunda restrição) temos 6 possibilidades, já que não é possível usar os algarismos 0 e o escolhido na casa da unidade, e na posição da dezena temos 6 possibilidades, que resulta em $6 \times 6 \times 4 = 144$ números ímpares.

Cabe ressaltar que na sala de aula o professor pode deixar os alunos conjecturando sobre as situações propostas e, conforme as especificidades da turma, buscar situações problemas semelhantes às que propusemos neste texto para ter maior tempo de estudo e discussão sobre o conteúdo de análise combinatória.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES PARA SALA DE AULA

No contexto do ensino médio, dentre os variados conteúdos matemáticos abordados, há o ensino de análise combinatória. Um dos principais desafios no ensino desse tema é o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas que envolvem o tema. Nossa proposta, apresentada neste texto, fundamenta-se em um estudo acerca do conteúdo de análise combinatória utilizando situações-problema (Lima, 2015).

Além disso, optamos por destacar a importância de explorar diversas situações-problema. Durante o trabalho em sala de aula, o professor pode modificar as situações apresentadas, como a quantidade de elementos ou a adição de alguma condição nova. Desse modo, durante a resolução os estudantes podem desenvolver novas estratégias, identificando a validade e a eficiência das mesmas.

Outra escolha didática que pode ser mobilizada com os estudantes é a resolução em grupo das situações apresentadas. Por meio dessa organização, os estudantes podem desenvolver estratégias em conjunto, além de justificá-las e validá-las, contribuindo para o desenvolvimento de outras habilidades, como a argumentação.

Por fim, consideramos que o Princípio Fundamental da Contagem no ensino da análise combinatória é uma ferramenta que permite resolver diversos problemas, superando a necessidade de memorização de fórmulas combinatórias, contribuindo para compreensão da classificação dos problemas e de suas fórmulas.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017.

DDMAT. **Oficina 03: Combinação, arranjo ou permutação? Discussão de atividades de combinatória.** YouTube, 18 de maio de 2023, Duração: 1h30m. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=JWv_EFJ79Rk. Acesso em 25 de julho de 2024.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto de; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César de Oliveira. **A matemática do ensino médio – volume 2.** Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Renan Gustavo Araújo de. **Problemas de combinatória: um estudo de conhecimentos mobilizados por licenciandos em Matemática**. 2015. 198 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

MORGADO, Augusto César de Oliveira; PITOMBEIRA DE CARVALHO, João Bosco; PINTO CARVALHO, Paulo Cezar; FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio.** 2009. 267 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Pernambuco, Recife, 2009.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **In: EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, vol. 1, n. 1, 2010.

SANTOS-WAGNER, Vânia Maria Pereira dos; BORTOLOTI, Roberta D'Angela Menduni; FERREIRA, Juliana. Rodrigues. Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática**. In: Educação Matemática Pesquisa**, v.15, n.3, pp.692-629, 2013.

CAPÍTULO 10

EDUCAÇÃO FINANCEIRA: SONHOS PLANEJADOS, CONSUMO CONSCIENTE

Oficina 05 no YOUTUBE

Jhonattan Gonçalves de Araújo[35]

Marilena Bittar[36]

Público-alvo: estudantes e professores do Ensino Médio.

Objetivo: reconhecer a importância da Educação Financeira para o crescimento pessoal estimulando a reflexão crítica nas tomadas de decisão.

Habilidades dos Itinerários Formativos Associadas às Competências Gerais da BNCC:

- *(MS.EMIFCG07)* Reconhecer e analisar questões sociais, culturais e ambientais diversas, identificando e incorporando valores importantes para si e para o coletivo que assegurem a tomada de decisões conscientes, consequentes, colaborativas e responsáveis.
- *(MS.EMIFCG09)* Participar ativamente da proposição, implementação e avaliação de solução para problemas socioculturais e/ou ambientais em nível local, regional, nacional e/ou global, corresponsabilizando-se pela realização de ações e projetos voltados ao bem comum.

[35] Professor Me. da rede Municipal de Ensino de Campo Grande/MS (REME); e-mail: matematicajhon@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0009-0008-3915-9971.

[36] Professora Dra. da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS); e-mail: marilenabittar@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9989-7871.

DOI: 10.46898/rfb.bbe222faa4dd.10

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Este texto traz um relato de experiência de um Itinerário Formativo do Novo Ensino Médio proposto pela Secretaria Estadual de Educação de Mato Grosso do Sul no ano de 2023, que busca a construção de novos currículos e propostas pedagógicas que atendam às especificidades locais e à multiplicidade de interesses dos estudantes. A proposta foi realizada com estudantes do período noturno de uma escola pública situada na região oeste (periferia) de Campo Grande/MS. Nesta turma havia cerca de 30 estudantes, com faixa etária entre 15 e 24 anos, em que aproximadamente 90% já estavam no mercado de trabalho. As atividades descritas aconteceram no 1° bimestre do ano letivo de 2023, totalizando 8 encontros presenciais de 1 hora/aula.

Esta experiência foi apresentada no ano de 2023 na forma de oficina online no canal do *Youtube* do Grupo de Estudos em Didática da Matemática/DDMat vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFMS. O vídeo completo da oficina e do debate ocorrido com os participantes está disponível no link indicado abaixo do título e nas referências. Esperamos que a leitura deste texto, complementada com a oficina, contribua com o trabalho docente relativo à temática em cena.

Para início de conversa: será que Educação Financeira e Matemática Financeira são a mesma coisa?

Para nós, não. Acreditamos que a Educação Financeira busca a conscientização sobre a importância do planejamento, para que o cidadão possa desenvolver uma relação equilibrada com o dinheiro e tomar decisões acertadas sobre finanças e consumo, além de compreender o mundo à sua volta e as informações que chegam a ele a todo momento. Já a Matemática Financeira está voltada para o estudo de conceitos mobilizados na elaboração e resolução de problemas, como: porcentagens, descontos, acréscimos, juros simples e compostos, amortizações, inflação etc.

Por meio de pesquisas como as de Silva (2016) e Teixeira (2015) percebemos que na educação básica é comum a ênfase do ensino ficar voltada para o trabalho com os conceitos da Matemática Financeira, mas que a Educação Financeira pode ser fomentada pelo trabalho do professor. Diante disso, a proposta pensada para o Itinerário Formativo descrito nesse texto, buscou incentivar discussões relacionadas à Educação Financeira, sem deixar de lado os conceitos da Matemática Financeira.

A Educação Financeira segundo o Currículo de Referência de Mato Grosso do Sul

No Currículo de Referência de Mato Grosso do Sul, a Educação Financeira é descrita como um dos Temas Contemporâneos do Currículo:

> A Educação Financeira revela-se como estratégia educativa prevista no Decreto n. 7.397, de 22 de dezembro de 2010, que institui a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF). A ENEF visa à promoção da Educação Financeira e previdenciária e à contribuição para o fortalecimento da cidadania, da eficiência e solidez do sistema financeiro nacional e para a tomada de decisões conscientes por parte dos consumidores (MATO GROSSO DO SUL, 2021, p.57).

Nessa perspectiva, buscamos fortalecer estratégias de aprendizagem com os estudantes, visando a compreensão de fatores ligados à questão financeira que impactavam suas vidas.

> Assim, as estratégias de aprendizagem para a Educação Financeira geram novos conhecimentos a partir da experiência de vida dos sujeitos que têm a oportunidade de dialogarem, vivenciarem e refletirem sobre alguns conceitos, tais como: poupança, crédito, administração de recursos, investimento, preços, consumo, dinheiro e renda. Logo, o percurso de aprendizagem no que se refere à Educação Financeira não pode, tão somente, trazer esses conceitos, mas também fazer com que o sujeito compreenda as implicações deles para a sociedade, inclusive no que diz respeito à garantia dos direitos individuais e coletivos observados na Constituição Federal de 1988 (MATO GROSSO DO SUL, 2021, p.57).

A Resolução 10.814, de 10 de março de 2016, do Conselho Estadual de Educação-CEE/MS explicita os campos que a Educação Financeira abarca e destaca a importância de o estudante "desenvolver consciência de sua participação no acompanhamento dos recursos arrecadados pelo Estado e em particular no seu cotidiano" (MATO GROSSO DO SUL, 2021, p.238-239). Em consonância com esta resolução, os objetivos presentes no currículo de Mato Grosso do Sul relativamente à Educação Financeira são:

> - Aplicar conceitos de Matemática Financeira como ferramenta para planejamento, análise e tomada de decisões autônoma baseada em mudança de atitudes, como por exemplo, fazer um orçamento ou calcular determinada taxa de juro de uma prestação, aliada a um plano de investimentos e ao

> projeto de vida, para garantir uma melhoria de qualidade tanto no presente, quanto a longo prazo, tendo em vista o aumento da expectativa de vida.
> - Reconhecer a importância da Educação Financeira para o desenvolvimento individual e social, com despertar reflexivo na tomada de decisão; aprender a fazer uma leitura crítica e racional das influências da mídia, das mensagens publicitárias, a respeito de produtos de consumo para tornarem-se capazes de fazer escolhas de modo autônomo, de acordo com suas reais necessidades para o consumo consciente e sustentável, no bem-estar financeiro e na qualidade de vida.
> - Possibilitar que diversos elementos do pensar matematicamente sejam inseridos na discussão como estimativas, escolha da melhor opção, busca de possíveis padrões, análise de resultados, desenvolvimento de estratégias de resolução e elaboração de problemas.
> - Proporcionar o desenvolvimento de competências socioemocionais como: autogestão, foco, persistência, responsabilidade, autoconfiança, curiosidade para aprender, confiança, tolerância a frustração etc. (MATO GROSSO DO SUL, 2022, p.15)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a Educação Financeira

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) desempenha um importante papel na estrutura educacional do Brasil, fornecendo diretrizes e competências que todos os estudantes devem adquirir ao longo de sua jornada acadêmica. No entanto, para preparar os jovens para um mundo cada vez mais complexo e financeiramente desafiador, a integração da Educação Financeira na BNCC se torna uma necessidade. Isso não apenas os capacita a gerenciar suas próprias finanças de forma mais eficaz, mas também contribui para o desenvolvimento de cidadãos mais informados e preparados para os desafios econômicos do mundo moderno.

A sociedade contemporânea é caracterizada por uma conexão econômica global, que influencia diretamente vidas individuais e coletivas. Nesse contexto, a capacidade de compreensão e gestão das finanças pessoais torna-se uma competência crucial. A Educação Financeira surge como uma resposta vital às complexidades financeiras que permeiam a nossa realidade, oferecendo ferramentas essenciais para navegar em um mundo repleto de escolhas econômicas, investimentos e decisões de consumo. Deste modo, segundo a BNCC:

> Cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora (BRASIL, 2017c, p.19).

A crescente complexidade dos mercados financeiros, aliada à multiplicidade de opções de investimento, ressalta a importância da Educação Financeira. Indivíduos, desde jovens estudantes até profissionais experientes, enfrentam desafios financeiros que exigem não apenas conhecimento, mas também habilidades práticas. A ausência da Educação Financeira pode resultar em dificuldades no gerenciamento de recursos, endividamento excessivo e falta de preparo para eventos imprevistos. Assim sendo, o ambiente escolar deve auxiliar no preparo desses cidadãos, trabalhando temas que farão parte da vida em sociedade.

> Entre esses temas, destacam-se: [...] saúde, vida familiar e social, **educação para o consumo, Educação Financeira e fiscal**, trabalho, ciência e tecnologia e diversidade cultural (Parecer CNE/CEB nº 11/2010 e Resolução CNE/CEB nº 7/201023). Na BNCC, essas temáticas são contempladas em habilidades dos componentes curriculares, cabendo aos sistemas de ensino e escolas, de acordo com suas especificidades, tratá-las de forma contextualizada (BRASIL, 2017c, p. 19-20, grifo nosso).

Deste modo, nossa proposta no Itinerário Formativo buscou explorar a importância da Educação Financeira na formação dos estudantes para tomar decisões informadas e responsáveis em relação às suas finanças pessoais e também para melhor compreenderem informações que circulam nos diferentes meios de comunicação. Ao compreendermos as lacunas existentes na Educação Financeira e as possíveis consequências de sua ausência, procuramos formular estratégias para promover uma cultura financeiramente consciente. Por meio da disseminação do conhecimento e do desenvolvimento de habilidades práticas, queríamos contribuir com o fortalecimento da estabilidade financeira individual e, por extensão, com o bem-estar da sociedade como um todo.

> Há hoje mais espaço para o empreendedorismo individual, em todas as classes sociais, e **cresce a importância da Educação Financeira** e da compreensão do sistema monetário contemporâneo nacional e mundial, imprescindíveis para uma inserção crítica e consciente no mundo atual. Diante desse cenário, impõem-se novos desafios às Ciências Humanas, incluindo a compreensão dos impactos das inovações tecnológicas nas relações de produção, trabalho e consumo (BRASIL, 2017c, p.568).

A Educação Financeira é um dos desafios a serem enfrentados pelos jovens, por isso nossa proposta para este texto é apresentar uma experiência desenvolvida em Campo

Grande - MS com estudantes do Ensino Médio noturno cujas idades variavam entre 15 e 24 anos que, acreditamos, pode contribuir com o enfrentamento deste desafio.

A EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA

A proposta que apresentamos aqui foi desenvolvida durante 8 aulas presenciais de 50 minutos pelo primeiro autor deste artigo que é professor de Matemática das turmas de 1° e 2° ano do Ensino Médio e do Itinerário Formativo de Matemática e suas Tecnologias. O Itinerário Formativo *Educação Financeira: Sonhos Planejados, Consumo Consciente* teve sua organização pensada de forma semestral, sendo um encontro presencial por semana ao longo de dois bimestres. Trazemos aqui o relato dos encontros vivenciados no primeiro bimestre, totalizando 8 encontros, sendo o último destinado à aplicação da avaliação bimestral.

Primeiro encontro

No primeiro encontro a ideia era conversar com os estudantes sobre finanças, buscando compreender a relação deles com o dinheiro. Queríamos entender se eles já haviam parado para refletir sobre quanto ganham e como gastam. Para despertar a discussão, utilizamos o vídeo: Ganhe, gaste, poupe e invista seu dinheiro com inteligência financeira [Oficina das Finanças] do canal Oficina das Finanças (https://www.youtube.com/watch?v=p0hwUztWijE&ab_channel=OficinadasFinan%C3%A7as). O vídeo tem menos de cinco minutos de duração e nele é proposta uma reflexão sobre a importância de planejamento de gastos financeiros, como pagamento de gastos essenciais, contas de uma casa e consumos pessoais.

Segundo encontro

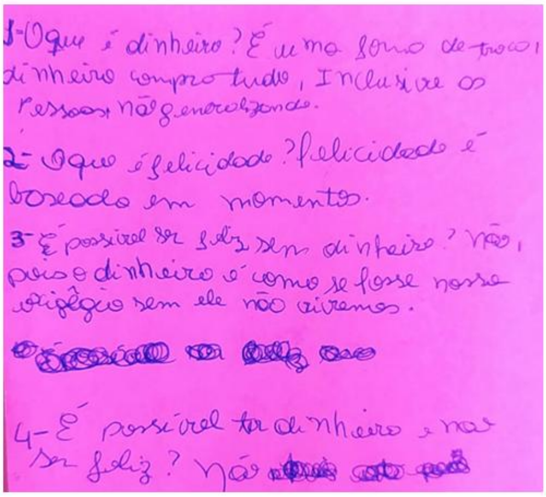
No segundo encontro os estudantes foram convidados a formar grupos de 4 ou 5 pessoas para responderem alguns questionamentos que íamos fazendo ao longo da aula. As respostas seriam discutidas coletivamente e, chegando a um consenso, o grupo respondia em um pequeno pedaço de papel.

As perguntas elencadas para essa atividade foram:

1. O que é dinheiro para vocês? 2. O que é felicidade para vocês? 3. É possível ser feliz sem dinheiro? 4. É possível ter dinheiro e não ser feliz?

As respostas dos três grupos transcritas do post it constam nas Figuras 1, 2 e 3.

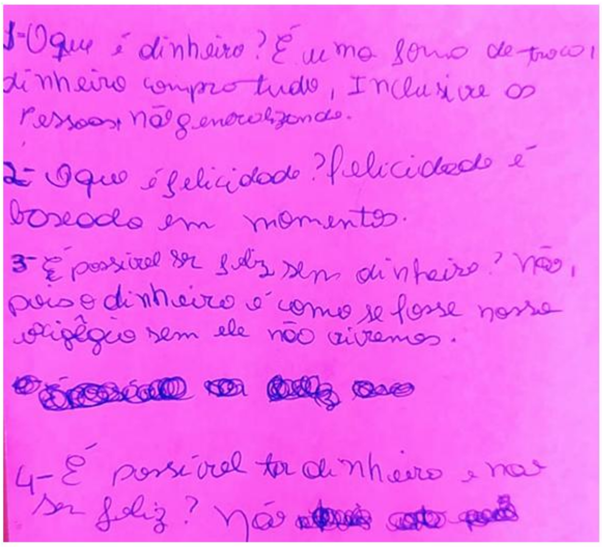
Figura 1: Respostas do grupo 1



1. O que é dinheiro? *É uma forma de troco; dinheiro compra tudo, inclusive as pessoas, não generalizando.*
2. O que é felicidade? *Felicidade é baseado em momentos.*
3. É possível ser feliz sem dinheiro? *Não, pois o dinheiro é como se fosse nosso oxigênio, sem ele não vivemos.*
4. É possível ter dinheiro e não ser feliz? *Não*

Fonte: Acervo dos autores.

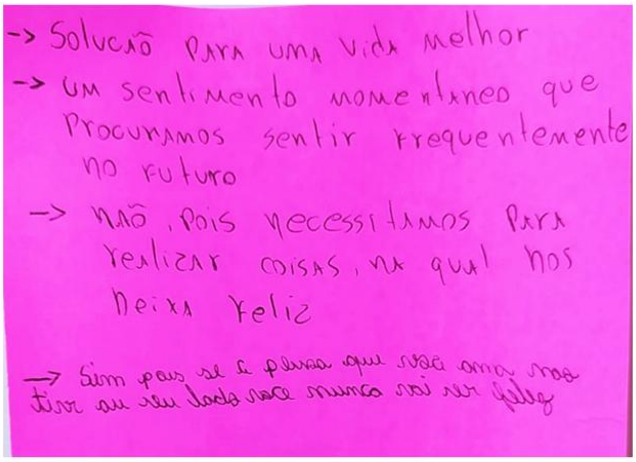
Figura 2: Atividade do grupo 2



1. O que é dinheiro para você? *Felicidade, prazer, tudo.*
2. O que é felicidade pra você? *Não ter preocupação.*
3. É possível ser feliz sem dinheiro? *Sim, felicidade é um sentimento gerado através de momentos independente da situação financeira.*
4. É possível ter dinheiro e não ser feliz? *Sim, é possível. Pois coisas materiais não preenchem algo sentimental que é a felicidade.*

Fonte: Acervo dos autores.

Figura 3: Atividade do grupo 3



1. O que é dinheiro para você? *Solução para uma vida melhor.*
2. O que é felicidade pra você? *Um sentimento momentâneo que procuramos sentir frequentemente no futuro.*
3. É possível ser feliz sem dinheiro? *Não, pois necessitamos para realizar coisas, na qual nos deixa feliz.*
4. É possível ter dinheiro e não ser feliz? *Sim, pois se a pessoa que você ama não ao seu lado você nunca vai ser feliz.*

Fonte: Acervo dos autores.

É interessante observar as respostas dadas a estas questões, pois o grupo parece acreditar que o dinheiro, de fato, compra tudo e sem ele não é possível ser feliz. É claro que é preciso ter algum dinheiro para poder comer, ter um teto, ..., mas, este grupo parece atribuir uma importância maior à falta do dinheiro do que os outros dois grupos, uma vez que concordam que o dinheiro é essencial, pois, precisamos dele para tudo, porém, ter dinheiro não implica em ser feliz.

Ao término de cada questionamento, os grupos eram convidados a expor suas respostas, defendendo seu ponto de vista, explicitando suas ideias e convicções. A participação da turma nesta atividade foi extremamente surpreendente, todos queriam falar e defender seu ponto de vista. O mais interessante é que com a exposição do ponto de vista dos outros grupos, alguns estudantes iam refletindo e mudando suas opiniões.

Ao término desta atividade, assistimos coletivamente ao vídeo: Dinheiro traz felicidade? do canal Nerdologia) https://www.youtube.com/watch?v=fD8VPHGVYU8&ab_channel=Nerdologia). Este vídeo discute a relação entre dinheiro e felicidade, explorando estudos científicos que investigam até que ponto o aumento da renda pode influenciar o bem-estar e a satisfação pessoal. Ele aborda conceitos como a felicidade relativa, a adaptação hedônica, e como experiências podem ser mais satisfatórias do que posses materiais.

Terceiro encontro

Em nosso terceiro encontro, buscamos proporcionar aos estudantes uma reflexão coletiva sobre sua situação financeira atual. Para isso, alguns questionamentos foram feitos e os estudantes puderam falar sobre sua situação financeira naquele momento. Os questionamentos, entre outros, foram os seguintes:

No momento você está:
- Juntando dinheiro para pagar uma dívida?
- Com dívidas e sem saber como pagar?
- Guardando dinheiro para comprar algo que quer muito?
- Vivendo e gastando?
- Fazendo uma poupança para o futuro?
- Trabalhando para ajudar sua família?
- Preocupado por que o dinheiro não sobra?

Foi possível perceber após a discussão que alguns estudantes nunca haviam parado para pensar sobre sua relação com dinheiro. Solicitamos aos estudantes a criação de uma tabela no caderno, anotando tudo que ganhavam e gastavam em um mês. Como tarefa de casa, eles deveriam elencar, dentro dos seus gastos, despesas fixas, variáveis e eventuais, além de elaborar um planejamento de redução de despesas em 5%.

Quarto e quinto encontros

Para o quarto encontro havíamos planejado ir até a sala de tecnologia utilizar planilhas eletrônicas para criar um plano orçamentário com a utilização de fórmulas que facilitam o controle de gastos no mês. No entanto, percebemos que a maioria dos estudantes nunca tinha utilizado uma planilha eletrônica ou até mesmo mexido em um computador; o acesso que eles tinham à tecnologia digital quase sempre era por meio do celular. Diante disso, mudamos os planos. Em sala de aula, com auxílio do projetor, mostramos algumas funcionalidades do *software Excel*, criando exemplos para que os estudantes se familiarizassem com a atividade. Trazemos este fato para evidenciar uma situação bastante corriqueira na ação docente: a necessidade de mudar um planejamento no momento de sua aplicação por problemas que não conseguimos contornar.

Na aula seguinte (quinto encontro), familiarizados com a atividade, os estudantes criaram suas planilhas orçamentárias mensais, nas quais foi pedido que elencassem as receitas (entradas de dinheiro) e as despesas, discriminando despesas fixas, variáveis e eventuais.

Figura 4: Planilha orçamentária do estudante P

planilha orçamentaria do mes				
receita				
salario1	R$ 1.300,00			
fixas				
celular	R$ 300,00			
internet	R$ 110,00			
variaveis				
luz	R$ 100,00		saldo final	R$ 300,00
agua	R$ 150,00			
eventuais				
tenis	R$ 220,00			
camisa	R$ 120,00			
gasto total	R$ 1.000,00			

Fonte: Acervo dos autores.

Figura 5: Planilhas orçamentárias dos estudantes A (à esquerda) e J (à direita)

planilha orçamentaria	
salário 1	R$ 1.200,00
salário 2	R$ 310,00
TOTAL	R$ 1.510,00
despesas	
celular	R$ 190,00
poupupança	R$ 200,00
mercado	R$ 400,00
unha	R$ 120,00
sobrancelha	R$ 50,00
roupas	R$ 100,00
ifood	R$ 190,00
TOTAL	R$ 1.250,00
SALDO FINAL	R$ 260,00

PLANILHA ORÇAMENTAL		
RECEITA		
Salario	R$ 1.500,00	
DESPESAS		
DENTISTA	R$ 109,00	
CELULAR	R$ 100,00	
AGUA	R$ 100,00	
LUZ	R$ 109,00	
NET	R$ 100,00	
TOTAL	R$ 518,00	
DSPZ VAREAVEL		
PIZZA	R$ 69,00	
MERCADC	R$ 550,00	
LANCHE	R$ 50,00	
FARMACI/	R$ 40,00	
ROUPAS	R$ 400,00	
JOGO	R$ 50,00	
TOTAL	R$ 1.159,00	
SALDO TOTAL		-R$ 177,00

Fonte: Acervo dos autores.

Figura 6: Planilha orçamentária dos estudantes R (acima) e M (abaixo)

PLANILHA ORÇAMENTARIA -GUILHERME						
DESPESA FIXA		DESPESA VARIAVEL		DISPESA EVENTUAIS		
DENTISTA	R$ 119,00	AGUA	R$ 250,00	TINTAS	R$ 153,00	
INTERNET	R$ 145,00	CABELO	R$ 20,00	AÇAI	R$ 64,00	
GUARDA ROUPA	R$ 274,00	CARRO	R$ 250,00	HOT DOG	R$ 12,00	TOTAL
TOTAL	R$ 538,00	TOTAL	R$ 520,00	TOTAL	R$ 229,00	R$ 1.287,00
RECEITA	R$ 1.400,00					
		SALDO FINAL	R$ 113,00			

PLANILHA ORÇAMETARIA - MAYCON						
DESPESA FIXA		DESPESA VARIAVEL		despesa EVENTUAIS		
CELULAR	R$ 250,00	LUZ	R$ 600,00	LANCHE	R$ 30,00	
MOTO	R$ 450,00	CABELO	R$ 35,00	CIGARRO	R$ 100,00	TOTAL
GELADEIRA	R$ 180,00	NET	R$ 280,00	TENIS	R$ 450,00	
TOTAL	R$ 880,00	TOTAL	R$ 635,00	TOTAL	R$ 580,00	R$ 2.095,00
RECEITA	R$ 1.490,00	SALDO FINAL	-R$ 605,00			

Fonte: Acervo dos autores.

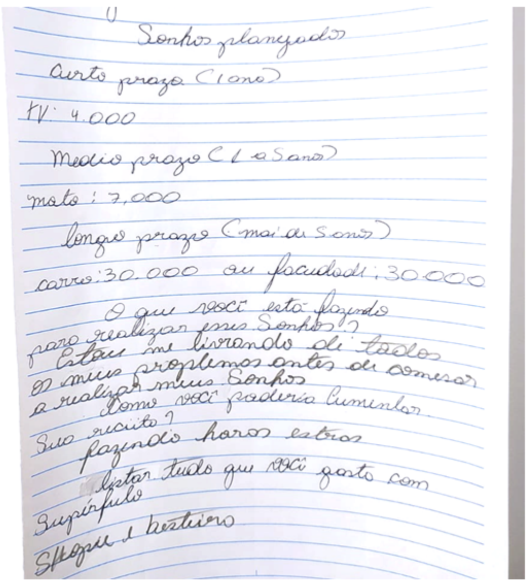
Durante a realização da atividade, muitos estudantes apresentavam dúvidas com a classificação das suas despesas como fixa, variável ou eventual. Íamos conversando e esclarecendo as dúvidas, deixando que os estudantes decidissem como classificá-las. Além dessas dúvidas, era interessante observar a expressão de surpresa deles ao utilizar uma fórmula que some ou subtraia automaticamente os dados lançados na planilha: para eles parecia algo de outro mundo. Percebemos a empolgação durante a realização da atividade. Outro ponto a destacar, era a formatação da planilha depois de finalizada. Muitos queriam deixar o visual agradável, organizando os dados em diferentes cores, por exemplo.

Sexto encontro

No sexto encontro, iniciamos a aula questionando sobre os sonhos "financeiros" que os estudantes tinham a curto, médio e longo prazo elencando-os no caderno e, em seguida, deviam responder às seguintes perguntas, também no caderno:

a) O que você está fazendo para realizar esses sonhos?
b) De que maneira você poderia aumentar suas receitas?
c) Quais supérfluos poderiam ser cortados do seu orçamento?

Figura 7: Sonhos planejados do estudante F



Sonhos planejados

Curto prazo (1 ano)

TV: 4.000

Médio prazo (1 a 5 anos)

Moto: 7.000

Longo prazo (mais de 5 anos)

Carro: 30.000 ou faculdade: 30.000

O que você está fazendo para realizar esses sonhos.

Estou me livrando de todos os meus problemas antes de começar a realizar meus sonhos.

Como você poderia aumentar sua receita?

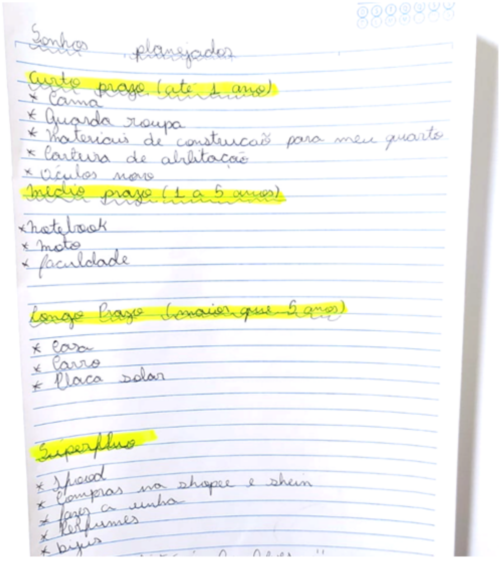
Fazendo horas extras

Listar tudo que você gasta com supérfluos

Shopee e besteira

Fonte: Acervo dos autores.

Figura 8: Sonhos planejados da estudante B



Sonhos planejados

Curto prazo (até 1 ano)

Cama

Guarda-roupa

Materiais de construção para meu quarto

Carteira de habilitação

Óculos novos

Médio prazo (1 a 5 anos)

Notebook, moto, faculdade

Longo prazo (maior que 5 anos)

Casa

Carro

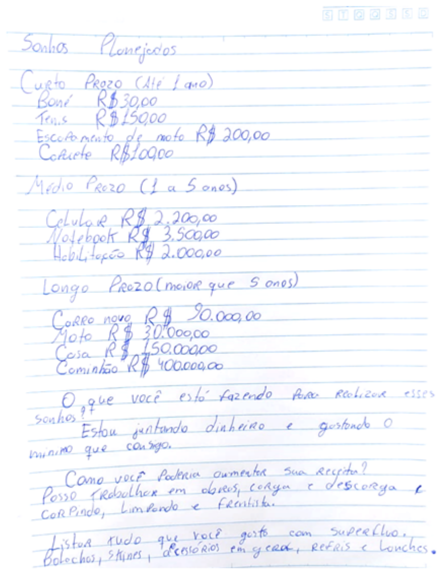
Placa solar

Supérfluo

Ifood, compras na Shopee e Shein, fazer a unha, perfumes, bijus

Fonte: Acervo dos autores.

Figura 9: Sonhos planejados do estudante G



Sonhos planejados

Curto prazo (até 1 ano)

Boné: R$30,00 - Tênis: R$150,00

Escapamento de moto: R$200,00 - Capacete: R$100,00

Médio prazo (1 a 5 anos)

Celular: R$2.200,00 - Notebook: R$3.500,00

Habilitação: R$2.000,00

Longo prazo (maior que 5 anos)

Carro novo: R$ 90.000 - Moto: R$ 30.000,00 - Casa: R$150.000,00

Caminhão: R$400.000,00

O que você está fazendo para realizar esses sonhos.

Estou juntando dinheiro e gastando o mínimo que consigo.

Como você poderia aumentar sua receita?

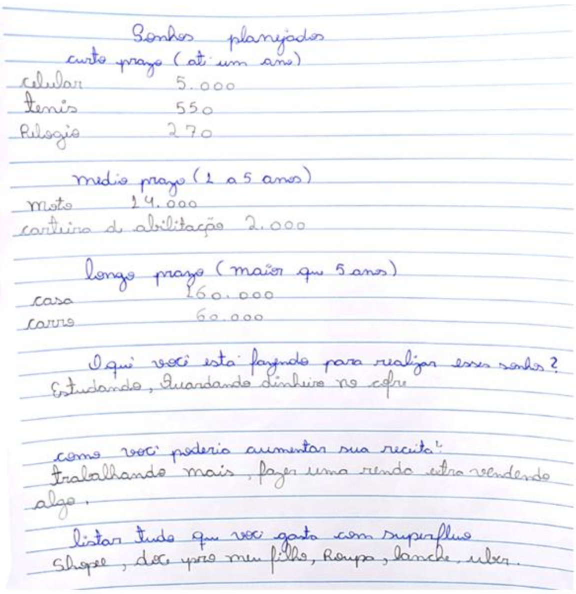
Posso trabalhar em obras, carga e descarga, carpindo, limpando e frentista.

Listar tudo que você gasta com supérfluos

Bolachas, skines, acessórios em geral, refris e lanches

Fonte: Acervo dos autores.

Figura 10: Sonhos planejados da estudante V



Sonhos planejados

Curto prazo (até 1 ano)

Celular: 5.000 - Tênis: 550,00 - Relógio: 270

Médio prazo (1 a 5 anos)

Moto: 14.000 Carteira de habilitação: 2.000

Longo prazo (maior que 5 anos)

Casa: 160.000

Carro: 60.000

O que você está fazendo para realizar esses sonhos.

Estudando, guardando dinheiro no cofre

Como você poderia aumentar sua receita?

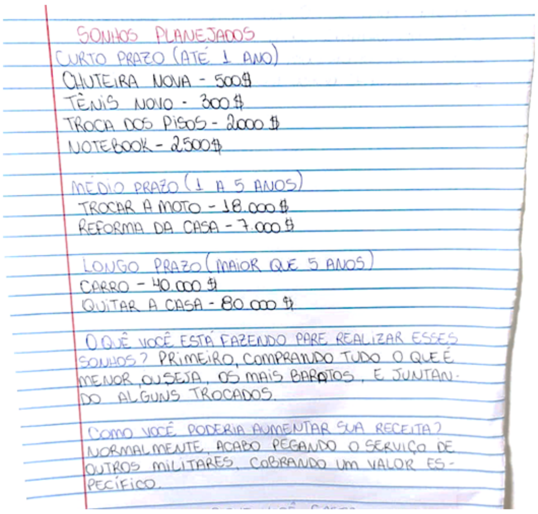
Trabalhando mais, fazer uma renda extra vendendo algo

Listar tudo que você gasta com supérfluos

Shopee, doce pro meu filho, roupa, lanche, Uber

Fonte: Acervo dos autores.

Figura 11: Sonhos planejados do estudante L



Sonhos planejados

Curto prazo (até 1 ano)

Chuteira nova: 500$ - Tênis novo: 300$

Troca dos pisos: 2000$ - Notebook: 2500$

Médio prazo (1 a 5 anos)

Trocar a moto: 18.000$ - Reforma da casa: 7.000$

Longo prazo (maior que 5 anos)

Carro : 40.000$ - Quitar a casa: 80.000$

O que você está fazendo para realizar esses sonhos.

Primeiro, comprando tudo o que é menor, ou seja, os mais baratos, e juntando alguns trocados.

Como você poderia aumentar sua receita?

Normalmente acabo pegando o serviço de outros militares, cobrando um valor específico

Fonte: Acervo dos autores.

Ao final desta atividade foi promovido um debate no qual os estudantes puderam expor suas respostas como quisessem, o que provocou reflexão sobre as respostas individuais. Alguns deles conseguiram perceber que estavam gastando muito com supérfluos, citando gastos com festas, lanches, apostas esportivas e compras em aplicativos diversos. Determinados estudantes disseram não imaginar que estavam gastando tanto dinheiro com coisas que não eram tão importantes assim, e manifestaram o interesse em cortar gastos e até começar a vender algo para aumentar sua renda.

Sétimo encontro

Na última aula antes da avaliação bimestral (8° encontro), solicitamos aos estudantes que pesquisassem respostas às seguintes questões:

> a) Que tipos de empréstimos são mais comuns entre os brasileiros?
> b) Que investimentos eles fariam com o conhecimento que possuem?
> c) Quais os impostos eles conheciam e quais eles gostariam de conhecer um pouco melhor?

Após as pesquisas, fizemos um semicírculo e dialogamos sobre as informações encontradas. Foi surpreendente ver que muitos estudantes já maiores de idade desconheciam muitas informações que pesquisaram. Eles expuseram sua indignação com a carga tributária brasileira e com os juros abusivos cobrados pelos bancos. No entanto, alguns se mostraram entusiasmados com a ideia de ganhar dinheiro de modo passivo por meio de investimentos como tesouro direto ou até mesmo ações.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

A experiência com a realização deste itinerário foi algo totalmente inovador e desafiador para o professor da sala (primeiro autor deste texto). A intenção inicial era discutir os conhecimentos/conceitos da Educação Financeira, mas sem deixar de lado os termos utilizados pela Matemática Financeira. Como este itinerário formativo tinha organização semestral, pensamos em trabalhar no primeiro bimestre com reflexões sobre finanças, proporcionando momentos de reflexão para o planejamento financeiro e uma relação saudável com o dinheiro.

O professor decidiu no início do semestre que os termos e conceitos relacionados à Matemática Financeira seriam discutidos de uma maneira mais aprofundada no segundo bimestre. Como os estudantes se mostravam interessados em discutir os termos, conceitos e/ou questões propostas, neste primeiro momento optamos por fomentar essas discussões sem "cobrar" os cálculos e utilização de fórmulas comuns na Matemática Financeira.

Consideramos essa experiência muito positiva, pois durante as exposições orais de diversos estudantes constatamos a satisfação e o entusiasmo dos jovens em discutir questões que realmente faziam parte do seu dia a dia. Não podemos falar que foi fácil conduzir o itinerário no primeiro bimestre, pois o planejamento dependia da devolutiva dos estudantes durante as discussões. No entanto, foi prazeroso ver a dedicação e participação massiva da turma durante as atividades propostas que, em aulas mais voltadas à "Matemática tradicional", com exposição oral do conteúdo e realização de exercícios, não ocorrem com tanta frequência.

Propiciar um debate aberto em sala de aula, especialmente quando a temática é, no mínimo, espinhosa, pode ser muito desafiador para nós, docentes, afinal podem surgir questões e assuntos com os quais não estamos familiarizados. Entretanto, acreditamos que isso também faz parte da proposta que apresentamos na oficina: nem sempre teremos que ter respostas para tudo que nossos alunos questionarem: formar o cidadão também é ensinar que o mais importante é buscar aprender sempre.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2017c. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 07 nov. 2023.

MATO GROSSO DO SUL (ESTADO). Secretaria de Estado de Educação. **Catálogo de Unidades Curriculares**: itinerários formativos. Organizadores: Helio Queiroz Daher; Davi de Oliveira Santos; Marcia Proescholdt Wilhelms. Campo Grande - MS: SED, 2022.

MATO GROSSO DO SUL (ESTADO). Secretaria de Estado de Educação. **Currículo de Referência de Mato Grosso do Sul:** Ensino Médio e Novo Ensino Médio / Organizadores Helio Queiroz Daher; Davi de Oliveira Santos; Marcia Proescholdt Wilhelms. Campo Grande – MS: SED, 2021. (Série Currículo de Referência; 2).

SILVA, Margareth Brandão Mendes. **Abordagem da Matemática Financeira no Ensino Médio sob a perspectiva da Educação Financeira.** Dissertação de Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense “Darcy Ribeiro”. UENF, Campos Dos Goytacazes – RJ. 2016.

TEIXEIRA, James. **Um estudo diagnóstico sobre a percepção da relação entre Educação Financeira e Matemática Financeira.** Tese de Doutorado em Educação Matemática. São Paulo: PUCSP, 2015.

CAPÍTULO 11

TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS E A PESQUISA EM SALA DE AULA: O CASO DA PRODUÇÃO DE VACINAS NO BRASIL[37]

Oficina 07 no YouTube

Edelweis Jose Tavares Barbosa[38]

Marilena Bittar[39]

Agnes Turra[40]

Público-alvo: Professores da Educação Básica

Objetivo: apresentar uma proposta de trabalho investigativo para o ensino médio com temas contemporâneos transversais, em especial a produção de vacinas no Brasil.

[37] Nesta oficina apresentamos dados da pesquisa de pós-doutorado de Edelweis Jose Tavares Barbosa supervisionado por Marilena Bittar.

[38] Professor Dr. da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE); e-mail: edelweis.barbosa@ufpe.br, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6032-9367

[39] Professora Dra. da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS); e-mail: marilenabittar@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9989-7871

[40] Professora Esp. da rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul (REE/MS); e-mail: agnesturra05@gmail.com, ORCID: https://orcid.org/0009-0008-3915-9971

DOI: 10.46898/rfb.bbe222faa4dd.11

Habilidades dos Itinerários Formativos Associadas às Competências Gerais da BNCC:

- *(EF09MA09)* Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.
- *(EM13MAT302)* Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- *(EM13MAT402)* Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
- *(EM13MAT502)* Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.
- *(EM13MAT503)* Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

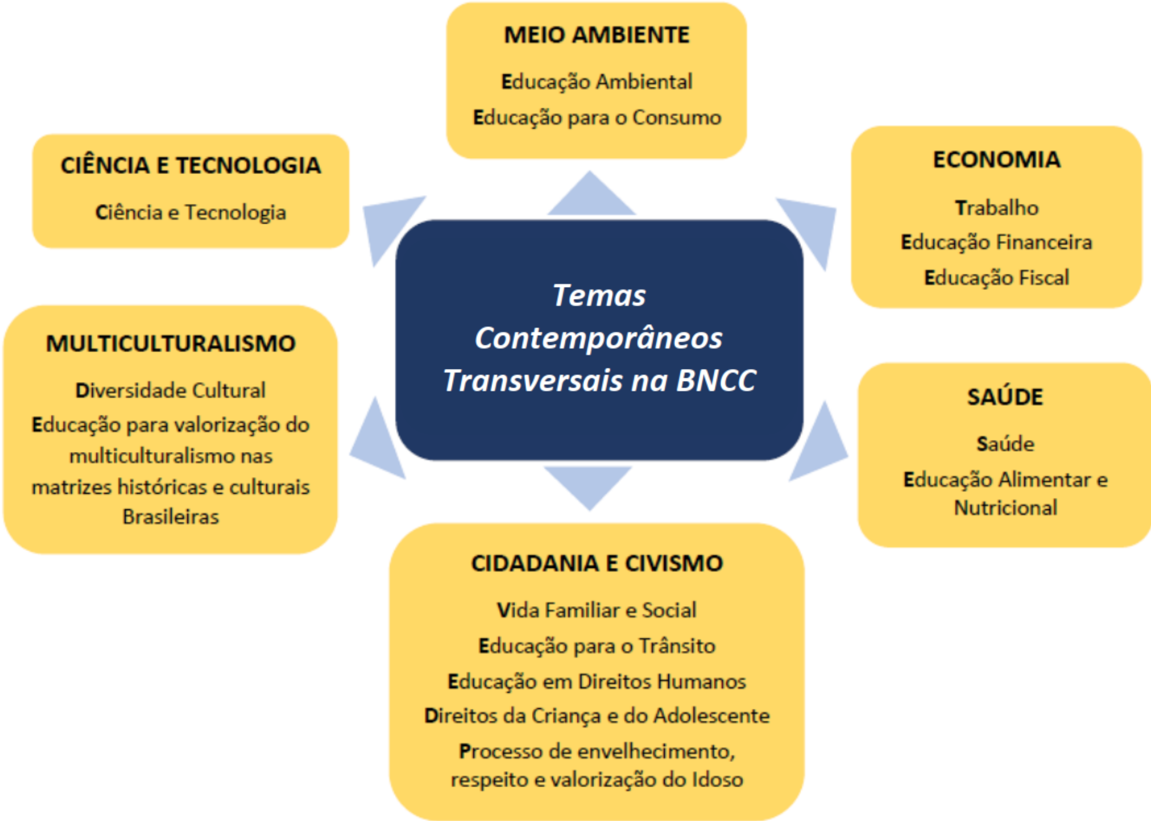
Neste texto apresentamos uma proposta didática que explora temas contemporâneos transversais (TCT) na sala de aula, focando na produção de vacinas por laboratórios brasileiros. Esta abordagem visou correlacionar o ensino da matemática com os temas transversais, conforme os documentos normativos para o ensino na Educação Básica. A proposta foi realizada com 18 licenciandos de uma turma do sexto período de matemática da Universidade Federal de Pernambuco-UFPE, Campus Agreste, no período noturno na cidade de Caruaru-PE. As atividades descritas aconteceram no 1° semestre letivo de 2023, totalizando 8 encontros presenciais de 2 horas/aula. Para isso, partimos do fato de que a produção de vacinas estava em evidência nos noticiários mundiais e visando integrar essa temática ao ambiente de ensino, utilizamos a função polinomial do segundo grau como base para a construção das atividades em sala de aula na Educação Básica.

Em 2023, essa experiência foi apresentada na forma de uma oficina on-line, disponível no canal do *YouTube* do Grupo de Estudos em Didática da Matemática (DDMat), vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFMS. O vídeo completo da oficina, acompanhado pela discussão com os participantes, pode ser acessado pelo link indicado abaixo do título e nas referências. Desejamos que a leitura deste texto, juntamente com a oficina, contribua para o trabalho docente relacionado à temática discutida.

CONTEXTO HISTÓRICO DOS TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS (TCT)

Nos últimos 20 anos vem se consolidando a proposta de uma educação voltada para a cidadania como princípio norteador de aprendizagens (Brasil, 2019). Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) já falavam sobre a inserção de questões sociais como objeto de aprendizagem e reflexão dos alunos da educação básica. Temáticas ligadas a tais questões vinham sendo discutidas e incorporadas às áreas das Ciências Sociais e da Natureza, chegando mesmo, em algumas propostas, a constituir novo campo de estudo como é o caso do tema Meio Ambiente e Saúde. Com a homologação da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2017) pelo Conselho Nacional de Educação (CNE/CP nº 2 de 22 de dezembro de 2017), temáticas antes vistas como temas transversais passaram a fazer parte do currículo como Temas Contemporâneos Transversais (TCT) definidos como sendo "aqueles assuntos que não pertencem a uma área do conhecimento em particular, mas que atravessam todas elas, pois delas fazem parte e trazem a realidade do estudante. [...] são temas que atendem às demandas da sociedade contemporânea." (Brasil, 2019b, p. 7). Os temas transversais são classificados em seis categorias (Figura 1):

Figura 1: Temas transversais contemporâneos na BNCC



Fonte: Temas Contemporâneos Transversais na BNCC (2019a, p. 7)

Podemos observar que as seis categorias temáticas abarcam temas que favorecem uma formação mais global do estudante, como a educação financeira, os cuidados com sua saúde e com o planeta e o respeito ao próximo. Porém, a implementação desta proposta não tem sido fácil. Há muitos questionamentos sobre como fazer a articulação entre um TCT e uma ou mais áreas do conhecimento escolar de forma contextualizada e que tenha significado para os estudantes. Buscando contribuir com docentes preocupados em trabalhar temas contemporâneos transversais com seus estudantes, propusemos a oficina "Temas transversais e a pesquisa em sala de aula: o caso da produção de vacinas no Brasil"[41], sobre a qual discorremos a seguir.

[41] https://www.youtube.com/live/GujH9OzNwkQ?si=JSyLQxaJQw2wjmWZ

COMO DESENVOLVER UM TRABALHO SOBRE TCT? MUDANÇA DE PARADIGMAS

Acreditamos que para o desenvolver um trabalho envolvendo um TCT é importante provocar uma mudança de paradigmas. Usualmente, o estudante tem papel passivo diante do seu processo de aprendizagem: o conteúdo é apresentado pronto para o estudante que deve estudá-lo, apreendê-lo. Porém, é preciso inverter essa lógica; os alunos devem assumir papel ativo no seu processo de aprendizagem e o professor passa a ser mediador deste processo. Uma forma de propor essa mudança é pensar o currículo como um conjunto de questões a serem investigadas pelos estudantes. Tais questões podem ser propostas pelos estudantes ou pelos professores, porém, devem fazer sentido para os estudantes que, na busca por respostas, produzem conhecimentos.

Neste texto, assim como na oficina, relatamos uma experiência vivenciada com estudantes da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, para o quais propusemos a seguinte questão: *Como saber se as vacinas produzidas no Brasil são suficientes para atender a população brasileira conforme o Programa Nacional de Imunização (PNI) preconizado pelo SUS?*

É importante observar que, a princípio, esta questão não parece ter relação com matemática, o que pode deixar os estudantes intrigados: "o que o professor quer nos ensinar?" Como no caso da experiência relatada neste texto o trabalho foi desenvolvido com futuros professores, optamos por iniciar com uma discussão com toda a turma em torno da necessidade de mudança de paradigmas, uma vez que o nosso objetivo era discutir com eles essa nova perspectiva de ensino. Foi essencial apresentar os fundamentos dessa proposta para que eles compreendessem a importância de integrar temas contemporâneos transversais ao ensino da matemática. Porém, para a realização de proposta semelhante com estudantes da educação básica não cabe discussão sobre paradigmas didáticos. Para um trabalho com estudantes deste nível de escolaridade o importante é a ideia de realizar uma proposta de trabalho investigativo, norteado por questões a serem respondidas, pesquisadas pelos estudantes.

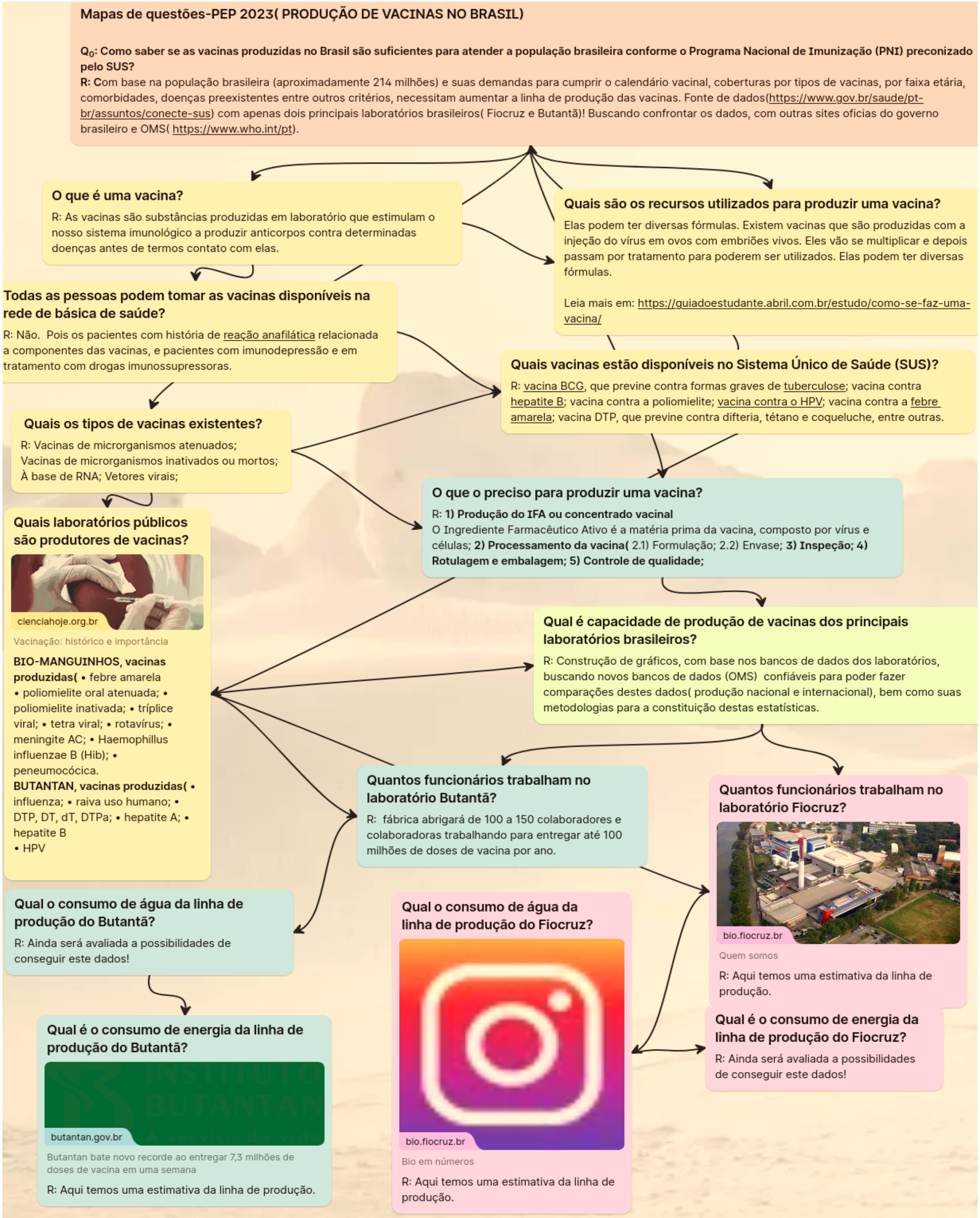
UMA PROPOSTA DE ATIVIDADE INTERDISCIPLINAR

Nesse processo de investigação para a sala de aula na educação básica, o docente desempenha papel fundamental ao propor uma questão inicial para os seus estudantes pesquisarem como, por exemplo, a questão acima. Esta questão inicial, que podemos chamar de questão de pesquisa, deve ser uma questão que não tem uma resposta pronta, ao contrário, deve instigar o surgimento de outras questões. Os estudantes devem explorar as questões, buscar respondê-las/investigá-las de maneira autônoma e o professor deve apenas fazer a mediação da situação não fornecendo respostas. Dessa forma o docente propõe uma questão aberta que, à medida que o estudo avança, surgem novas questões bem como algumas respostas a estas questões. A proposta é desenvolver o estudo dessa forma ao longo de todo o processo. É importante que o docente faça uma análise prévia da questão que está propondo para estudar a sua riqueza (ou não). Não se trata de pensar em todo o caminho que os estudantes percorrerão, mas, de refletir sobre possibilidades, sobre possíveis questões a serem propostas, bem como sobre caminhos a serem percorridos por eles. Esta proposta pode ser caracterizada como uma pesquisa a ser desenvolvida pelos estudantes que irão decidir os caminhos a serem percorridos.

A análise prévia (ou análise a priori) da questão a ser proposta funciona como um guia para orientar e acompanhar a investigação com os estudantes na sala de aula. Considerando que o Brasil é um país de tamanho continental, abrangendo cinco regiões muito diferentes entre si (Norte, Nordeste, Sul, Sudeste e Centro-Oeste), é necessário enfrentar a complexidade de implementar uma proposta como essa. Primeiramente, é preciso saber se a escola é urbana ou rural e se dispõe de recursos tecnológicos ou materiais didáticos adequados. O docente precisará avaliar quais recursos estão disponíveis para trabalhar com os estudantes, adaptando a abordagem às condições específicas de cada contexto educacional. A nossa proposta foi desenvolvida na região nordeste, no interior de Pernambuco, logo, foi adaptada às condições dos estudantes deste local.

Na figura 2 apresentamos nossa análise prévia da questão proposta no trabalho desenvolvido com estudantes da licenciatura. É importante frisar que o desenvolvimento da atividade com os alunos não será exatamente este o caminho percorrido por eles, as questões e respostas serão diferentes, como veremos mais adiante neste texto

Figura 2: Mapa de questões e respostas *a priori*[42]



Fonte: Acervo dos autores.

[42] O Mapa de questões e respostas é uma ferramenta metodológica proposta a partir da teoria antropológica do didático, desenvolvida por Chevallard (2013).

Para iniciar o trabalho com os licenciandos, propusemos que assistissem ao vídeo intitulado "Afinal, o que é uma vacina?"[43], com duração de aproximadamente quatro minutos. O vídeo aborda o sistema imunológico, os diferentes tipos de imunidade e o mecanismo pelo qual as vacinas combatem doenças. Após a exibição, promovemos um debate para refletir sobre a questão inicial (Q_0), também chamada questão geratriz, estimulando a discussão e a troca de conhecimentos entre os participantes.

Q_0: Como saber se as vacinas produzidas no Brasil são suficientes para atender a população brasileira conforme o Programa Nacional de Imunização (PNI) preconizado pelo SUS?

Esta questão pode favorecer a exploração de diversos aspectos que envolvem tanto a capacidade produtiva dos laboratórios brasileiros, quanto a distribuição desses imunobiológicos. Além de refletir a preocupação com a disponibilidade de vacinas, ela levanta questões sobre a eficácia da produção nacional em atender as demandas da população brasileira, conforme as diretrizes do sistema de saúde pública.

Além disso, ao investigar essa temática, é possível relacioná-la com temas transversais na sala de aula, enriquecendo o debate e permitindo maior compreensão dos desafios e soluções relacionados à imunização no contexto brasileiro. Por exemplo, ao discutir a produção de vacinas, os estudantes podem explorar aspectos matemáticos como a modelagem da curva de oferta e demanda, o cálculo de percentuais de cobertura vacinal necessários para atingir a imunidade de rebanho, e a análise de dados estatísticos sobre a eficácia das vacinas.

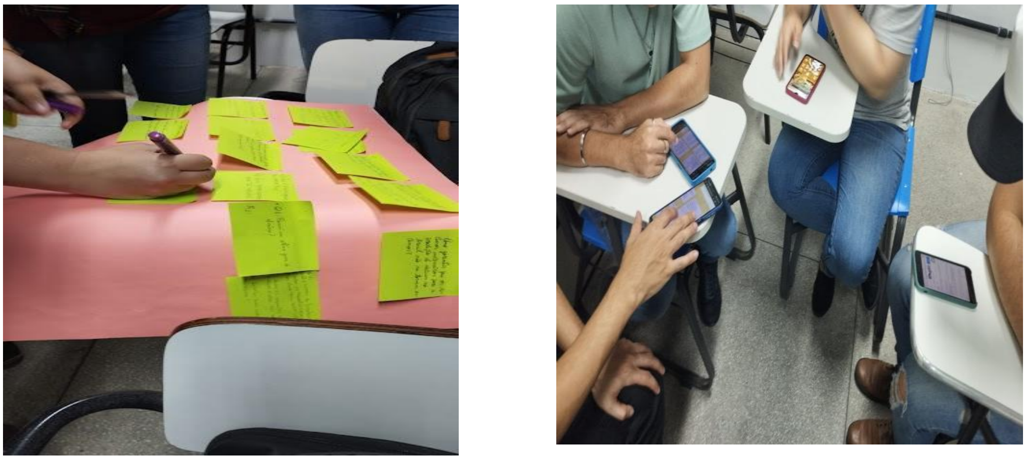
Essa abordagem multidisciplinar que articula o trabalho em sala de aula entre diferentes áreas do conhecimento, como biologia, química, sociologia e geografia, pode incluir a análise de dados estatísticos em aulas de matemática, permitindo que os estudantes interpretem gráficos e tabelas sobre a cobertura vacinal e a eficácia das campanhas de imunização. Em história pode-se discutir a evolução das políticas de saúde pública no Brasil e o impacto das vacinas ao longo do tempo. Já em ciências sociais, debates sobre a ética na distribuição de vacinas e a importância da vacinação para a saúde coletiva podem ser explorados. Ao integrar esses temas, os estudantes não apenas ganham uma visão holística

[43] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=6y-aPMwljag

dos desafios enfrentados pelo Programa Nacional de Imunização (PNI), mas também desenvolvem habilidades críticas e reflexivas essenciais para uma postura cidadã ativa.

Após o momento inicial, os estudantes iniciaram o trabalho, durante o qual diversos materiais foram mobilizados por eles. (Figura 3).

Figura 3: Construção de novas questões por meio manual e digital



Fonte: Acervo dos autores.

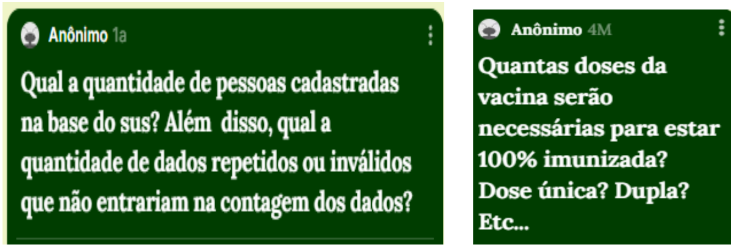
Para realizar o trabalho em sala de aula, optamos por dividir a turma em dois grupos, cada um com nove integrantes, correspondendo aos dois laboratórios brasileiros que produzem vacinas para atender as demandas do SUS, Fiocruz e Butantan. Em seguida, solicitou-se que cada licenciando lesse as perguntas formuladas no primeiro encontro. Cada grupo recebeu uma cartolina e um bloco de *post-its*[44] para registrar as perguntas e respostas do grupo. Devido ao tempo limitado para interagir com os licenciandos e visando estruturar e melhorar os próximos encontros, além de evitar a perda de informações de cada grupo, optamos por utilizar o *Google Classroom* como plataforma virtual para a comunicação entre os grupos e o armazenamento dos dados de pesquisa.

Inicialmente, é importante destacar que os dois grupos realizaram debates e apresentaram novas perguntas (Figura 4), discutindo sua importância e utilidade pública tanto para a população brasileira quanto globalmente. Houve também preocupação em compreender a eficácia das vacinas tanto no âmbito nacional quanto internacional. Além

[44] Optamos pelo uso *post-its* para que estes dessem maior flexibilidade aos trabalhos dos estudantes, uma vez que poderiam mudar a organização do mapa de questões sempre que desejassem.

disso, ambos os grupos manifestaram interesse em obter dados precisos sobre a população brasileira para garantir a aquisição e distribuição adequada das doses.

Figura 4: Questionamentos suscitados pelos licenciandos nos grupos



Fonte: Acervo dos autores.

Foi observado que os licenciandos exploraram conteúdos de outras disciplinas além da matemática, como química, geografia humana, ciências sociais, biologia, durante a investigação. No entanto, essas disciplinas não foram completamente exploradas devido às limitações como o tempo disponível para implementar o projeto em sala de aula e o fato de ser a primeira experiência dos estudantes com este tipo de projeto. Com isso, alguns dos conhecimentos necessários para responder às questões levantadas estavam fora do escopo tanto do docente quanto dos licenciandos. Abrimos um parêntesis aqui para refletir junto com você professor, professora, sobre a possibilidade de realização de um projeto integrador a ser desenvolvido no ensino médio, por exemplo, envolvendo professores de diferentes disciplinas, na carga horárias destinada aos itinerários formativos, conforme proposto pelas diretrizes curriculares nacionais para o ensino médio (DCNEM). Neste texto a questão a ser investigada foi relativa à produção de vacinas, mas outras questões que você julgar pertinente podem ser propostas e desenvolvidas seguindo esta mesma metodologia.

Destacamos ainda que, ao longo deste processo investigativo, é fundamental que o docente, ao aplicar esta proposta metodológica de ensino que se baseia em um processo investigativo e colaborativo, incentive sempre os discentes a explorar, pesquisar e construir conhecimento de forma ativa e contínua. Para o desenvolvimento desta proposta, ressaltamos alguns movimentos que consideramos essenciais.

1) Realização de trabalhos em grupo para que seja fomentado o debate. Neste trabalho os estudantes atuam coletiva e individualmente: cada estudante investiga uma parte do trabalho, porém o resultado do trabalho individual deve ser discutido com o grupo e as decisões devem ser tomadas coletivamente. No nosso estudo os

licenciandos dividiram-se em dois grupos, com cada membro buscando informações e/ou relatórios pertinentes ao seu tema. Para isso, utilizaram os bancos de dados disponibilizados pelos respectivos laboratórios, pelo Ministério da Saúde, pela Organização Mundial da Saúde (OMS) e por fontes da mídia impressa ou digital.

2) Pesquisas em diferentes mídias e confrontação com informações obtidas para verificar a veracidade dos dados obtidos. Os estudantes buscam respostas em diversas mídias, como livros e sites, e precisam ter meios para validar os dados encontrados que são respostas às questões que estão procurando. Em nosso estudo, este movimento ocorreu por meio de pesquisas on-line em sites dos laboratórios produtores de vacinas e do Sistema Único de Saúde (SUS). Cada grupo elaborou novos questionamentos e respostas (Figuras 3 e 4) pesquisando em diferentes fontes. Com base nesses questionamentos e respostas, os licenciandos exploraram temas matemáticos como a função polinomial do segundo grau. Com isso, eles foram desafiados a resolver problemas, investigar e identificar padrões de representações de funções quadráticas, bem como a analisar os pontos de máximo e mínimo. Esse enfoque matemático permite que os estudantes desenvolvam habilidades críticas e analíticas, essenciais para a compreensão e resolução de questões complexas na produção e distribuição de vacinas.

Durante o desenvolvimento dessa fase, os estudantes se dedicaram à pesquisa, desencadeando um processo detalhado de formulação de novas perguntas e respostas parciais, conforme ilustrado na Figura 4. Ao formular novas perguntas e encontrar respostas para ela, que não são ainda a resposta à pergunta inicial, os estudantes são incentivados a explorar diferentes perspectivas e a aprofundar seu entendimento sobre o tema. Isso não só enriquece o processo de aprendizagem, como também promove a habilidade de pensar criticamente e resolver problemas complexos.

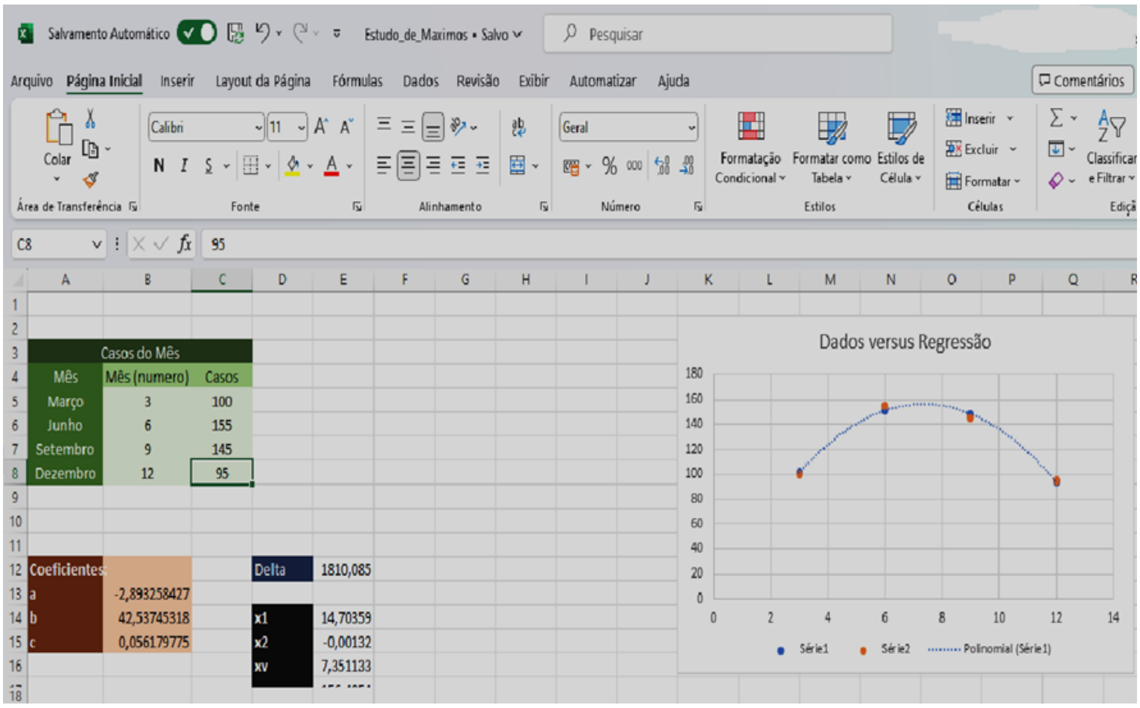
Essa abordagem desperta a curiosidade dos estudantes e mais ainda, destaca a necessidade de realização de projetos interdisciplinares e transversais, conforme preconizam os documentos oficiais brasileiros. Durante o desenvolvimento do projeto, surgiram diversas questões envolvendo diferentes áreas do conhecimento. Por exemplo, a necessidade de determinadas substâncias para a produção de vacinas envolve a biologia e a química (Figura 5); as diferenças regionais do país, as distâncias a serem percorridas e o contexto geográfico brasileiro são questões fundamentais para pensar a distribuição das vacinas a toda a população que envolvem a geografia além de questões da área de ciências humanas.

Figura 5: Questionamentos suscitados pelos licenciandos nos grupos

Fonte: Acervo dos autores.

Por fim, os dados foram modelados matematicamente utilizando uma planilha do Excel com a função SOLVER. Essa ferramenta foi empregada para analisar a produção anual de vacinas, e pode ser ajustada para diferentes contextos ou aplicações, como o monitoramento de linhas de produção em laboratórios, conforme exemplificado na Figura 6.

Figura 6 – Dados referentes à produção mensal das vacinas



Fonte: Acervo dos autores.

Ao integrar informações de fontes confiáveis como o Ministério da Saúde, o censo da população brasileira e os laboratórios, e ao avançar na modelagem matemática, os grupos chegaram à conclusão que a produção de vacinas envolve múltiplas variáveis, como os gastos associados à pesquisa, desenvolvimento e custos de produção, além da logística de distribuição. A conclusão dos grupos em relação à questão principal é dada na figura 7.

Figura 7: Respostas da final da questão geratriz

Grupo 01	Grupo 02
Até o dia 04/04/2023, foram aplicadas no Brasil 511.082.927 doses de vacinas contra COVID-19. Deste total a Fiocruz atendeu apenas 153.268.544 doses. Pelos dados, já podemos observar que a instituição Fiocruz não conseguiria atender, nas condições atuais, a produção de vacinas para atender toda a população brasileira de acordo com o total de doses aplicadas. O custo para atender toda a demanda ficaria em mais de 15 bilhões, se considerarmos o custo de cada dose a R$ 30,00.	Ao realizar esse processo, notamos que existia certa dificuldade em encontrar informações sobre as vacinas, como: valor, quantidade de vacinas produzidas em determinado ano, dados sobre a eficácia das vacinas. Contudo, vale reiterar que a vacina do COVID foi uma das únicas com tamanha facilidade em mecanismos de pesquisa, sendo possível notar que, esses mecanismos 'excluíram' outras vacinas que não fossem a do COVID. Mesmo com ampliação do instituto Butantan não seria possível atender a produção de vacinas para imunizar a população brasileira.

Fonte: Acervo dos autores.

Após a familiarização com a proposta lançada em uma turma, observamos avanços na aplicação deste dispositivo didático, tornando-se uma ferramenta poderosa para transformar a realidade na sala de aula. Ao propor o desenvolvimento de um projeto que visa estabelecer um novo paradigma, no qual os estudantes sejam ativos e autônomos, invertemos a lógica usual que consiste basicamente em responder perguntas sem questioná-las: agora iniciamos com uma questão geratriz, na qual os licenciandos/ discentes exploram novos questionamentos e descobrem novas respostas ao longo do percurso da pesquisa.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Nesta oficina, nosso objetivo foi apresentar uma proposta sobre os *temas contemporâneos transversais (TCT) e a pesquisa na sala de aula: o caso da produção de vacinas no Brasil*. Embora inicialmente direcionada a licenciandos em formação inicial, a oficina foi concebida especialmente para ser aplicada na educação básica, como pode ser visto no vídeo. Com isso, podemos destacar que o trabalho com este dispositivo didático favorece a integração com as demais áreas do conhecimento, tornando-se um recurso pertinente para se trabalhar na sala de aula.

Essa oficina oferece novas possibilidades para a educação básica, motivadas pelos objetivos de uma pesquisa, ou um projeto para ser desenvolvido na sala de aula por professores, bem como pelas informações obtidas ao longo do processo. Portanto, é fundamental envolver professores de diversas áreas do conhecimento para responder às novas questões que surgem. Essa cooperação interdisciplinar não apenas enriquece as análises realizadas, mas também promove uma abordagem abrangente e integrada no avanço do conhecimento, beneficiando tanto os discentes quanto os educadores ao proporcionar novas experiências educacionais na sala de aula.

REFERÊNCIAS

AFINAL, o que é uma vacina (versão reduzida). [*S. l.:S. n.*], 1 vídeo (4 min 07 s). Publicado pelo canal Minuto vacina, 23 abr. 2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=6y-aPMwljag . Acesso em: 12 mar. 2023.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2017c. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 20 mai. 2023.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC. 1998.

BRASIL. Temas Contemporâneos Transversais na BNCC: Contexto Histórico e Pressupostos Pedagógicos. Brasília: MEC, 2019b. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 18 mai. 2023.

BRASIL. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC**: Proposta de Práticas de Implementação. Brasília: MEC. 2019a. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 18 mai. 2023.

CHAACHOUA, H., BITTAR, M. Paradigmas, avanços e perspectivas. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**. v.9, n.1, 2019. https://periodicos.ifs.edu.br/periodicos/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/297

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. Journal of Research in Mathematics Education, 2(2), 161-182.

SOBRE AUTORES

Agnes Turra

Licenciada em Matemática pela Universidade Anhanguera - Uniderp, Bacharela em Turismo pela Faculdade de Ciências Gerenciais de Dracena, Especialista em Matemática, suas Tecnologias e o Mundo do Trabalho pelo Centro de Educação Aberta e a Distância (CEAD/UFPI), Especialista em Metodologia do Ensino da Matemática pela Faculdade Estácio. É professora estadual em Mato Grosso do Sul, foi coordenadora de área de matemática e atualmente é professora coordenadora de práticas inovadoras e coordenadora do projeto "Ecos do Silêncio: Violência Doméstica e Feminicídio - Análise e Intervenções" da FUNDECT.

Alexandre Luis de Souza Barros

Possui graduação em Licenciatura em Matemática; mestrado em Educação e doutorado em Educação Matemática e Tecnológica, todos pela Universidade Federal de Pernambuco. Tem experiência na área de Educação, com ênfase na Didática da Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: grandezas, geometria, laboratório, jogos matemáticos. Professor do Colégio Agrícola Dom Agostinho Ikas da Universidade Federal Rural de Pernambuco (CODAI - UFRPE), onde leciona matemática no ensino médio e em cursos da Educação Profissional, desde 2005.

Cintia Melo dos Santos

Professora adjunta da Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD). Graduada em Matemática pela UFGD, possui Especialização em Educação Matemática e é Mestre em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEduMat) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). Concluiu o doutorado em Educação Matemática também pela UFMS. Atua como professora no Programa de Pós-Graduação stricto sensu em Educação Científica e Matemática (mestrado profissional) da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS). Tem experiência na área de Educação Matemática, com ênfase em pesquisas sobre Didática da Matemática e formação de professores. É membro do Grupo de Pesquisa em Didática da Matemática (DDMat).

Douglas Willian Nogueira de Souza

Nortista, preto e indígena não aldeado. Professor que ensina Matemática, preocupado com os processos comunicativos que acontecem em sala de aula. Doutorando em Educação Matemática na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS. Mestre em Ensino de Ciências e Humanidade e graduado em Ciências: Matemática e Física, ambos, pela Universidade Federal do Amazonas - UFAM. Tradutor e intérprete de língua brasileira de sinais pela ACELIBRAS. Membro do Grupo de Estudos em Didática da Matemática da UFMS (DDMat)

Edelweis Jose Tavares Barbosa

Doutor em Ensino das Ciências e Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco e pós-doutor pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. Atualmente, é professor do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco. Integra os Programas de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da UFPE e Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. É membro do Grupo de Estudos em Didática da Matemática da UFMS e líder do Núcleo de Pesquisa, Extensão e Formação Docente do Agreste Pernambucano. Também integra o GT-14 da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

Janielly Taila dos Santos Verbisck

Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul e doutora em Educação Matemática pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul e pela Universitat de Barcelona (em regime de cotutela). Professora associada na Universitat Ramon Llull, Barcelona. Membro do Grupo de Estudos em Didática da Matemática (DDMat/UFMS) e do GT 14 - Didática da Matemática (SBEM).

Jessé Fragoso da Cruz

Professor, poeta, palestrante, educador social e especialista em Educação Integral. idealizador e coordenador do Projeto Princesas, uma tecnologia social que desde 2014 tem atendido e promovido a transformação de meninas em situação de risco e vulnerabilidade social nas periferias de Campo Grande - MS. Atualmente desenvolve o papel de Subsecretário de Políticas Públicas para Juventude de Mato Grosso do Sul.

Jéssica Serra Corrêa da Costa

Jéssica é professora de matemática e acredita na importância de compreender a realidade dos estudantes para promover uma formação cidadã. Com um olhar atento aos contextos sociais e às condições que contribuem para o atraso escolar, Jéssica tem se dedicado a discutir sobre esses desafios. Também é integrante do DDMat e, atualmente, exerce a função de assessora educacional na Coordenadoria de Modalidades Específicas, na Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso do Sul. É doutora e mestre em Educação Matemática pelo do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEduMat) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

Jhonattan Gonçalves de Araújo

Mestre em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (PPGEduMat/UFMS). É professor nas redes municipal e estadual de ensino de Campo Grande/MS, e desde 2022 atua como técnico na Secretaria Municipal de Educação de Campo Grande/MS. É Membro do Grupo de Estudos em Tecnologia e Educação Matemática (GETECMAT) da UFMS. Nascido e criado em Campo Grande/MS, enxergou na educação a possibilidade de uma vida melhor.

José Luiz Magalhães de Freitas

Possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (1976), mestrado em Matemática pela Universidade de São Paulo (1982), doutorado em Didática da Matemática – Université de Montpellier II (1993). É professor pesquisador sênior, atuando no programa de pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Desde 2018 é professor permanente do programa de pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Anhanguera-UNIDERP, em Campo Grande-MS. É integrante do Grupo de Pesquisa em Didática da Matemática da UFMS (DDMat).

Katy Leão

Licenciada em matemática pela Universidade Federal de Pernambuco, mestre em Educação Matemática e Tecnológica pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC) também pela UFPE, doutora em Educação Matemática pelo do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEduMat) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. É professora da rede estadual de ensino de Pernambuco (SEE-PE), membro do Grupo de Estudos em Didática da Matemática da UFMS (DDMat) e do GT-14 de Didática da Matemática da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

Marilena Bittar

Professora Titular Sênior do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFMS. Pesquisadora Produtividade Pesquisa do CNPq. Graduada em Matemática- Licenciatura Plena pela UFMS, mestre em Matemática pela Universidade de Brasília, doutora em Didática da Matemática pela Universidade Joseph Fourier / Grenoble I, França e pós doutora em Educação Matemática pela Universidade Grenoble-Alpes. É membro do GT 14 (SBEM) - Didática da Matemática, é líder do DDMat - Grupo de Estudos em Didática da Matemática.

Renan Gustavo Araújo de Lima

Professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul - Campus Coxim. Doutor em Educação Matemática no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática na UFMS (2021). Licenciado em Matemática (2013) e mestre em Educação Matemática (2013) na UFMS. Trabalha em pesquisas na linha de pesquisa de Ensino e Aprendizagem, com o enfoque na aprendizagem de alunos e na formação de professores. Integrante do DDMat - Grupo de Estudos em Didática da Matemática.

Rosane Corsini Silva

Professora do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul - Campus Campo Grande. Doutora em Educação Matemática no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática na UFMS (2023). Licenciado em Matemática (2001) e mestre em Educação Matemática (2008) na UFMS. Trabalha em pesquisas na linha de pesquisa de Ensino e Aprendizagem. Integrante do DDMat - Grupo de Estudos em Didática da Matemática.

Susilene Garcia Oliveira

Professora adjunta da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, mestre e doutora em Educação Matemática, também, pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Membro do Grupo de Estudos em Didática da Matemática (DDMat/UFMS) e do GT 14 - Didática da Matemática (SBEM).

Tatiani Garcia Neves

Licenciada em Matemática pela Universidade Federal da Grande Dourados, especialista em Educação Matemática pela Faculdade Iguaçu, mestre e doutora em Educação Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Professora efetiva da Educação Básica, área de Matemática, na Rede Municipal de Ensino de Dourados/MS. Membro do Grupo de Estudos em Didática da Matemática (DDMat/UFMS) e do GT 14 - Didática da Matemática (SBEM).

Vitoria Lourenço Luges Da Silva

Mestre em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (PPGEduMat/UFMS), é professora na rede estadual de ensino de Mato Grosso do Sul. Graduada em Matemática - Licenciatura pela UFMS. Membro do Grupo de Estudos em Didática da Matemática (DDMat) e do Grupo de Estudos do Cálculo do Ensino Médio e Superior (GECEMS) da UFMS.

DIÁLOGOS SOBRE PROPOSTAS DIDÁTICAS EM MATEMÁTICA
Volume 2

O E-book Diálogos sobre propostas didáticas em Matemática – Volume 2 reúne e aprofunda discussões, propostas didáticas e reflexões sobre o ensino de diferentes conteúdos de Matemática para a Educação Básica, com potencial de aplicação em sala de aula e de reflexão na formação continuada. Os textos são resultados de oficinas online promovidas pelo Grupo de Estudos em Didática da Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (DDMat-UFMS), realizadas em 2022 e 2023, com participação de professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Os textos abordam temas variados, como geometria, operações numéricas, grandezas e medidas, números decimais, combinatória, estatística, geometria analítica e educação financeira, entre outros.

RFB Editora
CNPJ: 39.242.488/0001-07
91985661194
www.rfbeditora.com
adm@rfbeditora.com
Tv. Quintino Bocaiúva, 2301, Sala 713, Batista Campos, Belém - PA, CEP: 66045-315

9 786553 371248 >