



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO, DE CIÊNCIAS EXATAS E EDUCAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Evandir Krummenauer

Recurso Educacional: Uma proposta de sequência didática para o estudo do
Princípio de Cavalieri

Blumenau
2025

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	2
2	APRESENTAÇÃO DAS OFICINAS	3
2.1	INFORMAÇÕES BÁSICAS:	3
2.2	OBJETIVOS:	3
3	ROTEIRO DAS OFICINAS	4

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos sólidos geométricos é importante porque permite aos estudantes quantificarem o espaço ocupado por um sólido ou até mesmo a sua capacidade de armazenamento. Nesse contexto, o Princípio de Cavalieri é um conceito matemático importante, visto que permite calcular o volume de um sólido específico, estabelece aplicação e comparação de volumes de sólidos

A fim de tornar mais acessível e interativa essa discussão, propomos por meio de uma oficina, atividades práticas, em que o estudante fará uso de materiais manipuláveis. Pretendemos, assim, reforçar o embasamento teórico e promover a utilização do Princípio de Cavalieri. As oficinas combinam teoria e prática por meio da manipulação de materiais, a fim de que o estudante compreenda com clareza a aplicação do Princípio de Cavalieri.

Salientamos que não temos a intenção de oferecer aqui um planejamento completo e definitivo sobre todas as formas de ensino-aprendizagem tampouco de desestimular a criatividade do professor. A ideia foi, por meio de oficinas, promover o interesse e estimular o professor na aplicação de práticas pedagógicas. O professor tem liberdade para adaptar as atividades, a fim de atender não só as necessidades dos estudantes como também as particularidades de sua realidade local e perfil de cada turma.

A aplicação do Princípio de Cavalieri com o uso de materiais manipuláveis se justifica pela necessidade de tornar conceitos abstratos da Geometria mais concretos. Essa abordagem pode fornecer aos estudantes a compreensão e aprendizado significativo, e promover a motivação, resolução de problemas e investigação, tornando o saber mais dinâmico e engajador.

2 APRESENTAÇÃO DAS OFICINAS

Este trabalho propõe que o cálculo de volumes com o Princípio de Cavalieri seja discutido em quatro oficinas:

Oficina 1: Princípio de Cavalieri no cálculo de volume no Paralelepípedo;

Oficina 2: Princípio de Cavalieri no cálculo de volume no Prisma e no Cilindro;

Oficina 3: Princípio de Cavalieri no cálculo de volume na Pirâmide e no Cone;

Oficina 4: Princípio de Cavalieri no cálculo do volume na Esfera.

2.1 INFORMAÇÕES BÁSICAS:

Local: Sala de aula.

Duração de cada oficina: 2 encontros.

Recursos físicos e materiais: Sala de aula, círculos com os papelões, ou EVA, ou papel de caixa de sapato, ou papel cartão, régua, esquadros, tesoura ou estiletes (com supervisão do professor), palito de churrasco e base de papelão (sugestão).

Público-alvo: Estudantes do 3º ano Médio.

2.2 OBJETIVOS:

- (i) Demonstrar o Princípio de Cavalieri utilizando materiais manipuláveis para que os estudantes compreendam o conceito de volume de maneira concreta e visual;
- (ii) Compreender o conceito de sólidos geométricos;
- (iii) Explorar o Princípio de Cavalieri e a sua aplicação no cálculo de volume;
- (iv) Desenvolver a percepção espacial por meio de atividades práticas;
- (v) Validar o cálculo de volume no Princípio de Cavalieri para qualquer sólido.

3 ROTEIRO DAS OFICINAS

Para um melhor entendimento, visualização e aplicação das oficinas propostas, detalharemos o roteiro de cada um dos quatro momentos da oficina. Sugere-se que os estudantes sejam divididos em 4 grupos para o desenvolvimento das atividades.

O professor ilustra o conceito de volume e enuncia o Princípio de Cavalieri como um postulado. Para tornar o conteúdo mais lúdico e acessível, o professor pode realizar uma demonstração prática, comparando duas pilhas de papel dispostas de formas diferentes, mas mantendo a altura e o mesmo número de folhas. Isso permite visualizar como o volume pode permanecer inalterado, ilustrando o Princípio de Cavalieri de maneira concreta.

Em seguida, os estudantes, organizados em grupo, colocarão em prática o Princípio de Cavalieri através da construção dos sólidos geométricos. A atividade será desenvolvida em dois encontros: no primeiro, os estudantes farão a confecção do produto manipulável; e no segundo, apresentarão o Princípio de Cavalieri utilizando os sólidos construídos explicando o raciocínio a partir dos sólidos construídos.

OFICINA 1: Princípio de Cavalieri no cálculo de volume no Paralelepípedo

A primeira atividade consiste na construção de placas retangulares e quadradas. Os estudantes, divididos em 4 grupos, farão essas construções. Utilizando papelão, são confeccionados retângulos, com as medidas de $8\text{ cm} \times 15\text{ cm}$, e quadrados, com medidas $11\text{ cm} \times 11\text{ cm}$. Sugere-se que os grupos construam 24 placas de cada formato. Assim, ao empilhar as placas, obteremos o formato de duas figuras harmônicas, como ilustrado na Figura 1.

Ao elaborar as placas, é necessário que o grupo marque o centro de cada figura. Neste ponto, em cada placa, será espetada o palito de churrasco para a montagem do sólido. Esta construção produz um paralelepípedo reto retângulo na primeira torre de placas, e na segunda um prisma de base quadrada.

No segundo momento da atividade, o grupo explicará o Princípio de Cavalieri a partir dos produtos construídos, relacionando a teoria com o material construído.

OFICINA 02: Princípio de Cavalieri no cálculo de volume no Prisma e no Cilindro

Nesta atividade, os estudantes construirão placas quadradas e circulares. São necessários quadrados, com as medidas de $11\text{ cm} \times 11\text{ cm}$, e círculos, de raio $6,2\text{ cm}$. Novamente, sugere-se a construção de 24 placas de cada formato.

Conforme ilustrado pela Figura 2, será formado um prisma de base quadrada, na primeira torre de placas, e, na segunda, um cilindro. Para finalizar, cabe aos estudantes fixarem os sólidos na base um ao lado do outro.

Figura 1 – Comparação entre blocos retangulares



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2 – Comparação entre um prisma e um cilindro



Fonte: Elaborada pelo autor.

No segundo momento, os grupos serão convidados a explicar o conceito do Princípio de Cavalieri, a partir dos produtos construídos.

OFICINA 03: *Princípio de Cavalieri no cálculo de volume na Pirâmide e no Cone*

A terceira oficina assumirá que o volume da pirâmide é a terça parte do volume de um prisma de mesma base e mesma altura. Com base nisso, os estudantes construirão placas quadradas e circulares de diversos tamanhos. A maior placa quadrada terá $11\text{ cm} \times 11\text{ cm}$, e a menor será de $1,8\text{ cm} \times 1,8\text{ cm}$, seguindo a redução de tamanho de $0,4\text{ cm}$ de largura e $0,4\text{ cm}$ no comprimento para cada nova placa. Já nas placas circulares, o maior círculo terá raio $6,2\text{ cm}$ e o menor terá raio 1 cm , seguindo a redução de tamanho de $0,2\text{ cm}$ de raio para cada placa. Sugere-se a construção de 24 placas de cada formato, com tamanhos variados indicados.

Assim, será formado um sólido que parecerá uma pirâmide, e outro que se assemelhará a um cone. Ao observarmos a Figura 3, teremos uma noção mais clara do formato da construção solicitada.

Figura 3 – Comparação entre uma pirâmide e um cone



Fonte: Elaborada pelo autor.

No segundo momento, os grupos explicarão o conceito do Princípio de Cavalieri, a partir dos produtos construídos. Quando verificamos os dois sólidos, podemos analisar que foram utilizadas a mesma quantidade de material, a fim de formar figuras de formato diferente.

OFICINA 04: *Princípio de Cavalieri no cálculo do volume na Esfera*

Na última oficina, o grupo formará um cilindro equilátero composto de círculos de papelão e massinha (de modelar), isto é, uma Clépsidra, semelhante a uma ampulheta, que será completada com o uso de massinha.

Para formar a Clépsidra, serão confeccionadas placas circulares duplicadas, isto é, serão produzidas 28 placas de papelão, com 14 tamanhos diferentes. Sugere-se que as duas primeiras placas tenham 6 cm de raio, e as últimas, 0,5 cm de raio, com uma redução de 0,5 cm no raio a cada novo tamanho.

Para a montagem dos sólidos, espete o primeiro grupo de 14 placas em ordem crescente, formando um sólido semelhante a um cone equilátero. Em seguida, espete as 14 placas restantes, em ordem decrescente, formando outro cone, e então teremos um sólido com aparência de uma ampulheta. Vejamos na Figura 4, a ilustração do sólido com as medidas descritas acima.

Figura 4 – Construção da Clépsidra



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para completar o cilindro equilátero, os estudantes são convidados a utilizar massinha para envolver o sólido construído acima, de modo a obter um cilindro, como percebemos na Figura 5. Em outras palavras, a Clépsidra será revestida pela anticlépsidra e, ao final, as duas estruturas juntas formarão o cilindro equilátero.

Figura 5 – Construção de um cilindro a partir da Clépsidra



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na sequência, os estudantes são convidados a remover a massinha que revestia a Clépsidra construída anteriormente. Após a remoção completa, o estudante deve manipular a massinha de modo que o formato final seja próximo de uma esfera. Neste caso, a esfera terá diâmetro igual ao dobro do raio do cone da ampulheta. Ou seja, o volume da esfera será equivalente ao volume do cilindro equilátero menos o dobro do volume dos cones que formavam a Clépsidra, isto é, o volume da anticlépsidra é igual ao volume da esfera, conforme ilustra a Figura 6.

No segundo momento, sugerimos que os grupos expliquem o conceito do Princípio de Cavalieri, a partir dos produtos construídos.

Avaliação:

Finalizamos a oficina direcionando aos estudantes um rol de perguntas orientadas, com objetivo de estimular a reflexão sobre o conceito abordados nesta oficina.

- O que acontece com a quantidade de camadas quando você inclina os sólidos?
- A área de cada camada é a mesma? Como você calcula a altura do sólido em relação ao número de camadas?
- Qual é o volume dos sólidos montados pelas camadas de polígonos ou pelas camadas de círculos?

Figura 6 – Volume da Esfera



Fonte: Elaborada pelo autor.

- De acordo com o Princípio de Cavalieri, como você calcularia o volume de cada sólido?
- Se a área das camadas poligonais é igual a área das camadas circulares, de acordo com o Princípio de Cavalieri, o que você pode concluir a respeito dos sólidos construídos pelo mesmo número de camadas?

As perguntas têm a função de promover o raciocínio crítico, incentivar a observação dos padrões geométricos e consolidar a compreensão dos estudantes sobre o Princípio de Cavalieri, mediante a comparação e análise dos sólidos manipuláveis construídos ao longo da oficina.

Por fim, será solicitado aos estudantes, em grupo, que expliquem como o Princípio de Cavalieri garante a igualdade de volumes. Além disso, apresentarão a aplicação do princípio em problemas matemáticos que utilizam esse conceito.