Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Educação e Humanidades
Faculdade de Formação de Professores

PRODUTO EDUCACIONAL

Aritmética Modular e Educação Matemática: Uma Proposta Didática a Partir do Design Residual

Orientadora: Profª. Dra. Adriana Juzga León
Aluno: Robson dos Santos Praxede

São Gonçalo-RJ
2025

Resumo

Este produto educacional apresenta uma proposta didática organizada em quatro etapas, voltada ao ensino básico, que articula aritmética modular e práticas geométricas. A sequência busca tornar a aprendizagem mais dinâmica e motivadora por meio da construção de mandalas, polígonos estrelados e padrões gerados por resíduos. O material introduz o algoritmo da divisão, relacionando a divisão não exata ao conceito de congruência, explorado por meio de exemplos e exercícios que fornecem a base conceitual necessária para o desenvolvimento das atividades. Para apoiar a construção e a visualização das figuras, utiliza-se o GeoGebra, possibilitando uma abordagem prática, interativa e alinhada ao uso de tecnologias digitais na educação matemática.

Palavras-chave: Algoritmo da divisão; congruência modular; polígono estrelado, design de resíduos, mandalas modulares.

Sumário

1 Introdução

Neste recurso educacional apresentamos detalhadamente uma proposta pedagógica / atividade voltada ao ensino de congruências modulares na educação básica, fundamentada em abordagens didáticas investigativas e interdisciplinares. A proposta busca integrar conteúdos da Teoria dos Números a elementos visuais, como polígonos estrelados, mandalas e padrões geométricos gerados por meio do chamado design residual, promovendo o desenvolvimento do raciocínio matemático, da criatividade e da sensibilidade estética dos estudantes.

O objetivo principal é propor e analisar uma abordagem didática para o ensino da Aritmética Modular que integre construções geométricas e o uso do GeoGebra, favorecendo a compreensão conceitual e o interesse dos estudantes pela Matemática. Para a aplicação dessa proposta, o professor ou aplicador deve revisar os conteúdos de divisibilidade, divisão não exata e congruência, além de dominar os algoritmos de construção de cada atividade.

Este recurso educacional busca contribuir para o ensino da Matemática ao propor uma forma de trabalhar a Aritmética Modular que valoriza a visualização, a criatividade e o pensamento investigativo. Mais do que apresentar um conteúdo, o objetivo é mostrar que aprender Matemática pode ser uma experiência viva, prazerosa e inspiradora, em que teoria e prática se unem na construção do conhecimento.

O material apresenta um guia prático organizado em quatro etapas que se complementam, explicando como construir figuras como estrelas, mandalas e padrões de design residual a partir de congruências modulares. As instruções detalham cada procedimento necessário, além de disponibilizarem atividades prontas para impressão e uso em sala de aula. Cada seção aborda um ponto central da proposta: inicia-se com a análise de figuras geométricas para aproximar os alunos da relação entre arte e matemática; em seguida, revisita-se a divisão não exata para destacar a relevância do resto; posteriormente, introduz-se o conceito de congruência entre números inteiros; e, na etapa seguinte, orienta-se a criação das figuras a partir dos materiais fornecidos neste produto educacional. É fundamental que o aplicador detenha compreensão adequada dos conceitos básicos de congruência.

2 Proposta Didática / atividade

2.1 Descrição geral da Proposta Didática / atividade

É apresentada um guia prático de desenvolvimento desta atividade para ser realizada no Ensino Básico em **quatro etapas interdependentes e progressivas** com o algoritmo geral para a construção de figuras como estrelas, mandalas e formas baseadas em design residual utilizando congruências modulares. A orientação detalha os procedimentos técnicos e as etapas necessárias para gerar as figuras, servindo como referência direta para os professores ou responsáveis pela aplicação da atividade em sala de aula. Recomenda-se que este guia seja revisitado com atenção antes da realização da proposta com os alunos, de modo a garantir fluidez e clareza durante a condução da atividade. Parte-se do pressuposto de que o aplicador já possui familiaridade com o conceito de congruência e suas propriedades básicas, uma vez que este conhecimento é essencial para compreender a lógica subjacente às construções apresentadas a seguir.

Na **primeira etapa**, os alunos serão convidados a **observar e analisar diferentes figuras geométricas visuais, como mandalas, polígonos estrelados e padrões obtidos por meio do design residual**. O foco será estabelecer uma conexão inicial entre matemática e arte, chamando atenção para os padrões, os saltos regulares e a continuidade dos segmentos que formam essas figuras. Essa introdução visual tem o objetivo de despertar o interesse dos alunos e criar um ambiente favorável à investigação.

A **segunda etapa** retoma o conceito de divisão não exata, **explorando com os alunos como todo número inteiro pode ser representado por meio de um quociente e um resto**. Essa etapa é fundamental para preparar o terreno conceitual da próxima, pois permite visualizar a ideia de resto como algo significativo, e não apenas como resultado mecânico de um cálculo.

Na **terceira etapa**, será introduzido o conceito de congruência entre números inteiros, com base na ideia de que dois números são congruentes quando deixam o mesmo resto ao serem divididos por um mesmo número. **A relação entre divisão não exata e congruência será trabalhada com exemplos e exercícios simples**, buscando desenvolver uma compreensão conceitual antes de partir para a construção prática.

A **quarta etapa** será dedicada à construção das figuras geométricas com base nas congruências modulares. Os alunos utilizarão folhas de atividades contendo tabelas e circunferências (disponíveis no Anexo B), que os guiarão passo a passo na criação de padrões visuais. Essa etapa permite **aplicar os conceitos estudados de forma prática, visual e criativa, aproximando a matemática da experiência concreta dos estudantes** e valorizando a estética no raciocínio matemático.

Tabela 1: Sugestão de tempo pedagógico para cada etapa.

Etapas	**Tempo**
Etapa 1	10 minutos
Etapa 2	20 minutos
Etapa 3	20 minutos
Etapa 4	50 minutos

2.2 Primeira Etapa: Apresentação das figuras e Motivação Inicial

Nesta etapa inicial, o objetivo é despertar o interesse dos alunos e estabelecer conexões entre a matemática e a arte por meio da observação de figuras visuais geradas com base em congruências modulares. O professor ou responsável pela atividade deverá apresentar aos alunos exemplos de figuras como estrelas, mandalas e padrões criados por design residual, destacando sua beleza, simetria e regularidade.

As figuras podem ser apresentadas de duas formas, dependendo da disponibilidade de recursos da escola ou local de aplicação: Por meio das imagens impressas que compõem a tabela de exemplos visuais disponibilizada nos anexos desta proposta. Ou, preferencialmente, por meio de simulações digitais interativas desenvolvidas pelo autor da proposta, disponíveis de forma gratuita através dos links:

Tabela 2: Links das simulações/apps das construções geométricas no Geogebra

Construção Geométrica	**Link da Simulação/App no Geogebra**
Estrela com n Pontas	<https://www.geogebra.org/classic/yfcrudwm>
Design de Resíduos	<https://www.geogebra.org/classic/awgpey2h>
Mandala Modular	<https://www.geogebra.org/classic/fqcghuwk>

Ao apresentar as figuras, é recomendável que o professor varie os exemplos, mostrando diferentes configurações (quantidade de pontos, tipos de ligações, padrões cíclicos etc.), de modo a evidenciar a diversidade das formas possíveis e estimular a curiosidade dos alunos.

Durante essa apresentação, é importante fazer uma fala motivadora, situando a atividade do dia como uma oportunidade para criar figuras semelhantes com ajuda da matemática. Uma sugestão de abordagem seria dizer: *"Hoje, vamos aprender a fazer desenhos como esses aqui. Eles parecem só arte, mas são feitos com matemática! Vamos descobrir como ideias como resto de divisão e regularidade nos ajudam a construir essas figuras* *lindas e simétricas."*

Essa contextualização inicial tem papel fundamental na construção de sentido para a atividade, contribuindo para o engajamento dos alunos e para a valorização da matemática como linguagem também expressiva e criativa.

2.3 Segunda Etapa: Exploração da Divisão Não Exata e Tabela de Restos

Nesta etapa, o foco será introduzir ou retomar com os alunos o conceito de **divisão não exata**, que servirá como base para a compreensão posterior das *congruências modulares*. O professor deverá iniciar a explicação apresentando a ideia de que, para quaisquer números naturais D e $d \neq 0$, existem **únicos** números naturais q (quociente) e r (resto) tais que

$$D = q \cdot d + r \quad \text{com} \quad 0 \leq r < d.$$

Onde:

- D é o **dividendo** e d é o **divisor**;
- q é o **quociente** da divisão de D por d;
- r é o **resto** dessa divisão.

Um exemplo simples pode ser utilizado para ilustrar:

Exemplo 2.1. *Dividindo* 38 *por* 7*, temos:*

$$\begin{array}{r|l} 38 & 7 \\ \cline{2-2} 3 & 5 \end{array}$$

ou seja,

$$38 = 5 \cdot 7 + 3.$$

Portanto, o quociente é 5 *e o resto é* 3*.*

A seguir, o professor deverá propor aos alunos uma atividade prática: o **preenchimento de uma tabela de restos**, com os resultados das divisões dos **primeiros 16 números naturais (de 0 a 15)** por diferentes divisores: 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Essa tabela encontra-se disponível na folha de atividades (ver Anexo B).

De acordo com a dinâmica da turma, essa atividade poderá ser realizada de forma **individual ou em grupos pequenos**, preferencialmente com até **três alunos por**

grupo. O trabalho em grupo pode favorecer a discussão entre os colegas e o levantamento de hipóteses sobre padrões observados nos restos.

Exercício 2.1. *Preencha a tabela abaixo com os restos da divisão dos números naturais de* 0 *a* 15 *pelos divisores indicados:*

Tabela 3: Atividade com restos da divisão

Número Natural	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Resto da divisão por 2	0	1	0	1	0	1	0	1								
Resto da divisão por 3	0	1	2	0	1	2	0									
Resto da divisão por 4	0	1	2	3												
Resto da divisão por 5																
Resto da divisão por 6																
Resto da divisão por 7																

Após o preenchimento, o professor deverá apresentar a **tabela com os resultados corretos**, discutindo com os alunos os eventuais erros cometidos e reforçando a lógica do cálculo do resto. Esta etapa é essencial para que os alunos percebam os **padrões cíclicos** que surgem nos restos. Observação que será muito útil nas próximas etapas da atividade.

Solução: Efetuando as divisões encontraremos:

Tabela 4: Respostas atividade com restos da divisão

Número Natural	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Resto da divisão por 2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Resto da divisão por 3	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
Resto da divisão por 4	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
Resto da divisão por 5	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0
Resto da divisão por 6	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3
Resto da divisão por 7	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1

Para concluir esta etapa, o professor poderá também introduzir uma aplicação simples e contextualizada, como a contagem de dias da semana com base na divisão não exata. O objetivo é reforçar que a divisão com resto **não é apenas um processo mecânico**, mas possui utilidade concreta em diversas situações do cotidiano.

Exercício 2.2. *O ano de 2025 começou em uma quarta-feira. Em que dia da semana cairá o último dia deste ano?*

Solução: Dividindo 365 por 7, obtemos quociente 52 e resto 1, ou seja:

$$365 = 52 \cdot 7 + 1.$$

Isso significa que o dia 1° de janeiro de 2026 será **um dia após** a quarta-feira — ou seja, uma **quinta-feira**. Logo, o dia **31 de dezembro de 2025** cairá em uma **quarta-feira**.

Observação: Para anos **não bissextos** (com 365 dias), o ano começa e termina no mesmo dia da semana. Já nos **anos bissextos** (366 dias), o último dia do ano cai **dois dias após** o dia da semana inicial, pois:

$$366 = 52 \cdot 7 + 2.$$

É interessante que o professor ou responsável pela atividade leve um **calendário impresso ou projetado em sala de aula**, para que os alunos possam verificar e confirmar a resposta, conectando assim a teoria à prática.

Figura 1: Calendário 2025
Fonte: Elaborada pelo autor

Essa abordagem auxilia na compreensão do significado do **resto da divisão**, mostrando como ele aparece de forma natural em contextos cotidianos e estimulando a valorização da matemática como ferramenta para compreender o mundo.

2.4 Terceira Etapa: Do Resto à Congruência: Explorando um Novo Conceito

Nesta etapa, o professor deverá introduzir formalmente o conceito de congruência a partir da ideia de divisão não exata e dos restos obtidos. A conexão com a etapa anterior é fundamental: a congruência modular surge como uma generalização da ideia de "mesmo resto" nas divisões por um mesmo número. Esta transição ajuda os alunos a perceberem que, na matemática, conceitos aparentemente simples como a divisão podem ter interpretações mais abstratas e amplas.

O professor pode iniciar explicando que, dado um número inteiro positivo m, dizemos que dois números inteiros a e b são **congruentes módulo** m quando m divide a diferença $a - b$. A notação utilizada é:

$$a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid (a-b).$$

Essa condição equivale a dizer que $(a - b) = m \cdot q$, para algum número inteiro q. O professor pode também apresentar o significado dos símbolos usados:

- $\equiv$ significa "é congruente a";
- $\not\equiv$ significa "não é congruente a";
- $\pmod{m}$ indica que estamos considerando divisões por m;
- $\mid$ significa "divide";
- $\nmid$ significa "não divide".

A seguir, o professor pode apresentar exemplos simples e relacionar cada congruência ao *resto* da divisão:

Exemplo 2.2. *Vamos determinar se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa:*

a) $14 \equiv 8 \pmod{3}$

b) $45 \equiv 24 \pmod{7}$

c) $23 \equiv 9 \pmod{4}$

Solução:

a) De fato, 14 *é congruente a* 8 *módulo* 3*, pois:* $14 - 8 = 6$.
Observe que 6 *é múltiplo de* 3*, uma vez que* $6 = 3 \cdot 2$*. Logo a afirmação é verdadeira.*

b) De fato, 45 *é congruente a* 24 *módulo* 7*, pois:* $45 - 24 = 21$.
Observe que 21 *é múltiplo de* 7*, uma vez que* $21 = 7 \cdot 3$*. Logo a afirmação é verdadeira.*

c) Observe que, 23 *não é congruente a* 9 *módulo* 4*, pois* $23 - 9 = 14$ *e,* 4 *não divide* 14*. Logo, a afirmação c) é falsa.*

Para consolidar o conteúdo, propõe-se o seguinte exercício aos alunos:

Exercício 2.3. *Verifique cada uma das congruências abaixo:*

a) $19 \equiv 7 \pmod 6$

b) $34 \equiv 11 \pmod 5$

c) $52 \equiv 16 \pmod 9$

Soluções esperadas:

a) $6 \mid (19 - 7) \Rightarrow 6 \mid 12$
(Resto 1 em ambos. Verdadeira).

b) Como $5 \nmid (34 - 11) \Rightarrow 5 \nmid 23 \Rightarrow 34 \not\equiv 11 \pmod 5$.
(Restos diferentes. Falsa).

c) $9 \mid (52 - 16) \Rightarrow 9 \mid 36$
(Resto 7 em ambos. Verdadeira).

Essa introdução à congruência pode ser enriquecida com exemplos que façam sentido para os estudantes, mostrando que dois números diferentes podem "pertencer à mesma classe de restos" em divisões por um mesmo número. Isso abrirá caminho para as construções visuais que virão na próxima etapa da atividade.

2.5 Quarta Etapa: Arte com Congruências - Construção das Figuras

Nesta etapa, o professor guiará os alunos na construção de figuras geométricas baseadas na aritmética modular: polígonos estrelados, designs de resíduos e mandalas. O objetivo é aplicar os conceitos de divisão não exata e congruência em contextos visuais, reforçando a conexão entre Matemática e Arte.

Importante: Para facilitar as construções, os alunos utilizarão *folhas de atividades contendo tabelas e circunferências* — disponíveis no Anexo B deste trabalho. Isso permitirá que façam as marcações e conexões manualmente, favorecendo a compreensão prática dos conceitos.

A seguir, um roteiro passo a passo para o professor conduzir cada construção.

2.5.1 Construção do Polígono Estrelado

Metodologia sugerida:

1. Explique a ideia de formar uma estrela ligando pontos igualmente espaçados numa circunferência.

2. Apresente os parâmetros n (número de pontas) e k (salto entre vértices).

3. Mostre as condições para a construção válida:

$$1 < k < n - 1 \quad \text{e} \quad \text{mdc}(n, k) = 1.$$

4. Oriente os alunos a utilizarem as circunferências impressas para dividir em n partes iguais e numerar os pontos de 0 a $n - 1$.

5. Instrua-os a preencherem as tabelas com os valores calculados de:

$$x = t \cdot k, \quad y \equiv x + k \pmod{n}, \quad t = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

6. Finalmente, conectar os pontos indicados para formar a estrela. Orientando aos alunos com a indicação que $t = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ corresponde aos vértices numerados da circunferência e, cada conexão $x \to y$ representa uma aresta da estrela.

Após apresentar os passos, construa junto com os alunos.

Exemplo 2.3. *O número de pontas da estrela está definido como $n = 7$ e o salto como $k = 3$. Como $\text{mdc}(7, 3) = 1$, podemos construir um polígono estrelado com vértices numerados de 0 até $n - 1 = 6$.*

Utilizando a fórmula das conexões:

$$x = t \cdot k, \quad y \equiv x + k \pmod{n},$$

onde $t = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, calculamos as conexões entre os vértices:

- $x = 0 \cdot 3 = 0 \mapsto y \equiv 0 + 3 \equiv 3 \pmod{7}$
- $x = 1 \cdot 3 = 3 \mapsto y \equiv 3 + 3 \equiv 6 \pmod{7}$
- $x = 2 \cdot 3 = 6 \mapsto y \equiv 6 + 3 \equiv 9 \equiv 2 \pmod{7}$
- $x = 3 \cdot 3 = 9 \mapsto y \equiv 9 + 3 \equiv 12 \equiv 5 \pmod{7}$
- $x = 4 \cdot 3 = 12 \mapsto y \equiv 12 + 3 \equiv 15 \equiv 1 \pmod{7}$
- $x = 5 \cdot 3 = 15 \mapsto y \equiv 15 + 3 \equiv 18 \equiv 4 \pmod{7}$
- $x = 6 \cdot 3 = 18 \mapsto y \equiv 18 + 3 \equiv 21 \equiv 0 \pmod{7}$

Portanto, o polígono estrelado terá a seguinte sequência de vértices e arestas:

$$0 \to 3 \to 6 \to 2 \to 5 \to 1 \to 4 \to 0.$$

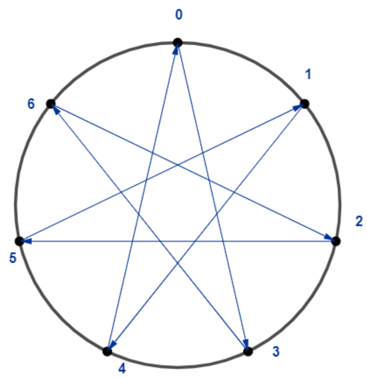


Figura 2: Polígono Estrelado (7,3)
Fonte: Elaborada pelo autor

2.5.2 Construção de Design de Resíduos

Nesta construção, enfatize que cada conexão representa a multiplicação módulo m, visualizada na circunferência.

Metodologia sugerida:

1. Explique aos alunos que devem fixar o módulo m.
2. Escolher n tal que $1 \leq n < m$ e $\text{mdc}(m, n) = 1$.
3. Usar as folhas de atividades para dividir a circunferência em $m - 1$ partes iguais e numerar os pontos de 1 a $m - 1$.
4. Preencher as tabelas com os pares:

$$(x, y), \quad y \equiv n \cdot x \pmod{m}.$$

5. Conectar os pontos conforme indicado.

Após apresentar os passos, construa junto com os alunos.

Exemplo 2.4. *Para construir um design de resíduo* $(17, 5)$*, seguimos os passos indicados e obtemos:*

1. *Fixamos* $m = 17 \pmod{17}$.

2. *Escolhemos* $n = 5$. *Como* $\mathrm{mdc}(17, 5) = 1$, *podemos continuar.*

3. *Dividimos a circunferência em* 16 *partes iguais, marcando 16 pontos igualmente espaçados. Numeramos os pontos de* 1 *até* 16.

4. *Aplicamos a congruência* $y \equiv 5x \pmod{17}$, *para cada* $x = 1, 2, \ldots, 16$.

Calculamos os pares (x, y) *conforme a congruência:*

- $x = 1$; $y \equiv 5 \cdot 1 \equiv 5 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (1, 5)$;
- $x = 2$; $y \equiv 5 \cdot 2 \equiv 10 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (2, 10)$;
- $x = 3$; $y \equiv 5 \cdot 3 \equiv 15 \equiv 15 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (3, 15)$;
- $x = 4$; $y \equiv 5 \cdot 4 \equiv 20 \equiv 3 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (4, 3)$;
- $x = 5$; $y \equiv 5 \cdot 5 \equiv 25 \equiv 8 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (5, 8)$;
- $x = 6$; $y \equiv 5 \cdot 6 \equiv 30 \equiv 13 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (6, 13)$;
- $x = 7$; $y \equiv 5 \cdot 7 \equiv 35 \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (7, 1)$;
- $x = 8$; $y \equiv 5 \cdot 8 \equiv 40 \equiv 6 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (8, 6)$;
- $x = 9$; $y \equiv 5 \cdot 9 \equiv 45 \equiv 11 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (9, 11)$;
- $x = 10$; $y \equiv 5 \cdot 10 \equiv 50 \equiv 16 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (10, 16)$;
- $x = 11$; $y \equiv 5 \cdot 11 \equiv 55 \equiv 4 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (11, 4)$;
- $x = 12$; $y \equiv 5 \cdot 12 \equiv 60 \equiv 9 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (12, 9)$;
- $x = 13$; $y \equiv 5 \cdot 13 \equiv 65 \equiv 14 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (13, 14)$;
- $x = 14$; $y \equiv 5 \cdot 14 \equiv 70 \equiv 2 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (14, 2)$;
- $x = 15$; $y \equiv 5 \cdot 15 \equiv 75 \equiv 7 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (15, 7)$;
- $x = 16$; $y \equiv 5 \cdot 16 \equiv 80 \equiv 12 \pmod{17} \Rightarrow (x, y) = (16, 12)$.

Agora, basta conectar todos os pares $(x, y) = \big(x, 5x \pmod{17}\big)$ *ao longo da circunferência para formar o design de resíduo.*

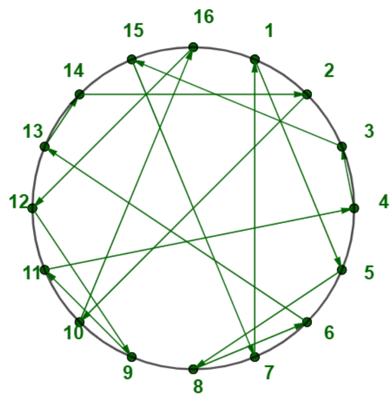


Figura 3: Design de Resíduos $(17, 5)$
Fonte: Elaborada pelo autor

2.5.3 Construção de Mandalas

Explique que aqui não é necessário que $\text{mdc}(m, n) = 1$, o que pode gerar padrões com repetições e múltiplas conexões e, que devemos escolher $m \geq 2$.

Metodologia sugerida:

1. Fixar m e escolher qualquer n positivo.
2. Dividir a circunferência impressa em m partes iguais, numerando de 0 até $m - 1$.
3. Preencher as tabelas com os pares (x, y), onde:

$$y \equiv n \cdot x \pmod{m}$$

4. Conectar os pontos correspondentes para visualizar o padrão.

Exemplo 2.5. *Para construir uma mandala* $(12, 3)$*, seguimos os passos indicados e obtemos:*

1. *Fixamos* $m = 12$*, ou seja, estamos trabalhando no módulo 12.*
2. *Escolhemos* $n = 3$*. Note que* $\text{mdc}(12, 3) \neq 1$*, mas ainda assim é possível construir a mandala.*
3. *Dividimos a circunferência em 12 partes iguais, marcando os pontos de* 0 *até* 11*.*
4. *Aplicamos a congruência* $y \equiv 3x \pmod{12}$*, para cada* $x = 0, 1, \ldots, 11$*.*

Calculamos os pares (x, y)*:*

- $x = 1$; $y \equiv 3 \cdot 1 \equiv 3 \pmod{12} \Rightarrow (x, y) = (1, 3)$;
- $x = 2$; $y \equiv 3 \cdot 2 \equiv 6 \pmod{12} \Rightarrow (x, y) = (2, 6)$;
- $x = 3$; $y \equiv 3 \cdot 3 \equiv 9 \pmod{12} \Rightarrow (x, y) = (3, 9)$;
- $x = 4$; $y \equiv 3 \cdot 4 \equiv 12 \equiv 0 \pmod{12} \Rightarrow (x, y) = (4, 0)$;
- $x = 5$; $y \equiv 3 \cdot 5 \equiv 15 \equiv 3 \pmod{12} \Rightarrow (x, y) = (5, 3)$;
- $x = 6$; $y \equiv 3 \cdot 6 \equiv 18 \equiv 6 \pmod{12} \Rightarrow (x, y) = (6, 6)$;
- $x = 7$; $y \equiv 3 \cdot 7 \equiv 21 \equiv 9 \pmod{12} \Rightarrow (x, y) = (7, 9)$;
- $x = 8$; $y \equiv 3 \cdot 8 \equiv 24 \equiv 0 \pmod{12} \Rightarrow (x, y) = (8, 0)$;
- $x = 9$; $y \equiv 3 \cdot 9 \equiv 27 \equiv 3 \pmod{12} \Rightarrow (x, y) = (9, 3)$;
- $x = 10$; $y \equiv 3 \cdot 10 \equiv 30 \equiv 6 \pmod{12} \Rightarrow (x, y) = (10, 6)$;
- $x = 11$; $y \equiv 3 \cdot 11 \equiv 33 \equiv 9 \pmod{12} \Rightarrow (x, y) = (11, 9)$.

Agora, conecte todos os pares $(x, y) = \big(x, 3x \pmod{12}\big)$ *na circunferência para formar a mandala modular.*

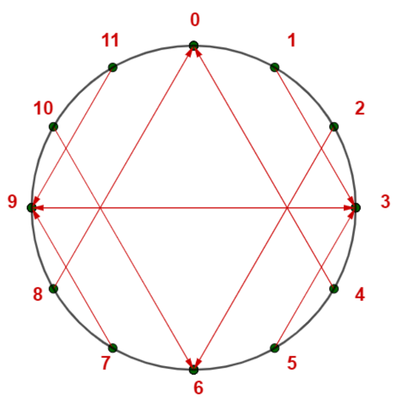


Figura 4: Mandala $(12, 3)$
Fonte: Elaborada pelo autor

No caso das mandalas, os desenhos resultantes tornam-se cada vez mais atrativos e complexos à medida que aumentamos os valores de m e n. Essa variedade de padrões é um excelente recurso para despertar o interesse dos alunos pela matemática por meio da arte e da simetria.

Para facilitar a visualização desses padrões, sugerimos que o professor utilize os links indicados na Tabela 2, que direcionam para mandalas já construídas no GeoGebra.

Para encerrar a atividade, o professor pode convidar os alunos a compartilharem suas construções e observações. É importante destacar que, ao longo da proposta, os estudantes exploraram conceitos de aritmética modular, construíram diferentes tipos de figuras como polígonos estrelados, designs de resíduos e mandalas e perceberam como a matemática pode estar presente em padrões visuais belos e surpreendentes.

3 Material didático

3.1 Material didático e folhas com respostas das atividades

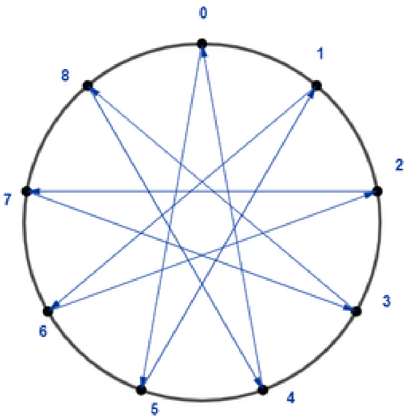
Material didático elaborado para a aplicação da proposta em sala de aula, contemplando os recursos necessários a cada etapa da atividade. Nele encontram-se tanto as instruções destinadas aos alunos quanto as folhas de respostas correspondentes, de modo a fornecer suporte completo para a reprodução e o acompanhamento da prática por professores, monitores ou demais interessados.

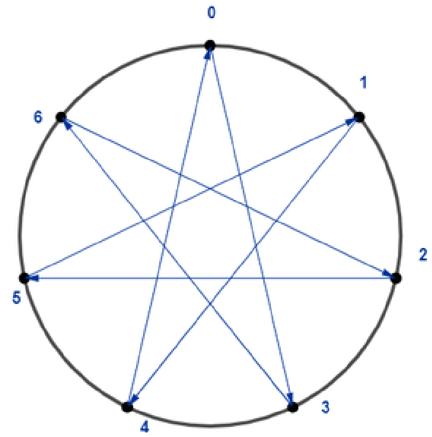
1ºETAPA

FIGURAS GEOMÉTRICAS

1

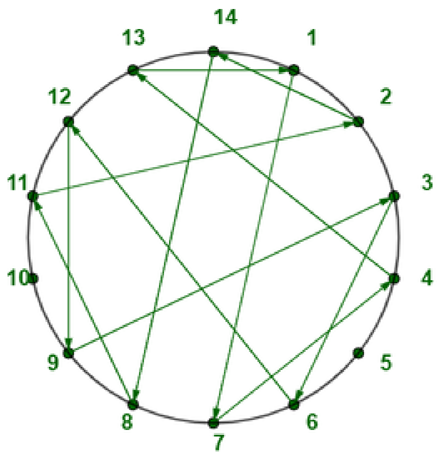
POLÍGONO ESTRELADOS

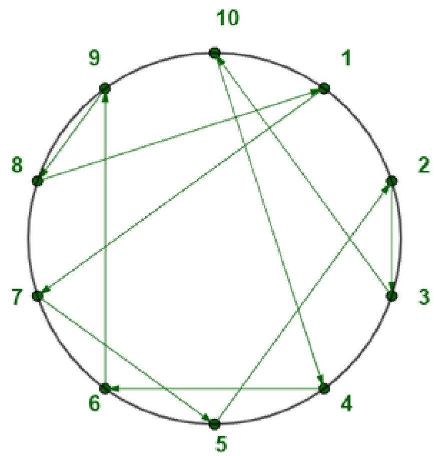




2

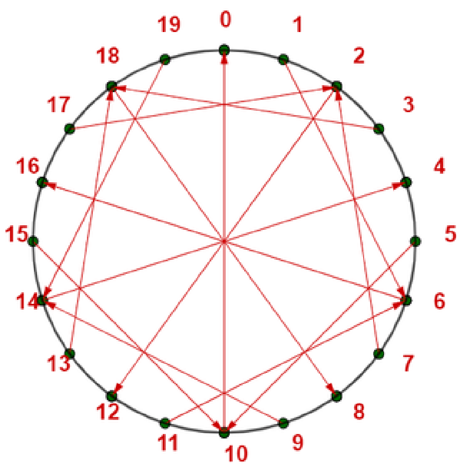
DESIGN DE RESÍDUOS

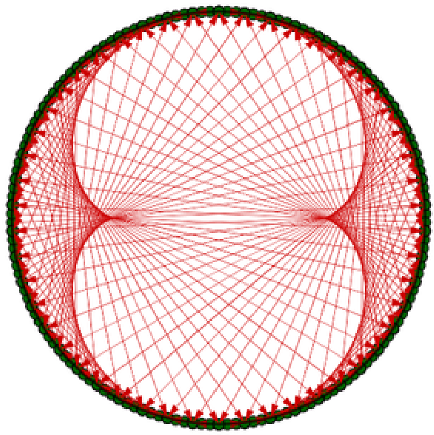




3

MANDALAS





2ºETAPA

DIVISÃO NÃO EXATA

1

DIVISÃO NÃO EXATA

$$D = q \cdot d + r \text{ com } 0 \leq r < d$$

- ***D*** é o dividendo e ***d*** é o divisor;
- ***q*** é o quociente da divisão de ***D*** por ***d***;
- ***r*** é o resto dessa divisão.

2

EXEMPLO

Dividindo 38 por 7, temos:

$$\begin{array}{r|l} 38 & 7 \\ \hline 3 & 5 \end{array}$$

ou seja, 38 = 5.7+3

Portanto, o quociente é 5 e o resto é 3.

ANOTAÇÕES

1

EXERCÍCIO

Preencha a tabela abaixo, com os restos da divisão dos números naturais de 0 a 15 pelos divisores indicados:

Números Naturais	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Resto da divisão por 2	0	1	0	1	0	1	0	1								
Resto da divisão por 3	0	1	2	0	1	2	0									
Resto da divisão por 4	0	1	2	3												
Resto da divisão por 5																
Resto da divisão por 6																
Resto da divisão por 7																

2ºETAPA

DIVISÃO NÃO EXATA

2

EXERCÍCIO

O ano de 2025 começou em uma quarta-feira. Em que dia da semana cairá o último dia deste ano?

RASCUNHO

3ºETAPA

CONGRUÊNCIA

1

CONGRUÊNCIA

Dado um número inteiro positivo *m*, dizemos que dois números inteiros *a* e *b* são ***congruentes módulo*** *m* quando *m* divide a diferença *a* − *b*.

2

NOTAÇÃO

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid (a-b)$$

Equivale a dizer que $(a - b) = m \cdot q$, para algum número inteiro q.

3

SÍMBOLOS

- $\equiv$ significa "é congruente a";
- $\not\equiv$ significa "não é congruente a";
- ($mod\ m$) indica que estamos considerando divisões por m;
- $\mid$ significa "divide";
- $\nmid$ significa "não divide".

4

OBSERVE QUE:

- $a \equiv a \pmod{m}$.
- Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $b \equiv a \pmod{m}$.
- Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, então $a \equiv c \pmod{m}$.

3ºETAPA

CONGRUÊNCIA

1 — EXEMPLO

Verifique as congruências abaixo:

a) $14 \equiv 8 \ (mod\ 3) \Leftrightarrow 3|(14-8) \Leftrightarrow 3|6$

(Veja que, ao dividir 14 por 3, o resto é 2, e que, ao dividir 8 por 3, o resto também é 2).

b) $45 \equiv 24 \ (mod\ 7) \Leftrightarrow 7|(45-24) \Leftrightarrow 7|21$

(Veja que, ao dividir 45 por 7, o resto é 3, e que, ao dividir 24 por 7, o resto também é 3).

c) $23 \equiv 9 \ (mod\ 4) \Leftrightarrow 4|(23-9) \Leftrightarrow 4\nmid 14$

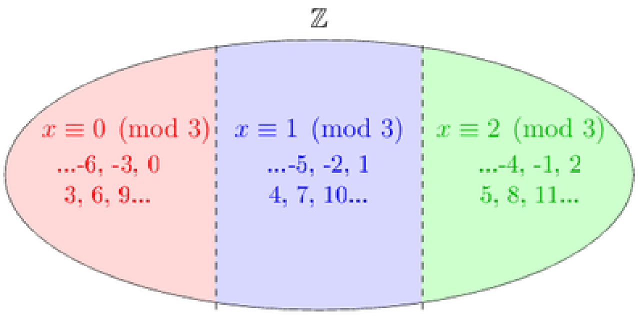
(Veja que, ao dividir 23 por 4, o resto é 3, e que, ao dividir 9 por 4, o resto é 1).

Portanto, $23 \not\equiv 9 \ (mod\ 4)$.

ANOTAÇÕES

2 — EXEMPLO

Ao dividirmos um número x por 3, ele pode deixar como resto apenas 0, 1 ou 2.



ANOTAÇÕES

3 — EXERCÍCIO

PARTIÇÃO

Verifique as congruências abaixo:

a) $19 \equiv 7 \ (mod\ 6)$

b) $34 \equiv 11 \ (mod\ 5)$

c) $52 \equiv 16 \ (mod\ 9)$

RASCUNHO

4°ETAPA
CONSTRUÇÃO DE FIGURAS COM CONGRUÊNCIAS

1

POLÍGONO ESTRELADO

1°. Explique aos alunos que é possível formar estrelas ligando pontos igualmente espaçados em uma circunferência.
2°. Introduza as letras n (quantidade de pontos/pontas) e k (salto entre os vértices).
3°. Mostre que a construção só é válida quando:

- $1 < k < n-1$
- $\text{mdc}(n,k)=1$

4°. Peça que os alunos utilizem as circunferências impressas, dividam em n partes iguais e numerem os pontos de 0 a n−1.
5°. Oriente-os a preencher as tabelas com os valores:

$$x=t.k,\ \ y \equiv x+k \pmod{n},\ t=0,1,\dots,n-1$$

6°. Construção da estrela: Os alunos devem conectar os pontos da circunferência seguindo as conexões x→y, lembrando que t indica os vértices numerados.

ANOTAÇÕES

2

DESIGN DE RESÍDUOS

1°. Explique aos alunos que devem fixar o módulo m.
2°. Escolher n tal que $1 \leq n < m$ e $\text{mdc}(m,n) = 1$.
3°. Usar as folhas de atividades para dividir a circunferência em m − 1 partes iguais e numerar os pontos de 1 a m−1.
4°. Preencher as tabelas com os pares:

$$(x, y),\ y \equiv n \cdot x \pmod{m}$$

5°. Conectar os pontos conforme indicado.

3

MANDALAS

1°. Fixar m e escolher qualquer n positivo.
2°. Dividir a circunferência impressa em m partes iguais, numerando de 0 até m − 1.
3°. Preencher as tabelas com os pares (x,y), onde:

$$y \equiv n \cdot x \pmod{m}$$

4°.Conectar os pontos correspondentes para visualizar o padrão.

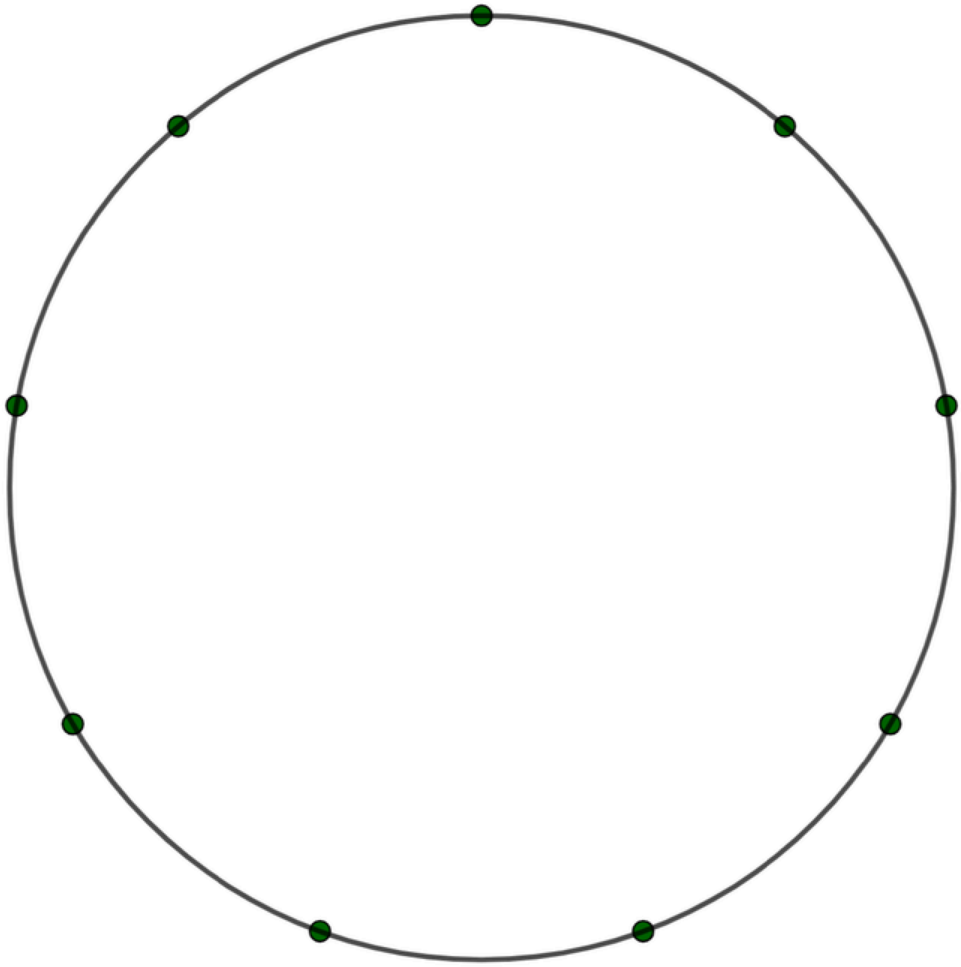
4°ETAPA

CONSTRUÇÃO DE FIGURAS COM CONGRUÊNCIAS

4

EXERCÍCIO

Construir um polígono estrelado de n = 9 e k = 5.



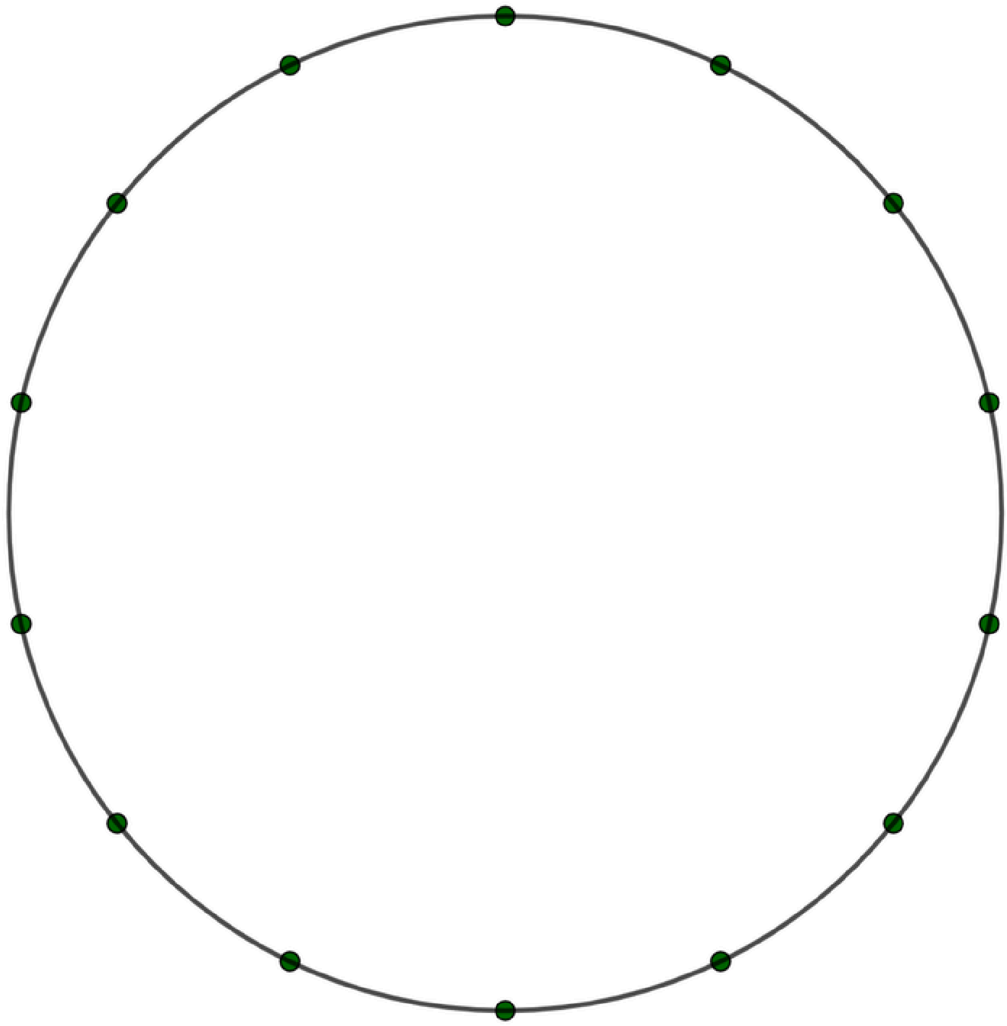
4°ETAPA

CONSTRUÇÃO DE FIGURAS COM CONGRUÊNCIAS

5

EXERCÍCIO

Construir um design de resíduos de m = 15 e n = 7



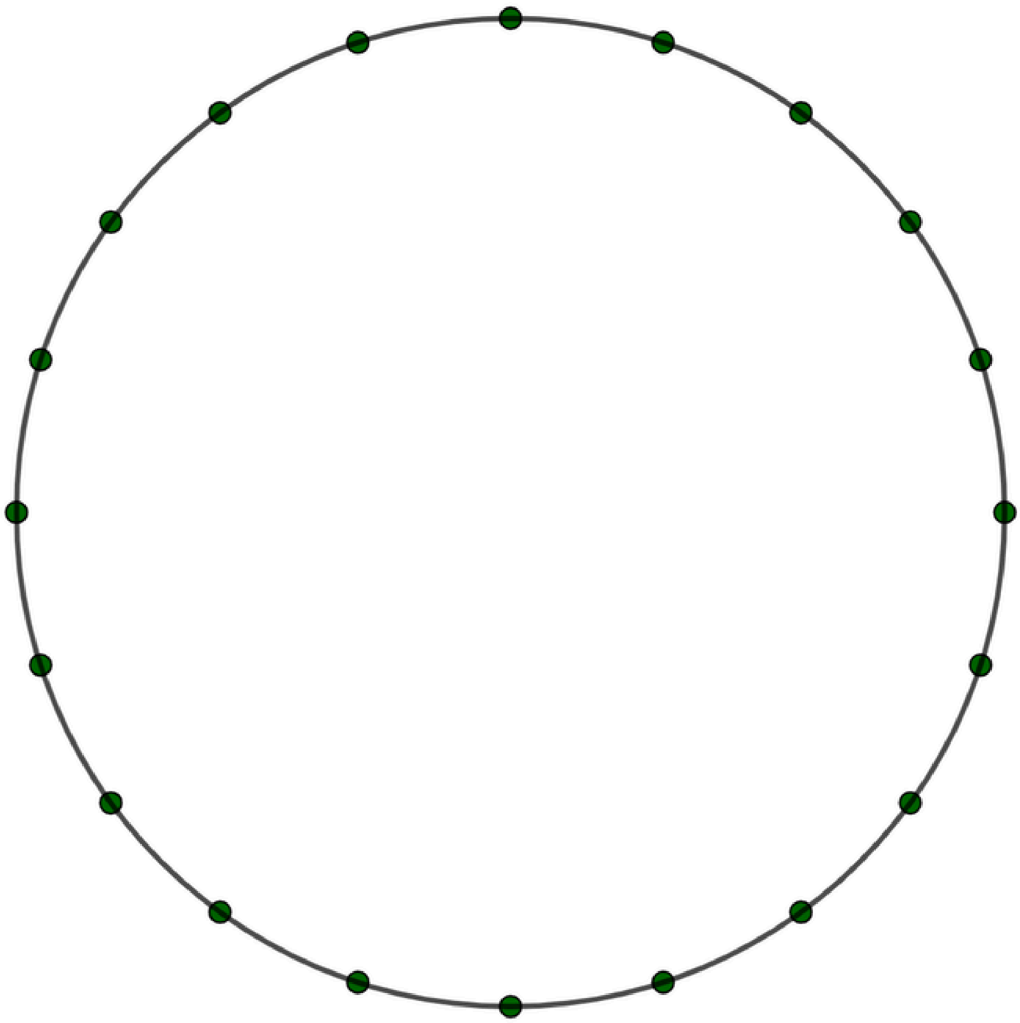
4°ETAPA

CONSTRUÇÃO DE FIGURAS COM CONGRUÊNCIAS

6

EXERCÍCIO

Construir uma mandala modular (20,6).



SOLUÇÕES

1

Preencha a tabela abaixo: com os restos da divisão dos números naturais de 0 a 15 pelos divisores indicados:

Números Naturais	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Resto da divisão por 2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
Resto da divisão por 3	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
Resto da divisão por 4	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
Resto da divisão por 5	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4	0
Resto da divisão por 6	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3
Resto da divisão por 7	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1

2

O ano de 2025 começou em uma quarta-feira. Em que dia da semana cairá o último dia deste ano?

Dividindo 365 por 7, obtemos quociente 52 e resto 1, ou seja:

$$365 = 52.7+1$$

Isso significa que o dia 1° de Janeiro de 2026 será um dia após a quarta-feira — ou seja, uma quinta-feira. Logo, o dia 31 de dezembro de 2025 cairá em uma quarta-feira.

Observação: Para anos não bissextos (com 365 dias), o ano começa e termina no mesmo dia da semana. Já nos anos bissextos (366 dias), o último dia do ano cai dois dias após o dia da semana inicial, pois:

$$366 = 52.7+2$$

dezembro de 2025

D	S	T	Q	Q	S	S
30	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	1	2	3

SOLUÇÕES

3

Verifique as congruências abaixo:

a) $19 \equiv 7 \ (mod\ 6) \Leftrightarrow 6 \mid (19-7) \Leftrightarrow 6 \mid 12$
(Ao dividir 19 por 6, o resto é 1, e que, ao dividir 7 por 6, o resto também é 1).

b) $34 \equiv 11 \ (mod\ 5) \Leftrightarrow 5 \mid (34-11) \Leftrightarrow 5 \nmid 23$
(Ao dividir 34 por 5, o resto é 4, e que, ao dividir 11 por 4, o resto é 3).
Portanto, $34 \not\equiv 11 \ (mod\ 5)$.

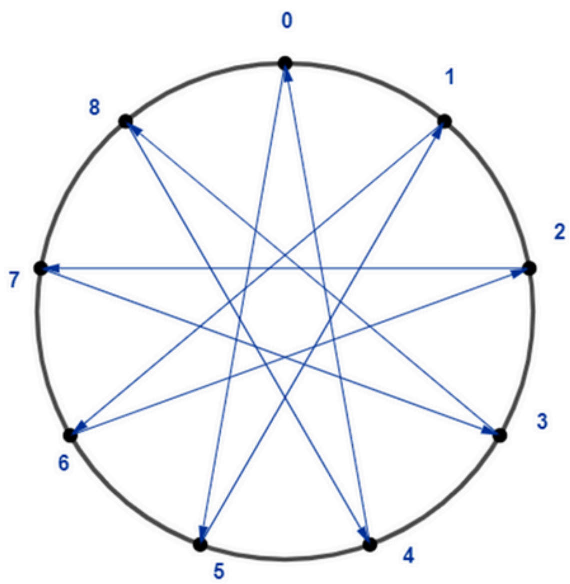
c) $52 \equiv 16 \ (mod\ 9) \Leftrightarrow 9 \mid (52-16) \Rightarrow 9 \mid 36$
(Ao dividir 52 por 9, o resto é 7, e que, ao dividir 16 por 9, o resto também é 7).

4

Construir um polígono estrelado de n = 9 e k = 5.

- $x = 0 \cdot 5 = 0 \Rightarrow y \equiv 0 + 5 \equiv 5 \pmod 9$
- $x = 1 \cdot 5 = 5 \Rightarrow y \equiv 5 + 5 \equiv 10 \equiv 1 \pmod 9$
- $x = 2 \cdot 5 = 10 \Rightarrow y \equiv 10 + 5 \equiv 15 \equiv 6 \pmod 9$
- $x = 3 \cdot 5 = 15 \Rightarrow y \equiv 15 + 5 \equiv 20 \equiv 2 \pmod 9$
- $x = 4 \cdot 5 = 20 \Rightarrow y \equiv 20 + 5 \equiv 25 \equiv 7 \pmod 9$
- $x = 5 \cdot 5 = 25 \Rightarrow y \equiv 25 + 5 \equiv 30 \equiv 3 \pmod 9$
- $x = 6 \cdot 5 = 30 \Rightarrow y \equiv 30 + 5 \equiv 35 \equiv 8 \pmod 9$
- $x = 7 \cdot 5 = 35 \Rightarrow y \equiv 35 + 5 \equiv 40 \equiv 4 \pmod 9$
- $x = 8 \cdot 5 = 40 \Rightarrow y \equiv 40 + 5 \equiv 45 \equiv 0 \pmod 9$

Polígono Estrelado (9, 5)



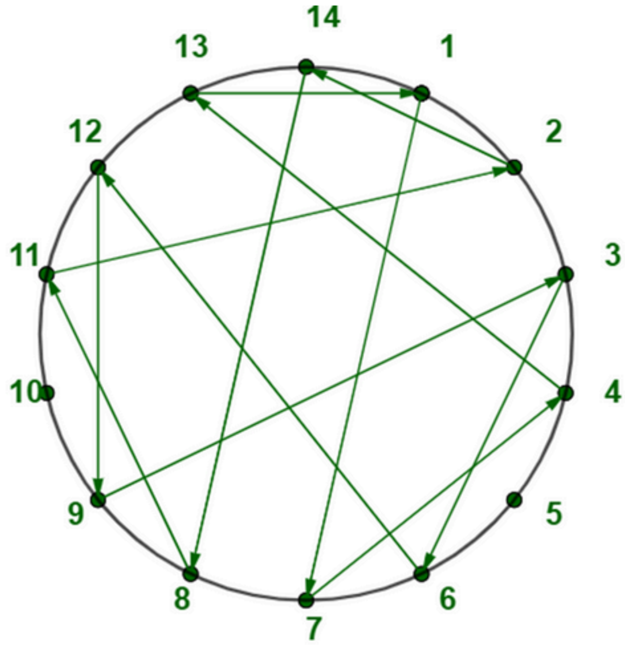
SOLUÇÕES

5

Construir um design de resíduos de m = 15 e n = 7.

- $x = 1$: $y \equiv 7 \cdot 1 = 7 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (1, 7)$;
- $x = 2$: $y \equiv 7 \cdot 2 = 14 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (2, 14)$;
- $x = 3$: $y \equiv 7 \cdot 3 = 21 \equiv 6 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (3, 6)$;
- $x = 4$: $y \equiv 7 \cdot 4 = 28 \equiv 13 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (4, 13)$;
- $x = 5$: $y \equiv 7 \cdot 5 = 35 \equiv 5 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (5, 5)$;
- $x = 6$: $y \equiv 7 \cdot 6 = 42 \equiv 12 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (6, 12)$;
- $x = 7$: $y \equiv 7 \cdot 7 = 49 \equiv 4 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (7, 4)$;
- $x = 8$: $y \equiv 7 \cdot 8 = 56 \equiv 11 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (8, 11)$;
- $x = 9$: $y \equiv 7 \cdot 9 = 63 \equiv 3 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (9, 3)$;
- $x = 10$: $y \equiv 7 \cdot 10 = 70 \equiv 10 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (10, 10)$;
- $x = 11$: $y \equiv 7 \cdot 11 = 77 \equiv 2 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (11, 2)$;
- $x = 12$: $y \equiv 7 \cdot 12 = 84 \equiv 9 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (12, 9)$;
- $x = 13$: $y \equiv 7 \cdot 13 = 91 \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (13, 1)$;
- $x = 14$: $y \equiv 7 \cdot 14 = 98 \equiv 8 \pmod{15} \Rightarrow (x, y) = (14, 8)$.

Design de Resíduos (15, 7)

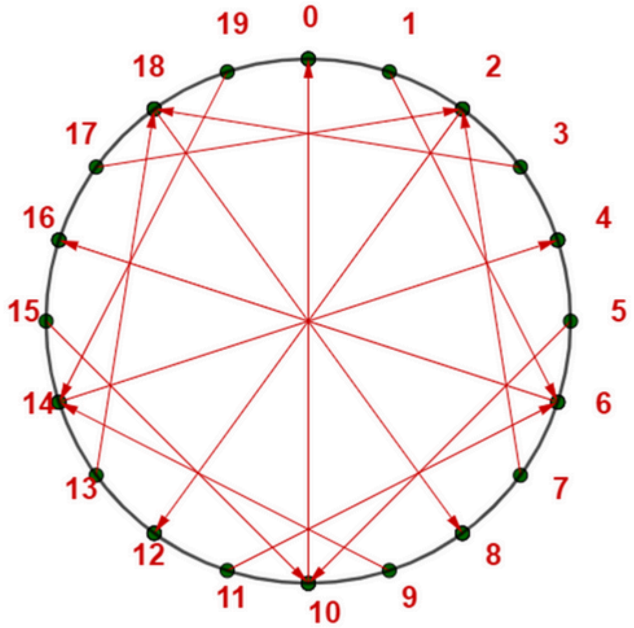


6

Construir uma mandala modular (20, 6).

- $x = 1; y \equiv 6 \cdot 1 \equiv 6\ (mod\ 20) \Rightarrow (1, 6)$
- $x = 2; y \equiv 6 \cdot 2 \equiv 12\ (mod\ 20) \Rightarrow (2, 12)$
- $x = 3; y \equiv 6 \cdot 3 \equiv 18\ (mod\ 20) \Rightarrow (3, 18)$
- $x = 4; y \equiv 6 \cdot 4 \equiv 4\ (mod\ 20) \Rightarrow (4, 4)$
- $x = 5; y \equiv 6 \cdot 5 \equiv 10\ (mod\ 20) \Rightarrow (5, 10)$
- $x = 6; y \equiv 6 \cdot 6 \equiv 16\ (mod\ 20) \Rightarrow (6, 16)$
- $x = 7; y \equiv 6 \cdot 7 \equiv 2\ (mod\ 20) \Rightarrow (7, 2)$
- $x = 8; y \equiv 6 \cdot 8 \equiv 8\ (mod\ 20) \Rightarrow (8, 8)$
- $x = 9; y \equiv 6 \cdot 9 \equiv 14\ (mod\ 20) \Rightarrow (9, 14)$
- $x = 10; y \equiv 6 \cdot 10 \equiv 0\ (mod\ 20) \Rightarrow (10, 0)$
- $x = 11; y \equiv 6 \cdot 11 \equiv 6\ (mod\ 20) \Rightarrow (11, 6)$
- $x = 12; y \equiv 6 \cdot 12 \equiv 12\ (mod\ 20) \Rightarrow (12, 12)$
- $x = 13; y \equiv 6 \cdot 13 \equiv 18\ (mod\ 20) \Rightarrow (13, 18)$
- $x = 14; y \equiv 6 \cdot 14 \equiv 4\ (mod\ 20) \Rightarrow (14, 4)$
- $x = 15; y \equiv 6 \cdot 15 \equiv 10\ (mod\ 20) \Rightarrow (15, 10)$
- $x = 16; y \equiv 6 \cdot 16 \equiv 16\ (mod\ 20) \Rightarrow (16, 16)$
- $x = 17; y \equiv 6 \cdot 17 \equiv 2\ (mod\ 20) \Rightarrow (17, 2)$
- $x = 18; y \equiv 6 \cdot 18 \equiv 8\ (mod\ 20) \Rightarrow (18, 8)$
- $x = 19; y \equiv 6 \cdot 19 \equiv 14\ (mod\ 20) \Rightarrow (19, 14)$

Mandala (20, 6)



3.2 Folhas de atividades para os alunos

Folhas de atividades destinadas aos alunos, contendo os exercícios e instruções necessárias para o desenvolvimento das tarefas propostas, bem como para a realização das construções previstas na atividade.

ATIVIDADES

1

EXERCÍCIO

Preencha a tabela abaixo, com os restos da divisão dos números naturais de 0 a 15 pelos divisores indicados:

Números Naturais	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Resto da divisão por **2**	0	1	0	1	0	1	0	1								
Resto da divisão por **3**	0	1	2	0	1	2	0									
Resto da divisão por **4**	0	1	2	3												
Resto da divisão por **5**																
Resto da divisão por **6**																
Resto da divisão por **7**																

ATIVIDADES

2

EXERCÍCIO

O ano de 2025 começou em uma quarta-feira. Em que dia da semana cairá o último dia deste ano?

RASCUNHO

ATIVIDADES

3

EXERCÍCIO

Verifique as congruências abaixo:

a) $19 \equiv 7 \ (mod\ 6)$

b) $34 \equiv 11 \ (mod\ 5)$

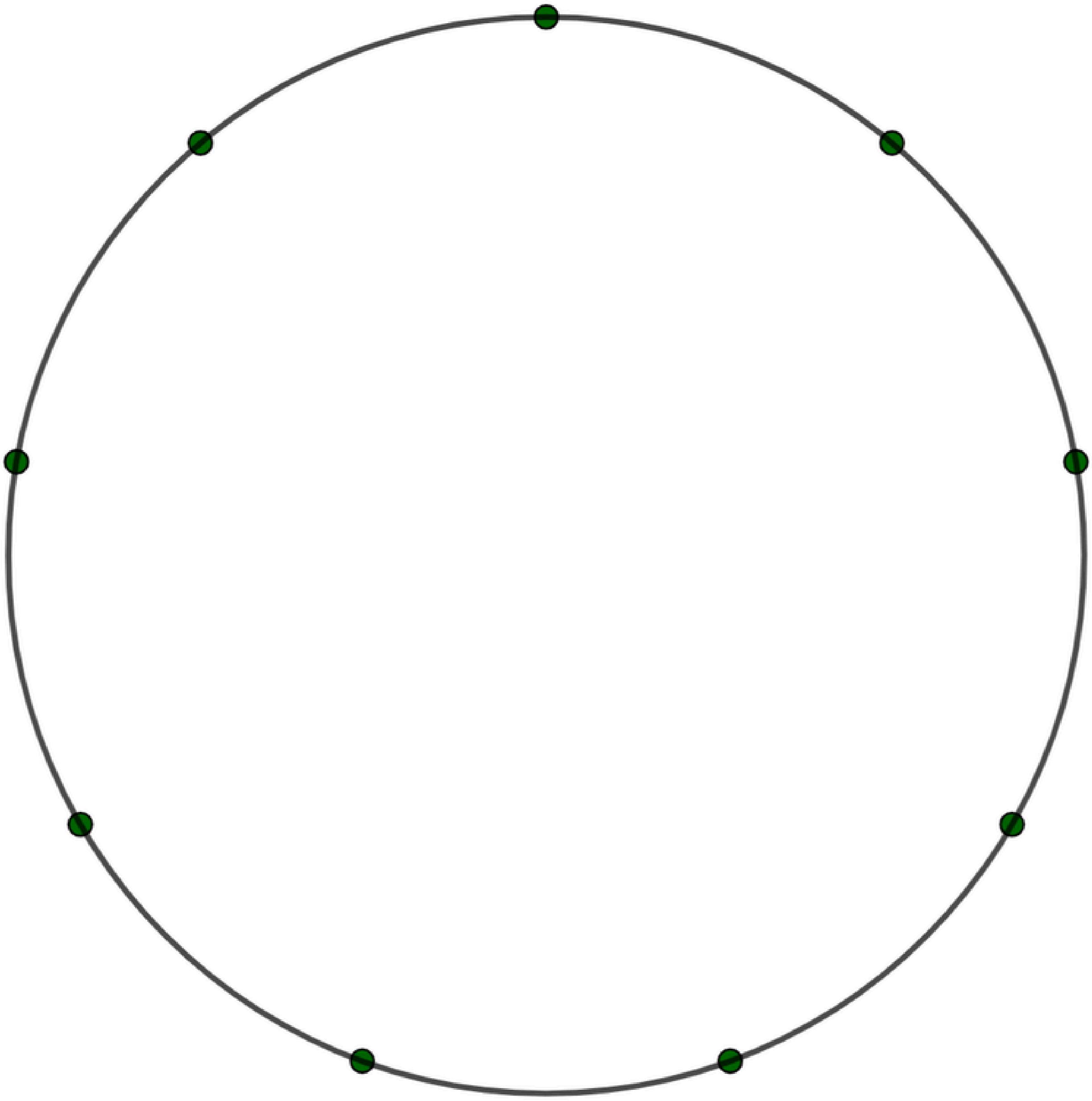
c) $52 \equiv 16 \ (mod\ 9)$

ATIVIDADES

4

EXERCÍCIO

Construir um polígono estrelado de n = 9 e k = 5.

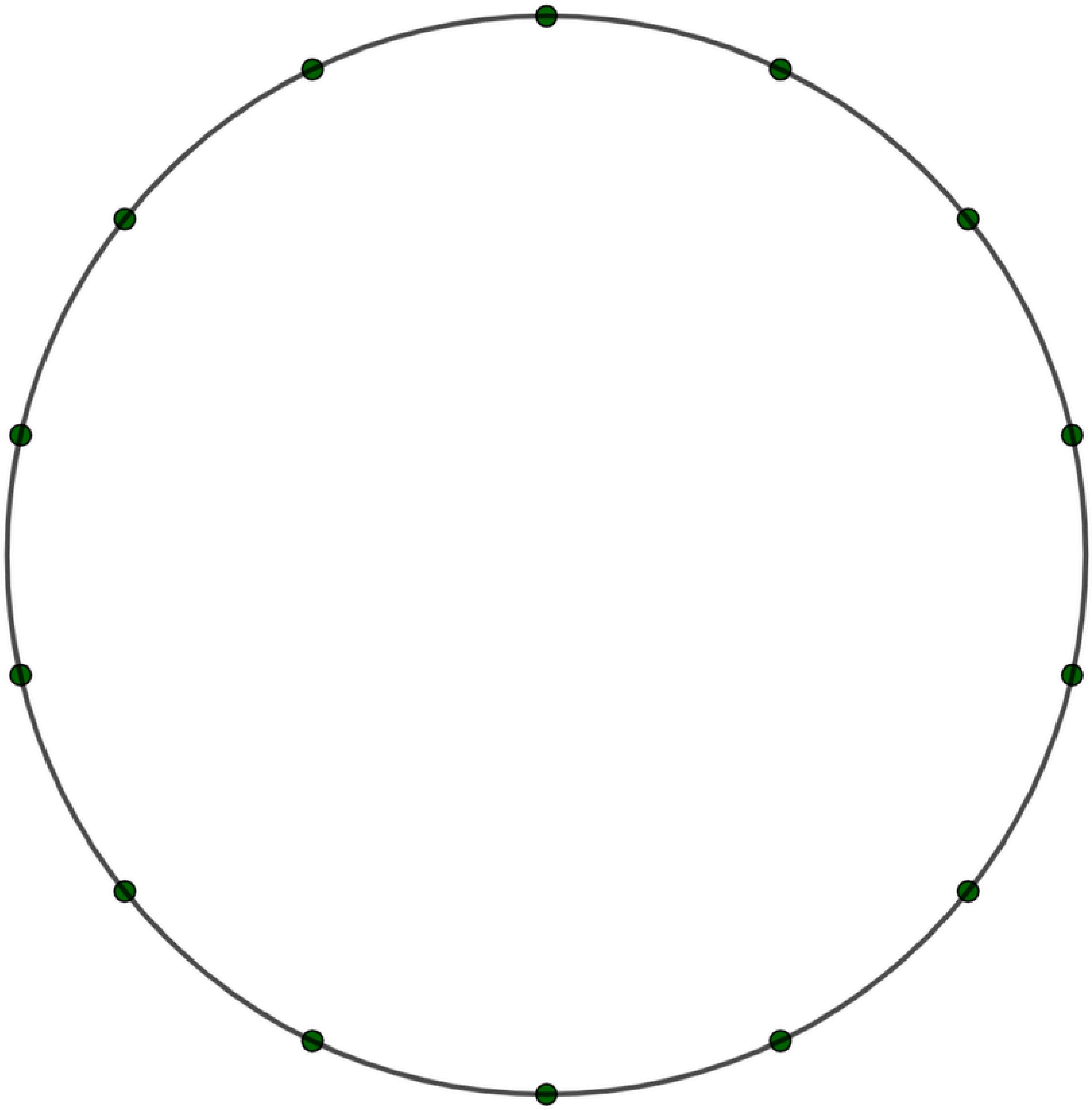


ATIVIDADES

5

EXERCÍCIO

Construir um design de resíduos de m = 15 e n = 7

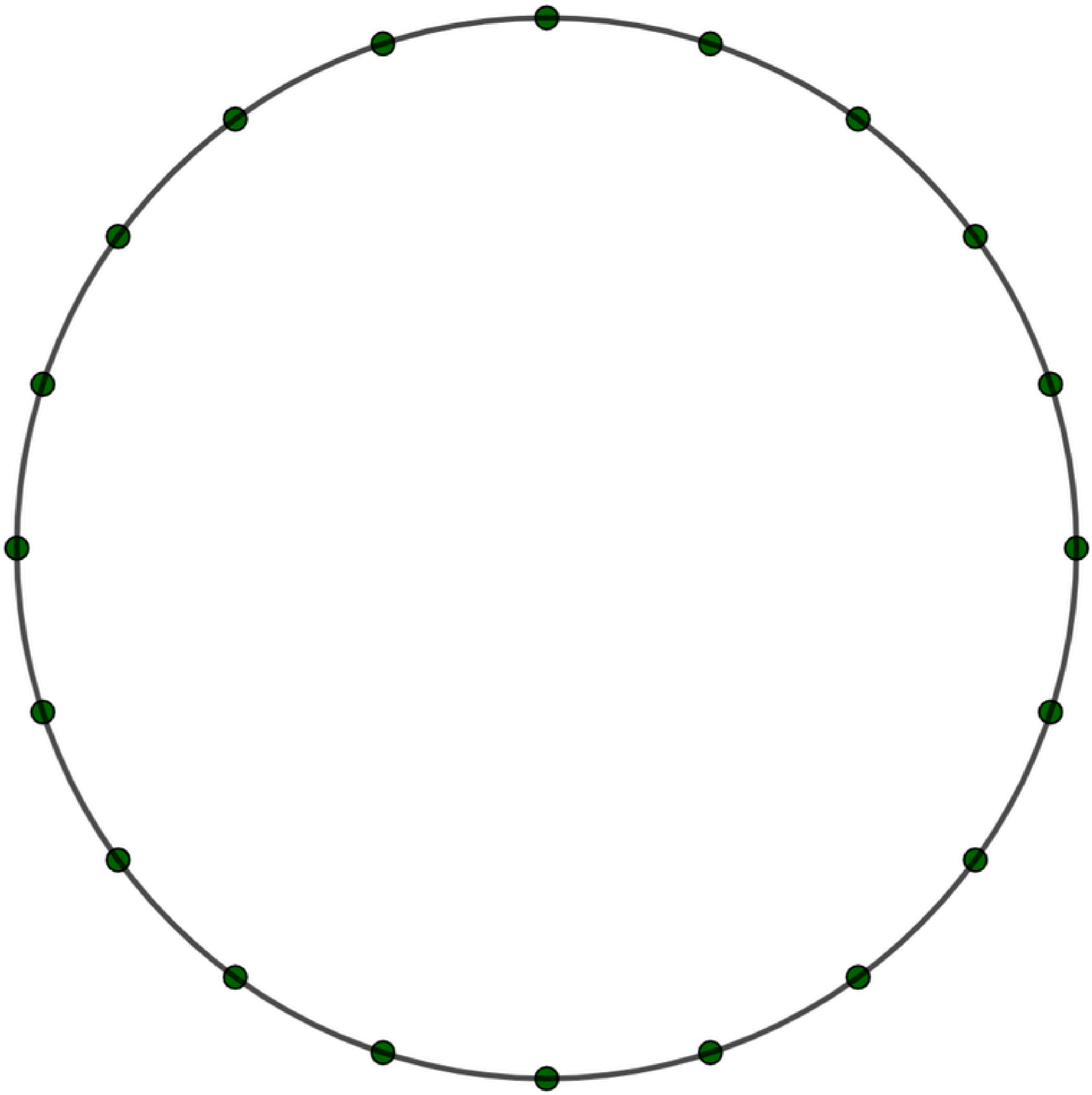


ATIVIDADES

6

EXERCÍCIO

Construir uma mandala modular (20,6).



Referências

AYRES, J. F. *Álgebra Moderna*. México: McGraw-Hill, 2003.

D'AMORE, B. *Didática da Matemática*. São Paulo: Ática, 2007.

DOMINGUES, H. *Álgebra Moderna*. São Paulo: Saraiva, 2018.

FREIRE, B. T. V. *Notas de Aula Teoria dos Números*. Rio Grande do Norte: Ciência Moderna, 2009.

HEFEZ, A. *Elementos de aritmética*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de matemática, 2005.

MCCOOEY, D. *Poliedros visuais*: Kepler-poinsot polyhedra. [S.l.]: https://dmccooey.com/polyhedra/KeplerPoinsot.html, Acesso em: 23 jul. 2025, 2015.

OBMEP. *Tópicos Adicionais*: Aritmética modular. Rio de Janeiro: https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material/5oeoy5b8w0gso.pdf, Acesso: 14/07/2025, s.d.

ROSEN, K. H. *Matemática discreta e suas aplicações*. 6. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2010. 982 p.

WALL, H. S. *Number Theory: Classical and Modern*. New York: Springer, 2014.