Tarefas para desenvolvimento do pensamento algébrico utilizando o ensino exploratório

José Victor Barbosa Jardim Castro
Valéria Ostete Jannis Luchetta

São Paulo (SP)

2025

Tarefas para desenvolvimento do pensamento algébrico utilizando o ensino exploratório

Produto Educacional apresentado como requisito à obtenção do grau de Mestre em Matemática, com área de concentração em Matemática na Educação Básica, pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, campus São Paulo. Aprovado em banca de defesa de mestrado no dia 3 de Outubro de 2025.

AUTORES

José Victor Barbosa Jardim Castro: Licenciado em Matemática pela USP (2014), em Educomunicação pela USP (2019), em Pedagogia pela UMESP (2020) e em Filosofia pela UCB (2021). MBA em Gestão escolar pela USP (2024) e Mestre em Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo IFSP (2025). É professor de matemática efetivo do Ensino Fundamental II e Médio da Rede Municipal de São Paulo desde 2017.

Valéria Ostete Jannis Luchetta: Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - Unesp - campus de Rio Claro. Mestre em Ciências, área de concentração: Matemática (Álgebra) e Licenciada em Matemática, ambos pela Universidade de São Paulo - USP - campus São Paulo. Professora do ensino Básico, Técnico e Tecnológico do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP (Campus Cubatão), onde faz parte do corpo de docentes permanentes do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - IFSP/SPO. Tem experiência na área de Matemática e Educação Matemática, com ênfase na área de ensino e história, atuando principalmente nos seguintes temas: ensino e aprendizagem de matemática, ensino de álgebra, formação de professores, história da matemática e produção de significados.

Sumário

Apresentação

É com grande satisfação que disponibilizamos este material, composto por quatro tarefas cuidadosamente elaboradas para desenvolver o pensamento algébrico por meio do ensino exploratório.

Nosso conjunto de tarefas reflete o entendimento globalmente consolidado desde o final da década de 1980 sobre o chamado "desenvolvimento do pensamento algébrico" — conceito que também influencia a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2017. Para isso, adotamos uma abordagem baseada no ensino exploratório, em que o estudante assume um papel ativo no processo de aprendizagem.

Vale destacar que a Álgebra, em suas diversas dimensões, é um pilar essencial do conhecimento matemático. Assim, o propósito dessas tarefas não é criar um novo saber, mas tornar o conhecimento matemático já consolidado mais acessível e disponível a todos, garantindo esse direito de aprendizagem a cidadãos e cidadãs, independentemente de seu interesse em carreiras voltadas à matemática.

Convidamos você a explorar este material, refletir sobre as propostas apresentadas e, se for o caso, realizá-las com seus estudantes. Esperamos que essa experiência contribua para o enriquecimento do ensino e da aprendizagem da Álgebra!

José Victor Barbosa Jardim Castro

Dra Valéria Ostete Jannis Luchetta (orientadora)

O que é pensamento algébrico?

Os que foram estudantes do ensino básico no Brasil até a primeira década do século XXI, provavelmente se depararam com um ou mais professores que conscientemente ou não adotavam práticas que indicavam que o ensino da álgebra era destinado apenas aos estudantes de maior idade, a partir da antiga 6ª série e atual 7º ano, e seu conteúdo consistia apenas em resolver equações, inequações e sistemas lineares do primeiro e segundo grau, escrever leis de formação de funções e, de forma geral, fazer exercícios de manipulação de letras "como se elas fossem números".

Mas a Educação Matemática como atividade humana, repleta de influências nacionais e internacionais, vive em constante movimento, como a própria ciência. E a perspectiva citada sobre o ensino da álgebra, apesar de ainda presente em concepções de muitos professores em tempos atuais, têm sido sistematicamente substituída por aquilo que vem sendo chamado de "desenvolvimento do pensamento algébrico".

Desse modo, a Álgebra no seu sentido mais formal, apesar de ainda ser um conhecimento distinto de outras áreas que compõem aquilo que chamamos de Matemática, para o ensino básico representa um tipo de pensamento a ser explorado na resolução dos diversos problemas da vida cotidiana.

Segundo James Kaput (1999), o desenvolvimento do pensamento algébrico é algo que ocorre quando, por meio de conjecturas e argumentos, criam-se generalizações sobre dados e relações matemáticas, em linguagens cada vez mais formais. Essas generalizações podem ocorrer na Aritmética, na Geometria, em situações de modelagem matemática e, em última instância, em qualquer conceito matemático lecionado desde os primeiros anos de escolaridade.

Referência

KAPUT, J. **Teaching and learning a new algebra with understanding**. In E. Fennema & T. Romberg (Orgs.), Mathematics classrooms that promote understanding. Mahwah, NJ: Erlbaum, 1999. p. 133-155.

O que é ensino exploratório?

O ensino exploratório na matemática se baseia na ideia de que os estudantes aprendem de maneira mais significativa quando engajam ativamente em tarefas desafiadoras e relevantes. Nesse modelo, o papel do professor é fundamental, sendo responsável por selecionar e propor atividades que promovam a descoberta e a compreensão dos conceitos matemáticos. As tarefas exploratórias são desenhadas para estimular o raciocínio matemático, a resolução de problemas e a comunicação, permitindo que os alunos conectem suas ideias iniciais a conceitos mais formais por meio de discussões coletivas (Canavarro, 2011).

Embora o ensino exploratório valorize a autonomia dos alunos, ele não se baseia na ideia de que aprendem isoladamente ou de forma completamente autodirigida. Pelo contrário, o professor desempenha um papel ativo ao monitorar, orientar e organizar as discussões em sala de aula, garantindo que as tarefas cumpram seus objetivos matemáticos. Essa abordagem promove um ambiente dinâmico, onde os alunos desenvolvem habilidades críticas e criativas para lidar com problemas e compreender profundamente os conceitos matemáticos (Canavarro, 2011).

O ensino exploratório da Matemática organiza-se em etapas bem definidas, que estruturam a aula em quatro fases principais: introdução da tarefa, realização da tarefa, discussão coletiva e sistematização das aprendizagens. Na introdução, o professor apresenta o desafio matemático, esclarecendo o enunciado e motivando os alunos. Na fase de realização, os estudantes trabalham de forma autônoma ou em pares, enquanto o professor acompanha sem retirar a responsabilidade da resolução. Em seguida, ocorre a discussão, em que diferentes estratégias são compartilhadas e confrontadas, promovendo a argumentação matemática. Por fim, a sistematização é conduzida pelo professor, institucionalizando conceitos e conexões matemáticas relevantes (Canavarro; Oliveira; Menezes, 2012).

O quadro a seguir resume as fases de uma aula com uma proposta exploratória:

Fase da aula	Promoção da aprendizagem matemática	Gestão da aula
Introdução da tarefa	- Esclarecer a interpretação da tarefa - Estabelecer objetivos - Motivar e conectar com experiências anteriores	- Organizar os alunos em pares/grupos - Distribuir materiais - Definir tempo e organização
Realização da tarefa	- Estimular raciocínio e autonomia - Fazer perguntas sem dar respostas - Valorizar diferentes representações	- Monitorar grupos - Garantir registros escritos - Selecionar produções para discussão
Discussão da tarefa	- Incentivar explicações e justificações - Comparar diferentes estratégias - Promover pensamento crítico	- Organizar ordem das apresentações - Garantir participação de todos - Criar clima de respeito e interesse
Sistematização	- Institucionalizar conceitos e procedimentos - Destacar o valor das generalizações - Relacionar com conhecimentos prévios	- Focar atenção da turma no fechamento - Registrar ideias principais - Estruturar síntese coletiva

Fonte: adaptado de Canavarro, Oliveira e Menezes (2012).

Referências

CANAVARRO, A. P.. **Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios.** Educação e Matemática, Lisboa, n. 115, p. 11-17, nov./dez. 2011.

CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.. **Práticas de ensino exploratório da Matemática: o caso de Célia**. In: CANAVARRO, A. P.; SANTOS, L.; BOAVIDA, A.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CARREIRA, S. (org.). Investigação em Educação Matemática – Práticas de ensino da Matemática. Lisboa: APM, 2012. p. 255-266.

TAREFA 1: Explorando padrões com pedrinhas

Objetivo: Reconhecer e representar padrões de sequências figurais.

Público-alvo: 6º ano do ensino fundamental.

Duração: Quatro aulas de 45 minutos cada.

Materiais necessários:

- Lápis;
- Borracha;
- Caderno;
- Pedrinhas utilizadas em aquários ou em construção civil.

Desenvolvimento:

Parte 1

Introdução

Os estudantes devem ser apresentados à sequência dos números triangulares, conforme a imagem abaixo:

Realização

Em duplas ou trios, os estudantes devem responder às questões, fazendo anotações em seus cadernos de maneira individual quando for necessário:

1) Com as pedrinhas, reproduzam a sequência apresentada pelo(a) professor(a). Depois, represente-as no caderno.

2) Quais seriam os próximos elementos da sequência? Reproduzam com pedrinhas os dois próximos elementos e, quando todos concordarem com as construções, represente-os no caderno.

3) No primeiro elemento da sequência, o número de pedrinhas é 1. No segundo elemento, 3 pedrinhas. No terceiro, 6 pedrinhas. E assim por diante. Discuta com colegas e escrevam os 20 primeiros números dessa sequência.

4) Se T_1 é o primeiro triângulo da sequência, T_2 o segundo e assim por diante, complete a tabela a seguir:

Triângulo	**N° de pedrinhas**
T_1	
T_2	
T_3	
T_4	
T_5	
T_6	
T_7	
T_8	
T_9	
T_{10}	

5) Você e seus colegas conseguem estabelecer uma relação a partir do T_2 entre o número de pedrinhas do atual elemento e as pedrinhas do elemento anterior? Estejam prontos para apresentar suas conclusões para os colegas.

Discussão

Uma discussão deve ser feita de forma geral, ouvindo as duplas ou trios, apresentando as conclusões sobre os padrões da sequência de números triangulares.

Sistematização

Após a conclusão da recorrência entre os números triangulares, desenvolva os valores encontrados na tabela da seguinte forma:

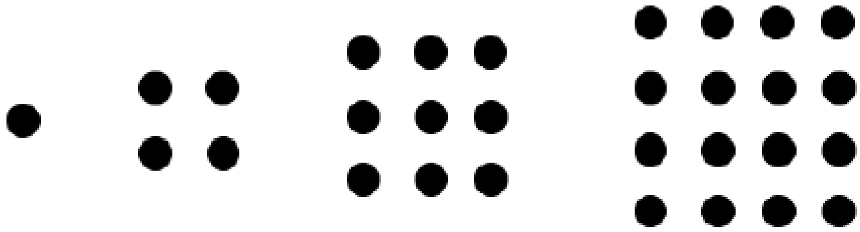
Triângulo	N° de pedrinhas
T_1	1
T_2	1 + 2
T_3	1+ 2 + 3
T_4	1 + 2 + 3 + 4
T_5	1 + 2 + 3 + 4 + 5
T_6	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6
T_7	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7
T_8	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8
T_9	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9
T_{10}	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10

Discuta com os estudantes como podemos calcular essas somas rapidamente.

Parte 2

Introdução

Os estudantes devem ser apresentados à sequência dos quadrados perfeitos, conforme a imagem abaixo:



Peça que os estudantes prossigam a sequência dos quadrados perfeitos até o décimo quinto termo no caderno.

Realização

Apresente a seguinte notação: Se Q_1 é o primeiro quadrado da sequência, Q_2 o segundo e assim por diante, complete a tabela a seguir:

Quadrado	**N° de pedrinhas**
Q_1	
Q_2	
Q_3	
Q_4	
Q_5	
Q_6	
Q_7	
Q_8	
Q_9	
Q_{10}	

Discussão e sistematização

Uma discussão deve ser feita com toda a turma em relação às seguintes questões:

a) Podemos estabelecer alguma relação de recorrência do número de pedrinhas de um elemento com seu anterior?

b) Que relação podemos estabelecer na sequência dos quadrados perfeitos entre o número do elemento e a quantidade de pedrinhas?

c) Que relação podemos estabelecer entre a sequência dos quadrados perfeitos e a sequência dos números triangulares.

Respostas esperadas e comentários:

Parte 1

Introdução

Professor(a), você pode fazer uma abordagem histórica dessa sequência falando sobre os pitagóricos e a duvidosa existência de Pitágoras. Para mais informações, consulte Roque (2012).

Realização

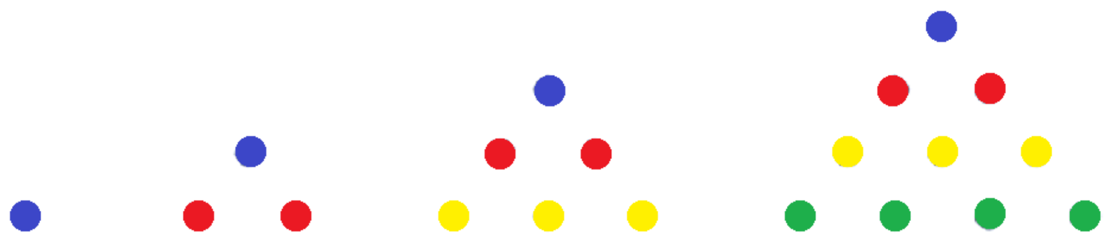
1) Desenho do estudante.
2) O quinto elemento terá 15 pedrinhas e o sexto elemento terá 21 pedrinhas.
3) Os vinte primeiros elementos da sequência dos números triangulares: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210,...
4)

Triângulo	**N° de pedrinhas**
T_1	1
T_2	3
T_3	6
T_4	10
T_5	15
T_6	21
T_7	28
T_8	36
T_9	45
T_{10}	55

5) Professor(a), nessa parte os estudantes devem perceber que:

$$T_2 = T_1 + 2$$
$$T_3 = T_2 + 3$$
$$T_4 = T_3 + 4$$
$$T_5 = T_4 + 5$$
$$T_6 = T_5 + 6$$
$$T_7 = T_6 + 7$$
$$T_8 = T_7 + 8$$
$$T_9 = T_8 + 9$$
$$T_{10} = T_9 + 10$$

Reforce a recorrência por meio visual:



Discussão

Professor(a), mostre para os estudantes que existe uma técnica para realizar a soma 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10:

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 \quad + \\ 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \quad\;\; \\ \hline 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 \end{array}$$

Isso significa que $2 \cdot T_{10} = 10 \cdot 11$. Ou seja: $T_{10} = \frac{10 \cdot (10+1)}{2}$.

Sistematização

Desse modo, podemos concluir que: a partir do segundo elemento, o número do elemento vezes o número do elemento mais 1 é igual ao dobro do número de pedrinhas. Analogamente, o número de pedrinhas é igual ao número do elemento vezes o número do elemento mais 1 dividido por dois. Professor(a), discuta com os estudantes formas de expressar essa ideia. Primeiro, faça-os perceber a relação que existe entre um número e seu sucessor. Inicialmente, utilize exemplos numéricos, por exemplo, 8 e 9, e façam perceber que se um número é 💙, então seu sucessor será 💙+1. Depois, conclua expressando que o número de pedrinhas será $\frac{💙 \cdot (💙+1)}{2}$, onde 💙 é o número do elemento da sequência de números triangulares.

Parte 2

Introdução

Professor(a), pergunte aos estudantes se eles e elas sabem o motivo do nome “quadrados perfeitos”. Esse início de discussão pode ser aproveitado para os itens seguintes, onde se espera que os estudantes compreendam que o número do elemento ao quadrado resulta no número de pedrinhas.

Sequência dos quadrados perfeitos: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, …

Realização

Quadrado	**N° de pedrinhas**
Q_1	1
Q_2	4
Q_3	9
Q_4	16
Q_5	25
Q_6	36
Q_7	49
Q_8	64
Q_9	81
Q_{10}	100

Discussão e sistematização

a) Professor(a), nessa parte os estudantes devem perceber que:

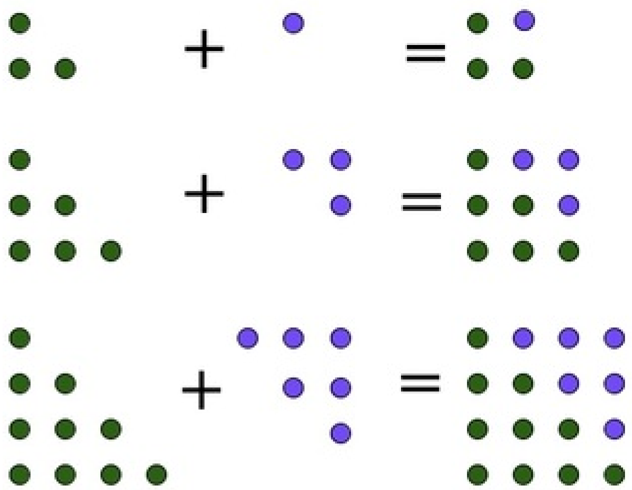
$$Q_2 = Q_1 + 3$$
$$Q_3 = Q_2 + 5$$

$$Q_4 = Q_3 + 7$$
$$Q_5 = Q_4 + 9$$
$$Q_6 = Q_5 + 11$$
$$Q_7 = Q_6 + 13$$
$$Q_8 = Q_7 + 15$$
$$Q_9 = Q_8 + 17$$
$$Q_{10} = Q_9 + 19$$

Reforce a recorrência por meio visual:

b) O número do elemento ao quadrado é igual ao número de pedrinhas. Logo, se 💚 é o número de elementos, o número de pedrinhas é 💚 x 💚 ou 💚². Sobre a relação entre as sequências, consulte a referência números figurados (IMAT, 2008).

c) Professor(a), os estudantes devem perceber que a soma de dois números triangulares consecutivos resulta em um número quadrado.



Fonte: Falando de Matemática (2014).

Avaliação: A avaliação da aprendizagem dos estudantes deve ocorrer, primeiramente, pela observação do professor nos momentos de interação entre as duplas e trios. Caberá ao professor mediar as discussões e observar se todos estão participando ativamente das construções. Importante lembrar que, mesmo que uma dupla ou trio não consiga alcançar as respostas esperadas, a discussão dos itens não pode ser considerada inválida. Até porque toda discussão foi resultado de um exercício mental em prol daqueles conhecimentos explorados. Após a realização da tarefa, aos professores que preferirem medir as aprendizagens de forma individual, segue uma sugestão avaliação:

Avaliação individual:

1. Qual é o 21º termo da sequência dos números triangulares?

2. Qual é o 33º termo da sequência dos quadrados perfeitos?

3. Indique se os números abaixo fazem parte da sequência dos números triangulares (A), sequência dos quadrados perfeitos (B), das duas sequências (C) ou nenhuma delas (D).

36	210	102	231	441

Respostas:
1. 231.
2. 1089.

3.

C	A	D	A	B

Observação: Importante notar que a soma dos números triangulares 210 e 231 resultam no quadrado perfeito 441.

Referências

IMÁTICA. **Números figurados**. 2008. Disponível em: https://bit.ly/4jl6bpm. Acesso em: 01 fev. 2025.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

FALANDO DE MATEMÁTICA. **Números poligonais como introdução ao estudo de sequências.** 2014. Disponível em: https://falandodematematica.weebly.com/ensino-meacutedio/numeros-poligonais-como-introducao-ao-estudo-de-sequencias. Acesso em: 05 jun. 2025.

TAREFA 2: Descobrindo padrões em divisões com palitos

Objetivo: Identificar e representar padrões nos restos de divisões entre números naturais.

Público-alvo: 6° ano do ensino fundamental.

Duração: Duas aulas de 45 minutos cada.

Materiais necessários:

- Lápis;
- Borracha;
- Folhas de sulfite;
- Palitos de sorvete.

Desenvolvimento:

Introdução

A turma deve ser dividida em grupos de até quatro pessoas e cada grupo receberá uma quantidade de palitos de sorvete diferente de outro grupo. A distribuição das quantidades pode ser feita por sorteio. A seguir, são colocadas as quantidades de palitos interessantes para a tarefa:

10	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
18	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**

Realização

Utilizando a folha de sulfite, cada grupo deverá construir uma tabela conforme o modelo abaixo, efetuando divisões por 1 até o próprio número, observando se existe algum padrão com os restos.

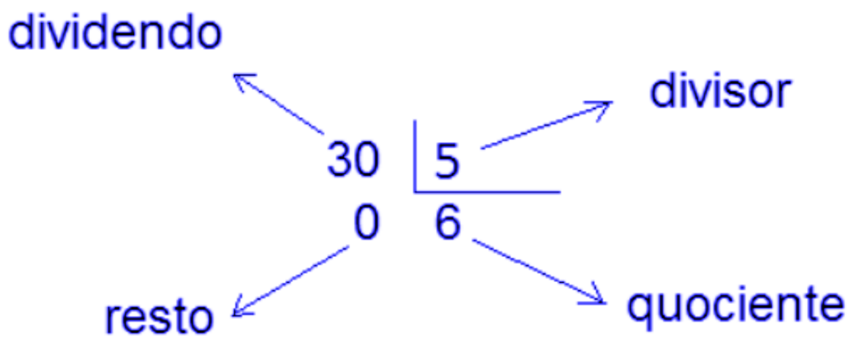
Para o grupo com 10 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
10	1		
10	2		
10	3		
10	4		
10	5		
10	6		
10	7		
10	8		
10	9		
10	10		

Discussão

Após cada grupo finalizar a confecção e preenchimento da tabela, o professor deve solicitar que os estudantes analisem os dados obtidos. Cada grupo deverá apresentar para toda a turma em um minuto quais foram suas observações.

Durante as apresentações, além de controlar o tempo, o professor deve ampliar comentários, sobretudo quando o grupo destacar algo relacionado aos restos das divisões. Se necessário, relembre a nomenclatura relacionada à divisão de números naturais e faça com que os estudantes estabeleçam relações com as colunas da tabela.



Sistematização

Por fim, o professor deve fazer algumas perguntas sobre os restos das divisões para toda a turma:

- O que podemos perceber sobre os restos das divisões realizadas?
- Dado um número qualquer, quais são as possibilidades de restos para divisões por 1 até o próprio número?
- Se fixarmos um dos divisores, qual é o comportamento dos restos? Qual é o menor resto apresentado? Qual é o maior resto?

As conclusões da atividade devem gerar um texto coletivo a ser escrito na lousa pelo professor e copiado pelos estudantes em seus próprios cadernos.

Respostas esperadas e comentários:

Introdução

Professor(a), a distribuição da quantidade de palitos de sorvete por grupo pode ser feita de diversas maneiras: sorteio, decisão do professor, escolha dos estudantes, etc.

Realização

10 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
10	1	10	0
10	2	5	0

10	3	3	1
10	4	2	2
10	5	2	0
10	6	1	4
10	7	1	3
10	8	1	2
10	9	1	1
10	10	1	0

11 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
11	1	11	0
11	2	5	1
11	3	3	2
11	4	2	3
11	5	2	1
11	6	1	5
11	7	1	4
11	8	1	3
11	9	1	2
11	10	1	1
11	11	1	0

12 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
12	1	12	0
12	2	6	0
12	3	4	0
12	4	3	0
12	5	2	2

12	6	2	0
12	7	1	5
12	8	1	4
12	9	1	3
12	10	1	2
12	11	1	1
12	12	1	0

13 palitos:

Divido	**Por**	**Cada um fica com**	**Sobra**
13	1	13	0
13	2	6	1
13	3	4	1
13	4	3	1
13	5	2	3
13	6	2	1
13	7	1	6
13	8	1	5
13	9	1	4
13	10	1	3
13	11	1	2
13	12	1	1
13	13	1	0

14 palitos:

Divido	**Por**	**Cada um fica com**	**Sobra**
14	1	14	0
14	2	7	0
14	3	4	2
14	4	3	2

14	5	2	4
14	6	2	2
14	7	2	0
14	8	1	6
14	9	1	5
14	10	1	4
14	11	1	3
14	12	1	2
14	13	1	1
14	14	1	0

15 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
15	1	15	0
15	2	7	1
15	3	5	0
15	4	3	3
15	5	3	0
15	6	2	3
15	7	2	1
15	8	1	7
15	9	1	6
15	10	1	5
15	11	1	4
15	12	1	3
15	13	1	2
15	14	1	1
15	15	1	0

16 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
16	1	16	0
16	2	8	0
16	3	5	1
16	4	4	0
16	5	3	1
16	6	2	4
16	7	2	2
16	8	2	0
16	9	1	7
16	10	1	6
16	11	1	5
16	12	1	4
16	13	1	3
16	14	1	2
16	15	1	1
16	16	1	0

17 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
17	1	17	0
17	2	8	1
17	3	5	2
17	4	4	1
17	5	3	2
17	6	2	5
17	7	2	3
17	8	2	1

17	9	1	8
17	10	1	7
17	11	1	6
17	12	1	5
17	13	1	4
17	14	1	3
17	15	1	2
17	16	1	1
17	17	1	0

18 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
18	1	18	0
18	2	9	0
18	3	6	0
18	4	4	2
18	5	3	3
18	6	3	0
18	7	2	4
18	8	2	2
18	9	2	0
18	10	1	8
18	11	1	7
18	12	1	6
18	13	1	5
18	14	1	4
18	15	1	3
18	16	1	2
18	17	1	1

18	18	1	0

19 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
19	1	19	0
19	2	9	1
19	3	6	1
19	4	4	3
19	5	3	4
19	6	3	1
19	7	2	5
19	8	2	3
19	9	2	1
19	10	1	9
19	11	1	8
19	12	1	7
19	13	1	6
19	14	1	5
19	15	1	4
19	16	1	3
19	17	1	2
19	18	1	1
19	19	1	0

20 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
20	1	20	0
20	2	10	0
20	3	6	2
20	4	5	0

20	5	4	0
20	6	3	2
20	7	2	6
20	8	2	4
20	9	2	2
20	10	2	0
20	11	1	9
20	12	1	8
20	13	1	7
20	14	1	6
20	15	1	5
20	16	1	4
20	17	1	3
20	18	1	2
20	19	1	1
20	20	1	0

21 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
21	1	21	0
21	2	10	1
21	3	7	0
21	4	5	1
21	5	4	1
21	6	3	3
21	7	3	0
21	8	2	5
21	9	2	3
21	10	2	1

21	11	1	10
21	12	1	9
21	13	1	8
21	14	1	7
21	15	1	6
21	16	1	5
21	17	1	4
21	18	1	3
21	19	1	2
21	20	1	1
21	21	1	0

22 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
22	1	22	0
22	2	11	0
22	3	7	1
22	4	5	2
22	5	4	2
22	6	3	4
22	7	3	1
22	8	2	6
22	9	2	4
22	10	2	2
22	11	2	0
22	12	1	10
22	13	1	9
22	14	1	8
22	15	1	7

22	16	1	6
22	17	1	5
22	18	1	4
22	19	1	3
22	20	1	2
22	21	1	1
22	22	1	0

23 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
23	1	23	0
23	2	11	1
23	3	7	2
23	4	5	3
23	5	4	3
23	6	3	5
23	7	3	2
23	8	2	7
23	9	2	5
23	10	2	3
23	11	2	1
23	12	1	11
23	13	1	10
23	14	1	9
23	15	1	8
23	16	1	7
23	17	1	6
23	18	1	5
23	19	1	4

23	20	1	3
23	21	1	2
23	22	1	1
23	23	1	0

24 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
24	1	24	0
24	2	12	0
24	3	8	0
24	4	6	0
24	5	4	4
24	6	4	0
24	7	3	3
24	8	3	0
24	9	2	6
24	10	2	4
24	11	2	2
24	12	2	0
24	13	1	11
24	14	1	10
24	15	1	9
24	16	1	8
24	17	1	7
24	18	1	6
24	19	1	5
24	20	1	4
24	21	1	3
24	22	1	2

24	23	1	1
24	24	1	0

25 palitos:

Divido	Por	Cada um fica com	Sobra
25	1	25	0
25	2	12	1
25	3	8	1
25	4	6	1
25	5	5	0
25	6	4	1
25	7	3	4
25	8	3	1
25	9	2	7
25	10	2	5
25	11	2	3
25	12	2	1
25	13	1	12
25	14	1	11
25	15	1	10
25	16	1	9
25	17	1	8
25	18	1	7
25	19	1	6
25	20	1	5
25	21	1	4
25	22	1	3
25	23	1	2
25	24	1	1

25	25	1	0

Discussão

- O que podemos perceber sobre os restos das divisões realizadas?

Professor(a), existem diversos assuntos que podem ser percebidos pelos estudantes. Dependendo do que for, relembre os conceitos de múltiplos, divisores e números primos. Algumas percepções possíveis: Todos os números são divisíveis por 1 (o resto é zero); Alguns números só são divisíveis por 1 e eles mesmos (números primos); Após a metade do número ou o natural mais próximo dela, os restos seguem uma ordem decrescente até chegar no zero, quando o divisor é o próprio número; etc.

- Dado um número qualquer, quais são as possibilidades de restos para divisões por 1 até o próprio número?

    Os restos são sempre inferiores aos dividendos e aos divisores.

- Se fixarmos um dos divisores, qual é o comportamento dos restos? Qual é o menor resto apresentado? Qual é o maior resto?

Professor(a), para essa percepção refaça a dinâmica da atividade, mas agora com os divisores fixos. Por exemplo: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,... Estipule que dividam uma determinada quantidade de números pelo divisor dado e observem os restos . Os estudantes irão perceber que:

Quando dividimos por…	**Os restos podem ser…**
2	0 e 1
3	0, 1 e 2
4	0, 1, 2 e 3
5	0, 1, 2, 3 e 4
6	0, 1, 2, 3, 4 e 5
7	0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6
8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7

9	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8
10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9
11	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10

Dessa forma, é possível compreender que o menor resto é zero e o maior resto é sempre o antecessor do divisor.

Sistematização

Sugestão de texto:

Professor(a), lembre-se que a proposta é a construção de um texto coletivo. Sendo assim, a seguir apresentamos as ideias trabalhadas, mas não se prenda às palavras que utilizamos aqui para representar essas ideias, uma vez que o texto deve fazer sentido aos seus estudantes:

Na divisão de números naturais, o resto é o valor que sobra quando dividimos um número (dividendo) por outro (divisor) e a divisão não é exata. Por exemplo, ao dividir 7 por 3, o resto é 1, pois 3 cabe duas vezes em 7, sobrando 1. O menor resto sempre será 0, quando a divisão for exata, ou seja, quando o dividendo for múltiplo do divisor. O maior resto possível é sempre o valor anterior ao divisor, ou seja, o resto nunca pode ser igual ao divisor, pois o resto precisa ser menor que o divisor.

Quando dividimos um número por outros números, os restos possíveis variam. Se dividirmos por 2, os restos possíveis são 0 e 1. Se dividirmos por 3, os restos podem ser 0, 1 ou 2. De forma geral, os restos de uma divisão podem variar de 0 até o divisor menos 1. Isso significa que, ao dividir um número por divisores cada vez maiores, o número de possíveis restos também aumenta, mas sempre permanecem dentro dessa faixa.

Avaliação: A avaliação da aprendizagem dos estudantes deve ocorrer pela observação do professor nos momentos de interação dos grupos. Caberá ao professor mediar as discussões e observar se todos estão participando ativamente do que foi proposto. Importante lembrar que, mesmo que os grupos não consigam alcançar as respostas esperadas sozinhos, a discussão dos itens não pode ser considerada inválida. Até porque toda discussão foi resultado de um exercício mental em prol daqueles conhecimentos explorados. Após a realização da tarefa, aos professores que preferirem medir as aprendizagens de forma individual, segue uma sugestão de avaliação:

Avaliação individual:

1. Dado um divisor qualquer, qual é o menor e o maior resto possível em uma divisão?

2. Se dividirmos 14 por 3, qual será o resto?

3. Quais são os restos possíveis ao dividir um número por 5?

Respostas:

1. O menor resto possível é 0; O maior resto possível é **divisor - 1**.

2. O resto será 2 (14 ÷ 3 = 4, resto 2).

3. Os restos possíveis são 0, 1, 2, 3 e 4.

Referências (para saber mais)

CARRER, Janete Jacinta; DOERING, Luisa Rodríguez; RIPOLL, Cydara Cavedon. **Divisão Euclidiana e seu resto desde os anos iniciais**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2018. Disponível em: https://bit.ly/3XC1hRk. Acesso em: 9 mar. 2025.

SOBRINHO, J. de A.; SILVEIRA, H. B.; ALBUQUERQUE, O. D.; SIMAS, T. B. Division of natural numbers: A look at the rest. **The Journal of Engineering and Exact Sciences**, Viçosa/MG, BR, v. 7, n. 1, p. 11970–01, 2021. DOI: 10.18540/jcecvl7iss1pp11970-01-09e. Disponível em: http://bit.ly/4hfWaNP. Acesso em: 9 mar. 2025.

TAREFA 3: Construindo jogos da memória com incógnitas

Objetivo: Compreender a resolução de equações do 1° grau através de jogos e explorar a resolução através da falsa posição.

Público-alvo: 7° ano do ensino fundamental.

Duração: Três aulas de 45 minutos cada.

Materiais necessários:
- Lápis;
- Borracha;
- Caderno;
- Folhas de sulfite.

Desenvolvimento:

Introdução

A atividade será realizada em duplas. Cada dupla receberá duas folhas com 10 cartões (na página seguinte temos um exemplo).

Realização

O processo será o seguinte:

Folha 1: A dupla preencherá os cartões com números distintos e aleatórios à sua escolha.

Folha 2: Para cada número colocado na folha 1, os alunos deverão criar uma equação do primeiro grau que tenha aquele número como resultado. **Exemplo do processo a ser seguido pelos estudantes para construção da folha 2:** Se um dos números da folha 1 for 15, a dupla poderá pensar que "o dobro de quinze mais dois é igual a 32" ($2 \cdot 15 + 2 = 32$). Substituindo o 15 por x, temos: $2x + 2 = 32$. Essa equação deve ser colocada em um dos cartões da folha 2. Cada número deve ser associado a apenas uma equação. Esse processo será repetido até que todos os cartões da folha 2 estejam preenchidos.

Após concluírem suas equações e recortarem seus cartões das duas folhas, as duplas trocarão os cartões com outra dupla. Trata-se de um jogo da memória que tem como **objetivo identificar as equações do primeiro grau com seus resultados.**

Discussão e sistematização

Aproveitando o jogo realizado, a ideia é apresentar aos estudantes que é possível chegar ao valor correto de x mesmo inicialmente apostando em uma resposta incorreta. Esse método é conhecido como método da falsa posição, presente em papiros egípcios.

Vamos supor a situação do jogo da memória onde um estudante se deparou com uma carta com a equação $3x - 5 = 10$ e na outra o número 17. Supondo que a pessoa não soubesse nenhum método para resolver essas equação, poderia supor que o valor de x era 17:

$3 \cdot 17 - 5 = 46$. Repare que o resultado está muito distante do 10. Para chegarmos no valor do resultado da equação que é 10, podemos considerar retirar 36 dos dois lados da igualdade, pois $46 - 36 = 10$:

$$3 \cdot 17 - 5 - 36 = 46 - 36$$

Efetuada a multiplicação entre 3 e 17 e a subtração 46 - 36:

$$51 - 5 - 36 = 10$$

Agora, compare essa igualdade com a equação original. Não mexeremos no -5, pois faz parte da equação. E fazemos a subtração 51 - 36:

$$(51 - 36) - 5 = 10$$

$$15 - 5 = 10$$

Novamente, compare com a equação original. O 15 está ocupando o lugar na equação destinado ao 3x na equação original. Logo, $3x = 15$, assim $x = 5$.

Professor(a), após discutir com estudantes esse exemplo, apresente as seguintes equações e números para início do método da falsa posição:

a) $2x - 4 = 8$ e suponha $x = 12$.

b) $4x + 3 = 19$ e suponha $x = 5$.

Respostas esperadas e comentários:

Introdução

Professor(a), a montagem das duplas pode ser feita da maneira que preferir.

Realização

Professor(a), nesse momento verifique a aprendizagem dos estudantes quanto a resolução de equações do primeiro grau.

Discussão e sistematização

a) $2x - 4 = 8$ para $x = 12$

$2 \cdot 12 - 4 = 24 - 4$

$2 \cdot 12 - 4 = 20$

$2 \cdot 12 - 4 - 12 = 20 - 12$

$24 - 4 - 12 = 8$

$(24 - 12) - 4 = 8$

$12 - 4 = 8$

Como 12 está no lugar de $2x$, então $x = 6$.

b) $4x + 3 = 19$ para $x = 5$

$4 \cdot 5 + 3 = 20 + 3$

$4 \cdot 5 + 3 = 23$

$4 \cdot 5 + 3 - 4 = 23 - 4$

$4 \cdot 5 + 3 - 4 = 19$

$20 + 3 - 4 = 19$

$(20 - 4) + 3 = 19$

$16 + 3 = 19$

Como 16 está no lugar de $4x$, então $x = 4$.

Avaliação: A avaliação da aprendizagem dos estudantes deve ocorrer pela observação do professor nos momentos de interação das duplas. Caberá ao professor mediar as discussões e observar se todos estão participando ativamente do que foi proposto. Importante lembrar que, mesmo que as duplas não consigam alcançar sozinhas as respostas esperadas, a discussão dos itens propostos não pode ser considerada inválida. Até porque toda discussão foi resultado de um exercício mental em prol daqueles conhecimentos explorados. Após realização da tarefa, aos professores que preferirem medir as aprendizagens de forma individual, segue uma sugestão de avaliação:

Avaliação individual

1. O salário de Joana é o dobro do salário de Maria. Se o salário de Maria é x reais, escreva o salário de Joana em termos de x e, em seguida, calcule o salário de Joana se o salário de Maria for 1.500 reais.

2. Resolva a equação $4x - 7 = 21$.

3. Dada a equação $5x - 20 = 10$, suponha que o valor inicial de x seja 7. Realize os cálculos e determine o valor correto de x.

Respostas:

1. Maria: x e Joana: 2x. Se $x = 1500$, então $2x = 3000$. Logo, o salário de Joana é 3000 reais.

2. $x = 7$

3. $5x - 20 = 10$ para $x = 7$

$5 \cdot 7 - 20 = 35 - 20$

$5 \cdot 7 - 20 = 15$

$5 \cdot 7 - 20 - 5 = 15 - 5$

$5 \cdot 7 - 20 - 5 = 10$

$35 - 20 - 5 = 10$

$(35 - 5) - 20 = 10$

30 - 20 = 10

30 está ocupando a posição de 5x, ou seja, x = 6.

Referências (para saber mais)

IMÁTICA. **Regra da Falsa Posição**. 2008. Disponível em: https://bit.ly/4ifGz25. Acesso em: 01 fev. 2025.

OBMEP. **Equações e Inequações do 1° grau**. Portal da OBMEP. Disponível em: https://bit.ly/4iuys1e. Acesso em: 9 mar. 2025

TAREFA 4: Descobrindo relações entre ângulos e polígonos

Objetivo: Compreender os padrões em torno da soma dos ângulos internos de um polígono convexo.

Público-alvo: 7° ano do ensino fundamental.

Duração: Quatro aulas de 45 minutos cada.

Materiais necessários:

- Lápis;
- Borracha;
- Caderno;
- Folhas de sulfite;
- Geoplano físico ou virtual (https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/).

Desenvolvimento:

Introdução

Montagem das duplas, disponibilização de geoplanos.

Realização

Em duplas, os estudantes deverão com o auxílio do Geoplano identificar quantos triângulos internos existem em polígonos convexos com mais de três lados. Para essa atividade, os estudantes já devem saber que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°. Com isso, identificado a quantidade de triângulos em polígonos com mais de três lados, será possível somar os ângulos internos desses outros polígonos pela quantidade de triângulos possíveis em seu interior. Cada dupla deve preencher a seguinte tabela:

Nome do polígono convexo	Número de lados do polígono	Número de triângulos internos possíveis	Soma dos ângulos internos do polígono
Triângulo	3	1	$1 \cdot 180° = 180°$
Quadrilátero	4	2	$2 \cdot 180° = 360°$
Pentágono			
Hexágono			
Heptágono			
Octógono			
Eneágono			
Decágono			
Undecágono			
Dodecágono			

Discussão

Professor(a), após o preenchimento correto da tabela, uma discussão deve ser feita com toda a turma sobre os padrões observados pelos estudantes, principalmente respondendo duas perguntas:

- Qual é a relação entre o número de lados dos polígonos convexos e a quantidade de triângulos internos possíveis neles? Dado um polígono convexo de **n** lados, qual é a quantidade de triângulos internos que ele deve ter?
- Qual é a relação entre a quantidade de triângulos internos possíveis em um polígono convexo e a soma dos seus ângulos internos? Dado um polígono convexo de **n** lados, qual é a soma dos ângulos internos desse polígono?

Sistematização

Nesta parte, os estudantes devem chegar em uma representação algébrica sobre a discussão apresentada. Se tivéssemos um polígono convexo de n lados. Qual seria a quantidade de triângulos possíveis em seu interior? Qual seria a soma dos seus ângulos internos?

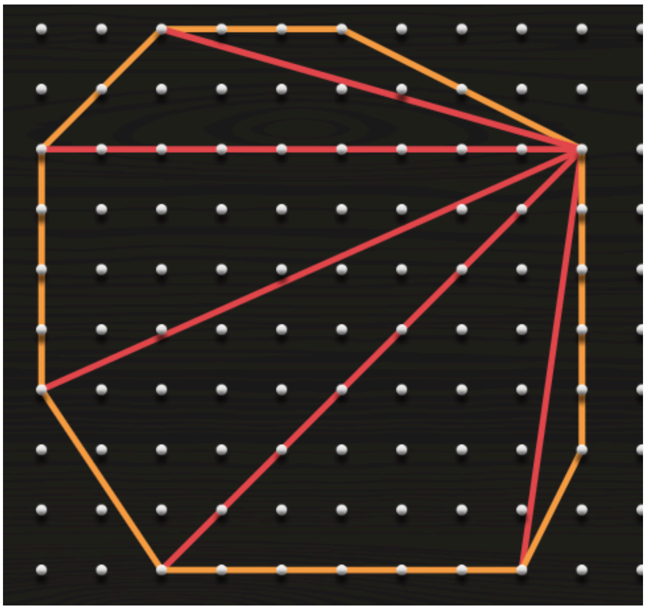
Respostas esperadas e comentários:

Realização

Professor(a), a seguir está o preenchimento correto da tabela. No momento de construção e explicação da comanda, talvez seja importante relembrar alguns conceitos como polígono convexo e ângulos internos.

Nome do polígono convexo	**Número de lados do polígono**	**Número de triângulos internos possíveis**	**Soma dos ângulos internos do polígono**
Triângulo	3	1	$1 \cdot 180° = 180°$
Quadrilátero	4	2	$2 \cdot 180° = 360°$
Pentágono	5	3	$3 \cdot 180° = 540°$
Hexágono	6	4	$4 \cdot 180° = 720°$
Heptágono	7	5	$5 \cdot 180° = 900°$
Octógono	8	6	$6 \cdot 180° = 1080°$
Eneágono	9	7	$7 \cdot 180° = 1260°$
Decágono	10	8	$8 \cdot 180° = 1440°$
Undecágono	11	9	$9 \cdot 180° = 1620°$
Dodecágono	12	10	$10 \cdot 180° = 1800°$

Possível uso do Geoplano online para obter a quantidade de triângulos possíveis em um octógono:



Discussão

- A quantidade de triângulos internos possíveis em um polígono convexo é o número de lados desse polígono menos 2;
- A soma dos ângulos internos de um polígono convexo se dá pela multiplicação da quantidade de triângulos possíveis em seu interior e 180°.

Sistematização

Dado um polígono convexo de **n** lados. O número de triângulos internos desse polígono é **n - 2.** Desse modo, a soma dos ângulos internos desse polígono é **(n - 2)** · **180º.**

Avaliação: A avaliação da aprendizagem dos estudantes deve ocorrer pela observação do professor nos momentos de interação das duplas. Caberá ao professor mediar as discussões e observar se todos estão participando ativamente das construções. Importante lembrar que, mesmo que as duplas não consigam alcançar as respostas esperadas, a discussão dos itens não deve ser considerada inválida. Até porque toda discussão foi resultado de um exercício mental em prol daqueles conhecimentos explorados. Após a realização da tarefa, aos professores que preferirem medir as aprendizagens de forma individual, segue uma sugestão de avaliação:

Avaliação individual

1. Um polígono convexo tem 14 lados. Qual é a soma dos ângulos internos desse polígono?

2. Um polígono convexo possui 20 lados. Qual é a soma dos ângulos internos desse polígono?

3. A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é 1440°. Quantos lados esse polígono possui?

4. Vamos pensar: Suponhamos que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo seja 1550°, determine quantos lados tem esse polígono. Explique sua resposta.

Respostas:

1. A soma dos ângulos internos de um polígono de 14 lados é 2160°.

2. A soma dos ângulos internos de um polígono de 20 lados é 3240°.

3. O polígono possui 10 lados. Trata-se de um decágono.

4. Não existe polígono com essa soma de ângulos internos, uma vez que 1550° não é múltiplo de 180°.

Referências

MATH LEARNING CENTER. **Geoboard**. Disponível em: https://apps. .org/geoboard/. Acesso em: 9 mar. 2025.