



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS FLORIANÓPOLIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT

André Luiz Ferreira Milhorança

PRODUTO EDUCACIONAL

Uma atividade investigativa sobre probabilidade no Ensino Médio

Florianópolis
2025

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	2
2	APORTE TEÓRICO	4
2.1	INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA	4
2.1.1	Concepção geral da metodologia	4
2.1.2	Etapas da investigação matemática	5
2.1.3	Papel do professor	7
2.1.4	Avaliação em investigações matemáticas	8
2.2	ENSINO DE PROBABILIDADE	9
2.2.1	Diretrizes curriculares	10
2.2.2	Fundamentos básicos	11
2.2.2.1	Espaço Amostral	11
2.2.2.2	Probabilidade condicional	18
2.2.2.3	Independência	20
3	O PRODUTO EDUCACIONAL	23
3.1	PARTICIPANTES E PLANEJAMENTO DA INTERVENÇÃO	23
3.2	DETALHAMENTO DA ATIVIDADE INVESTIGATIVA	24
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	31
4.1	INDÍCIOS DE PENSAMENTO CRÍTICO E ARGUMENTAÇÃO	31
4.2	REFLEXÕES A PARTIR DA PRÁTICA	33
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	36
	Referências	38

1 INTRODUÇÃO

Ensinar matemática é algo pertinente a minha existência desde quando fui estudante do Ensino Médio, há mais de 15 anos. Sempre tive bastante facilidade com os conteúdos de matemática daquele período – com enorme contribuição das minhas professoras de matemática daquela época – e, por isso, reunia meus colegas de turma para estudarmos para provas e trabalhos. Quando decidi que cursaria a licenciatura em matemática, fui encontrando meu espaço nessa profissão que tanto me move e me põe a refletir sobre o ensino e a aprendizagem significativa de matemática. Agora, estou concluindo meu mestrado profissional em matemática, no qual vivenciei importantes momentos de aprendizagem e expansão de repertório da minha prática docente, com os quais gostaria de compartilhar alguns resultados obtidos na minha pesquisa de dissertação.

Ainda, sabe-se que a formação continuada do professor que ensina matemática é assegurada pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Brasil, 1996). Pesquisas em Educação Matemática reforçam a importância de metodologias que favoreçam aprendizagens significativas. A heterogeneidade das salas de aula no ensino médio impõe desafios adicionais, como as dificuldades de aprendizagem em matemática, atribuídas a fatores como desinteresse, desigualdades socioeconômicas, defasagens anteriores e práticas pedagógicas pouco eficazes (Kuhn, 2020; Sousa; Ventura, 2022).

A proposta de Investigações Matemáticas em sala de aula (Ponte; Brocardo; Oliveira, H., 2020) reforça a importância de tornar os alunos protagonistas no processo de construção do conhecimento matemático, aproximando-os do fazer matemático por meio de tarefas abertas e colaborativas. Pesquisas recentes (Musmanno et al., 2021; Fratucci et al., 2020; Nascimento; Quartieri, 2020) reforçam os benefícios dessa abordagem para o desenvolvimento da argumentação, da criatividade e da criticidade.

Apesar dos avanços teóricos, os dados de desempenho dos estudantes brasileiros em matemática seguem preocupantes. Em 2022, o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) indicou que 73% dos alunos brasileiros apresentaram baixo desempenho em matemática (INEP, 2023b), enquanto o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) mostrou quedas entre 2019 e 2023 em todos os níveis avaliados (INEP, 2023a). Tais indicadores revelam a urgência de propostas pedagógicas que motivem e envolvam os estudantes como um caminho possível para contribuir com a promoção de uma aprendizagem mais significativa.

Com base nesse contexto, este material propõe uma atividade investigativa baseada em Investigações Matemáticas, voltada ao ensino de probabilidade em turmas da 2ª série do ensino médio, que foi aplicada em uma escola pública da rede estadual em São José, Santa Catarina (SC), no desenvolvimento da pesquisa de uma

dissertação. A proposta se ancorou na cultura escolar local, articulando o conteúdo de probabilidade ao contexto da Gincana Esportiva anual da escola, buscando construir pontes entre o conhecimento matemático e as vivências dos estudantes.

2 APORTE TEÓRICO

Para a elaboração da atividade investigativa deste material, foi realizada uma revisão bibliográfica a fim de fundamentar teoricamente este trabalho, baseado na metodologia das investigações matemáticas. Por isso, a seguir são apresentados tópicos relevantes sobre a teoria das Investigações Matemáticas em sala de aula, proposta pelos professores portugueses Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020), e também sobre o ensino de probabilidade na etapa do ensino médio.

2.1 INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

2.1.1 Concepção geral da metodologia

O rigor e a certeza parecem acompanhar a história da matemática e a construção de conhecimento na área. Porém, a exploração daquilo que é desconhecido pode contrastar com aquele cenário de exatidão e, de algum modo, a matemática passa a figurar como uma ciência experimental ou indutiva. Quando nos deparamos com um problema em matemática, existe uma tendência natural de resolvê-lo; no entanto, a adoção de uma postura investigativa tem o potencial de proporcionar descobertas tão ou mais importantes do que a solução do problema original.

Na perspectiva das investigações matemáticas, é necessário pensar em formas concretas de organizar atividades que permitam aos estudantes vivenciar processos de exploração e formulação de conjecturas. Na próxima seção, apresenta-se a concepção geral da metodologia adotada para esse fim. Buscando promover experiências do próprio fazer matemático, os autores Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020) apresentam as investigações matemáticas como tarefas de exploração, tratando de situações mais abertas em comparação com os exercícios e problemas convencionais das aulas de matemática. Como discutido no trabalho de Machado e Lacerda (2021), tarefas investigativas criam situações nas quais os alunos passam a ser matemáticos, isto é, aqueles que buscam soluções, investigam e defendem suas estratégias, atuando com criticidade sobre o processo de ensino e aprendizagem.

Buscando caracterizar as investigações matemáticas, Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020) descrevem que

Uma atividade de investigação desenvolve-se habitualmente em três fases (numa aula ou conjunto de aulas): (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado (Ponte; Brocardo; Oliveira, H., 2020, p. 25).

Para garantir um desempenho satisfatório das investigações matemáticas em sala de aula, bem como sua aplicabilidade em turmas da educação básica, é essen-

cial o cuidado com cada fase dessa tarefa investigativa, conforme preconizam Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020). A seguir, serão descritas as etapas da investigação matemática, detalhando as características e os procedimentos possíveis em cada uma delas.

2.1.2 Etapas da investigação matemática

A primeira etapa trata-se do arranque da atividade investigativa, sendo o momento em que o professor faz a exposição da tarefa a ser realizada, podendo ser fornecida aos alunos por escrito, o que não desobriga uma breve explanação oral. Deve-se garantir que toda a turma compreenda o significado de investigar: a natureza dessa tarefa afasta-se das atividades tradicionais da aula de matemática. Isso acontece pois nem sempre existe um objeto bem delimitado a ser explorado e, por isso, os alunos devem formular suas próprias questões com base na situação apresentada.

A própria interpretação da tarefa configura, por si só, um dos objetivos da investigação matemática (Ponte; Brocardo; Oliveira, H., 2020). Assim, o professor não deve esgotar as possibilidades de exploração nesse momento de largada, mas construir um ambiente de aprendizagem onde os alunos se sintam livres para colocar suas questões, pensar sobre elas, explorá-las e comunicá-las. É interessante que os alunos saibam, desde já, que o trabalho a ser produzido será socializado com os demais colegas e o professor, promovendo para eles um espaço de estímulo e de valorização pessoal.

Avançando para a segunda etapa, quando o trabalho investigativo passará a ser desenvolvido de fato, o professor assume um papel mais de retaguarda. Isso quer dizer que os próprios coletivos formados pelos alunos devem assumir o protagonismo da tarefa, e espera-se que façam uso de vários processos que caracterizam a investigação matemática. Entre eles, “a exploração e formulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e a reformulação de conjecturas e, ainda, a justificação de conjecturas e a avaliação do trabalho (Ponte; Brocardo; Oliveira, H., 2020, p. 29)”.

É comum que os grupos de alunos precisem gastar algum tempo nessa exploração inicial, uma vez que é ali que eles vão se familiarizando com os dados apresentados e se apropriando do sentido da tarefa investigativa. Por isso, destaca-se a potencialidade do trabalho em grupo no surgimento de alternativas para a exploração da tarefa e a formulação de questões sobre a situação dada.

O surgimento de questões e a elaboração das conjecturas estão apoiados no desenvolvimento de cada grupo de trabalho e sua própria dinâmica. Por vezes, os alunos apresentam dificuldades em formular de maneira explícita suas conjecturas e, desse ponto, sucede a importância da realização de registros escritos do trabalho de investigação.

Tal fato se dá pela necessidade de argumentar e defender suas ideias levanta-

das, promovendo, assim, a refutação ou confirmação das conjecturas elaboradas. É oportuno ao professor contrapor a tendência dos alunos de observar regularidades em um número pequeno de casos, estimulando-os na procura por contraexemplos e lembrando-os do importante momento da socialização dos resultados.

O registro escrito desempenha um papel fundamental no trabalho investigativo e deve ser valorizado pelo professor. Por um lado, há a possibilidade de desenvolver a capacidade dos alunos de comunicar matematicamente, traduzindo seus próprios pensamentos por meio da escrita dos resultados e esclarecendo suas ideias. Por outro lado, a escrita dos resultados serve como instrumento avaliativo para o professor, tanto no que diz respeito aos trabalhos desenvolvidos pelos alunos quanto à execução de suas aulas planejadas.

A noção de prova matemática pode ser introduzida gradualmente aos pequenos investigadores enquanto o professor os leva a compreender o caráter provisório das conjecturas. Ao buscarem uma justificação aceitável, baseada em raciocínios coerentes e em seus conhecimentos, os alunos podem assimilar a necessidade de verificação das afirmações levantadas. Reside aí outro aspecto fundamental do papel de moderador assumido pelo professor, que orienta os grupos de trabalho a conciliar suas dificuldades de exploração e escrita de resultados.

Dando continuidade às etapas da investigação matemática, avança-se para a discussão dos resultados, momento esse de suma importância para a partilha e socialização dos conhecimentos mobilizados pelos alunos durante a tarefa investigativa. Desempenhando um papel de moderador, o professor age na garantia de que sejam comunicados os resultados e os processos de maior relevância, estimulando os alunos a confrontarem suas estratégias, conjecturas e justificações (Ponte; Brocardo; Oliveira, H., 2020).

Mais uma vez, o aluno é convidado a exercitar sua capacidade de comunicar matematicamente, enriquecendo o significado da investigação. Os autores Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020) lembram que, mesmo que momentos de discussão não sejam rotina nas aulas de matemática, o professor que conhece bem os seus alunos pode ter mais segurança ao estruturar uma aula de discussão. Deve atentar-se aos tempos e aos sinais que vêm dos alunos, concedendo-lhes maior ou menor flexibilidade durante as socializações.

Enquanto um grupo socializa os resultados de sua investigação, as intervenções de outros grupos devem ser combinadas entre o professor e a turma. A depender da dinâmica de cada grupo, pode-se eleger um porta-voz dos resultados para a partilha dos caminhos percorridos e das decisões tomadas pelo grupo, contribuindo para a continuidade do processo investigativo. Isso acontece pois o professor tem a liberdade de propor uma ordem que os grupos farão as socializações, encaminhando as discussões e as justificações para uma possível conclusão por meio de um raciocínio por maioria

de razão.

2.1.3 Papel do professor

A este ponto, deve estar claro que, em investigações matemáticas, o papel do professor não é o de detentor do conhecimento, nem o de transmissor de conteúdo a seus alunos. Pelo contrário, estabelece-se uma interação entre as partes na qual o professor retira-se do lugar tradicional de centralizador da informação e divide com os alunos a responsabilidade da construção do conhecimento. Nesse cenário, o professor concede-lhes a autonomia necessária para não interferir na autoria da investigação, que deve ser exclusiva dos alunos. Por outro lado, deve garantir que o trabalho investigativo aconteça com fluidez e de forma significativa do ponto de vista da matemática.

Segundo Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020), essa reorganização de papéis na sala de aula compõe um desafio extra para o professor, pois os alunos serão retirados da tendência natural, nas aulas de matemática, de procurar respostas para perguntas colocadas pelo professor. Para evitar esse comportamento, desde os momentos iniciais da investigação, o professor deve apontar-lhes possibilidades de interrogar matematicamente as situações e formular boas questões a partir daí.

Outro aspecto da postura assumida pelo professor é a de permanecer atento à forma como os alunos encaram o trabalho investigativo, para que não limitem a tarefa a encontrar uma resposta, como se costuma fazer em um simples exercício. Durante a realização das investigações, o docente deve aproximar-se de cada grupo de trabalho e recolher informações sobre o desenrolar da atividade, fazendo-lhes perguntas e pedindo-lhes explicações.

Não se trata, nesse momento, de ajuizar-se sobre os trabalhos observados, mas de esforçar-se para ouvir os alunos e compreendê-los, evitando corrigi-los sobre alguma afirmação ou conceito matematicamente pouco corretos. Esses períodos de avaliação do progresso dos trabalhos auxiliam o professor a decidir sobre a quantidade de tempo que os grupos de alunos ainda precisam para desenrolar suas investigações e avançar para a fase das discussões.

Além do mais, essas visitas feitas aos grupos de alunos durante o desenvolvimento de suas investigações constituem uma oportunidade para o professor manifestar seu raciocínio matemático. “Trata-se, também, de uma ocasião privilegiada para o professor evidenciar como se aborda o teste de conjecturas, pensando em voz alta com os alunos” (Ponte; Brocardo; Oliveira, H., 2020, p. 48). É possível verificar o quanto os alunos se apropriaram das etapas de formulação e teste das conjecturas e, mais uma vez, o professor é instigado a avaliar os momentos oportunos para trabalhar com o processo de prova - experimentando princípios de um processo de demonstração - matemática. Porém, recomenda-se sempre motivar seus alunos a justificarem suas afirmações.

De um modo geral, o aspecto predominante na atuação do professor durante as investigações matemáticas é o de apoio que concede aos seus alunos. Deve privilegiar uma postura interrogativa, colocando questões abertas, seja para clarificar ideias ou para compreender um raciocínio, promovendo aos alunos uma reflexão sobre seus próprios trabalhos. Configura, assim, um desafio à atuação profissional docente que sai de uma postura tradicional de validar e corrigir conceitos em desenvolvimento e é colocado numa situação que exige flexibilidade para lidar com situações novas e, por vezes, imprevisíveis.

2.1.4 Avaliação em investigações matemáticas

As investigações matemáticas, apresentadas aqui como uma atividade de aprendizagem alternativa ao ensino tradicional, também exigem a realização de avaliação. Os professores Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020) apontam uma diversidade de instrumentos avaliativos, de natureza oral e escrita, que buscam verificar a aprendizagem dos alunos com base em objetivos curriculares.

Fazendo uso de um instrumento avaliativo de natureza escrita, os relatórios constituem uma opção a ser realizada por um aluno ou por um grupo de alunos. Os relatórios abrigam a chance de os alunos descreverem, para além de suas conclusões, os processos que usaram na tarefa de investigação que os levaram a tais conclusões. Estimulados pelo professor, podem apresentar uma descrição o mais detalhada possível do trabalho realizado, incluindo as questões levantadas em relação à situação proposta, as fontes consultadas, a maneira como organizaram os dados, as conjecturas provadas e não provadas, as decisões e procedimentos utilizados para a validação das conjecturas, entre outros.

Quando a escrita de relatórios não é algo familiar aos alunos, é interessante que eles saibam o que está sendo pedido e que conheçam os aspectos a serem considerados em sua avaliação. Por esse motivo, recomenda-se que o professor realize um conjunto de indicações precisas, de modo a construir, com os alunos que realizam investigações matemáticas, uma espécie de roteiro para o relatório. Ter indicações escritas permite que os alunos façam sua releitura quantas vezes forem necessárias, o que não exclui conversar sobre o que se pretende com o relatório.

Segundo Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020), depois de elaborados os relatórios, podem ser estabelecidas escalas quantitativas ou qualitativas para compor a avaliação. A construção dessas escalas se dá a partir de um objetivo de aprendizagem - ou conjunto de objetivos - que pode ser graduado em diferentes níveis e, depois, faz-se a correspondência entre esse objetivo e o nível atingido nos relatórios dos alunos.

Mais importante do que a escala adotada são os critérios utilizados na avaliação e a devolutiva que o professor faz a seus alunos. Ao adotar esse tipo de avaliação, há a oportunidade de se fazer uma consideração global do trabalho, mas também de

apontar sugestões para melhorar a investigação apresentada.

Considerando outras formas de avaliação do trabalho investigativo, são apresentadas a observação informal e as apresentações orais. Instrumento rotineiro das aulas de matemática, a observação informal é uma forma natural de avaliar os alunos, pois, por meio dela, o professor é capaz de observar as suas atitudes e a maneira como mobilizam conhecimentos matemáticos formais e informais.

Vale destacar que a observação não é, necessariamente, uma atitude passiva realizada pelo professor. Isso significa que o professor se encontra na possibilidade de fazer perguntas aos alunos, buscando perceber a forma como estão pensando e seus processos de raciocínio, a fim de complementar suas observações sobre um aluno ou um grupo deles.

Já as apresentações orais, que podem acontecer naturalmente na socialização dos resultados das investigações matemáticas, constituem um instrumento de avaliação a ser considerado pelo professor. Além disso, contribuem para a aprendizagem dos alunos ao estimular suas capacidades de comunicação e argumentação. Por meio das apresentações, pode-se conhecer a compreensão do processo investigativo, os processos de raciocínio e as decisões, permitindo avaliar diversos objetivos.

Ao conhecer tais instrumentos avaliativos, é possível ainda adotar uma avaliação multifacetada em que “o professor pode fazer, correntemente, a observação direta dos alunos e grupos durante a realização de tarefas e alternar as apresentações orais com a produção de relatórios escritos, individuais ou de grupo” (Ponte; Brocardo; Oliveira, H., 2020, p. 121).

Em suma, as investigações matemáticas desenharam uma perspectiva curricular que pode ser implementada na sala de aula e que se preocupa com a aprendizagem dos alunos. Aproximá-los da experiência de fazer matemática torna a sala de aula um ambiente de trabalho envolvente e estimulante. Segundo o professor João Pedro da Ponte, o ensino de matemática torna-se carente se não for dada a oportunidade aos alunos para atuarem como pequenos matemáticos (Wichnoski, 2022).

2.2 ENSINO DE PROBABILIDADE

A promulgação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) designa-a como um guia normativo que estabelece os conhecimentos e habilidades essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo da escolaridade. Nessa direção, a área de conhecimento da Matemática e suas tecnologias apresenta-se a partir de cinco competências específicas a serem desenvolvidas ao longo do ensino médio.

A partir deste documento, os currículos de matemática das escolas brasileiras que oferecem o ensino médio devem contemplar as diretrizes estabelecidas para garantir o desenvolvimento das habilidades listadas ao longo das cinco competências

específicas. Nesse sentido, a BNCC não se apresenta como uma lista de conteúdos a serem cumpridos, mas como um conjunto de apontamentos de conhecimentos que devem ser garantidos aos alunos.

2.2.1 Diretrizes curriculares

Dentro da estrutura da Base Nacional Comum Curricular, no que se refere à área de conhecimento da Matemática e suas Tecnologias para o ensino médio, deseja-se dar continuidade às aprendizagens desenvolvidas no ensino fundamental, agora ainda mais fazendo referência à realidade do aluno.

Para isso, elenca o desenvolvimento de cinco competências específicas que devem ser garantidas aos estudantes do ensino médio. São elas:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.
2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018, p. 523).

Associadas a cada uma das competências, são indicadas habilidades a serem alcançadas na etapa do ensino médio. É interessante destacar, por fim, que as investigações matemáticas têm real potencial no desenvolvimento da Competência 5, especificamente. Ao propor situações da realidade, os alunos serão convidados a levantar suas próprias questões, formular conjecturas, refutá-las ou validá-las, comunicando suas conclusões. Esses aspectos podem contribuir para a compreensão que os alunos possuem sobre a matemática, ressignificando-a como resultado de atividade humana.

2.2.2 Fundamentos básicos

Esta seção tem por objetivo apresentar os fundamentos formais da teoria da probabilidade, que servem de base conceitual para a sequência didática proposta neste trabalho. Embora a atividade investigativa planejada esteja voltada à Educação Básica e privilegie situações contextualizadas, é essencial que o professor tenha domínio dos conceitos estruturantes da teoria probabilística. A construção rigorosa desses conceitos, baseada em definições axiomáticas, propriedades e demonstrações, contribui não apenas para a segurança conceitual do docente, mas também para a elaboração de situações didáticas mais precisas e significativas.

Neste sentido, serão expostos a seguir os principais elementos da formulação moderna da probabilidade, com ênfase no modelo axiomático desenvolvido por Kolmogorov, abordando noções como espaço amostral, eventos, medidas de probabilidade, independência e probabilidade condicional. Essa formalização se apoia, principalmente, na obra de James (2023), servindo como referência matemática para a prática pedagógica desenvolvida na sequência didática.

2.2.2.1 Espaço Amostral

Assim sendo, suponhamos que um experimento seja realizado sob certas condições fixas. Seja Ω o conjunto de resultados possíveis, onde por *resultado possível* entende-se resultado elementar e indivisível do experimento. Ω será chamado *espaço amostral* do experimento. Desse modo, vamos supor:

- (i) a todo resultado possível corresponde um, e somente um, ponto $\omega \in \Omega$; e
- (ii) resultados distintos correspondem a pontos distintos em Ω , isto é, ω não pode representar mais de um resultado.

Então, todo evento associado a um experimento pode ser identificado a um subconjunto do espaço amostral Ω . Com efeito, seja Ω o espaço amostral e A um evento associado ao experimento, isto é, um evento que seguramente irá ou não ocorrer sempre que for realizado o experimento. Para fixarmos ideias, suponhamos que Ω consista exatamente nos resultados possíveis do experimento, de modo que Ω não contenha resultados impossíveis. Suponhamos, então, que ω seja o resultado do experimento. Se A ocorre, dizemos que ω é *favorável* a A . Se A não ocorre, dizemos que ω não é favorável a A (ou ainda, que ω é favorável ao evento "não A "). Identificaremos o evento A e o subconjunto de Ω que contém todo ω favorável a A .

Chegamos à seguinte definição, que adotaremos no caso geral, inclusive nos casos em que utilizamos um espaço amostral maior que o estritamente necessário:

Definição 1. Seja Ω o espaço amostral do experimento. Todo subconjunto $A \subset \Omega$ será chamado *evento*. Ω é o evento *certo*, $\emptyset$ o evento *impossível*. Se $\omega \in \Omega$, o evento $\{\omega\}$ é dito *elementar* (ou *simples*).

Definição 2. Um evento A ao qual iremos atribuir uma probabilidade será chamado *evento aleatório*.

Suponhamos que a classe dos eventos aleatórios possua certas propriedades básicas e intuitivas, que serão essenciais para o desenvolvimento posterior da teoria e do cálculo de probabilidades. Indicando com $\mathbb{A}$ a classe dos eventos aleatórios, vamos estipular as seguintes propriedades para $\mathbb{A}$:

A1. $\Omega \in \mathbb{A}$ (definiremos $P(\Omega) = 1$).

A2. Se $A \in \mathbb{A}$, então $A^c \in \mathbb{A}$ (é evidente que definiremos

$$P(A^c) = 1 - P(A)).$$

A3. Se $A \in \mathbb{A}$ e $B \in \mathbb{A}$, então $A \cup B \in \mathbb{A}$ (i.e., se atribuirmos uma probabilidade a A e outra a B , então atribuiremos uma probabilidade a " A ou B ").

Em outras palavras, vamos supor que $\mathbb{A}$ seja uma álgebra de eventos:

Definição 3. Seja $\mathbb{A}$ um conjunto não-vazio. Uma classe $\mathbb{A}$ de subconjuntos de Ω satisfazendo A1, A2 e A3 é chamado *álgebra* de subconjuntos de Ω .

Proposição 1. *Seja $\mathbb{A}$ uma álgebra de subconjuntos de Ω . Então valem as seguintes propriedades:*

A4. $\emptyset \in \mathbb{A}$ e

A5. $\forall n, \forall A_1, \dots, A_n \in \mathbb{A}$, temos $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathbb{A}$ e $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathbb{A}$.

Esta proposição diz que uma álgebra é fechada para um número *finito* de aplicações das operações $\cup$, $\cap$ e c .

Demonstração. A1 e A2 implicam A4. Para A5, temos $A3 \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathbb{A} \Rightarrow (A_1 \cup A_2) \cup A_3 \in \mathbb{A} \Rightarrow \dots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathbb{A}$, por indução.

Agora, basta observar que

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c \right)^c$$

e aplicar sucessivamente A2, a parte já provada de A5 e, novamente, A2.

□

Seguidamente, vamos supor que a classe dos eventos aleatórios também satisfaça:

A3'. Se $A_n \in \mathbb{A}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{A}$.

Definição 4. Uma classe $\mathbb{A}$ de subconjuntos de um conjunto não-vazio Ω satisfazendo A_1 , A_2 e A_3' é chamada σ -álgebra de subconjuntos de Ω .

Observações. (1) Uma σ -álgebra é sempre uma álgebra, pois A_3 é consequência de A_3' , já que $A \cup B = A \cup B \cup B \cup B \dots \in \mathbb{A}$ se $\mathbb{A}$ é σ -álgebra.
 (2) Podemos supor que $\mathbb{A}$ é uma σ -álgebra em vez de álgebra, pelo Teorema da Extensão de Carathéodory. Este teorema da Teoria da Medida garante que uma probabilidade definida em uma álgebra, e de acordo com os axiomas usuais, pode ser estendida de uma única maneira para a σ -álgebra gerada pela álgebra.
 (3) Em inglês, usa-se às vezes o termo "field" (corpo) no lugar de "álgebra" e " σ -field" no lugar de " σ -álgebra". Para o tradutor de Gnedenko, σ -álgebra é "Borel field". Em francês, é "tribu".

Proposição 2. Seja $\mathbb{A}$ uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω . Se $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{A}$, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{A}$.

Demonstração.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c.$$

□

Podemos dizer, então, que uma σ -álgebra é fechada para um número *enumerável* de aplicações das operações $\cup$, $\cap$ e c .

Passamos agora a definir probabilidade, sendo que um método de o fazer é o da frequência relativa: poderíamos definir $P(A)$ como o limite da frequência relativa da ocorrência de A em n repetições independentes do experimento, com n tendendo ao infinito, i.e.,

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{número de ocorrências de } A \text{ em } n \text{ "ensaios"} \\ \text{independentes do experimento.} \end{array} \right\}.$$

Esta é a definição "frequentista" ou "estatística" de probabilidade. Baseia-se na experiência, comum a todos nós, da estabilidade da frequência relativa de ocorrência de eventos, quando realizamos muitas repetições do experimento. Essa definição foi usada por von Mises na construção de uma teoria de probabilidade.

Outro método de definir probabilidade é o de estabelecimento de axiomas, conhecido como *definição axiomática de probabilidade*. Para isso, vamos admitir que *existem* as probabilidades em uma certa σ -álgebra $\mathbb{A}$ de eventos, chamados eventos aleatórios; vamos supor que a todo $A \in \mathbb{A}$ seja associado um número real $P(A)$, chamado *probabilidade de A*, de modo que os axiomas a seguir sejam satisfeitos.

Axioma 1. $P(A) \geq 0$.

Axioma 2. $P(\Omega) = 1$.

Axioma 3. (*Aditividade finita*). Se $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{A}$ são disjuntos (2 a 2), então

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n P(A_k).$$

(Os eventos são disjuntos, ou disjuntos 2 a 2, se são mutuamente exclusivos, i.e., $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$.)

Observações. Como $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3$, podemos usar indução para mostrar que o Axioma 3 está satisfeito (para todo n) quando está satisfeito para $n = 2$. Uma função P satisfazendo Axiomas 1, 2 e 3 é chamada *probabilidade finitamente aditiva*. Embora alguma coisa tenha sido feita com tais probabilidades, é matematicamente mais conveniente supor σ -aditividade:

Axioma 3'. (σ -aditividade). Se $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{A}$ são disjuntos (i.e., mutuamente exclusivos), então

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Proposição 3. O Axioma 3' implica o Axioma 3, i.e., se P é σ -aditiva, então é finitamente aditiva.

Demonstração. Suponhamos satisfeito o Axioma 3', e sejam $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{A}$ disjuntos. Notemos inicialmente que $P(\emptyset) = 0$, já que

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots) = P(\Omega) \cup P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots \quad .$$

Definamos $A_k = \emptyset$ para $k = n+1, n+2, \dots$. Então $A_1, A_2, \dots$ são disjuntos, logo

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \\ &= \sum_{k=1}^n P(A_k) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots = \sum_{k=1}^n P(A_k) \end{aligned}$$

□

Definição 5. Uma função P definida numa σ -álgebra $\mathbb{A}$ e satisfazendo os Axiomas 1, 2 e 3' chama-se uma *medida de probabilidade em $\mathbb{A}$* ou simplesmente uma *probabilidade em $\mathbb{A}$* .

Ocorre que, dados os Axiomas 1, 2, 3, o Axioma 3' é equivalente ao:

Axioma 4. ("Continuidade no vazio"). Se a sequência $(A_n)_{n \geq 1}$, onde $A_n \in \mathbb{A} \forall n$, decrescer para o vazio, então $P(A_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Observação. $(A_n)_{n \geq 1}$ decresce para o vazio ($A_n \downarrow \emptyset$) significa $A_n \supset A_{n+1} \forall n$, ou seja, $(A_n)_{n \geq 1}$ decresce, e $\bigcap_{n \geq 1} A_n = \emptyset$.

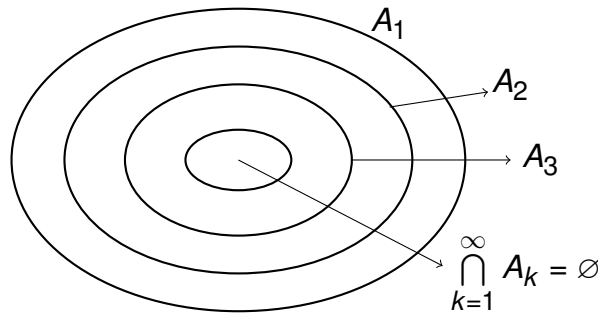
Proposição 4. Dados os Axiomas 1, 2, 3 o Axioma 4 é equivalente ao Axioma 3' (i.e., uma probabilidade finitamente aditiva é uma probabilidade se, e somente se, é contínua no vazio).

Demonstração. (i) Suponhamos o Axioma 3'. Sejam $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{A}$ tais que $A_n \downarrow \emptyset$. Queremos provar que $P(A_n) \rightarrow 0$. Temos

$$A_1 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \dots = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k - A_{k+1}),$$

pelo diagrama:

Figura 1 – Diagrama de "anéis" $A_k - A_{k+1}$



Fonte: James (2023).

Os "anéis" $A_k - A_{k+1}$ são disjuntos, porque a sequência é decrescente, e pertencem a $\mathbb{A}$, já que $\mathbb{A}$ é fechada para diferenças. Pelo Axioma 3',

$$P(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k - A_{k+1}),$$

portanto a série é convergente e

$$\sum_{k=1}^{n-1} P(A_k - A_{k+1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(A_1).$$

Pela aditividade finita,

$$P(A_k - A_{k+1}) = P(A_k) - P(A_{k+1}),$$

logo

$$P(A_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} (P(A_k) - P(A_{k+1})) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P(A_1) - P(A_n)),$$

e então $P(A_n) \rightarrow 0$.

(ii) Suponhamos o Axioma 4 e sejam $A_1, A_2, \dots \in \mathbb{A}$ disjuntos. Queremos provar que $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$. Seja $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, então

$$A = \left(\bigcup_{n=1}^k A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right)$$

e pela aditividade finita,

$$P(A) = \sum_{n=1}^k P(A_n) + P\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n\right).$$

Seja $B_k = \bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n$, então $B_k \downarrow \emptyset$ e portanto $P(B_k) \rightarrow 0$ (pelo Axioma 4). Logo

$$\sum_{n=1}^k P(A_n) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} P(A),$$

i.e., $P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$. □

Corolário 1. Os dois seguintes sistemas de axiomas são equivalentes:

Sistema I: Axiomas 1, 2, 3'

Sistema II: Axiomas 1, 2, 3, 4.

Demonstração. O sistema I é equivalente aos Axiomas 1, 2, 3, 3', pois já vimos que o Axioma 3' implica o Axioma 3. Agora basta aplicar a Proposição 1.4. □

Observação. Então para verificar se P é probabilidade em $\mathbb{A}$, basta verificar os axiomas do sistema I ou os axiomas do sistema II.

Propriedades de probabilidade. Seja P uma probabilidade em uma σ -álgebra $\mathbb{A}$. Suponhamos que todo A abaixo pertença a $\mathbb{A}$. Então as seguintes propriedades são consequências dos axiomas:

P1. $P(A^c) = 1 - P(A)$. (Consequência dos Axiomas 2 e 3).

Caso particular importante: $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$.

P2. $0 \leq P(A) \leq 1$. (Consequência do Axioma 1 e P1.)

P3. $A_1 \subset A_2 \Rightarrow P(A_1) \leq P(A_2)$. (Pela aditividade finita, $P(A_2) = P(A_1) + P(A_2 - A_1) \geq P(A_1)$, pelo Axioma 1.)

$$P4. \quad P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i). \text{ (Pela aditividade finita,}$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2 \cap A_1^c) \leq P(A_1) + P(A_2),$$

por P3, já que $A_2 \cap A_1^c \subset A_2$. Completa-se a prova por indução.)

$$P5. \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

P6. (*Continuidade de probabilidade*). Se $A_n \uparrow A$, então $P(A_n) \uparrow P(A)$. Se $A_n \downarrow A$, então $P(A_n) \downarrow P(A)$.

Demonstração de P6. Vamos supor que $A_n \downarrow A$, i.e., que $A_n \supset A_{n+1} \forall n$ e $\bigcap_{n \geq 1} A_n = A$. Então, $P(A_n) \geq P(A_{n+1})$, por P3, e $(A_n - A) \downarrow \emptyset \Rightarrow P(A_n - A) \rightarrow 0$, pela continuidade do vazio. A aditividade finita implica $P(A_n - A) = P(A_n) - P(A)$, pois $A \subset A_n$. Resumindo, temos $P(A_n) - P(A) \rightarrow 0$ e $\{P(A_n)\}_{n \geq 1}$ decrescente, logo $P(A_n) \downarrow P(A)$.

Se $A_n \uparrow A$ (i.e., $A_n \subset A_{n+1} \forall n$ e $\bigcup_{n \geq 1} A_n = A$), então $A_n^c \downarrow A^c$. Logo, $P(A_n^c) \downarrow P(A^c)$, ou seja, $1 - P(A_n) \downarrow 1 - P(A)$; portanto, $P(A_n) \uparrow P(A)$. $\square$

Modelo probabilístico. Terminamos a formulação do modelo matemático para um experimento, ou modelo probabilístico. É constituído de:

- (a) Um conjunto não-vazio Ω , de resultados possíveis, o *espaço amostral*.
- (b) Uma σ -álgebra $\mathbb{A}$ de *eventos aleatórios*.
- (c) Uma *probabilidade* P definida em $\mathbb{A}$.

Agora vamos retirar nosso modelo do contexto de um experimento e reformulá-lo como um conceito matemático abstrato.

Definição 6. Um *espaço de probabilidade* é um trio $(\Omega, \mathbb{A}, P)$, onde

- (a) Ω é um conjunto não-vazio,
- (b) $\mathbb{A}$ é uma σ -álgebra de subconjuntos de Ω , e
- (c) P é uma probabilidade em $\mathbb{A}$.

A partir de agora, tudo será estudado em espaços de probabilidade, apesar de mantermos a linguagem de experimentos e eventos. (Já vimos que todo modelo probabilístico é um espaço de probabilidade. Reciprocamente, o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ pode ser considerado um modelo para o experimento "selecionar um ponto de Ω conforme a probabilidade P ").

2.2.2.2 Probabilidade condicional

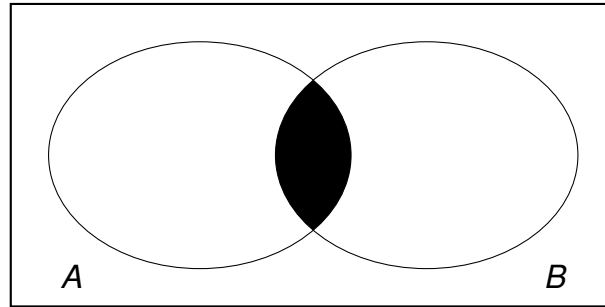
Definição 7. Seja $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ um espaço de probabilidade. Se $B \in \mathbb{A}$ e $P(B) > 0$, a *probabilidade condicional de A dado B* é definida por

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad A \in \mathbb{A}.$$

Observação. Se $P(B) = 0$, $P(A | B)$ pode ser arbitrariamente definida. A maioria dos livros faz $P(A | B) = 0$, mas não é interessante fazer $P(A | B) = P(A)$ para que $P(A | B)$ seja uma probabilidade em $\mathbb{A}$ (como função de A). É também conveniente, por independência, fazer $P(A | B) = P(A)$.

Consideremos um diagrama de Venn:

Figura 2 – Diagrama de Venn: interseção $A \cap B$



Fonte: James (2023).

Se A e B são desenhados de modo que as áreas de A , B e $A \cap B$ sejam proporcionais às suas probabilidades, então $P(A | B)$ é a proporção do evento B ocupada pelo evento A . Note que $P(A | B)$, $A \in \mathbb{A}$, é realmente uma probabilidade em $\mathbb{A}$, ou seja, determinar $P(A | B)$ passa por restringir o universo Ω . Consequentemente as propriedades são mantidas, por exemplo:

$$P(A^c | B) = 1 - P(A | B).$$

Probabilidade condicional possui uma interpretação intuitiva em termos de frequências relativas. Pensando em probabilidade como limite de frequência relativa, temos:

$$\begin{aligned} P(A | B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{número de ocorrências de "A e B"} \\ \text{em } n \text{ ensaios independentes do experimento} \end{array} \right\}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{número de ocorrências de } B \\ \text{em } n \text{ ensaios independentes do experimento} \end{array} \right\}} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{número de ocorrências de } A \cap B \text{ em } n \text{ ensaios}}{\text{número de ocorrências de } B \text{ nos mesmos } n \text{ ensaios}}$$

Então, quando n é grande, $P(A | B)$ é aproximadamente igual ao quociente do número de ocorrências de A e B sobre o número de ocorrências de B em n ensaios independentes do experimento, i.e., $P(A | B)$ é aproximadamente a proporção, entre os experimentos em que ocorre o evento B , daqueles em que o evento A também ocorre.

Decorre da definição que $P(A \cap B) = P(B)P(A | B)$, e esta igualdade é válida também quando $P(B) = 0$. Esta igualdade se generaliza: sendo A, B, C eventos aleatórios, temos $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B | A)P(C | A \cap B)$.

Demonstração. $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B)P(C | A \cap B) = P(A)P(B | A)P(C | A \cap B)$. $\square$

Por indução, temos o seguinte:

Teorema 1. (*Teorema da Multiplicação ou Teorema da Probabilidade Composta*). *Seja $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ um espaço de probabilidade. Então*

- (i) $P(A \cap B) = P(A)P(B | A) = P(B)P(A | B), \forall A, B \in \mathbb{A},$
- (ii) $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots$
 $\dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}), \forall A_1, \dots, A_n \in \mathbb{A}, \quad \forall n = 2, 3, \dots$

Agora suponhamos que $A_1, A_2, \dots$ sejam eventos aleatórios mutuamente exclusivos e exaustivos (i.e., que os A_i sejam distintos = mutuamente exclusivos e $\cup A_i = \Omega$). Então os A_i formam uma *partição* do conjunto amostral Ω .

Vamos admitir que a sequência $A_1, A_2, \dots$ seja finita ou enumerável - então, por exemplo, A e A^c formam uma partição, $\forall A \in \mathbb{A}$.

Para todo evento $B \in \mathbb{A}$, temos $B = \bigcup_i (A_i \cap B)$. Como os A_i são disjuntos, então os $B \cap A_i$ são disjuntos e

$$P(B) = \sum_i P(A_i \cap B) = \sum_i P(A_i)P(B | A_i).$$

Logo temos o seguinte

Teorema 2. (*Teorema da Probabilidade Total (ou Absoluta)*). *Se a sequência (finita ou enumerável) de eventos aleatórios $A_1, A_2, \dots$ formam uma partição de Ω , então*

$$P(B) = \sum_i P(A_i)P(B | A_i), \quad \forall B \in \mathbb{A}.$$

Usando esse teorema, podemos calcular a probabilidade de A_i dada a ocorrência de B :

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A_i | B) = \frac{P(A_i)P(B | A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B | A_j)}.$$

Essa é a *fórmula de Bayes*. Ela é útil quando conhecemos as probabilidades dos A_i e a probabilidade de B dado A_i , mas não conhecemos *diretamente* a probabilidade de B .

Observação. A fórmula de Bayes é, às vezes, chamada de fórmula de probabilidades "posteriores". Com efeito, as probabilidades $P(A_i)$ podem ser chamadas probabilidades "a priori" e as $P(A_i | B)$, probabilidades "a posteriori".

2.2.2.3 Independência

Definição 8. Seja $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ um espaço de probabilidade. Os eventos aleatórios A e B são (estocasticamente) *independentes* se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Observação. Eventos de probabilidade zero ou um são independentes de qualquer outro: se $P(A) = 0$, então $P(A \cap B) = 0$ e A e B são independentes, $\forall B \in \mathbb{A}$. Se $P(B) = 1$, então $P(A \cap B) = P(A) = P(A)P(B)$ e, como $A \cap B^c \subset B^c$ implica $P(A \cap B^c) \leq P(B^c) = 0$, temos $P(A \cap B^c) = 0$ e $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Logo, A e B são independentes, $\forall A \in \mathbb{A}$.

Proposição 5. A é independente de si mesmo se, e somente se, $P(A) = 0$ ou 1 .

Demonstração. $P(A) = P(A \cap A) = P(A)P(A) \Leftrightarrow P(A) = 0$ ou 1 . □

Proposição 6. Se A e B são independentes, então A e B^c também são independentes (e também A^c e B , e ainda A^c e B^c).

Demonstração. Vamos supor A, B independentes. Então $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) =$ (pela independência) $= P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A) \cdot P(B^c)$. □

Aqui está uma justificação intuitiva da Definição 8: B é independente de A se tanto a ocorrência quanto a não ocorrência de A não afetam a probabilidade de B ocorrer, i.e., $P(B | A) = P(B)$ e $P(B | A^c) = P(B)$. Estas duas equações significam que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B | A) = P(A)P(B) \quad e$$

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B | A^c) = P(A^c)P(B);$$

pela Proposição 6, basta uma destas últimas equações para a definição.

Observação. Se $A \cap B = \emptyset$, então A e B não são independentes (a menos que um deles tenha probabilidade zero).

Definição 9. Os eventos aleatórios $A_i, i \in I$ (I é um conjunto de índices), são *independentes 2 a 2* (ou a pares) se

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad \forall i, j \in I, i \neq j.$$

Definição 10. (a) Os eventos $A_1, \dots, A_n$ ($n \geq 2$) são chamados (coletivamente ou estocasticamente) *independentes* se

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_m})$$

$\forall 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n, \forall m = 2, 3, \dots, n$ (i.e., se todas as combinações satisfazem a regra produto).

(b) Os eventos $A_1, A_2, \dots$ são *independentes* se $\forall n \geq 2, A_1, A_2, \dots, A_n$ são independentes.

(c) Os eventos $A_i, i \in I$ (onde I é um conjunto de índices tal que $\#I \geq 2$) são *independentes* se toda subfamília finita deles é de eventos independentes, i.e., se $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, \dots, A_{i_m}$ são independentes para toda combinação $\{i_1, \dots, i_m\}$ de elementos de $I, \forall m = 2, 3, \dots$.

Observações. (1) Tais eventos são chamados, às vezes, *estatisticamente* ou *mutuamente* independentes.

(2) Vemos pelo item (c) que toda subfamília de uma família de eventos independentes é de eventos independentes.

Proposição 7. Se $A_i, i \in I$ é uma família de eventos independentes, então para qualquer escolha $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$, a família $B_i, i \in I$ também é independente.

Demonstração. Pelo item (c) da definição de independência, é suficiente provar que toda subfamília finita $B_1, \dots, B_n$ de eventos satisfaz a regra do produto:

$$P(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \prod_{i=1}^n P(B_i),$$

onde $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$ e $A_1, \dots, A_n$ são eventos independentes. A prova será feita por indução finita em n .

1. Caso Base ($n = 2$): Se A_1 e A_2 são independentes, pela Proposição 6, a regra do produto é válida para todas as quatro combinações de B_1 e B_2 .

2. Hipótese de Indução ($n = k$): Assumimos que a proposição é válida para k eventos: se $A_1, \dots, A_k$ são independentes, então $P(B_1 \cap \dots \cap B_k) = \prod_{i=1}^k P(B_i)$, onde $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$.

3. Passo Indutivo ($n = k + 1$): Sejam $A_1, \dots, A_{k+1}$ eventos independentes e $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$ para $i = 1, \dots, k + 1$. Definimos $C = B_1 \cap \dots \cap B_k$. Pela Hipótese de Indução, $P(C) = \prod_{i=1}^k P(B_i)$. O evento que queremos calcular é $P(C \cap B_{k+1})$.

Caso 3.1: $B_{k+1} = A_{k+1}$. Como $A_1, \dots, A_{k+1}$ são coletivamente independentes, A_{k+1} é independente de qualquer evento formado por $A_1, \dots, A_k$ e seus complementos. Logo, C e A_{k+1} são independentes.

$$P(C \cap A_{k+1}) = P(C)P(A_{k+1}) = \left(\prod_{i=1}^k P(B_i) \right) P(A_{k+1}) = \prod_{i=1}^{k+1} P(B_i).$$

Caso 3.2: $B_{k+1} = A_{k+1}^c$. Queremos mostrar que $P(C \cap A_{k+1}^c) = P(C)P(A_{k+1}^c)$. Usamos a relação da Proposição 6:

$$P(C \cap A_{k+1}^c) = P(C) - P(C \cap A_{k+1}).$$

Pelo Caso 3.1, C e A_{k+1} são independentes: $P(C \cap A_{k+1}) = P(C)P(A_{k+1})$. Substituindo na equação anterior:

$$P(C \cap A_{k+1}^c) = P(C) - P(C)P(A_{k+1}) = P(C)(1 - P(A_{k+1})) = P(C)P(A_{k+1}^c).$$

Substituindo $P(C)$ pela Hipótese de Indução:

$$P(C \cap A_{k+1}^c) = \left(\prod_{i=1}^k P(B_i) \right) P(A_{k+1}^c) = \prod_{i=1}^{k+1} P(B_i).$$

O passo indutivo é válido em ambos os casos. Portanto, por indução finita, a proposição é válida para todo $n \geq 2$. $\square$

A exposição formal dos conceitos probabilísticos, apresentada nesta seção, fornece um alicerce teórico sólido que sustenta as decisões didáticas adotadas na sequência investigativa desenvolvida. Embora a linguagem matemática aqui utilizada ultrapasse os conteúdos tradicionalmente abordados na Educação Básica, ela se mostra relevante para a prática docente ao permitir a análise criteriosa das estratégias dos estudantes e a mediação pedagógica qualificada durante a resolução de problemas envolvendo incerteza.

3 O PRODUTO EDUCACIONAL

Buscando viabilizar uma metodologia de ensino apoiada em investigações matemáticas, foi inicialmente elaborada uma sequência didática para turmas nas quais atuo como professor de matemática na educação básica, empenhando-me em compreender os sentidos atribuídos pelos estudantes ao conteúdo de probabilidade. Uma sequência didática é um instrumento de planejamento do professor, no qual é possível escolher e organizar uma sucessão de atividades que atendam a um determinado objetivo de aprendizagem. Isto é, uma sequência didática consiste em um grupo de decisões de aspecto metodológico e prático que guiarão a atividade docente em sala de aula. Não se trata de uma estrutura rígida; entretanto, deve apresentar flexibilidade diante das interações com os estudantes e das condições às quais estão submetidos (Silva; Oliveira, M. M. de, 2009).

3.1 PARTICIPANTES E PLANEJAMENTO DA INTERVENÇÃO

O produto educacional desenvolvido é resultado de uma pesquisa de mestrado que buscou compreender os sentidos atribuídos pelos estudantes ao conteúdo de probabilidade a partir da implementação de uma atividade investigativa baseada na metodologia das Investigações Matemáticas. O local em que se aplicou a sequência didática é a Escola de Educação Básica Professor Laércio Caldeira de Andrada, na cidade de São José, SC. Trata-se de uma escola da rede estadual de Santa Catarina, atendendo turmas do Ensino Fundamental (Anos Iniciais e Anos Finais), bem como do Ensino Médio, nos turnos matutino, vespertino e noturno (EEBLCA, 2025).

Nesse cenário, esta atividade investigativa foi elaborada e aplicada em três turmas da 2ª série do ensino médio da E. E. B. Prof. Laércio Caldeira de Andrada, da qual sou professor regular de matemática. Aprovada no calendário escolar, a Gincana Esportiva da unidade escolar mencionada, prevista para acontecer no terceiro trimestre letivo, movimenta os estudantes desde o início do ano. Desde então, já se organizam para confeccionar as camisetas ou uniformes que serão um dos elementos da identidade visual da classe durante os dias de campeonato. As turmas relataram um histórico de envolvimento significativo na participação e dedicação aos jogos que, em um clima amistoso, promovem situações de coletividade.

Analizando os planejamentos anuais da componente curricular de matemática nas turmas de ensino médio da E. E. B. Prof. Laércio Caldeira de Andrada, identificaram-se os conteúdos e habilidades a serem desenvolvidos. Buscou-se tomar aqueles com potencial de dialogar a matemática escolar com a cultura da comunidade, envolvendo a Gincana Esportiva, tendo a probabilidade um lugar de destaque nesse contexto. Identificado o conteúdo em potencial, tomou-se a unidade temática *Probabilidade e Estatística* conforme a BNCC (Brasil, 2018) no que se refere à etapa

do ensino médio. Nesse aspecto, o conceito de probabilidade deve ser ampliado e consolidado ao se trabalhar com as diversas realidades, contextos e situações dos estudantes. Em consulta ao Currículo Base do Território Catarinense para o Ensino Médio (Santa Catarina, 2020), há uma concordância sobre a organização curricular na qual se insere o conteúdo de probabilidade, uma vez que o documento tem a BNCC como base curricular.

Considerando que são turmas já familiarizadas com a minha dinâmica de trabalho, entendeu-se que seriam necessárias cinco aulas de 45 minutos cada, as quais ocorreram durante o horário e espaço habituais de aula das turmas, no tempo das aulas de matemática. Isto significa que os estudantes participantes não precisaram se deslocar para espaços diferentes dos já praticados na rotina escolar, nem em horários distintos do cotidiano.

Para as turmas em questão, foi planejada a aplicação da atividade investigativa detalhada na próxima seção. As cinco aulas foram organizadas da seguinte maneira: (1) Levantamento dos conhecimentos prévios acerca de probabilidade e diálogo sobre fenômenos aleatórios; (2) Organização dos estudantes em grupos espontâneos e arranque da atividade investigativa; (3) Desenvolvimento das investigações matemáticas, intercalando momentos de atenção aos comandos do professor pesquisador, utilizando exposição oral e o quadro, e momentos de trabalho coletivo entre o próprio grupo; (4) Discussão dos resultados obtidos e justificção das probabilidades encontradas; e (5) Socialização dos resultados e avaliação colaborativa. No decorrer da prática, foram produzidos materiais em papel e escrita que compuseram parte da avaliação da atividade investigativa.

3.2 DETALHAMENTO DA ATIVIDADE INVESTIGATIVA

Após as discussões bibliográficas e o reconhecimento das turmas em que a atividade investigativa foi aplicada, chegou-se ao produto educacional exibido abaixo.

1. IDENTIFICAÇÃO

Escola: E. E. B. Prof. Laércio Caldeira de Andrada

Município: São José, SC

Componente Curricular: Matemática

Professor: André Milhorança

Série: 2^a **Nível:** Ensino Médio

Tempo estimado: 5 horas aula

2. TEMA

Conteúdo: Probabilidade e Estatística

3. JUSTIFICATIVA

A probabilidade tem figurado cada vez mais em nosso cotidiano: controle de qualidade; seguros; dados relativos a nascimentos e expectativa de vida, entre outros. Além disso, os princípios probabilísticos têm se tornado instrumento de trabalho para muitas áreas do conhecimento. Muitos fenômenos são tratados matematicamente mediante simulações aleatórias, como por exemplo na modelagem de condições meteorológicas em situações de crise climática.

O grande desafio que se enfrenta ao introduzir esse conteúdo na matemática escolar é romper com a visão determinista que essa disciplina constrói. Sem dúvida, trata-se de um tema difícil de aprender e de ensinar. Lidar com o acaso não é tarefa simples nem intuitiva. Dessa forma, se faz necessário colocar os estudantes em situações de tomada de decisão a fim de reconhecerem seu sistema de crenças pessoais e a influência de seus contextos nesse processo.

4. OBJETIVOS

- a) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos;
- b) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades;
- c) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro, etc.).

5. MATERIAIS E MÉTODOS

O conteúdo será abordado através de aulas investigativas, utilizando a metodologia das investigações matemáticas. Sendo assim, os alunos serão organizados em pequenos grupos espontâneos, conforme a afinidade entre os integrantes das turmas, para participarem das atividades investigativas em Matemática. Inicialmente, o professor fará uma exposição acerca da natureza das atividades investigativas para, em seguida, fazer o reconhecimento da situação a ser trabalhada, a sua exploração preliminar e a formulação de questões.

Os alunos receberão material de escrita próprio, disponibilizado pelo professor, para o desenvolvimento da atividade. Além disso, podem utilizar seus próprios cadernos para fazer as anotações e, para a exposição das conclusões de cada grupo, eles poderão utilizar da lousa. Após a socialização dos resultados e discussões de cada

grupo, um espaço de debate será aberto com o objetivo de trabalhar a argumentação matemática e embate dos possíveis erros que possam aparecer durante os testes das conjecturas levantadas pelos alunos. Por fim, os alunos serão convidados a tecerem comentários sobre o formato da aula investigativa, destacando os pontos positivos e pontos negativos, com base em suas percepções, para as suas aprendizagens. Tendo concluído esse processo, o professor realiza um feedback dessa abordagem para melhorias e aplicações futuras.

6. PROCEDIMENTOS

1ª aula: Fenômenos aleatórios e Historização

O início da problematização pode se dar com a exploração de fenômenos aleatórios, isto é, fenômenos ou experimentos que estão submetidos à aleatoriedade, reforçando a noção de que, mesmo que se conheçam os possíveis resultados, não são determinísticos. Como exemplos, podem ser citados o lançamento de uma moeda, o lançamento de um dado, os jogos de loteria, entre outros.

Nesse contexto, pode-se realizar um diálogo com os estudantes sobre quais fatores podem ser considerados quando desejamos determinar as chances de um determinado fenômeno aleatório acontecer. É importante que o professor tenha em mente que o estudo matemático das probabilidades estabelece relação com a estatística na utilização de técnicas analíticas para realizar projeções de ocorrências de eventos. Com base nos estudos de Shaughnessy (1992) é possível identificar a presença de quatro concepções de probabilidade:

- I) Concepção clássica ou laplaciana de probabilidade: trata-se de uma definição apresentada por Laplace, em 1812: define-se probabilidade como a razão entre números de casos favoráveis em relação ao número total de casos possíveis, desde que todos os resultados sejam igualmente prováveis;
- II) Concepção frequentista ou empírica de probabilidade: a probabilidade emerge de uma experimentação – “probabilidade a posteriori”, ou seja, a probabilidade é calculada depois de experimentos terem sido realizados. As teorias frequentistas consideram probabilidades a serem atribuídas baseadas no comportamento a longo prazo dos resultados aleatórios;
- III) Concepção subjetivista de probabilidade: as probabilidades expressam grau de crença ou percepção pessoal; ela fica centrada no sujeito;
- IV) Concepção axiomática ou formal: trata-se da concepção vigente atualmente e se apoia na teoria de conjuntos, contrapondo-se à concepção clássica. É um conceito definido implicitamente por um sistema de axiomas e um conjunto de definições e teoremas deduzidos deles.

A probabilidade, juntamente com a estatística, compõe uma das unidades temáticas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Segundo o documento, o objetivo maior é que os alunos compreendam que nem todos os fenômenos são determinísticos; para isso, é necessário dar aos alunos a possibilidade de experimentar, explorar, discutir, trocar ideias, argumentar, dizer como estão pensando, quais julgamentos fazem sobre a ocorrência de determinado evento, contrastem o que poderia ter acontecido e não aconteceu, etc.

2ª aula: Introdução da tarefa investigativa

Iniciaremos a aula conversando sobre situações do cotidiano em que é possível encontrar o uso de probabilidade e / ou previsões numéricas. Espera-se que os estudantes citem a previsão meteorológica, os jogos de apostas, os resultados dos times que torcem, entre outros.

Após esse primeiro momento, adentraremos o contexto da Gincana Esportiva, prática anual na E.E.B. Laércio Caldeira de Andrada. Os alunos se organizarão em grupos espontâneos de 2 a 5 integrantes, que seguirão até o final das atividades investigativas, e compartilharão suas memórias e experiências sobre a participação na gincana, bem como os resultados, buscando verificar a mobilização de conhecimentos de matemática acerca desses resultados.

O arranque da atividade investigativa se apoiará nas vivências da Gincana Esportiva com o objetivo de matematizar os chaveamentos das modalidades esportivas, feito a partir de sorteio das turmas, e efetivar cálculos de probabilidade acerca dos jogos. O material será entregue de forma impressa aos estudantes, não dispensando uma pequena introdução oral por parte do professor, garantindo que os alunos compreendam o que significa investigar.

ARRANQUE DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Procure construir um chaveamento sorteando as equipes abaixo para disputas na modalidade “mata-mata”.

Turmas 100, 101, 102, 103, 104

Turmas 200, 201, 202, 203, 204

Turmas 300, 301, 302, 303, 304

Registre os resultados obtidos e determine as possibilidades e probabilidades de sua turma se tornar campeã de uma modalidade.

Para verificar se os alunos entenderam a atividade investigativa serão tiradas as possíveis dúvidas iniciais levantadas pelos grupos de trabalho, buscando destacar que não se trata de responder uma questão bem delimitada. Importante destacar que os grupos se empenharão em formular questões com base na situação que lhes é apresentada.

3ª aula: Desenvolvimento das investigações

Retomaremos a atividade investigativa realizando os sorteios para formação do chaveamento a partir das equipes do Ensino Médio que disputarão a Gincana Esportiva no ano de 2025. Cada grupo poderá decidir a maneira como realizar o sorteio das equipes e como arranjá-las no chaveamento das disputas que acontecerão na modalidade conhecida como “mata-mata”. Mais uma vez será assegurado a compreensão dos alunos acerca da atividade que se irá realizar e o professor passará a assumir papel de moderador das investigações.

Durante as passagens do professor pelos grupos, será observada e incentivada a exploração e formulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e a reformulação de conjecturas. Será garantido que os grupos levem o tempo que precisar para se familiarizarem com os dados e se apropriarem mais efetivamente do sentido da tarefa investigativa.

Serão observados os registros por escrito e os diálogos buscando identificar como os grupos geram seus dados e os organizam para, então, formular suas questões. A noção de aleatoriedade deve ser reforçada à medida que percebem os diferentes chaveamentos possíveis que podem ser gerados a partir das equipes disponíveis, mobilizando a contagem das possibilidades e buscando conhecer também a noção de espaço amostral.

4ª aula: Justificação das conjecturas e discussão dos resultados obtidos

Dando continuidade às investigações e a formulação de conjecturas, nessa aula buscaremos analisar a mobilização dos conhecimentos no teste dessas conjecturas. O trabalho indutivo realizado pelos grupos será incentivado a ser transformado em registro escrito a ser motivado pelo professor moderador que continua a caminhar e observar o desenvolvimento dos alunos. Cabe-lhe colocar questões aos alunos que os estimulem a olhar em outras direções e os façam refletir sobre aquilo que estão fazendo.

Esses elementos escritos são fundamentais para o momento da discussão posterior dos resultados como forma de organização das ideias e seus resultados. Espera-se que os grupos de alunos tenham avançado com os chaveamentos, sendo capazes de observar como as equipes que disputam a Gincana Esportiva avançam nas fases conforme os resultados das partidas.

A essa altura da atividade investigativa, espera-se que os grupos sejam capazes de elaborar e resolver problemas que envolvem o cálculo de probabilidade em eventos. Pretende-se retomar a discussão sobre a noção de aleatoriedade e de determinismo em situações de probabilidade, mais específico, no contexto da Gincana Esportiva. A justificação das conjecturas é imprescindível para o processo investigativo, em que o professor colocará o caráter provisório das conjecturas introduzindo a ideia de prova matemática, podendo fazer comentários das modalidades já conhecidas. A principal motivação nesse momento da investigação será perceber a necessidade de os grupos justificarem matematicamente as suas afirmações.

No final de uma investigação, é importante construir um momento de partilha de conhecimento em que os grupos devem socializar os seus resultados obtidos. O principal objetivo dessa etapa é confrontar as estratégias, conjecturas e justificações utilizadas pelos grupos, em que o professor desempenha um papel de moderador dos possíveis conflitos.

Será o momento em que o professor é capaz de fazer uma sistematização dos conhecimentos levantados, destacando a importância dessa fase de discussão para o desenvolvimento da capacidade de comunicar-se matematicamente. Como o professor terá noção do trabalho realizado por cada um dos grupos, pode estabelecer uma ordem de socialização dos resultados obtidos por eles, de modo que a discussão dos trabalhos não seja repetitiva, mas permita uma consolidação dos objetivos listados nessa sequência didática.

5ª aula: Avaliação colaborativa

Conforme a metodologia adotada para as investigações matemáticas, a avaliação se dará através da escrita de relatórios pelos grupos de alunos e da observação informal, pelo professor. Se a escrita de relatórios não é comum aos estudantes, é importante a construção de um roteiro para sua elaboração, explicitando o que se é pretendido e como será avaliado.

Nas instruções para a escrita dos relatórios, serão colocadas a necessidade de descrever, de maneira detalhada, os passos que o grupo seguiu para explorar a tarefa que lhe foi proposta, podendo lançar mão de escritos, desenhos, tabelas, esquemas e o que for conveniente, desde que de forma organizada. Além disso, será cobrado o registro de um resumo do que o grupo considera ter aprendido após a realização da investigação matemática, bem como, um comentário geral em relação a tudo o que fizeram.

ROTEIRO PARA A ESCRITA DO RELATÓRIO

Embora a organização de um relatório possa ser uma tarefa em que tenha inicialmente algumas dificuldades, penso que ele pode ajudá-lo, por exemplo, a compreender melhor os vários assuntos tratados nas aulas e a desenvolver a capacidade de comunicar por escrito o trabalho que realizou.

Um relatório deve incluir uma descrição o mais detalhada possível do trabalho que realizou e pode ser organizado da seguinte forma:

- Identificação do grupo, com nome dos integrantes e turma;
- Título;
- Objetivo do trabalho incluindo as questões iniciais;
- Descrição do processo de investigação (incluindo tabelas e/ou esquemas, esboços de gráficos, organização dos dados recolhidos...), das tentativas realizadas e das dificuldades encontradas;
- Conclusões;
- Autocrítica da intervenção do grupo no trabalho.

Tente descrever os passos que seguiu para explorar a tarefa que lhe foi proposta. Procure explicá-los de uma forma clara e organizada. Registre todos os valores com que trabalhou e, nos casos em que tal se mostre adequado, não hesite em apresentar desenhos, tabelas e esquemas.

Para avaliação dos relatórios será feita uma análise qualitativa buscando identificar se os grupos atendem aos objetivos colocados para essa atividade investigativa.

7. CONCLUSÃO

Ao final do processo de investigações matemáticas acerca da probabilidade em uma Gincana Esportiva, o professor revisará as principais potencialidades e fragilidades dessa metodologia escolhida para abordagem desse assunto específico. Deseja-se ter atendido as habilidades previstas pela BNCC para o objeto de conhecimento da probabilidade e estatística no que tange às habilidades de identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, o cálculo de suas possibilidades para resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos e situações apresentadas. Com isso, desenvolver a habilidade de identificar situações da vida cotidiana nas quais podem considerar riscos probabilísticos para tomar decisões e fazer escolhas.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 INDÍCIOS DE PENSAMENTO CRÍTICO E ARGUMENTAÇÃO

Quando, nas aulas de matemática, os alunos se deparam com problemas de probabilidade que ultrapassam os casos clássicos de uma moeda, um dado e cartas de um baralho, reforça-se a potencialidade de desenvolvimento de uma educação matemática crítica. Dessa maneira, mais do que compreender regras e fórmulas, os estudantes participam ativamente na transformação de seu contexto social ao organizarem e fundamentarem suas atitudes e decisões baseadas em conhecimentos matemáticos (Ferreira; Lopes, 2024).

Ao observar o envolvimento e a participação das três turmas nas atividades investigativas sobre probabilidade, considera-se efetivo o engajamento dos alunos, com destaque para aqueles que não possuem uma relação amigável com o ambiente escolar, apontando um constante desinteresse pelas disciplinas cursadas. Como observado no trabalho de Sá, Milli e Chiabai (2021), a educação matemática crítica evidencia-se quando os alunos percebem que a matemática ensinada na escola está presente em seu cotidiano, estimulando-os a participar desse ambiente de discussões que estabelecem relações matemáticas para além da sala de aula.

Trabalhar com a determinação de probabilidades em uma gincana escolar ampliou a percepção dos estudantes sobre a relação desse conteúdo com a estatística. Em diversos momentos, ao mencionarem o histórico de vitórias das turmas e as habilidades esportivas dos colegas nas modalidades, notou-se o desejo dos participantes das investigações matemáticas de fundamentar seus argumentos em fatos. Embora não exista um registro formal dessas informações, os estudantes buscavam em suas memórias a participação das turmas em edições anteriores da gincana na mesma escola para, em algumas oportunidades, discordar, por exemplo, das chances iguais de vitória ou derrota em uma partida.

Na prática apresentada por Santos, Camargo Sant'Ana e Sant'Ana (2024), mostrou-se que a Educação Matemática Crítica é capaz de fornecer princípios fundamentais para tornar a matemática escolar significativa para os aprendizes, ao trabalhar com problemas baseados no contexto dos estudantes. Por isso, vale destacar que, ao abordar a probabilidade com os alunos do ensino médio da E. E. B. Prof. Laércio Caldeira de Andrada no contexto da gincana escolar, foi levantada a questão das informações estatísticas envolvendo os aplicativos de apostas esportivas.

No processo das investigações matemáticas em sala de aula, houve uma problematização levantada por alguns grupos de alunos que buscavam basear seus argumentos de probabilidade nas habilidades esportivas dos membros de suas equipes, como foram os casos dos grupos *G4* e *G5* da *T1*, assim como o grupo *G2* da *T3*. Na oportunidade, foram mencionados os aplicativos de apostas esportivas como uma pos-

sibilidade de entretenimento, mas também como um possível problema para aquelas pessoas que utilizam seu dinheiro na esperança de obter algum retorno monetário. Foram diversos os relatos de estudantes sobre pessoas conhecidas que já perderam dinheiro em apostas dessa natureza, seja por acreditar em um rápido rendimento financeiro ou ainda por confiar em seus times. Segundo os próprios estudantes, o futebol é uma das modalidades esportivas que mais mobiliza as crenças dos populares a ponto de apostarem dinheiro em possíveis resultados de partidas. Mais uma vez, observou-se a influência das crenças na resolução de problemas de probabilidade.

Não distante dessa situação, quando se fala em apostar dinheiro em aplicativos de jogos de azar, como o popularmente conhecido *Jogo do Tigrinho*, os alunos também relataram casos de conhecidos envolvidos em perdas monetárias. A fragilidade dos investimentos reside na promessa de receber de volta uma enorme quantia de dinheiro se comparada ao valor aplicado inicialmente. Em períodos de precarização e desvalorização de empregos formais, seja em regime de consolidação das leis do trabalho (CLT) ou estatutário, a possibilidade de receber grandes quantias de dinheiro rapidamente ilude uma grande massa de pessoas a ponto de fazê-las utilizar seus salários em jogos de azar, sem nenhuma garantia de retorno, como é o caso dos cassinos on-line. O problema se potencializa quando se considera o papel dos influenciadores digitais, que facilmente adentram os lares brasileiros por meio das redes sociais e que têm contribuído amplamente na divulgação desses jogos de azar, mas que vem sendo investigados por autoridades de justiça por participarem ativamente no endividamento de cidadãos.

Como já mencionado anteriormente, os aplicativos de apostas esportivas e jogos de azar apresentam um enorme potencial para desenvolver a Educação Matemática Crítica. Por isso, o professor que decide trabalhar com os *cenários para investigação* (Skovsmose, 2000) tem maiores chances de engajar seus alunos na resolução de problemas propostos em comparação com as clássicas listas de exercícios. Trata-se de um desafio à prática docente, que deve estar sempre embasada nos documentos curriculares e nos tempos disponíveis para a aplicação das metodologias disponíveis (Ponte; Brocardo; Oliveira, H., 2020).

Em síntese, os indícios de pensamento crítico e argumentação observados nas atividades investigativas revelam que, quando a matemática é inserida em contextos socialmente significativos, os estudantes passam a mobilizar saberes que ultrapassam o domínio técnico do conteúdo. As discussões sobre apostas, crenças e desigualdades, articuladas às noções de probabilidade, evidenciam que a aprendizagem matemática pode constituir-se também como um exercício de cidadania, na medida em que convida os alunos a analisar criticamente as situações que permeiam seu cotidiano. Essas experiências mostram que o ensino de probabilidade, quando conduzido sob a perspectiva das investigações matemáticas, potencializa não apenas a construção

de conhecimentos conceituais, mas também o desenvolvimento de uma postura reflexiva diante dos usos sociais da matemática. As reflexões decorrentes desse processo, tanto por parte dos estudantes quanto do professor-pesquisador, são aprofundadas na seção a seguir.

4.2 REFLEXÕES A PARTIR DA PRÁTICA

Proporcionar aos estudantes momentos não convencionais durante as aulas de matemática é consideravelmente desafiador. Ao adotar a metodologia das investigações matemáticas para se trabalhar determinado conteúdo, o professor escolhe dialogar a matemática escolar com o cotidiano de suas turmas. Segundo Franzoni e Quartieri (2020), os diferentes caminhos percorridos pelos grupos de trabalho durante as investigações matemáticas permitem que eles façam importantes descobertas, seja quando se debruçam sobre o problema a ser resolvido, ou ainda quando comparam seus resultados na oportunidade de socialização para toda a turma.

Assim, os resultados encontrados nesta dissertação, após o desenvolvimento de uma tarefa investigativa para o ensino de probabilidade no ensino médio, corroboram os trabalhos desenvolvidos em Educação Matemática sobre atividades investigativas. Após a aplicação de uma atividade na perspectiva da Educação Matemática Crítica, Sá, Milli e Chiabai (2021) perceberam que o diálogo entre os estudantes estimulou a exposição e a argumentação sobre diferentes pontos de vista acerca da atividade, ampliando a capacidade de autocrítica sobre um determinado problema nas aulas de matemática.

Quando um professor de matemática se depara com o rol de habilidades a serem desenvolvidas com os estudantes do ensino médio, conforme a BNCC (Brasil, 2018), abre-se um grande leque de possibilidades metodológicas. Saber escolhê-las e aplicá-las conforme a realidade de cada turma de alunos faz parte do desafio diário da prática pedagógica. Nesse sentido, esta dissertação buscou contribuir com as reflexões acerca de três turmas do ensino médio em uma escola da rede estadual catarinense, compartilhando seus desafios, seus acertos e seus equívocos. Tal abertura metodológica, no entanto, não garante, por si só, práticas emancipatórias. É na escolha intencional de metodologias que favoreçam a problematização e o diálogo, como as investigações matemáticas, que o ensino pode aproximar-se de uma educação matemática crítica.

A opção por ensinar probabilidade por meio das investigações matemáticas não excluiu a realização de aulas expositivas que antecederam o processo investigativo dos estudantes. Mantê-los enfileirados, trabalhando individualmente, deixando que os mais falantes falassem e que os mais silenciosos permanecessem em silêncio, fez parte da estratégia de introduzir uma nova dinâmica nas aulas de matemática. Para que as investigações matemáticas sejam aplicadas com eficácia, os autores Ponte, Brocardo

e Hélia Oliveira (2020) recomendam que se conheçam as turmas, sua dinâmica e suas realidades. Por isso, na E. E. B. Prof. Laércio Caldeira de Andrada, buscou-se compreender as interações entre os alunos e os professores de cada uma das três turmas selecionadas para realizar as investigações matemáticas deste trabalho.

Desde o momento em que se dialogou com os alunos sobre fenômenos aleatórios, que se compartilhou com eles a proposta de um trabalho investigativo e que se tentou organizar as turmas em grupos espontâneos, o professor pesquisador já passou a vivenciar desafios que possivelmente não existiriam se decidisse trabalhar exclusivamente no paradigma do exercício. Portanto, adotar as investigações matemáticas como alternativa metodológica passou por preparar os alunos a vivenciar uma dinâmica diferente da convencional nas aulas de matemática.

No momento em que se planejou elaborar uma sequência didática para o desenvolvimento de habilidades na unidade temática de probabilidade sob a metodologia das investigações matemáticas, almejava-se construir, junto aos estudantes, os conhecimentos acerca de espaço amostral e dos eventos nele contidos de um fenômeno aleatório. Porém, a prática mostrou que o que foi desenvolvido foi o início da mobilização desses conhecimentos, uma vez que não se atingiu a consolidação dos conceitos – e, principalmente, a utilização dos termos convencionados para esse contexto – durante os cinco encontros planejados. Dessa maneira, a sucessão de atividades que prevê uma sequência didática, conforme Silva e Maria Marly de Oliveira (2009), não ocorreu nesta dissertação. É conveniente, portanto, mencionar que a atividade elaborada e aplicada pelo professor pesquisador tratou-se de uma tarefa investigativa para o ensino de probabilidade utilizando a metodologia das investigações matemática.

Nesse sentido, considera-se que as investigações matemáticas desenvolvidas a partir da tarefa investigativa elaborada para as três turmas da 2ª série do ensino médio da E. E. B. Prof. Laércio Caldeira de Andrada contribuíram para a construção da aprendizagem significativa sobre o conteúdo de probabilidade. Isso porque os alunos participaram efetivamente do processo investigativo, apesar dos casos relatados de grupos de trabalho que não concluíram a atividade até a etapa de socialização dos resultados. Apesar disso, se compararmos com o engajamento promovido por uma lista de exercícios em uma aula tradicional de matemática, observaríamos um grande número de alunos alcançados em comparação aos quatro ou cinco entusiastas da matemática convencional.

Segundo os professores Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020), as investigações matemáticas têm como uma de suas potencialidades a elaboração e o teste de conjecturas, buscando desenvolver a capacidade argumentativa matemática. Na atividade desenvolvida nesta dissertação, considera-se que essa etapa das conjecturas não atingiu todo o seu potencial. Alguns fatores que podem ser atribuídos a essa situação são a falta de familiaridade dos alunos em conjecturar a partir de observações

feitas, o que implica diretamente na dificuldade em fazer registros de seus processos e raciocínios, bem como a escolha do conteúdo de probabilidade para trabalhar de forma investigativa. Na perspectiva da matemática escolar, o conteúdo de probabilidade é bastante pragmático e, mesmo assim, os alunos ainda conseguiram trazer diferentes perspectivas para a compreensão da probabilidade, seja de maneira empírica, estatística ou, ainda, axiomática.

Porém, no que diz respeito às outras etapas das investigações matemáticas, obteve-se um desempenho satisfatório em cada uma delas, com destaque para a etapa de socialização. Além disso, trabalhar com problemas abertos, que não possuem uma resposta tão explícita a ser exibida, permite que os alunos utilizem seus repertórios na resolução desses problemas.

Ainda sobre o posicionamento crítico dos estudantes em relação aos seus processos de aprendizagem, durante a aplicação das investigações matemáticas, questionou-se qual tem sido a perspectiva de probabilidade exigida nos vestibulares. Com essa preocupação em evidência, os alunos perceberam que os exames finais da etapa do ensino médio, seja para ingresso em universidades ou para certificação, ainda se apoiam no ensino conteudista das disciplinas. Dessa maneira, reforça-se o aspecto facilitador das investigações matemáticas no ensino de probabilidade no ensino médio, uma vez que, após as aulas de socialização dos resultados obtidos pelos alunos, foram concedidas aulas tradicionais para a conceituação da probabilidade axiomática e a resolução de questões convencionais sobre esse conteúdo.

Conforme corroboram os resultados de Sá, Milli e Chiabai (2021), mesmo com o aspecto promissor da abordagem investigativa nas aulas de matemática, houve momentos em que não foi possível fugir da educação matemática tradicional, reforçando o caráter efêmero dos cenários para investigações. Além disso, o próprio Skovsmose (2001) relata a fluidez que existe entre os diferentes *milieus* de aprendizagem em uma aula de matemática. Em suma, as experiências relatadas evidenciam que o ensino de probabilidade, mediado por investigações matemáticas, pode ampliar a participação e o pensamento crítico dos estudantes, ao mesmo tempo em que desafia o professor a reconstruir sua prática pedagógica em direção a uma matemática mais significativa e dialógica.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Adotar a metodologia das investigações matemáticas como uma alternativa para o ensino da matemática escolar retira o professor do lugar seguro de transmissor de conhecimento e o coloca como mediador dos conflitos, dos problemas identificados e das descobertas sendo feitas. De fato, para as três turmas do ensino médio da E. E. B. Prof. Laércio Caldeira de Andrada selecionadas para a aplicação das investigações matemáticas elaboradas, considera-se que a metodologia adotada favoreceu a aprendizagem do conteúdo de probabilidade. Isso porque foram criadas situações de protagonismo dos alunos, livrando-os do juízo dicotômico certo-errado bastante presente nas aulas de matemática, e permitindo-lhes refletir criticamente sobre a mobilização dos conhecimentos matemáticos exigidos para elaborar soluções para um problema apresentado.

Além disso, os conflitos que surgiram durante as atividades investigativas, originados por diferentes interesses entre alunos, sejam de caráter pessoal ou pedagógico, foram geridos de maneira mais eficaz, pois o pesquisador atuava também como professor de matemática das turmas em questão. Reforça-se a recomendação dos autores Ponte, Brocardo e Hélia Oliveira (2020) de se conhecer os alunos para os quais serão propostas as investigações matemáticas, garantindo um melhor andamento das etapas envolvidas no processo investigativo.

Portanto, àquele professor de matemática que possa ter se inspirado neste trabalho, recomenda-se tomar a atividade investigativa apresentada e adaptá-la à realidade de seus estudantes: conheça-os, adote um contexto significativo para sua aprendizagem e não tema o novo. A escolha da aplicação da atividade investigativa neste trabalho se deu para alunos da 2ª série do ensino médio com base nos planejamentos anuais da componente curricular de Matemática da E. E. B. Prof. Laércio Caldeira de Andrada, mas poderia ter sido realizada para qualquer turma do ensino médio. Inclusive, seu grande objetivo foi analisar como os estudantes mobilizaram seus conhecimentos sobre probabilidade, utilizando uma metodologia investigativa. Portanto, também seria possível aplicá-la em qualquer turma com a qual se deseje trabalhar o conteúdo de probabilidade, incluindo turmas dos anos finais do ensino fundamental, bem como turmas do ensino superior.

Reforçando, é necessária uma adaptação da atividade investigativa apresentada para a realidade de cada professor. A sala de aula é um ambiente vivo e cheio de descobertas. Ela se tornará muito mais autêntica se o professor também se permitir fazer descobertas, tornando genuíno o processo de construir e lapidar os conhecimentos matemáticos. Tenha como guia os documentos curriculares de sua rede de ensino e faça um bom planejamento, cuidando das questões de tempo e do tamanho da turma em que se deseja aplicar as investigações matemáticas.

Alguns tópicos, frutos da promoção de uma Educação Matemática Crítica, foram levantados pelos alunos e poderiam influenciar efetivamente suas atuações como cidadãos, como nos casos dos aplicativos de apostas esportivas e do envolvimento de influenciadores digitais na divulgação de jogos de azar. Quando foi informado aos alunos que o aprofundamento de suas pesquisas não renderia nota – como eles esperam de toda atividade em sala de aula –, eles se sentiram desmotivados a dar continuidade a seus estudos de forma independente. Fica, portanto, a sugestão de trabalhar as investigações matemáticas de modo interdisciplinar, dialogando com outros docentes da escola, para que contribuam na mobilização de conhecimentos de seus alunos.

Por fim, destaca-se a importância deste trabalho em discutir o ensino de matemática em uma escola real, na qual se aplicou e avaliou uma atividade de probabilidade, aproximando a produção científica dos sujeitos de fora dos muros da universidade. Além disso, registra-se o desejo de que novas pesquisas sejam elaboradas sobre a aplicação de investigações matemáticas em sala de aula. Na área de ensino e aprendizagem, podem ser explorados muitos outros conteúdos previstos nos currículos de matemática, tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio. Acredita-se que todos tenham potencial para serem trabalhados na perspectiva investigativa; porém, cada realidade escolar pode dialogar melhor com algum conteúdo específico. Refletindo sobre a área da formação de professores, podem ser desenvolvidas pesquisas que caminhem na direção para que mais professores de matemática se mobilizem para desmistificar a não aplicabilidade dos conhecimentos matemáticos em contextos fora da sala de aula.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Ministério da Educação.

BRASIL. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil**, Brasília, DF, 20 dez. 1996.

ESCOLA DE EDUCAÇÃO BÁSICA PROFESSOR LAÉRCIO CALDEIRA DE ANDRADA (EEBLCA). **Projeto Político Pedagógico**. Rua Altamiro Di Bernardi, 561, Campinas, São José, Santa Catarina: [s.n.], 2025. Documento que orienta as ações e decisões da escola, elaborado de forma coletiva, para assegurar que o processo educacional esteja alinhado com as necessidades e expectativas de todos os envolvidos.

FERREIRA, Roberto Lúcio; LOPES, Thiago Beirigo. Ensino de Estatística no Ensino Médio com base na Resolução de Problemas sob a perspectiva da Educação Matemática Crítica. **JIEEM - Journal of the International Education in Mathematics**, v. 17, n. 3, p. 334–343, 2024.

FRANZONI, Patrícia da Graça Rocha; QUARTIERI, Marli Teresinha. Investigação matemática e educação financeira em um curso de licenciatura em Matemática. **Educação em Revista**, v. 21, n. 1, p. 129–148, 2020.

FRATUCCI, Vinícius Murilo; MORAN, Mariana; AMORIM NEVES, Eduardo de; FERRAIOL, Thiago Fanelli. TIME em ação: Teoria e Investigação em Matemática Elementar. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 6, n. 1, p. 1–14, 2020.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Apresentação dos Resultados do IDEB 2023**. [S.l.: s.n.], 2023. https://download.inep.gov.br/ideb/apresentacao_ideb_2023.pdf. Acesso em: 26 maio 2025.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA. **Divulgados os resultados do PISA 2022**. Acesso em: 26 maio 2025. Portal Gov.br. Dez. 2023. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/acoes-internacionais/divulgados-os-resultados-do-pisa-2022>.

JAMES, Barry R. **Probabilidade: Um Curso em Nível Intermediário**. 5. ed. Rio de Janeiro, Brasil: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2023. (Projeto Euclides). ISBN 978-85-244-0455-9.

KUHN, Malcus Cassiano. Dificuldades de Aprendizagem em Matemática: percepções de professores do Ensino Médio de uma escola estadual do Rio Grande do Sul. **Perspectiva da Educação Matemática**, v. 13, n. 32, 2020.

MACHADO, Benedito Edson Cardoso; LACERDA, Alan Gonçalves. A comunicação matemática por meio das tarefas de investigação: caminhos alternativos para o ensino e aprendizagem de matemática. **Revista Tangram**, v. 4, n. 4, p. 163–181, 2021.

MUSMANNO, Leonardo Maricato; SOUSA, Sérgio Gonçalves de; ALMEIDA, Moisés Ceni de; SILVA MACHADO, Leandro da. Educação matemática crítica e uso de tecnologias: cenários para investigação com o jogo da corrida de cavalos. **REnCiMa: Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 12, n. 3, p. 1–24, 2021.

NASCIMENTO, Rosimiro Araújo do; QUARTIERI, Marli Teresinha. Investigação Matemática: Possibilidade para o Ensino de Função Polinomial do 1º Grau. **JIEEM: Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 13, n. 2, p. 133–144, 2020.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas em sala de aula**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2020.

SÁ, Lauro Chagas e; MILLI, Elcio Pasolini; CHIABAI, Ícaro. Uma experiência de Educação Matemática Crítica com alunos do Ensino Médio a partir da tabela nutricional de alimentos. **RPEM - Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 10, n. 22, p. 516–530, 2021.

SANTA CATARINA, Governo de. **Currículo Base do Ensino Médio do Território Catarinense**: Caderno 2 – Formação Geral Básica. Florianópolis: SED/SC, 2020. Secretaria de Estado da Educação.

SANTOS, Renan Pereira; CAMARGO SANT'ANA, Claudinei de; SANT'ANA, Irani Parolin. Estudo exploratório sobre a produção de vídeo com Resolução de Problemas e do papel da Educação Matemática Crítica. **Revista de Educação Matemática (REMat)**, Sociedade Brasileira de Educação Matemática Regional São Paulo (SBEM-SP), São Paulo, v. 23, p. 1–25, 2024.

SHAUGHNESSY, J. Michael. Research in probability and statistics: Reflections and directions. In: GROUWS, Douglas A. (ed.). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York: Macmillan Publishing, 1992. p. 465–494.

SILVA, Ana Paula Bezerra da; OLIVEIRA, Maria Marly de. A sequência didática interativa como proposta para formação de professores de matemática. **VII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências**, Florianópolis, 2009.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. Tradução: Jonei Cerqueira Barbosa. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, UNESP, Rio Claro, SP, v. 13, n. 14, p. 45–70, 2000.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática Crítica**: a questão da democracia. Campinas, SP: Papirus, 2001. (Perspectivas em Educação Matemática).

SOUSA, Anna Karol Moura de; VENTURA, Paula Patrícia Barbosa. Dificuldades de aprendizagem cognitivas em Matemática: estudo de caso com professor do Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – campus Canindé. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, v. 6, n. 3, p. 490–507, 2022.

WICHNOSKI, Paulo. Uma entrevista com João Pedro da Ponte sobre a investigação matemática na Educação Matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Universidade Estadual do Paraná, Campus Campo Mourão, Campo Mourão, PR, Brasil, v. 11, n. 24, p. 8–14, jan. 2022. Acesso em: 26 maio 2025.