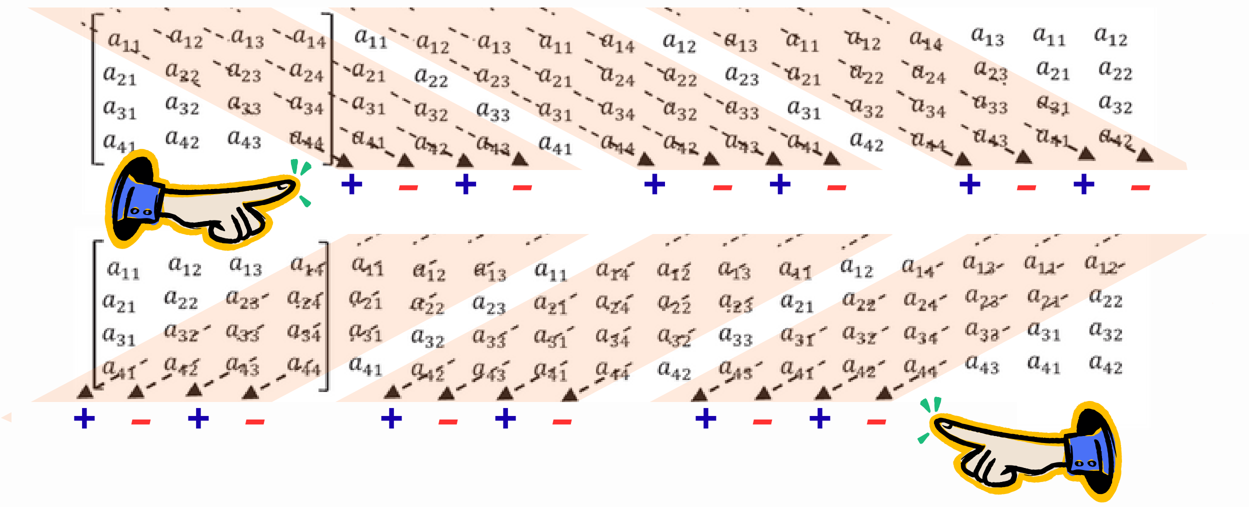
Ufac

Um método alternativo para o cálculo de determinante de matrizes de ordem 4x4

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{14}(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$



PROFMAT

Universidade Federal do Acre
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

ORGANIZAÇÃO
José Arteiro da Frota Neto
Sérgio Brazil Júnior

PROJETO GRÁFICO E EDITORAÇÃO
José Arteiro da Frota Neto

REDAÇÃO
José Arteiro da Frota Neto

REVISÃO
Nicole Albuquerque da Silva

IMAGENS
Repositórios da internet

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central da UFAC

N384u Neto, José Arteiro da Frota, 1994 –
Um método alternativo para o cálculo de determinante dematrizes de ordem 4x4 / José Arteiro da Frota Neto: Dr. Sergio Brazil Junior. - 2025.
73 f.: il.; 30 cm.

Produto educacional (Mestrado) – Universidade Federal do Acre, Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Rio Branco, 2025.
Inclui referências bibliográficas e anexos.

1. Determinantes. 2. Método alternativo. 3. Ensino Médio. I. Junior, Sergio Brazil (orientador). II. Título.

CDD: 621

Bibliotecário: Uéliton Nascimento Torres CRB-11º/1074.

PREFÁCIO

O estudo de Determinantes de matrizes de ordem 4x4 representa um ponto de inflexão no currículo de Matemática do Ensino Médio. Embora essencial para a compreensão de conceitos avançados em Geometria Analítica e para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, a complexidade do cálculo tradicional, baseado no Teorema de Laplace (expansão por cofatores), frequentemente se torna um obstáculo.

Esta Cartilha é um produto educacional para o Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e tem o propósito de apresentar e detalhar o Método das Flechas (também conhecido como Método de Brazil), uma técnica desenvolvida pelo Professor Dr. Sérgio Brazil, da Universidade Federal do Acre (UFAC). O Método das Flechas oferece um atalho visual e sistemático para a resolução de determinantes de ordem 4, reproduzindo a lógica da paridade das permutações de Laplace, mas de forma direta e intuitiva.

Esperamos que este material sirva como um valioso instrumento didático, permitindo que professores e alunos abordem o tema de determinantes 4x4 com maior confiança e eficiência, transformando um ponto de dificuldade em uma oportunidade de domínio da Álgebra Linear.

Um pouco de historia ....

A ideia de determinante não nasceu pronta. Ela foi crescendo ao longo da história, como uma árvore antiga que foi recebendo galhos de vários matemáticos diferentes.

Tudo começa com problemas reais

Lá na Antiguidade — Egito, Babilônia e China — já existiam problemas que hoje chamamos de sistemas de equações.

Eles ainda não tinham letras e símbolos. Era tudo feito com palavras e passos: “faça isso, depois aquilo...”

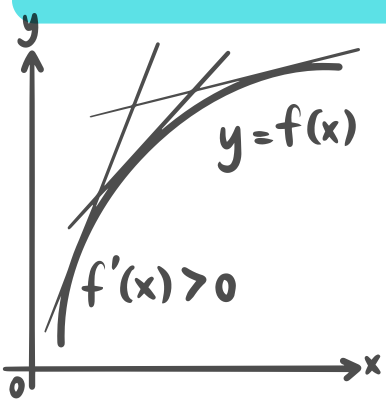
Eles sabiam resolver, mas não tinham uma teoria por trás. Era tudo bem prático.

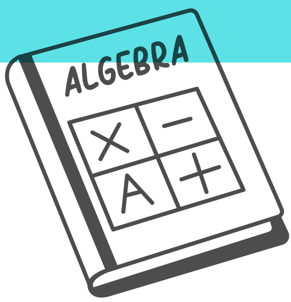
Tábua de argila em escrita cuneiforme com símbolos numéricos indicando transações comerciais.

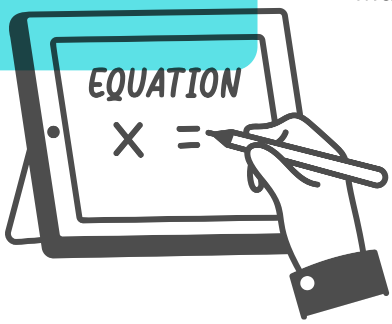
Al-Khwarizmi aparece

Na matemática islâmica, Al-Khwarizmi deu um passo enorme ao criar métodos mais organizados para resolver equações.
Ele introduziu ideias que hoje chamamos de álgebra.
Mas determinantes, como conhecemos, ainda não existiam.

Abu Jafar Maomé ibne Muça Alcuarismi







Leibniz organiza a coisa

Gottfried Wilhelm Leibiniz, co-inventor do cálculo

Em 1693, Leibniz faz o primeiro passo realmente formal.
Ele cria uma regra clara para combinar coeficientes das equações — isso é basicamente o "esqueleto" do determinante moderno.
Ele também estabelece o padrão de sinais positivos e negativos.

Seki Kõwa (no Japão) trabalha a mesma ideia sozinho

No Japão, Seki criou algo muito parecido com determinantes, mas ninguém no Ocidente sabia. Ele inventou seu próprio método para resolver sistemas, praticamente antecipando descobertas europeias.

Seki Kõwa

Cramer transforma tudo em fórmula

Gabriel Cramer

Em 1750, Cramer cria a famosa Regra de Cramer, que usa determinantes para resolver sistemas lineares.

Isso popularizou de vez o conceito.

Com ele, resolvendo sistemas virou algo elegante e direto.

Laplace e Cauchy dão o toque final

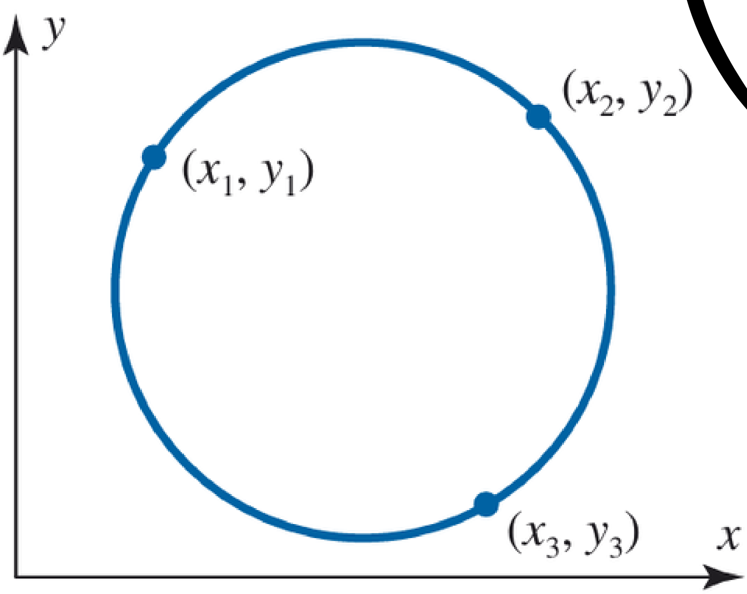
Laplace cria a expansão por cofatores — que até hoje é ensinada.

Cauchy organiza tudo com rigor e dá uma forma moderna à teoria.

Augustin-Louis Cauchy.

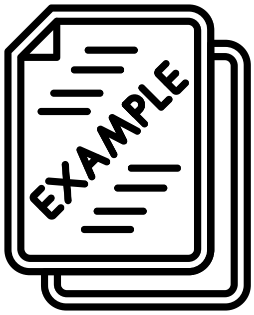
O Determinante e a Geometria: A Magia da Circunferência!

Você sabe que, dados três pontos que não estão em linha reta, existe um único círculo que passa por todos eles? Na Geometria Analítica, achar a equação dessa circunferência dá um baita trabalho! Mas, com a ajuda dos determinantes, isso vira mágica.



Essa é a equação da circunferência em forma de determinante.

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Encontre a equação do círculo que passa pelos três pontos (1, 7), (6, 2) e (4, 6).

Substituindo as coordenadas dos três pontos na equação, obtemos:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 50 & 1 & 7 & 1 \\ 40 & 6 & 2 & 1 \\ 52 & 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Agora, basta calcular o determinante de ordem 4.

Cálculo do determinante de ordem 4

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} \end{bmatrix},$$

para calcular o determinante dessa matriz pela expansão do cofatores (Método de Laplace), ao longo da primeira linha, teremos:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix} =$$

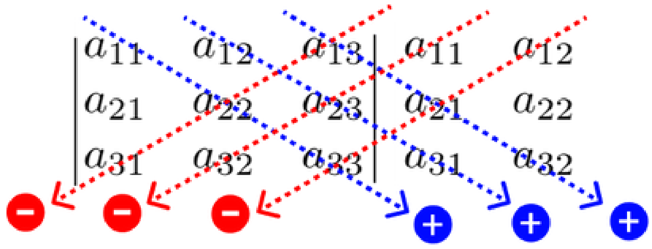
$$a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{14}(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

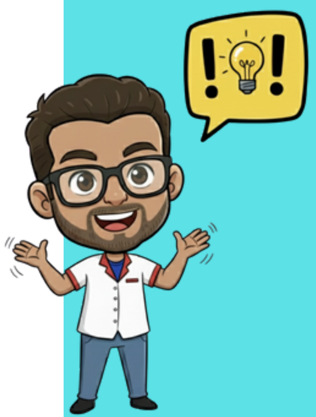
Um método alternativo para o cálculo do determinante de ordem 4

Existe um procedimento para calcular o determinante de uma matriz de ordem 4, análogo ao do cálculo de determinante de ordem 3 pela regra de Sarrus?

Regra de Sarrus



$$detA = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}$$
$$-a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33}$$



Existe um método inovador para a resolução do determinante de matrizes de ordem 4x4 que foi desenvolvido pelo Professor Dr. Sérgio Brazil, da Universidade Federal do Acre (UFAC). Chamaremos essa técnica de **Método das Flechas** (ou **Método de Brazil**) e ele será ensinado passo a passo a seguir.

1° passo: Repetir as colunas

Para aplicar o Método das Flechas, não basta repetir as colunas. É preciso obedecer a uma ordem precisa que garante o cálculo dos 24 produtos. Vamos montar a matriz estendida.

$$\text{Matriz Original} \quad \rightarrow \quad \mathbf{C_1, C_2, C_3, C_4}$$

$$\text{Colunas Repetidas (13):} \quad \rightarrow \quad \mathbf{C_1, C_2, C_3, C_1, C_4, C_2, C_3, C_1, C_2, C_4, C_3, C_1, C_2}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{array}{ccccccccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{14} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{14} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{24} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{24} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{34} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{34} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{41} & a_{44} & a_{42} & a_{43} & a_{41} & a_{42} & a_{44} & a_{43} & a_{41} & a_{42} \end{array}$$

Para que você consiga memorizar essa sequência longa (que totaliza 13 colunas), vamos dividi-la em blocos de repetição que se encaixam!

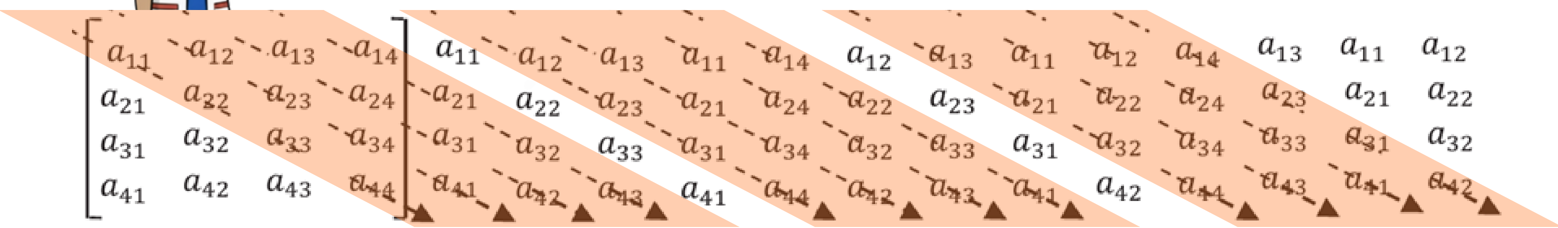
- **Bloco A (As 3 Iniciais):** Repetir C_1, C_2, C_3.
- **Bloco B (O Coringa):** Repetir C_1, C_4, C_2.
- **Bloco C (O Grande Trio):** Repetir C_3, C_1, C_2.
- **Bloco D (O Final):** Repetir C_4, C_3, C_1, C_2.

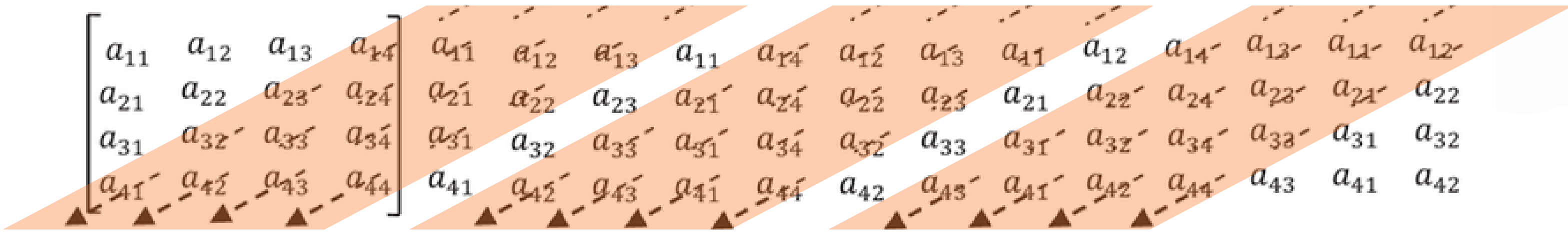
A sequência de repetição completa é a combinação desses blocos:

$$\underbrace{C_1, C_2, C_3}_{\text{Bloco A}} | \underbrace{C_1, C_4, C_2}_{\text{Bloco B}} | \underbrace{C_3, C_1, C_2}_{\text{Bloco C}} | \underbrace{C_4, C_3, C_1, C_2}_{\text{Bloco D}}$$

2° passo: Estabelecer as flechas

O verdadeiro segredo do Método das Flechas não é só repetir colunas, mas entender como as diagonais se organizam. Elas não são contínuas; elas 'pulam' exatamente onde o Teorema de Laplace nos exige!



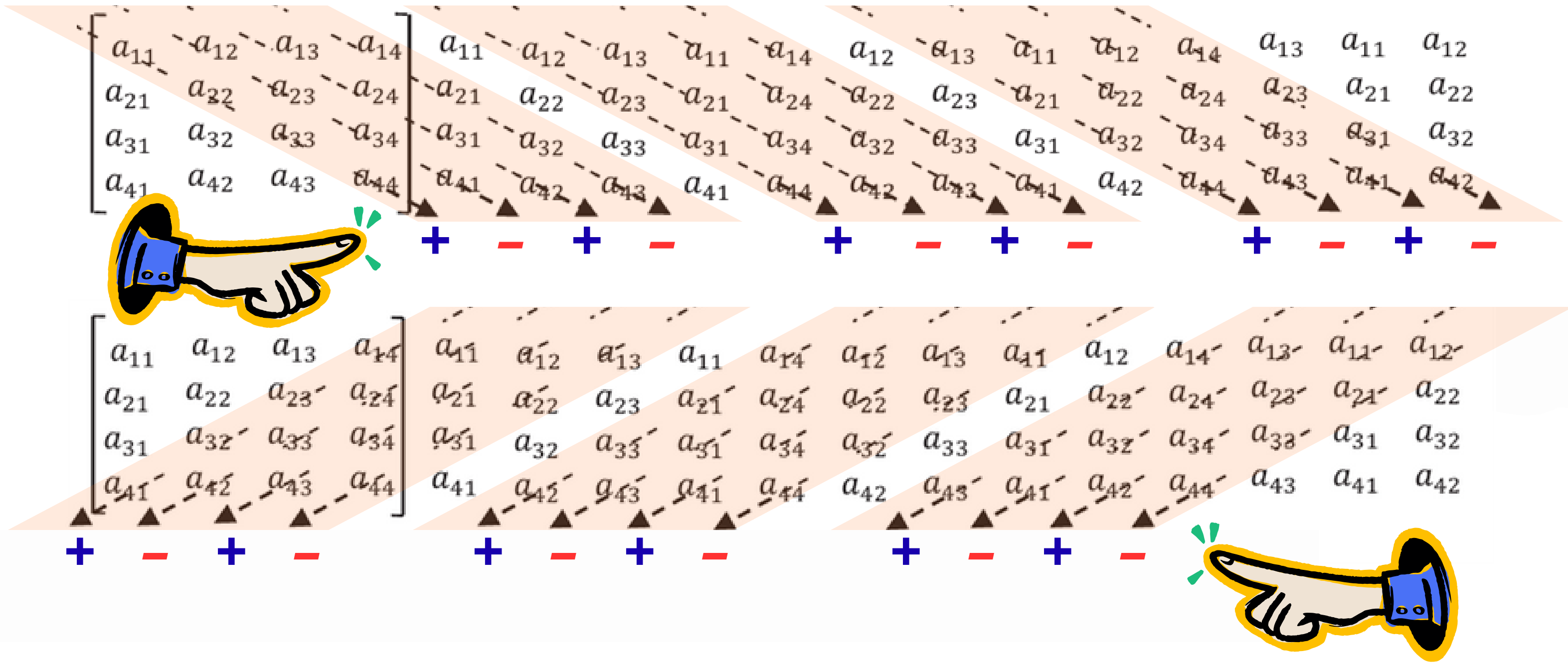


Observação 1: As flechas que representam os produtos são organizadas em grupos. Colocamos uma sequência de quatro flechas (quatro produtos) e pulamos uma diagonal (que não faz parte de nenhum produto de quatro elementos), seguindo com mais uma sequência de quatro flechas, e assim por diante.

Observação 2: Essa intercalação é o que garante que encontremos os exatos 24 produtos elementares que seriam gerados pela expansão por cofatores, mas de forma visual.

3° passo: Estabelecer os sinais

A grande vantagem do Método das Flechas é que ele resolve automaticamente o problema dos sinais, que é a maior fonte de erros no Teorema de Laplace (expansão por cofatores).



Observação 1: A paridade das permutações, que define se cada produto elementar deve ser somado (paridade +) ou subtraído (paridade –), aparece de forma alternada na disposição das flechas, facilitando com isso os cálculos.

Observação 2: O arranjo engenhoso das colunas estendidas garante que as 12 flechas para a direita e as 12 flechas para a esquerda capturam os 24 termos essenciais com o sinal correto, dispensando a necessidade de $C_{ij} = (-1)^{i+j}$ calcular para cada cofator.

4° passo: Somar/Subtrair os produtos elementares

O Método das Flechas transforma 24 cálculos complexos em uma regra visual simples de seguir.

Agora, realizamos a soma dos produtos das entradas das flechas direcionadas para a direita e das flechas direcionadas para a esquerda, obedecendo à paridade de cada produto (os sinais de cada flecha)

O resultado dessa soma e subtração de produtos elementares nos dá o **determinante da matriz de ordem 4x4**.

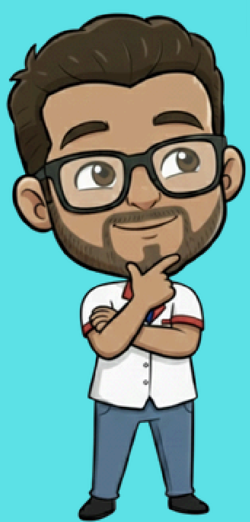
det(A) = (Soma do produtos positivos) – (Soma dos produtos negativos)

Agora é a sua vez! Resolva o exemplo da equação da circunferência da página 8 pelo Método dos cofatores e pelo Método das flechas e compare os resultados.

Comparando os dois métodos

Resolução pelo
Método dos Cofatores
(Teorema de Laplace)

Resolução pelo
Método das
Flechas



A conclusão mais importante é que ambos os métodos, o Teorema de Laplace e o Método das Flechas, resultaram na mesma equação da circunferência para os três pontos dados:

$$\mathbf{x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0}$$

Isso prova que o Método das Flechas é matematicamente válido e pode ser usado como uma alternativa rigorosa e confiável.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra linear com aplicações.** Tradução de Claus Ivo Doering. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

SILVA, Cristiano de Souza; BRAZIL JÚNIOR, Sérgio. O método mnemônico das flechas para determinante de matrizes de ordem quatro. **Elementos – Revista de Ensino e Pesquisa em Classes, Operações e Propriedades de Estruturas Algébricas**. Rio Branco, v. 2, n. 2, p. 21–31, jan./dez. 2014.

HINO ACREANO

Que este Sol a brilhar soberano
Sobre as matas que o veem com amor
Encha o peito de cada acreano
De nobreza, constância e valor

Invencíveis e grandes na guerra
Imitemos o exemplo sem par
Do amplo rio que brilha com a terra
Vence-a e entra brigando com o mar

Fulge um astro na nossa bandeira
Que foi tinto com sangue de heróis
Adoremos na estrela altaneira
O mais belo e o melhor dos faróis

Triunfantes da luta voltando
Temos n'alma os encantos do céu
E na fronte serena, radiante
O imortal e sagrado troféu

O Brasil a exultar acompanha
Nossos passos, portanto é subir
Que da glória, a divina montanha
Tem no cimo o arrebol do porvir

Fulge um astro na nossa bandeira
Que foi tinto com sangue de heróis
Adoremos na estrela altaneira
O mais belo e o melhor dos faróis

Possuímos um bem conquistado
Nobremente com armas na mão
Se o afrontarem, de cada soldado
Surgirá de repente um leão

Liberdade é o querido tesouro
Que depois do lutar nos seduz
Tal rio que rola, o Sol de ouro
Lança um manto sublime de luz

Fulge um astro na nossa bandeira
Que foi tinto com sangue de heróis
Adoremos na estrela altaneira
O mais belo e o melhor dos faróis

Vamos ter como prêmio da guerra
Um consolo que as penas desfaz
Vendo as flores do amor sobre a terra
E no céu o arco-íris da paz

As esposas e mães carinhosas
A esperar-nos nos lares fiéis
Atapetam as portas de rosas
E, cantando, entretecem lauréis

Fulge um astro na nossa bandeira
Que foi tinto com sangue de heróis
Adoremos na estrela altaneira
O mais belo e o melhor dos faróis

Mas se audaz estrangeiro, algum dia
Nossos brios de novo ofender
Lutaremos com a mesma energia
Sem recuar, sem cair, sem temer

E ergueremos então destas zonas
Um tal canto vibrante e viril
Que será como a voz do Amazonas
Ecoando por todo o Brasil

Fulge um astro na nossa bandeira
Que foi tinto com sangue de heróis
Adoremos na estrela altaneira
O mais belo e o melhor dos faróis