educa-pe

Fascículo VII

MATEMÁTICA

Permutações

Secretaria de Educação e Esportes
GOVERNO DO ESTADO
PERNAMBUCO
MAIS TRABALHO, MAIS FUTURO.

Expediente

Governador de Pernambuco

Paulo Henrique Saraiva Câmara

Vice-governadora de Pernambuco

Luciana Barbosa de Oliveira Santos

Secretário de Educação e Esportes de Pernambuco

Frederico da Costa Amancio

Autores

Prof.ª Amanda Rodrigues Marques da Silva
Prof. Jhonatan de Holanda Cavalcanti

Revisão de Língua Portuguesa

Prof.ª Aline Vieira de Oliveira Couto

Projeto gráfico

Clayton Quintino de Oliveira

Diagramação

Caio Renato Tavares da Silva

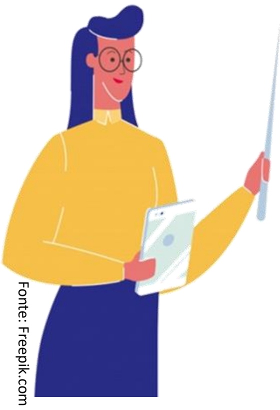
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISDB

GOVERNO de Pernambuco. Secretaria de Educação e Esportes.
Matemática: Frequência absoluta e relativa. – Recife: Secretaria de Educação e Esportes, 2020.
12 p.: il.
2º Ano Ensino Médio. Educa-PE. Fascículo 7.
1. Análise combinatória - Estudo e ensino. 2. Permutação. I. Título.
CDU – 519.101

Elaborado por Hugo Carlos Cavalcanti | CRB-4 2129

Secretaria de Educação e Esportes

GOVERNO DO ESTADO
PERNAMBUCO
MAIS TRABALHO, MAIS FUTURO.



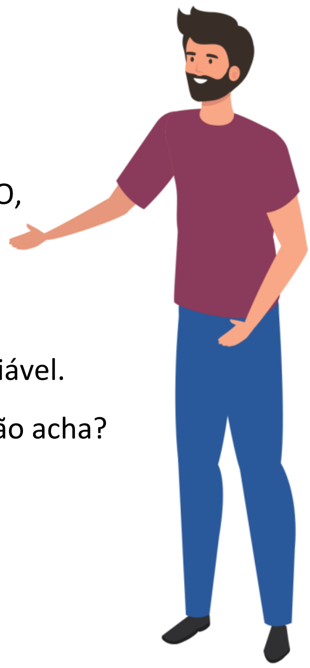
Fonte: Freepik.com

Oiê... Chegamos para continuar esse assunto que é muito massa, mas tem muita gente que tem medo dele, a análise combinatória. No fascículo passado estudamos o Princípio Fundamental da Contagem, onde tudo começa e hoje vamos estudar Permutações, que é o próximo passo desse caminho.

Permutar é reordenar um conjunto de elementos.

Por exemplo, se temos a palavra UVA e mudamos as posições dessas letras, assim: UAV, AUV, AVU, VAU, AUA, temos as permutações (também chamados anagramas) das letras da palavra. Observe que são seis as quantidades de ordenações diferentes que podemos fazer com esse conjunto de letras.

Um conjunto com três elementos é fácil, né?! Nem precisa fazer conta, é somente a gente ver todas as possíveis reordenações e tudo certo. Porém... Eu já disse por aqui que quase tudo na vida tem um “porém”?
Pois é, tem! E o porém aqui é o seguinte:
Imagine você diante de uma palavra com um conjunto de letras bem maior que 3, como por exemplo PENDURICALHO, temos aí um conjunto com 12 elementos.
E fazer uma a uma as ordenações desse conjunto maior não economiza tempo, além de ser completamente inviável.
Sendo assim, é melhor a gente aprender a fazer a continha, não acha?




Fonte: Clipmart.com

Vou te mostrar agora como isso funciona, começando pela palavra menor: UVA

Vamos agora pensar e usar o que aprendemos no fascículo anterior, temos três posições para serem ocupadas, a primeira, a segunda e a terceira posição como mostra a figura a seguir.

1ª	2ª	3ª

Agora vamos pensar no nosso conjunto de letras, temos quantos elementos que podem ocupar a primeira posição?

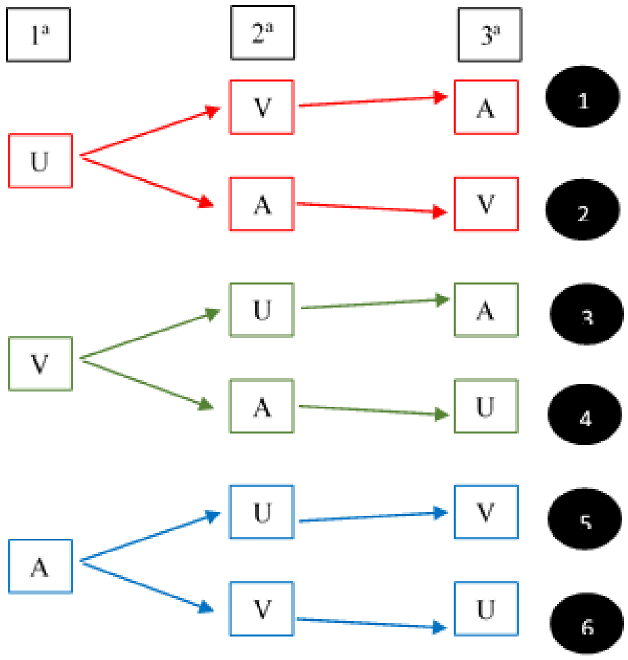

Fonte: Clipmart.com

Isso mesmo, três!

Se desse conjunto, um ocupa a primeira posição, quantos elementos podem ocupar a segunda posição?

Isso mesmo, 3 – 1 é 2! Tínhamos três e usamos um, restaram 2. Desses dois, um deles ocupará a segunda posição, restando assim apenas 1 elemento para ocupar a terceira posição.

Podemos representar essa situação em um esquema, chamado árvore das possibilidades, observe e busque o padrão.



Veja que começamos pela primeira posição, temos aí três possíveis escolhas. Após a escolha da primeira posição, temos outras duas escolhas para cada uma delas e para a terceira posição temos apenas uma opção para cada uma. Totalizamos assim seis possibilidades de reordenação.

Mas claro que não precisamos sempre fazer essa árvore, fiz esse desenho todo para te mostrar como chegamos ao simples cálculo:

3 . 2 . 1 = 6

Fonte: Pixabay.com

Então é isso, você só precisa verificar a quantidade de possibilidades para cada posição e multiplicar.

Então, na palavra PENDURICALHO podemos fazer a mesma coisa sem desenhar a árvore.

12 . 11 . 10 . 9 . 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 479.001.600

Fonte: Pixabay.com

Assim, a quantidade de permutações da palavra PENDURICALHO é 479.001.600 (quatrocentos e setenta e nove milhões, um mil e seiscentos). Você se imaginou desenhando a árvore das possibilidades? Ou escrevendo todos os anagramas dessa palavra? Cansa somente de imaginar, né?!

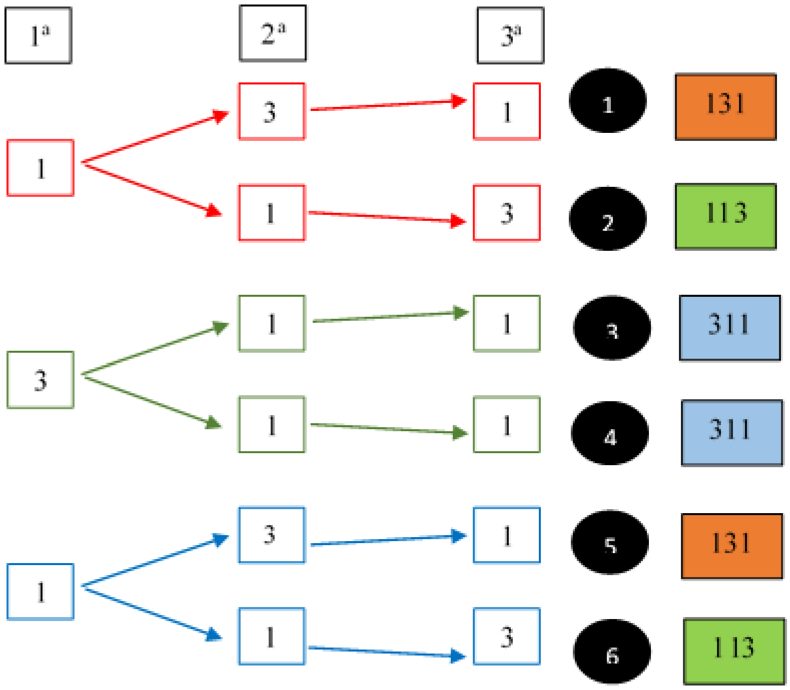
E se eu te disser que podemos "abreviar" a expressão 12 . 11 . 10 . 9 . 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1, o que você me diz?

Essa expressão, assim como todas que representam as permutações, têm os seus fatores sempre em ordem decrescente e consecutivos, terminando em um. Quando isso acontecer, podemos expressar pela operação que chamamos de fatorial e se escreve assim: "12!" e lê-se "doze fatorial". Então daqui para frente vamos sempre usar a fatorial quando estivermos tratando desse tipo de expressão. Combinado?

Se você não compreendeu, não tem problema. Vou dar uma revisada mais à frente. Então, segue comigo!

Esses dois exemplos que vimos são chamados de **permutação simples,** porque não existe nenhum elemento repetido. Nos próximos exemplos, veremos **permutação com repetição.**

Vamos agora pensar no número 131, temos um conjunto com três elementos. Seguindo a lógica que vimos anteriormente, para um conjunto com três elementos teremos seis permutações. Então, se perguntar a você agora quantas permutações temos para o número formado pelos algarismos 131, você responderá: seis, correto? Errado! E sabe por quê? Porque temos dois algarismos idênticos, o algarismo um aparece duas vezes e olha o que acontece nesse caso. Observe a árvore das possibilidades:



Observe que as ordenações 1 e 5, 2 e 6, 3 e 4 são idênticas. Então, não podemos dizer que são permutações diferentes.

Presta atenção! Sublinha esse texto aqui e não esquece **quando temos elementos que se repetem, não podemos usar a fórmula $P_n = n!$** (a multiplicação que eu te falei no início desse fascículo, onde os fatores são consecutivos e decrescentes). **Quando existem elementos repetidos no conjunto usaremos a seguinte fórmula.** No nosso caso aqui para o número 131, temos n = 3 (três elementos) e k = 2 (dois algarismos idênticos).

$$P_2^3 = \frac{3!}{2!} = \frac{3\,.\,2\,.\,1}{2\,.\,1} = \frac{6}{2} = 3$$

Assim, vemos que o cálculo e a árvore nos deram 3 permutações para a permutação dos algarismos do número 131.

Vamos agora fazer o cálculo da quantidade de permutações ou anagramas que dariam os nomes dos professores que escrevem esse fascículo pra você?

Começando com AMANDA, que é um nome mais simples:

Conjunto com seis elementos, n = 6, desses elementos três são idênticos, k = 3.

$$P_3^6 = \frac{6!}{3!} = \frac{6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}{3\,.\,2\,.\,1} = \frac{720}{6} = 120$$

Então o nome AMANDA tem 120 anagramas diferentes. Me deixa te mostrar um atalho para esse cálculo?

$$P_3^6 = \frac{6!}{3!} = \frac{6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}{3\,.\,2\,.\,1} \qquad \boxed{3!}$$

O que a imagem acima está nos mostrando? Que temos a expressão 3! No numerador e no denominador. E que podemos escrever a expressão assim:

$$P_3^6 = \frac{6!}{3!} = \frac{6\,.\,5\,.\,4\,.\,\cancel{3!}}{\cancel{3!}}$$

Estamos acostumados a simplificar quando temos fatores idênticos no numerador e no denominador e isso nos traz uma grande economia. Porque nosso cálculo ficará assim:

$$P_3^6 = \frac{6!}{3!} = \frac{6\,.\,5\,.\,4\,.\,\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 6\,.\,5\,.\,4 = 120$$

Isso é somente um atalho, se você não se sentir seguro ou segura para usá-lo não precisa. E uma dica quando sentimos insegurança em usar um atalho é usarmos a forma mais longa e usarmos o atalho, e depois conferir e ver se estamos conseguindo fazer certinho.

Agora vamos para o nome mais complicado JHONATAN. E por que ele é mais complicado? Porque ele tem um conjunto de 8 letras, n = 8, e tem duas letras que se repetem. O N, que se repete duas vezes e o A que também se repete duas vezes. Nesse caso temos dois K, $K_1 = 2$ e $K_2 = 2$. E nossa fórmula para o cálculo ficará assim:

$$P_n^{k_1,k_2} = \frac{n!}{k_1\,.\,k_2!}$$

Agora vamos ver quantas permutações teremos:

$$P_9^{2,2} = \frac{8!}{2!\,.\,2!} = \frac{8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,2!}{2!\,.\,2\,.\,1} = \frac{8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,\cancel{2!}}{\cancel{2!}\,.\,2} = \frac{20160}{2} = 10080$$

O nome JHONATAN possui assim 10080 anagramas ou permutações.

Fonte: Freepik.com

Agora é com você!

QUESTÕES

Fonte: Pixabay.com

1. O resultado da mega-sena no dia 24/06/2020 foram os números: 15 - 16 - 20 - 38 - 40 - 58. De quantas maneiras diferentes podem ter sido sorteados esses números?

2. A quantidades de números que podemos obter permutando os algarismos do número 1989?

3. Qual a quantidade de anagramas que possui os nomes abaixo?

a) Laudemira

b) Jaidete

c) Bento

GABARITO

1.

Temos um conjunto de seis números distintos. Aqui vamos usar a primeira ideia que falamos nesse fascículo, permutação simples.

Onde $\mathbf{P_n = n!}$.

$$P_6 = 6! = 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 720$$

Temos 720 ordens diferentes desses números terem sido sorteados.

Fonte: Pixabay.com

2.

Temos um conjunto com quatro elementos (1, 9 , 8 , 9), n = 4, e dois elementos repetidos (9,9), então temos k = 2.

$$P_2^4 = \frac{4!}{2!} = \frac{4\,.\,3\,.\,\cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 4\,.\,3 = 12$$

Podemos, assim, formar 12 números diferentes permutando os algarismos do número 1989.

3.

a) LAUDEMIRA

Temos um conjunto com nove elementos, n = 9 e dois elementos que se repetem, k = 2.

$$P_9^2 = \frac{9!}{2!} = \frac{9\,.\,8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,\cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 9\,.\,8\,.\,7\,.\,6\,.\,5\,.\,4\,.\,3 = 181.440$$

O nome Laudemira possui 181.440 anagramas.

Fonte: Pixabay.com

b) JAIDETE

Temos um conjunto com sete elementos, n = 7 e dois elementos que se repetem, k = 2.

$$P_7^2 = \frac{7!}{2!} = \frac{7.6.5.4.3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 7.6.5.4.3 = 2520$$

O nome Jaidete possui 2520 anagramas.

c) BENTO

$P_5 = 5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$

O nome Bento possui 120 anagramas.

Fonte: Pixabay.com

Mande suas dúvidas que a gente responde