UNIVERSIDADE FEDERAL DE VIÇOSA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

Universidade Federal de Viçosa

Produto Educacional

Números Complexos: *uma abordagem pedagógica a partir de Lakatos*

FREDERICO DE OLIVEIRA E SOUZA
MARLI DUFFLES DONATO MOREIRA

VIÇOSA/MINAS GERAIS
2025

Sumário

UFV
Universidade Federal de Viçosa

1. Apresentação

Prezados(as) professores(as),

Meu nome é Frederico de Oliveira e Souza. Sou licenciado em matemática pela UFV e há 5 anos leciono na rede privada de ensino de Viçosa-MG, no ensino fundamental II e médio.

Apresento este Produto Educacional, elaborado a partir da minha pesquisa de mestrado no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Viçosa (PPGECM/UFV), sob a orientação da Profa. Marli Duffles Donato Moreira.

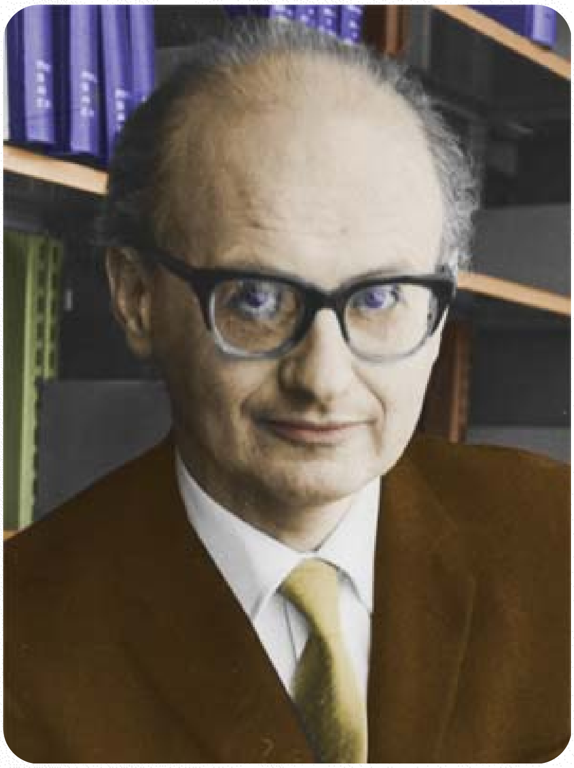
A pesquisa teve início a partir do entendimento de que poucos professores de matemática refletem sobre a relação entre sua prática docente e suas concepções epistemológicas da matemática. Tal desvinculação, de acordo com os resultados obtidos, traz diversas dificuldades para a sala de aula, o que acarreta resultados negativos no aprendizado.

Assim, este trabalho teve como foco investigar as relações entre as concepções epistemológicas da matemática com as práticas docentes. A experiência se realizou por meio de um minicurso com estudantes da Licenciatura em Matemática da UFV.

Este Produto Educacional, na forma de um Caderno Didático, tem tem como objetivo principal promover reflexões sobre a relação entre a prática docente e as concepções epistemológicas da matemática. Para isso, apresentamos a didática da matemática sob a ótica de Hans Freudenthal e Fernando Becker, cujas contribuições possibilitam compreender a matemática como atividade humana, situada em contextos sociais e culturais, e o ensino como um processo que ultrapassa a simples transmissão de conteúdos.

Soma-se a esse referencial a perspectiva falibilista de Imre Lakatos que nos convida a repensar a matemática enquanto construção histórica e sujeita a revisões, abrindo espaço para práticas pedagógicas mais dialógicas e investigativas.

Imre Lakatos



Ao longo do Caderno Didático, são apresentadas brevemente as bases teóricas que sustentam a proposta e as atividades desenvolvidas com os licenciandos, juntamente dos planos de aula para utilização pelos professores que tiverem interesse.

Este Produto Educacional tem o intuito de promover reflexões sobre a relação entre a prática docente e as concepções de matemática que a atravessam. A expectativa é que este Caderno Didático possa inspirar educadores a explorarem novas possibilidades didáticas, contribuindo para um ensino mais crítico, contextualizado e significativo.

Viçosa,
03 de setembro de 2025

Frederico de Oliveira

2. Discussão teórica

2.1. Educação Matemática Realística: perspectivas de Hans Freudenthal

A Educação Matemática Realística (EMR) é a abordagem didática proposta por Freudenthal para o ensino de matemática, que integra a matemática ao cotidiano dos alunos, promovendo uma aprendizagem significativa e contextualizada.

Conforme Hans Freudenthal (1973), esta metodologia critica o ensino tradicional, no qual os alunos são vistos como "silenciosos, passivos, receptores de algum conhecimento pronto e acabado" (Buriasco e Silva, 2017, p. 1). A EMR fundamenta-se em princípios que destacam a <u>matematização de situações reais</u>, permitindo que os estudantes reinventem a matemática a partir de suas próprias experiências e percepções.

Gravemeijer e Cobb (2006, apud Buriasco e Silva, 2017, p. 5) afirmam que a realidade é compreendida como "uma mistura de interpretação e experiência sensorial", o que significa que o conhecimento matemático deve ser construído a partir de contextos significativos para os alunos. Por isso, a EMR valoriza o "fazer matemática", onde a ação é mais importante do que o produto final. Encarar a matemática em seu aspecto humano, social e cultural é algo que se opõe à educação tradicional, trazendo ao centro do processo o estudante e o conhecimento, mediados pelo professor. Isso implica que os alunos devem estar ativamente envolvidos em processos matemáticos, rodeados por curiosidade, tentativas e erros.

Freudenthal (1973) argumenta que a matemática deve ser vista como "<u>uma atividade humana</u>", na qual o foco está na "ação ao invés do produto" (Buriasco e Silva, 2017, p. 12). Essa perspectiva sugere que a matemática se desenvolve na busca de resolução de problemas do cotidiano. Mais ainda, é uma atividade humana, exercida por todos os seres humanos, não só os matemáticos.

2.2. Epistemologia do Professor de Matemática: perspectivas de Fernando Becker

A epistemologia do professor de matemática é um aspecto fundamental que influencia a prática pedagógica e a aprendizagem dos alunos, sendo um importante pilar da didática da matemática para Becker. Segundo ele,

> *a concepção epistemológica do docente determina sua concepção psicológica sobre como os alunos aprendem, como conhecem, sobre quais as condições prévias que um aluno deve ter para aprender o que ele vai ensinar; determina, portanto, sua concepção pedagógica e sua didática (Becker, 2023, p. 919).*

A falta de uma base teórica sólida pode resultar em práticas que perpetuam métodos tradicionais. Diante disso, promover um espaço de discussão e formação continuada sobre epistemologia é essencial para que possamos desenvolver uma compreensão mais profunda sobre o ensino e a aprendizagem da matemática.

A adoção de uma epistemologia que valoriza a construção do conhecimento pode transformar a prática docente e promover um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e significativo, empoderando os alunos a se tornarem aprendizes ativos e críticos, capazes de aplicar o conhecimento matemático de forma significativa em diversos contextos (Becker, 2019; 2023). Essa perspectiva estimula o pensamento crítico e a resolução de problemas e, mais ainda, encoraja os alunos a se engajarem de forma mais significativa no processo de aprendizagem.

Dessa forma, a reflexão crítica sobre as concepções epistemológicas dos professores é essencial para a melhoria do ensino de matemática, pois essas concepções moldam a forma como os alunos percebem e se relacionam com a disciplina, impactando diretamente sua formação e desenvolvimento cognitivo (Oliveira e Ponte, 1997).

3. Imre Lakatos...

... uma articulação da epistemologia da matemática com a prática docente

Entre as epistemologias da matemática estudadas na pesquisa que gerou este Caderno Didático, a escolhida para fundamentar o trabalho foi a proposta de Lakatos (séc. XX), que tem uma visão dinâmica quanto à construção do conhecimento matemático.

Imre Lakatos (1922-1974) foi um filósofo húngaro da matemática e da ciência, com formação em matemática, física e filosofia. Em sua obra mais famosa, *Proofs and Refutations* (Provas e Refutações), publicada postumamente em 1976, Lakatos argumenta que a matemática não é uma ciência infalível, mas se desenvolve por meio de um processo de conjecturas, provas e refutações, semelhante à ciência empírica.

Lakatos propõe uma articulação inovadora entre a epistemologia da matemática e a prática docente, desafiando as concepções tradicionais que predominam no ensino. Sua abordagem falibilista sugere "que a matemática informal é falível e [...] se desenvolve por meio de um processo racional e lógico" (Cardoso, 2018, p. 824). Para ele, a matemática informal é "aquela relativa aos resultados de pesquisas mais recentes – a matemática em desenvolvimento" (Cardoso, 2018, p. 824). Isso implica que o conhecimento matemático não é um conjunto de verdades absolutas, mas sim um campo em constante evolução.

Essa perspectiva é fundamental para a prática docente, pois permite que educadores incentivem os alunos a questionar, explorar e reformular conceitos matemáticos, promovendo um ambiente de aprendizado ativo e dinâmico.

A ênfase na investigação, na resolução de problemas, na dialética e na interação entre conjecturas e refutações não apenas enriquece a experiência de aprendizado, mas também prepara os alunos para uma compreensão mais profunda e crítica da matemática, fazendo uma associação com o cotidiano.

4. Minicurso: Números Complexos, uma abordagem pedagógica a partir de Lakatos

1º encontro do Minicurso

Antes do primeiro encontro, foi disponibilizado aos participantes, via *Google Sala de Aula*, um texto que é parte do capítulo 2 do livro *Didáctica da matemática* (Ponte et al., 1997). Junto do texto foram indicadas três perguntas, relacionando: (1) a concepção dos objetos matemáticos como construções humanas, (2) a relação entre as influências sociais, históricas e culturais e as concepções de matemática, e (3) uma reflexão sobre o contraste entre a visão tradicional da matemática como verdade absoluta e a ideia de que seu desenvolvimento é influenciado por contextos sociais e culturais, e como isso impacta o ensino e a formação de professores

O primeiro encontro então se iniciou com a discussão acerca dessas perguntas, seguido por um debate provocado pelos seguintes questionamentos:

> *Quando falamos de matemática o que lhe vem à mente? Qual é a primeira coisa que vem à sua mente? Que espaço a matemática ocupa em sua mente?*

Na sequência, avançamos para a discussão teórica acerca das principais concepções epistemológicas da matemática e como elas se articulam com a prática pedagógica. Partimos do seguinte problema epistemológico: *Onde está o conhecimento matemático?*

Buscando responder a essa pergunta, diversas correntes filosóficas foram abordadas. Entre elas o platonismo e o formalismo (que entendem que o conhecimento matemático está no mundo das ideias), o empirismo (que entende que está no objeto), e o construtivismo e o falibilismo (que entendem que o conhecimento matemático está na relação entre sujeito e objeto). A forma como o professor responde a essa pergunta epistemológica se relaciona diretamente com sua prática.

Abordamos também a relação entre epistemologia e pedagogia, analisando o seguinte quadro de Fernando Becker

Quadro 1. Relação entre Epistemologia e Pedagogia

Epistemologia		Pedagogia	
Teoria	**Modelo**	**Modelo**	**Teoria**
Empirismo	$S \leftarrow O$	$A \leftarrow P$	Diretiva
Apriorismo	$S \rightarrow O$	$A \rightarrow P$	Não diretiva
Construtivismo	$S \leftrightarrow O$	$A \leftrightarrow P$	Relacional

Fonte: Fernando Becker, 2001.

De acordo com Becker (2001), a epistemologia empirista, que entende que o conhecimento está no objeto e cabe ao sujeito absorvê-lo, num modelo objeto → sujeito, se relaciona com a pedagogias diretivas, cujo modelo é o transmissivo, do professor para o aluno. Por sua vez, a concepção apriorista, que entende que o conhecimento está no sujeito, é inato, se apoia no modelo sujeito → objeto e está relacionada à pedagogias não-diretivas. Este modelo prioriza a aprendizagem por descoberta, na qual o aluno é deixado em contato com o objeto para que, manipulando-o, adquira os conhecimentos. Por fim, a concepção construtivista, que entende que o conhecimento se dá a partir da relação entre sujeito e objeto, associa-se à pedagogia relacional, que se baseia na construção do conhecimento por meio da relação entre professor e aluno.

Após a reflexão sobre as concepções epistemológicas, os participantes analisaram, em grupos, alguns casos pedagógicos, identificando as concepções e escolhas didáticas dos professores.

Ao final, os participantes responderam três perguntas, como forma de reflexão, avaliação formativa e contínua:

1. *Com qual concepção você mais se identifica? Por quê?*
2. *É possível integrar elementos de diferentes abordagens?*
3. *Como essas concepções se conectam aos desafios da sala de aula?*

Os Planos de aula dos 3 encontros estão disponíveis para *download* clicando aqui ou pelo QR code:

2º encontro do Minicurso

O 2º encontro foi dedicado ao conteúdo específico de Números Complexos, que foi abordado a partir de uma reconstrução racional histórica do conteúdo, alinhada ao Falibilismo de Lakatos.

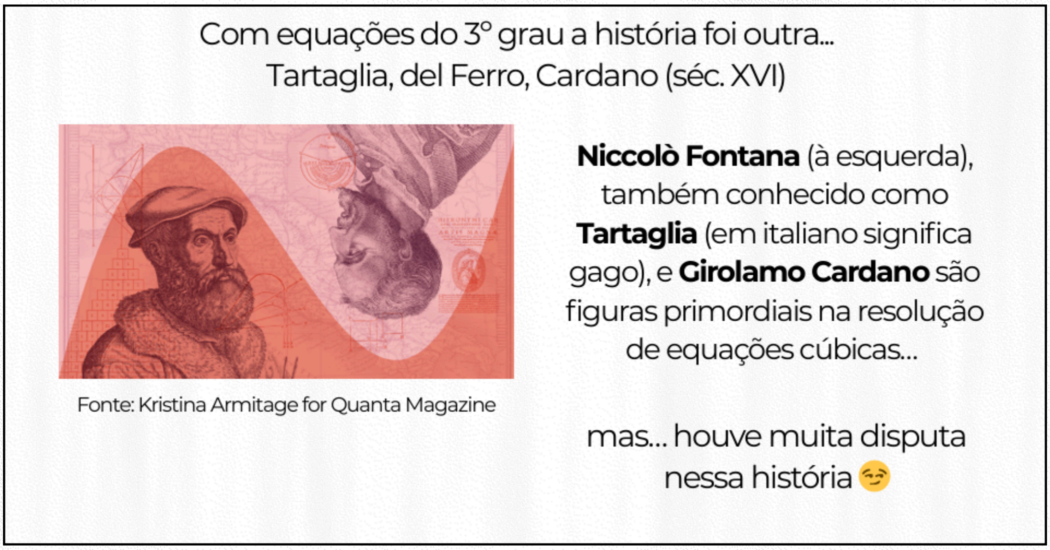
Iniciamos por uma contextualização acerca do problema das raízes negativas. Até então, a presença de tais raízes na solução de uma equação de 2º grau significava que não havia soluções para a equação, mas isso não se aplicava às equações de 3º grau. A partir dessa introdução, foram discutidos os trabalhos de matemáticos como Tartaglia, del Ferro e Cardano, com ênfase nas soluções das equações cúbicas da forma $x^3 = px + q$, destacando-se o caso particular de $x^3 = 15x + 4$, que possui 4 como uma raiz, mas na fórmula de resolução aparece uma raiz negativa.
(Ver Figura 2 a seguir).

Em seguida, foram abordadas as contribuições de Rafael Bombelli, especialmente no que se refere ao uso formal de radicais negativos, tratados como símbolos manipuláveis. Essa discussão se deu num contexto de reconstrução do caminhar histórico, do que aconteceu "de verdade" (Lakatos).

Discutiu-se também um certo paradoxo do número "imaginário", refletido na nomenclatura pejorativa, nas dificuldades conceituais e nas resistências filosóficas enfrentadas pela aceitação desses números. Refletimos também sobre a contribuição de Euler, com a introdução do símbolo *i*, que funcionou como elemento de estabilização conceitual.

No próximo momento, os participantes, em duplas, analisaram um trecho narrativo de uma aula, na qual o professor promove um espaço dialógico de construção de conhecimentos. Nessa aula, uma prova informal enfrenta um contraexemplo, e se dá um diálogo no estilo dos ensaios propostos por Lakatos no livro *Provas e Refutações* (1976). Um ponto muito enfatizado pelos participantes na discussão foi a posição de mediador do professor nessa metodologia, a forma como ele conduzia a experiência dos estudantes e a forma como respeitava o que cada aluno trazia, deixando que eles interagissem entre si, intervindo quando necessário.

Figura 1. Slide utilizado na contextualização histórica dos Números Complexos



Fonte: Elaboração própria, 2025.

Ao final, os participantes responderam a uma avaliação didática com três perguntas, sem se identificarem. Na primeira, “o que eu aprendi hoje?”, relataram o entendimento de como se deu o surgimento dos Números Complexos no contexto histórico e “a construção para a formalização dos Números Complexos”. Um(a) participante destaca que “isso é um exemplo de como a matemática não é um sistema fechado de verdades eternas e absolutas”.

Em resposta à segunda pergunta, “como as atividades de hoje modificaram (ou não) minha concepção da matemática e do seu ensino?”, eles destacaram que “fez a gente refletir sobre como a matemática de fato é uma construção humana”.

Um(a) participante mencionou a importância de se refletir sobre a epistemologia e se questionar:

O conhecimento também precisa ser compreendido não somente como algo absoluto, mas também capaz de observar e analisar novas perspectivas diante dos desafios.

Como atividade para casa, foi indicado o *Problema do Tesouro* (página 18 deste caderno), cuja resolução pode envolver diversos conceitos matemáticos.

O Plano de aula deste encontro está disponível para *download* no link e QR code disponibilizados anteriormente, na página 9.

3° encontro do Minicurso

Este encontro iniciou-se com o Problema do Tesouro, proposto ao final do 2° encontro, disponibilizado aos participantes via *Google Sala de Aula*, e seu enunciado está na página 18 deste Produto.

Surgiram diversas abordagens para a resolução do problema, incluindo geometria analítica e álgebra vetorial. Alguns participantes compartilharam suas soluções e, em seguida, foi apresentada uma solução utilizando os Números Complexos, que envolve rotação e translação de vetores no plano.

Em uma análise didática, os resultados mostram que essa atividade mobiliza conceitos de forma contextualizada, como perpendicularidade, simetria, ponto médio e noções de localização espacial. Um dos relatos afirma que a proposta "estimula a visualização e representação no plano, fazendo o aluno passar da linguagem verbal para a linguagem geométrica com desenhos e esquemas", outro completa que "a atividade favorece a habilidade de modelagem matemática, pois o estudante precisa interpretar e representar matematicamente a situação".

Do ponto de vista epistemológico, os resultados apontam que a proposta incentiva a percepção da geometria como uma forma de organizar e compreender o espaço, além de estimular a abstração e a matematização. Em um dos relatos, defende-se que a proposta "mostra como a geometria surge de necessidades reais, como localizar um ponto no espaço", o que remete a um caminho epistemológico semelhante ao da origem histórica da geometria, valorizando a historicidade dos conceitos.

Na sequência, como avaliação somática, os participantes refletiram e registraram suas reflexões sobre a seguinte afirmação:

> "Os Números Complexos não foram simplesmente 'descobertos', mas sim construídos a partir de uma necessidade teórica e prática. A partir de sua construção, suas propriedades foram descobertas." (Disponível no Plano de aula)

Por fim, foram construídas algumas nuvens de palavras a partir das interações e socialização finais.

A <u>primeira pergunta</u> proposta foi *“De que maneira a concepção epistemológica da matemática relaciona-se com a prática docente do professor?”*

As manifestações dos participantes evidenciaram uma percepção da influência que as concepções epistemológicas da matemática podem ter na prática do professor (Becker, 2019). Os resultados dessa discussão indicam, de maneira direta ou indireta, que uma concepção que percebe a matemática como construção humana, presente no "mundo real" (fala de um(a) participante), leva a uma prática docente mais dinâmica, inclusiva e centrada no aluno. A partir da nuvem de expressão elaborada com as falas dos participantes, foi gerada uma nuvem de palavras (Figura 3), destacando aquelas que mais apareceram nas respostas.

Figura 2. Primeira nuvem de palavras

Fonte: Elaboração própria, 2025.

O destaque da palavra matemática aponta para a discussão centrada na própria disciplina, sugerindo que a concepção epistemológica é o ponto de partida para outras análises. Em seguida, a presença da palavra professor, a segunda mais recorrente nas respostas, parece indicar que o docente é também o foco do processo, articulando sua concepção de matemática, por vezes naturalizada e não refletida, e o ensino que promove. Por fim, o destaque da palavra alunos indica que o objetivo final da prática do ensino, mediada inevitavelmente pela epistemologia, diz respeito à experiência de aprendizagem dos alunos.

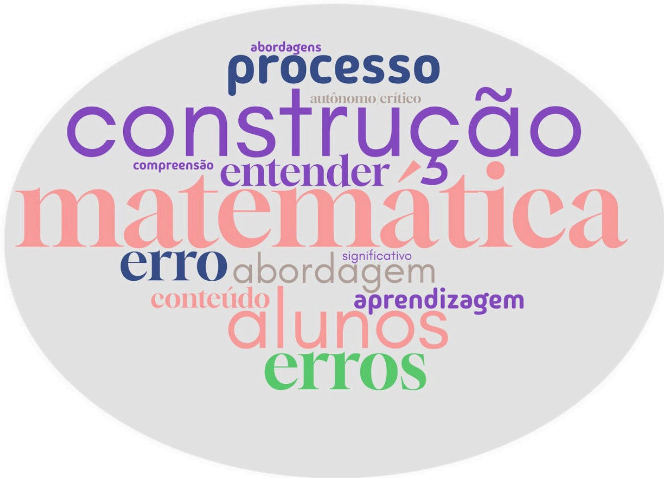
A <u>segunda pergunta</u> proposta foi *“Na sua opinião, que contribuições a abordagem histórica e falibilista pode trazer para as aulas de matemática?”*

Os dados reforçam o referencial teórico que existem diversas vantagens da abordagem histórica e falibilista do ensino de matemática. Ela tem um papel desmistificador, visibilizando o aspecto humano, histórico, dinâmico e em desenvolvimento (Becker, 2023), e não como acervo de conhecimento isolado, não-histórico e não-dinâmico. Esta concepção aproxima o aluno do conteúdo, problematizando-o e tornando-o mais acessível, assim como mais significativo. Uma das contribuições mais recorrentes nos dados foi a valorização do erro. Para os participantes, ele deve ser visto não como perda, mas como parte integrante do processo de aprendizagem e da própria história da matemática (Lakatos, 1976).

Essa abordagem ajuda na compreensão, por parte dos alunos, de que o conhecimento matemático não surgiu do nada, que ele foi construído ao longo do tempo, em geral, "por pessoas 'normais' assim como todos nós, uma construção feita por seres humanos pensantes" (fala de um(a) participante), com tentativas, acertos e erros. Além disso, essa perspectiva contribui para o desenvolvimento do pensamento crítico e da autonomia dos estudantes, ajudando-os a se tornarem "cidadãos mais críticos" (fala de um(a) participante) e a ver o erro como um passo essencial na jornada do aprendizado.

A partir dessas respostas, a segunda nuvem de palavras (Figura 4) foi gerada.

Figura 3. Segunda nuvem de palavras



Fonte: Elaboração própria, 2025.

A análise desta nuvem de palavras confirma as percepções em relação à abordagem histórica e falibilista no ensino de matemática. As palavras em maior destaque são "matemática", "construção", "alunos", "erros" e "processo". A palavra "matemática" aparece novamente no centro da discussão, e a presença dos termos em destaque "construção" e "processo" aponta para uma concepção construtiva que valoriza a historicidade do conhecimento matemático, como fruto de tentativas e reformulações. A presença expressiva da palavra "erros" reafirma o papel do erro como parte integrante da aprendizagem e até mesmo da própria evolução da matemática (Lakatos, 1976).

Por fim, a palavra "alunos" em destaque remete mais uma vez à centralidade do sujeito que aprende neste processo. Fica evidente, na percepção dos participantes, que a abordagem histórica e falibilista busca tornar a matemática mais acessível e significativa, o que configura uma valiosa contribuição.

A <u>terceira pergunta</u> proposta foi *"Você considera possível ensinar matemática, especialmente conteúdos mais abstratos como os Números Complexos, de forma crítica e reflexiva? Como faria isso em sala de aula?"*

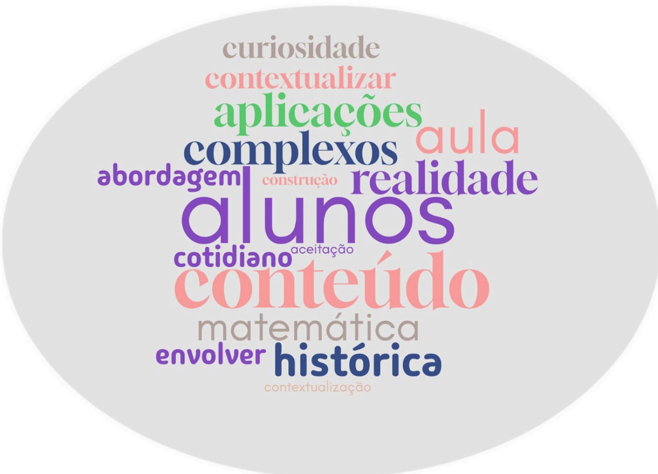
A análise das respostas indica um consenso em relação à possibilidade de ensinar a matemática de forma crítica e reflexiva mesmo em conteúdos mais abstratos. A maior parte dos participantes acredita que isso é possível e necessário para que a aprendizagem ocorra de forma significativa. A estratégia principal mencionada refere-se a utilização da história da matemática como um modo de contextualizar o conteúdo e a sua evolução.

Uma das falas, de um(a) participante não identificado, resume bem esta ideia ao afirmar que o ensino deve valorizar "a parte histórica do conteúdo que se quer ensinar de modo a envolver os alunos no porquê e como [um conceito ou objeto matemático] foi criado e não só ensinando o prático que seriam os teoremas e fórmulas".

Além da história, os resultados ressaltam a importância da relação entre os conteúdos abordados e a realidade do aluno, seja pelas aplicações, seja por recursos visuais e geométricos ou mesmo discutindo e levantando questões a respeito do conteúdo. Essa estratégia, de acordo com os respondentes, desperta a curiosidade e aproxima o aluno do conteúdo, tirando a matemática do plano estritamente teórico.

A partir dessas respostas, a terceira nuvem de palavras (Figura 5) foi gerada.

Figura 4. Terceira nuvem de palavras



Fonte: Elaboração própria, 2025.

Podemos observar, na nuvem de palavras da Figura 5, que ao perguntar sobre a possibilidade de ensinar conteúdos mais abstratos de forma crítica e reflexiva, o termo mais recorrente nas respostas foi "alunos". Isso aponta que o minicurso teve um papel fundamental em consolidar a valorização da centralidade do estudante no seu processo de aprendizagem (Freire, 2019), munido de toda a sua bagagem cultural e social. Os termos "aplicações", "realidade", "contextualização", "contextualizar" e "cotidiano" reforçam a importância de promover a construção do conhecimento matemático naquele meio em que se está inserido. É percorrer o caminhar histórico (Lakatos, 1976), porém dentro do contexto específico, buscando resolver problemas daquela realidade.

Durante um momento de socialização, os participantes puderam defender seus pontos de vista e dialogar com os demais colegas sobre as convergências e divergências. Na sequência, e encerrando o último encontro, os participantes foram convidados a expressar em três palavras a experiência que tiveram ao longo do minicurso. As respostas foram dadas diretamente no aplicativo Mentimeter, que gerou a nuvem de palavras exibida abaixo (Figura 6).

Figura 5. Nuvem de palavras descrevendo a experiência do minicurso

Fonte: Elaboração própria, 2025.

A nuvem de palavras referente à experiência do minicurso revela a predominância de termos como “conhecimento”, “reflexivo”, “inovador” e “pensamento crítico”, indicando uma percepção geral positiva. A presença expressiva das palavras “reflexão”, “reflexiva” e “refletir”, parônimas diretamente relacionadas à segunda palavra em destaque, “reflexivo”, nos permite inferir que esse termo foi o mais presente nas respostas dos participantes. A partir dessa análise, é possível perceber que o foco da atividade estava na reflexão crítica e no diálogo de ideias. De fato, produzir uma reflexão epistemológica era um dos objetivos do minicurso.

As expressões como “inovador”, “ideias inovadoras” e “nova visão” nos sugerem que ainda falta, na formação inicial, refletir sobre as concepções epistemológicas da matemática e de seu ensino. A nuvem indica, como também havia sido identificado nos encontros, que a maioria dos participantes não tinha tido contato com a literatura e discussão acerca dessa temática. Por isso, refletir sobre as concepções epistemológicas e suas implicações na prática pedagógica é essencial.

Os termos “construtivo”, “troca de aprendizagem”, “contextualização”, “abrangente” e “enriquecedora” indicam que os participantes consideraram o minicurso enriquecedor em termos de conteúdo, mas também na forma como ele foi apresentado e conduzido. As palavras “construtivo” e “troca de aprendizagem” apontam uma experiência de aprendizado ativa, com diálogo e construção conjunta de conhecimento, num ambiente colaborativo e de diálogo.

As palavras “contextualização” e “abrangente” sugerem uma abordagem que se preocupou em aproximar o conteúdo da realidade, bem como abordou uma gama de tópicos relevantes. Por fim, a palavra “enriquecedora” indica que o minicurso foi uma experiência valiosa e que agregou valor significativo à jornada de formação de cada participante.

O Plano de aula deste encontro está disponível para *download* no link e QR code disponibilizados anteriormente, na página 9.

5. Proposta de Atividade

... uma sugestão prática para os professores experimentarem a abordagem didática proposta por Lakatos

Nesta seção, propomos uma atividade didática inspirada na perspectiva falibilista de Imre Lakatos, que concebe a matemática como um processo em constante construção, sujeito a erros, refutações e reformulações. A proposta tem como objetivo proporcionar aos professores uma experiência prática que reflita essa concepção, incentivando a problematização, o debate de ideias e a valorização dos erros como parte do processo de aprendizagem.

Na concepção de Lakatos, a matemática não é algo pronto e eterno, mas sim uma atividade humana em constante construção, feita de provas, refutações, revisões e avanços históricos.

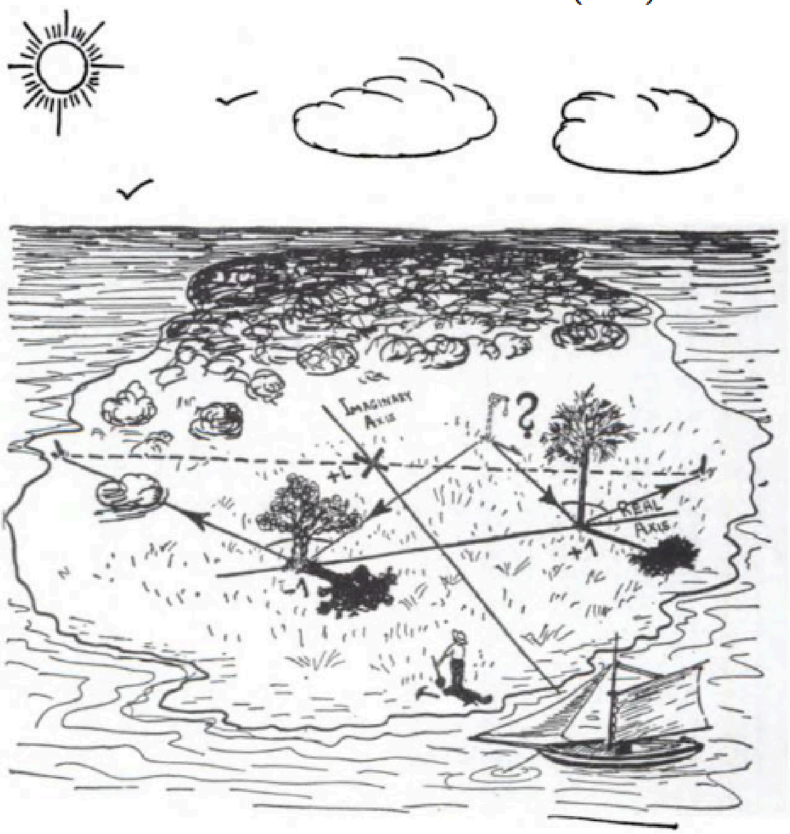
Imagem gerada por IA

A atividade sugerida é o *Problema do Tesouro*, cujo enunciado será apresentado na próxima página. Trata-se de uma situação que instiga a matematização da realidade, a formulação de conjecturas, a análise crítica de argumentos e a construção coletiva de soluções, elementos centrais na abordagem lakatosiana da matemática.

Problema do Tesouro

Um tesouro foi enterrado em uma ilha e foi feito um mapa de sua localização. As instruções contidas no mapa dizem que ao desembarcar na ilha avistam-se imediatamente um carvalho e um coqueiro, e também uma palmeira. O tesouro está enterrado em um ponto que pode ser encontrado da seguinte forma: “Partindo da palmeira caminhe até o carvalho contando os passos. Chegando ao carvalho, gire para a direita 90° e caminhe o mesmo número de passos e, onde chegar, faça uma marca. Voltando novamente à palmeira, caminhe até o coqueiro contando os passos, gire à esquerda 90° e caminhe o mesmo número de passos e faça uma marca nesta posição. O tesouro está enterrado exatamente na reta que liga as duas marcas e à mesma distância das duas marcas”.

Figura 1. Imagem da representação do Problema do Tesouro encontrada em Gamow (1988).



Fonte: (Gamow, 1988).

Consideramos essa proposta muito relevante por vários aspectos. Primeiramente, esta proposta oferece aos professores uma experiência didática concreta que exemplifica a noção lakatosiana de que o conhecimento matemático se desenvolve por meio de conjeturas, refutações e modificações. Ao trabalharem com o *Problema do Tesouro*, os alunos são levados a formular hipóteses iniciais sobre a localização do tesouro com base em pistas incompletas ou ambíguas. À medida em que testam essas hipóteses, acabam se deparando com contradições internas, erros de raciocínio ou impasses, o que os obriga a revisar suas estratégias e repensar suas conjecturas à luz das novas informações, exatamente como Lakatos descreve o avanço do conhecimento matemático.

Essa dinâmica transforma o erro em um elemento estruturante da atividade, e não em algo a ser evitado. Por exemplo, ao testar uma conjectura incorreta sobre a interpretação de uma das pistas, os participantes precisarão justificar *por que ela falha*, o que os leva a analisar os pressupostos usados e a propor uma versão mais adequada.

Assim, o erro deixa de ser tratado como fracasso individual e passa a ser um momento epistemologicamente produtivo, que impulsiona a aprendizagem matemática.

Essa vivência é especialmente relevante, pois nos convida *[a nós, professores]* a repensar a centralidade da resposta "certa" em sala de aula, colocando em seu lugar o valor do raciocínio investigativo e do diálogo matemático. Além disso, ao reconhecer que o conhecimento matemático não é absoluto nem neutro, mas construído em contextos históricos e culturais, sujeito a revisões e testes, somos *[nós, professores]* incentivados a construir práticas pedagógicas mais abertas à argumentação, à escuta ativa e à valorização do processo, e não apenas do resultado.

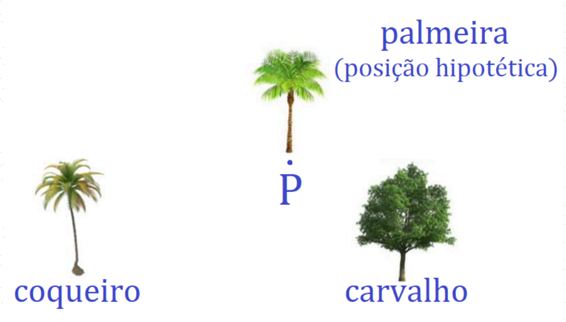
Que esta proposta sirva como ponto de partida para repensarmos o ensino de matemática como prática investigativa, aberta ao erro, ao diálogo e à construção coletiva do conhecimento.

A seguir apresentamos uma possível solução para o *Problema do Tesouro* utilizando Números Complexos.

PROPOSTA DE SOLUÇÃO

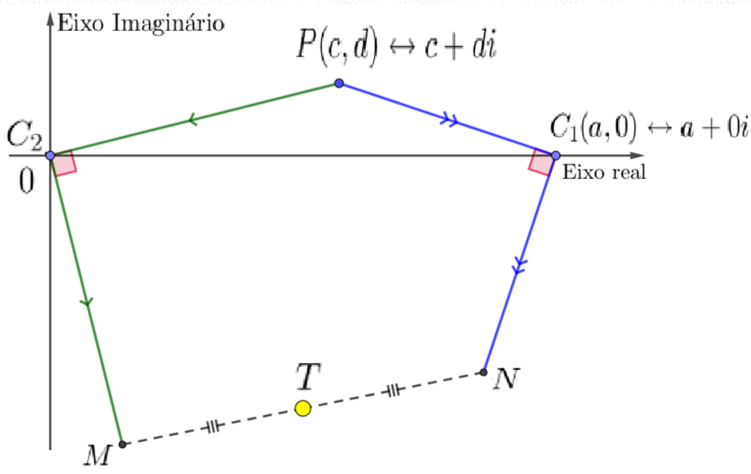
Uma das conclusões obtidas durante a resolução é que ***não importa a posição da palmeira***, o que é bastante intrigante.

Vamos apresentar a solução proposta por Gonçalves e Santos (2024). Considere que a palmeira se encontra num ponto P, que será usado como referência para encontrar o tesouro.



Fonte: Gonçalves e Santos, 2024 (adaptado)

Considere ainda o sistema de eixos ortogonais ilustrado na Figura 7 em que o símbolo $P(c,d) \leftrightarrow c + di$ representa a correspondência biunívoca entre o complexo $z = c + di$ e o seu afixo (ponto P).



Fonte: Gonçalves e Santos, 2024

O ponto M é obtido ao rotacionar o ponto P em 270° no sentido anti-horário ou, equivalentemente, 90° no sentido horário. Para isso, basta multiplicar o complexo $c + di$ pelo complexo $(\cos 270° + i\,\text{sen}\, 270°)$, isto é, $\cos(-90°) + i\,\text{sen}(-90°) = -i$.

Logo, $M = (c + di)\cdot(-i) = d - ci$.

Agora, para obter o ponto N vamos fazer a rotação do vetor C1P, representado pelo complexo $(c + di) - (a + 0i) = c - a + di \leftrightarrow (c - a, d)$, sob um ângulo de 90° no sentido horário, e depois adicionar o vetor C2C1, representado pelo complexo $a + 0i = a$. Assim, o complexo N é:

$$(c-a+di)\cdot(\cos 90° + i\,\text{sen}\, 90°) + a =$$
$$(c-a+di)\cdot i + a = \mathbf{(a-d)+(c-a)\cdot i}$$

Por fim, observe que o **ponto T** *(onde está o tesouro)* é o ponto médio entre os pontos M e T.

$$\frac{[d - ci] + [a - d + (c-a)\cdot i]}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}i$$

Concluímos que <u>basta saber a distância entre o coqueiro e o carvalho</u> (a), escolher um sistema de eixos como fizemos, e o tesouro será o ponto representado pelo complexo $\frac{a}{2} + \frac{a}{2}i$

Referências

BECKER, Fernando. Adequação Curricular e mudanças no Ensino de matemática: fundamentação epistemológica. Schème: **Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas,** v. 15, n. 2, p. 45-91, 2024. DOI: https://doi.org/10.36311/1984-1655.2023.v15.n2.p45-91.

BECKER, Fernando. Construção do Conhecimento Matemático: natureza, transmissão e gênese. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 33, n. 65, p. 963-987, 2019. DOI: https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a01.

BECKER, Fernando. Docência e História da matemática: concepções epistemológicas. **Schème: Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genéticas**, v. 14, n. 2, p. 5-41, 2023. DOI: https://doi.org/10.36311/1984-1655.2022.v14.n2.p5-41.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de; SILVA, Gabriel dos Santos e. Aspectos da Educação Matemática Realística. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 1-15, 2017. DOI: https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2017.v.1.n.1.18559.

CARDOSO, Virgínia Cardia. Revisitando o quase empirismo de Imre Lakatos e refletindo sobre a educação matemática. **Eventos Pedagógicos**, v. 9, n. 2, p. 822-846, 2018. DOI: https://doi.org/10.30681/reps.v9i2.10085.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa.** 62. ed. São Paulo: Paz e Terra, 2019.

FREUDENTHAL, Hans. **Mathematics as an educational task.** Springer Science & Business Media, 2012.

FREUDENTHAL, Hans. Why to teach mathematics so as to be useful. **Educational Studies in Mathematics**, v. 1, p. 3-8, 1968. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00426224.

GAMOW, G. **One, two, three--infinity: facts and speculations of science**. Courier Corporation, 1988.

GONÇALVES, Rogério dos Reis; SANTOS, Rafael Goulart de Andrade. O Problema Do Tesouro: Três Abordagens De Resolução Do Enigma. **RECET-Revista de Ciências Exatas e Tecnológicas**, v. 1, 2024.

LAKATOS, Imre. **A Lógica do Descobrimento Matemático: Provas e Refutações.** Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

OLIVEIRA, Hélia; PONTE, João Pedro da. Investigação sobre concepções, saberes e desenvolvimento profissional dos professores de matemática. **VII Seminário de Investigação em Educação Matemática**, p. 3-23, 1997.

PONTE, J. P.; BOAVIDA, A. M.; GRAÇA, M.; ABRANTES, P. **Didática da Matemática** (cap. 2). Lisboa: Departamento do Ensino Secundário do Ministério da Educação, 1997.

Frederico de Oliveira e Souza

Mestre em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal de Viçosa. Licenciado em Matemática pela UFV. Pós-graduado em Educação Financeira, Neuropsicopedagogia e Desenvolvimento Humano, e Coordenação Pedagógica e Supervisão Escolar. Professor da Educação Básica desde 2021.

Marli Duffles Donato Moreira

Doutora em Ensino e Divulgação das Ciências - Especialidade em Ensino das Ciências - pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal (2016). Bacharel e Licenciada em Matemática pela Universidade Santa Úrsula (1999). Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (2010). Professora Adjunta da Universidade Federal de Viçosa, Departamento de Matemática e Professora/Orientadora do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, (PPGECM/UFV). Líder do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal de Viçosa (GEPEMUV).

Números Complexos: uma abordagem pedagógica a partir de Lakatos

Imagem de Lakatos gerada por IA

VIÇOSA/MINAS GERAIS
2025