INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO – CAMPUS SÃO PAULO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

JÉSSICA MARIA MUSSI DE SOUZA

A NOÇÃO DE INFINITO: UMA EXPERIÊNCIA COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

SÃO PAULO - SP
2024

INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
São Paulo

PROFMAT
Mestrado Profissional
em Matemática

JÉSSICA MARIA MUSSI DE SOUZA

A NOÇÃO DE INFINITO: UMA EXPERIÊNCIA COM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO

Sequência Didática organizada e aplicada no desenvolvimento da Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional Stricto Sensu em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca

SÃO PAULO - SP
2024

RESUMO

O presente trabalho trata do desenvolvimento de uma sequência didática sobre cardinalidade de conjuntos infinitos, baseada na Teoria das Situações Didáticas, voltada para a Educação Básica. Um dos principais objetivos é investigar a utilização dessa sequência e destacar as potencialidades e os desafios em uma escola da rede pública do estado de São Paulo. Para tanto, foram utilizados procedimentos metodológicos, em especial, elementos da pesquisa participante de cunho qualitativo, com quinze alunos do Ensino Médio de uma escola estadual. Os principais resultados indicam que mesmo com a dificuldade nas noções de inclusão e cardinalidade dos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais, a abordagem proporcionou um interesse maior por parte dos alunos nesses conteúdos, além de favorecer a relação entre professor e aluno e entre os próprios alunos, criando um ambiente propício, interativo e colaborativo, no qual os alunos desenvolveram autonomia, bem como superaram algumas dificuldades.

Palavras-chave: Teoria da Situações Didáticas; Conjuntos Infinitos; Cardinalidade; Educação Básica; Sequência de Atividades.

ABSTRACT

The present academic work deals with the development of a didactic sequence on the cardinality of infinite sets, based on the Theory of Didactic Situations, geared towards Basic Education. One of the main objectives is to investigate the use of this sequence and highlight the potentialialities and challenges, in a public school in the state of São Paulo. To this end, methodological procedures were used, in particular, elements of qualitative participant research, with fifteen high school students from a state school. The main results indicated that despite difficulties in understanding the inclusion and cardinality of natural, integer, rational, and real numbers, the approach increased students' interest in these concepts, in addition to improving the relationship between teacher and student and among the students themselves, creating a conducive, interactive and collaborative environment, in which students developed autonomy, as well as overcoming some difficulties.

Keywords: Theory of Didactic Situations; Infinite Sets; Cardinality; Basic Education; Activity Sequence.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Dada a dificuldade histórica dos alunos sobre o tema **infinito matemático**, relacionada à epistemologia das noções matemáticas, em específico as noções de inclusão e cardinalidade de conjuntos infinitos, Gonçalves (2023) elaborou uma sequência de atividades com o intuito de provocar e despertar os conhecimentos prévios dos estudantes e suas curiosidades sobre esses assuntos, corroborando a compreensão e construção de novos saberes. As atividades, no entanto, não foram aplicadas em sala de aula.

Com o objetivo de aplicar tais atividades, a partir de uma abordagem significativa que, de acordo com Moreira (1999), é um processo que relaciona uma nova informação com uma estrutura específica do conhecimento do estudante, buscando aproveitar todos os conhecimentos já adquiridos e a partir desses construir novas aprendizagens, realizamos uma investigação empírica, proporcionando momentos de construção de um conhecimento novo apoiado em conexões com o conhecimentos prévios. O intuito é contribuir com a aprendizagem dos alunos durante as aulas de matemática, principalmente em relação à noções que envolvem o conceito de infinito matemático.

De acordo com as algumas pesquisas, como Siqueira e Lorin (2020) e (2021) e Lorin e Batista (2023), desenvolvidas no âmbito da Educação Matemática, a aprendizagem do conceito de "infinito" envolve a necessidade de superação de obstáculos epistemológicos. Isso, agregado a uma possível falta de motivação no estudo de noções matemáticas, bem como falta de dedicação e empenho, podem gerar obstáculos difíceis de serem superados no aprendizado de noções que envolvem o conceito de infinito, como os conjuntos numéricos.

Por meio da história da matemática é possível vislumbrar as controvérsias que envolvem a evolução da noção de infinito. Durante séculos, tudo que esbarrava na noção de "infinito" era desafiador, pois além da dificuldade em definir tal conceito, estava em jogo a disputa de questões filosóficas e religiosas, que apontavam paradoxos nas tentativas de validação da noção de infinito, como os paradoxos de Zenão[1].

No intuito de contribuir com estratégias que auxiliem na superação de

[1] Contradições ou oposições aparentes apresentadas por Zenão de Eleia, filósofo que procurava mostrar as constrovérsias presentes em diversas teses de sua época.

dificuldades relacionadas ao estudo introdutório da noção de infinito e procurando formas de tornar as aulas de matemática mais atrativas, propomos o uso de uma sequência didática que têm o potencial de desafiar e motivar os alunos.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> Resolver um problema pressupõe que o aluno: elabore um ou vários procedimentos de resolução (como, por exemplo, realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses); compare seus resultados com os de outros alunos e valide seus procedimentos. (...) Conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática. (Brasil, 1998, p. 41-42)

Buscamos, através da sequência didática, provocar o uso dos conhecimentos prévios dos estudantes. De maneira espontânea e, também, direcionada, eles poderão utilizar diferentes procedimentos que, por sua vez, serão a base para que haja a construção de uma nova aprendizagem, ou seja, “um processo de interação, por meio do qual conceitos mais relevantes e inclusivos interagem com o novo material, funcionando como ancoradouro, isto é, abrangendo e integrando este material e, ao mesmo tempo, modificando-se em função dessa ancoragem” (Moreira, 1999, p. 152).

A fim de buscarmos essa ancoragem nos conceitos já conhecidos e aprimorarmos os estudos em novos temas, a sequência didática baseia-se na “Teoria das Situações Didáticas”, de Brousseau (2008), na qual o aluno é protagonista do seu conhecimento, de modo que essas atividades motivem e desafiem os estudantes a desenvolvê-las, sendo o professor o mediador de todo esse processo.

Para tanto, foi proposto o desenvolvimento de atividades com a turma do 1º ano do Ensino Médio (2023), a qual cursava os 7º e 8º Anos em 2020 e 2021, período em que ocorreu a suspensão das aulas presenciais. Foi notória a não participação dos alunos nas atividades escolares remotas – fator que pode ter prejudicado a aprendizagem da classe em relação aos conteúdos – sendo pertinente, desse modo, o aprimoramento desses estudos. Segundo Gonçalves (2023), a sequência didática pode ser, inclusive, desenvolvida no Ensino Médio, já que pode contribuir no aprendizado dos estudantes.

Como objetivo geral, pretendemos trabalhar a motivação dos estudantes quanto aos estudos de noções matemáticas, por meio de questionamentos, debates, experimentações e argumentações, recorrendo a atividades que contrapõem o modelo de ensino que toma como base a apresentação de definições, exemplos e exercícios, respectivamente. Dentre os objetivos específicos, buscamos favorecer a construção de conhecimentos em relação à noção de infinito, mais especificamente, aperfeiçoar o entendimento e a interpretação dos estudantes sobre conjuntos infinitos e cardinalidade, além de investigar as potencialidades da sequência didática para promover a participação, a colaboração e a motivação dos alunos, assim como identificar possíveis desafios nesse percurso.

1.1 Organização da dissertação

Organizamos esse trabalho da seguinte forma: no capítulo 1, apresentamos uma breve revisão de literatura, que nos ajudará a entender melhor o panorama de investigações relacionadas à noção de infinito; no capítulo 2, discorremos sobre alguns elementos do referencial teórico, baseado na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (2008), assim como destacamos os obstáculos epistemológicos de Bachelard (2005 [1996]) e as considerações acerca da dissertação de mestrado de Gonçalves (2023), na qual se encontram as atividades que foram aqui adaptadas. Nesse mesmo capítulo serão descritos os procedimentos metodológicos e o método de pesquisa. No terceiro capítulo são apresentadas as atividades adaptadas, da forma como foram realizadas, tendo como base o trabalho do Gonçalves (2023); no quarto capítulo tecemos algumas considerações acerca das atividades, a partir das respostas obtidas dos alunos, inserindo as percepções e os desafios encontrados durante sua realização, baseando-nos nas ideias de Brousseau (2008). E, por fim, versamos sobre as considerações finais, no qual relacionamos a teoria com a prática, apresentando os principais desafios epotencialidades.

2 REFERENCIAL TEÓRICO E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

2.1 Referencial Teórico

Para Brousseau (2008), uma situação didática é aquela que leva em consideração todo o contexto social no qual o aluno está inserido, incluindo o professor e a comunidade escolar. Nessa teoria, o personagem principal é o aluno, que deve ter um papel ativo, enquanto o professor tem a responsabilidade de mediar e orientar os estudantes, fazendo questionamentos e organizando o trabalho desenvolvido, além de ser o encarregado por direcionar as respostas dos alunos e acrescentar algo, se necessário – sem desconsiderar o processo de aprendizagem, que se torna um fator principal para a construção e evolução do saber matemático.

Para entendermos melhor é preciso definir as situações didáticas e adidáticas, consoante Brousseau (2008). Para o autor, as situações didáticas são compostas por todo o contexto, que envolve professor, aluno e sistema educacional, com o intuito de ensinar um saber matemático ou, ainda, controlar a aprendizagem desse saber. Nesse sentido, as interações dos alunos dependem de todo o processo que precisa ser feito para o desenvolvimento dessa situação, sendo o jogo de interações do aluno e seu meio, que envolve o professor, definido como situação didática (Brousseau, 2008).

As situações adidáticas se referem à autonomia do aluno para o desenvolvimento do seu aprendizado. O próprio estudante, a partir de seus conhecimentos prévios, sua relação com o meio e todo o contexto que o cerca, responderá as atividades ou resolverá os problemas. Segundo Brousseau (2008):

> [...] O aluno sabe que o o problema foi escolhido para fazer com que ele adquira um conhecimento novo, mas precisa saber, também, que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode prescindir das razões didáticas para construí-lo. Não só pode como deve, pois não terá adquirido, de fato, esse saber até que o consiga usar fora do contexto de ensino e sem nenhuma indicação intencional. Tal situação denomina-se *adidática.* (Brousseau, 2008, p. 35, grifo do autor)

O autor ressalta que definir as etapas de devolução, ação, formulação, validação e institucionalização, que serão base para o referencial teórico e para a análise da aplicação da sequência didática, a partir das quais os alunos vão avançando no decorrer das atividades, se fazem necessárias para a efetiva realização de um projeto dialético e tendem a provocar o funcionamento do saber e dos conhecimentos, que serão transformados em saberes (Brousseau, 2008).

Cada situação pode ser considerada uma fase diferente, com funções específicas. Na **situação didática de devolução**, por exemplo, o professor propõe ao aluno parte da responsabilidade de uma situação de aprendizagem ou de um problema. Nesse caso, o interesse do aluno pelo ensino precisa acontecer, sendo necessário criar um ambiente em que o estudante se sinta confortável e motivado para buscar uma resposta para o problema estabelecido; o conhecimento não é transmitido diretamente do professor para o aluno, mas aos poucos o professor instiga os alunos para que eles busquem possíveis soluções para o problema proposto e façam suas próprias conjecturas.

Já na **situação didática de ação**, no momento em que o estudante decide uma forma de realização da sequência, ele escolhe o melhor método ou a melhor forma de resolução, a partir de suas formulações, hipóteses e sugestões, baseado, também, na sua própria motivação. O aluno decide a maneira de agir e age.

Na **situação didática de formulação**, o processo de aprendizagem passa a ser mais formalizado, dando início a uma construção mais teórica do saber matemático. Nessa fase também há uma busca por uma linguagem mais própria da matemática, com o intuito de conseguir expressar seu entendimento:

> A formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito de retomá-lo (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo em um sistema linguístico). O meio que exigirá do sujeito o uso de uma formulação deve, então, envolver (efetivamente ou de maneira fictícia) um outro sujeito, a quem o primeiro deverá comunicar uma informação (Brousseau, 2008, p. 29).

Em relação à **situação didática de validação**, o professor media as explicações e justificativas feitas pelos alunos, nesse momento, obrigatoriamente, com uma linguagem matemática apropriada, na busca de demonstrar que seu entendimento está correto, sendo essa construção integralmente teórica. O emissor já não é um informante, mas um proponente, e o receptor, um oponente. “[...] Juntos encarregam-se das relações formuladas entre um meio e um conhecimento relativo a ele” (Brousseau, 2008, p. 30).

Por fim, temos a **situação didática de institucionalização**, na qual o papel do professor aparece de forma mais explícita e é fundamental para o fechamento e a consolidação do processo de aprendizagem. Nessa situação, o professor direciona as formulações dos alunos, apresenta mais informações, se necessário, e consegue identificar se o assunto abordado foi, de fato, entendido pelos estudantes. É importante ressaltar que essa situação pode acontecer tanto em uma situação de ação – quando se reconhece o valor de um procedimento que se tornará um meio de referência – como em uma formulação (Brousseau, 2008). Ademais, é nesse momento que o professor relaciona o conteúdo, com outros temas trabalhados:

> O fato de o aluno "oficialmente" levar em conta o objeto de conhecimento e de o professor considerar a aprendizagem do aluno é um fenômeno social muito importante e uma fase essencial do processo didático: esse duplo reconhecimento é o objeto da institucionalização (Brousseau, 2008, p. 102).

Destacamos que esta última situação não foi apresentada no início dos estudos de Brousseau, pois ele entendia que apoiado nas situações apresentadas anteriormente seria o suficiente. Entretanto, no decorrer de seus estudos, percebeu que os professores sentiam a necessidade de um fechamento, de uma revisão daquilo que era apresentado durante a atividade e, só assim, poderiam seguir para o próximo conteúdo. Em virtude disso, foi acrescentada a situação de institucionalização.

Assim, no decorrer das situações, o aluno deixa de ser um mero receptor de conhecimento, e passa a ser um grande formulador de hipóteses e, enquanto isso acontece, o professor age como um mediador do processo de construção do conhecimento. Ao final, o professor retoma o seu papel e organiza todas as formulações feitas pelos estudantes. Brousseau (2008) ressalta que o papel do professor também é institucionalizar.

As análises dos resultados também serão feitas a partir da teoria de Brousseau (2008), portanto, durante a análise do desenvolvimento das sequências, serão apresentadas mais informações sobre os diferentes aspectos relacionados às situações didáticas e suas etapas. Vale ressaltar que as situações didáticas não são ferramentas separadas e distintas; cada uma delas é considerada como uma etapa para identificação e validação do aprendizado. É a partir delas que, em uma sequência de atividades, é possível proporcionar ao aluno uma aprendizagem.

Baseado nessa teoria, Gonçalves (2023) desenvolveu uma sequência de atividades, também objeto deste trabalho, que iremos desenvolver com uma turma de alunos, com objetivo de analisar as potencialidades e desafios da mesma. A aplicação foi realizada em uma turma do 1º ano do Ensino Médio. Segundo o currículo do Estado de São Paulo, os conteúdos de números reais e conjuntos são trabalhados nesse ano, o que possibilita o desenvolvimento de uma situação didática nessa turma.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) "é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidade da Educação Básica" (Brasil, 2018, p. 7) e trabalhar as competências e habilidades desse documento é obrigatório, contemplando a melhor maneira da formação dos estudantes. Alcançar essas habilidades usando a teoria das sequências didáticas é uma forma diferente de abordar alguns conteúdos, tentando formas que sejam distintas do método tradicional, onde só o professor transmite determinadas informações e o aluno é um simples receptor do conhecimento.

Com o intuito de superar os obstáculos epistemológicos que, segundo Bachelard (2005), são conflitos, problemas ou estagnação que causam a não aprendizagem de uma determinada habilidade, serão utilizadas as sequências didáticas para aperfeiçoar o conhecimento dos alunos no tema "Números Reais".

Dessa forma, com a sequência desenvolvida baseada na teoria das sequências didáticas, aliada a uma implantação objetiva do currículo vigente, além do objetivo de superar os desafios já citados, esperamos desenvolver um aprendizado mais satisfatório durante as aulas de matemática.

Oferecer uma aula pertinente e interessante para os estudantes é mais uma maneira de tentar romper com os métodos tradicionais de ensinar matemática, com a intenção de transformar a aprendizagem em um processo descontraído, mas sem romper com as intenções didáticas. Para Almeida (2019), um meio sem intenções didáticas é insuficiente para permitir a aquisição dos conhecimentos pelos sujeitos, ou seja, é necessário que o professor possibilite um ambiente organizado e preparado para conseguir que os estudantes reflitam e progridam da maneira esperada.

2.2 Procedimentos metodológicos

A metodologia deste trabalho é qualitativa, do tipo experimental, e baseia-se no desenvolvimento de uma sequência de atividades, conforme proposto por Gonçalves (2023). Através da técnica de documentação direta, na qual o pesquisador faz o levantamento de dados na própria escola, juntamente com os estudantes, a partir de uma pesquisa de campo, definida por Lakatos (2017), pretendemos angariar informações sobre as dificuldades dos estudantes, a fim de verificarmos o nível de aprendizagem.

Para tanto, os estudantes responderam a sete questões abertas, de maneira livre, e a professora-pesquisadora organizará e analisará as respostas. Essa análise será feita a partir dos resultados esperados por Gonçalves (2023), comparada com as respostas dadas pelos alunos e articulada ao referencial teórico da Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 2008).

Para início da pesquisa de campo, foram feitas a leitura e estudo aprofundados da dissertação de Gonçalves (2023), além da análise e adaptações das atividades propostas em seu trabalho. Após isso, realizamos buscas por referenciais teóricos que embasassem a Teoria das Situações Didáticas e a superação dos obstáculos epistemológicos, especificamente com os trabalhos de Brousseau e Bachelard.

A justificativa para a realização de uma atividade baseada na Teoria das Situações Didáticas se deve à dificuldade que os alunos enfrentam quando expostos ao tema das noções de infinito[3]. Além disso, os seis trabalhos apresentados na revisão bibliográfica mostraram as dificuldades de estudantes e professores em relação ao ensino e a aprendizagem desta noção.

Pensando na dificuldade dos alunos em assimilar o conceito de infinito e de cardinalidade e a fim de trazermos uma metodologia diferenciada para as aulas de matemática, na qual a aula não é somente expositiva e centrada no professor, o problema da pesquisa consiste em responder a seguinte questão: como abordar a noção de infinito na Educação Básica, no ensino de conceitos matemáticos, como conjuntos numéricos, inclusão e cardinalidade, de modo que seja possível confrontar os obstáculos epistemológicos e favorecer a aprendizagem dos estudantes?

Para abordar esse tema de forma significativa, de acordo com Moreira (1999), é necessário procurar e constatar evidências da compreensão significativa, por meio de questões e problemas apresentados de uma maneira nova e não familiar, para que uma nova informação se relacione com a estrutura do conhecimento e assim seja possível compreender o novo aprendizado.

Essa pesquisa foi submetida ao Comitê de Ética em Pesquisa (CEP), sob n° 6.550.171, aprovado no dia 04 de dezembro de 2023. Após aprovação, a atividade foi realizada nos dias seguintes e a análise dos resultados foi feita nos meses posteriores.

[3] Conforme indicado por Sampaio (2009), na última questão de seu trabalho revela-se a grande dificuldade em relação à cardinalidade ao se tratar de conjuntos infinitos.

Realizamos uma pesquisa de campo com 15 alunos do 1º ano A, em uma escola localizada na cidade de Mairiporã - São Paulo. A sequência didática construída por Gonçalves (2023) possui uma série de oito atividades, porém por escolha nossa, realizamos as 7 primeiras, desenvolvidas em 5 aulas de 45 minutos, aplicadas no horário destinado às aulas de matemática.

3 APRESENTAÇÃO DAS ATIVIDADES

No trabalho de Gonçalves (2023), no capítulo 6, é apresentada a proposta de sequência didática, na qual o autor descreve com detalhes as sugestões e os direcionamentos de cada atividade, além de retratar, no apêndice, cada uma delas, prontas para serem desenvolvidas. Apresentamos, a seguir, as atividades que adaptamos para aplicação em aula com os estudantes:

Atividade 1: Imaginem o conjunto formado por todos os alunos da turma de vocês, o qual podem chamar, por exemplo, de conjunto A. Em seguida, considere o conjunto formado pelos alunos desta turma que gostam de matemática, que podem chamar de conjunto M.

a) Qual desses conjuntos é maior, o conjunto A ou o conjunto M? Por quê?
b) Eles poderiam ter o mesmo tamanho? Explique em que situação isso ocorreria.
c) Podemos afirmar que o conjunto M está contido no conjunto A? Justifique.
d) E, você, consegue imaginar alguma situação em que o conjunto A estaria contido no conjunto M? Qual?

Atividade 2: Imaginem dois conjuntos, por exemplo, um formado pelos alunos do 1º ano A (conjunto A) e outro formado pelos alunos do 1º ano B (conjunto B). Pensem em formar duplas de alunos que não sejam da mesma turma, ou seja, cada aluno do 1º ano A fará par com um aluno do 1º ano B. Agora respondam:

a) O que podemos afirmar, a respeito do tamanho desses conjuntos, se algum aluno do 1º ano A ficar sem dupla?
b) E se for aluno do 1º ano B?
c) E se não sobrar nenhum aluno sem dupla?
d) Podemos dizer que um desses conjuntos está contido no outro? Qual seria a intersecção entre eles?

Atividade 3: Considere, agora, o conjunto formado pelas pessoas nascidas no Brasil, as quais recebem a denominação de “brasileiras”, a esse conjunto daremos o nome de B; e, o conjunto formado pelas pessoas nascidas no Estado de São Paulo, denominadas “paulistas”, o qual será chamado de conjunto P. Considerando que a população do Brasil sempre cresça mais (em quantidade absoluta) que a população do Estado de São Paulo, comente sobre as questões a seguir:

a) Podemos afirmar que o conjunto P sempre será menor que o conjunto B? Por quê?
b) Todo paulista é brasileiro? E todo brasileiro é paulista?
c) Com base no item anterior, podemos dizer que um desses conjuntos está contido no outro?

Atividade 4: Cada estudante recebe dois canudos de plástico, em seguida, a turma é separada em grupos, direcionados pelo professor. Cada grupo constrói uma forma geométrica utilizando todos os canudos recebidos, de forma que os canudos fiquem encostados uns nos outros, ponta com ponta, fechando uma linha/figura, formando, por exemplo, um polígono. Comparem as figuras feitas e respondam às seguintes questões:

a) A forma geométrica de qual grupo possui mais canudos?
b) Podemos afirmar que uma delas está contida na outra?
c) Considerando cada canudo como uma unidade de medida de comprimento, quais os perímetros das formas geométricas de cada grupo?

Atividade 5: Seja $\mathbb{N}$ o conjunto formado pelos números naturais, e X o conjunto formado por todos os números quadrados perfeitos. Conversem sobre as questões abaixo:

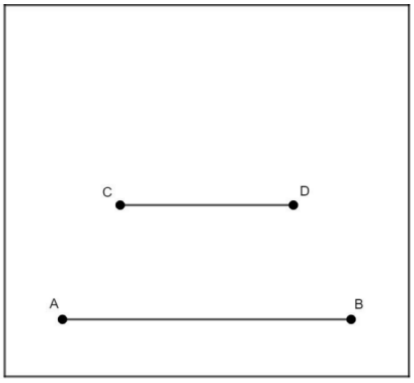
a) Qual desses dois conjuntos é maior? Ou seja, qual deles tem mais elementos?
b) Explique como chegou à conclusão apresentada no item anterior.

Atividade 6: Comparem as quantidades de elementos dos conjuntos $\mathbb{Z}$ (inteiros) e $\mathbb{N}$ (naturais), por meio dos seguintes questionamentos:

a) Qual conjunto tem mais elementos: o dos números inteiros $\mathbb{Z}$ ou o dos números naturais $\mathbb{N}$?
b) Qual dos dois conjuntos é maior?
c) É possível estabelecer uma relação biunívoca entre os dois conjuntos?
d) O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ está contido no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$? Quais são os elementos do conjunto $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$? Justifique suas respostas.

Atividade 7: A partir da figura com dois segmentos de reta de comprimentos diferentes, AB e CD, como no exemplo abaixo:

Figura 1 – Atividade 7 - a



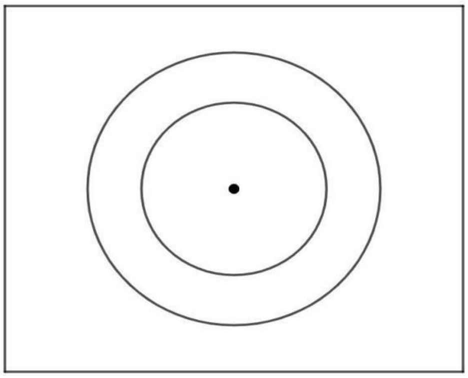
Fonte: Gonçalves (2023, p. 84)

a) Qual dos dois segmentos tem comprimento maior?
b) Qual deles tem mais pontos?
c) Onde existem mais pontos, no segmento de reta AB da figura, no segmento CD, em uma reta ou em um plano?
d) Qual dos conjuntos a seguir possui mais elementos, ou seja, qual é o maior?

- A: conjunto dos pontos que formam um segmento de reta.
- B: conjunto dos pontos que formam uma reta.
- C: conjunto dos pontos que formam um quadrado.
- D: conjunto dos pontos que formam um plano.
- E: conjunto dos pontos que formam um cubo.

Atividade 8: Sabemos que, assim como os polígonos, as circunferências são formadas por infinitos pontos. Com base neste fato, podemos propor o seguinte problema: Considere as duas circunferências concêntricas da Figura a seguir. Qual delas possui mais pontos?

Figura 2 – Atividade 8 - a



Fonte: Gonçalves (2023, p. 85)

Apresentamos as atividades aos alunos em uma folha impressa e expusemos, também, na televisão da sala de aula. Conforme avançavam nos exercícios, realizávamos a passagem dos slides, preparados para essa tarefa.

Em todas as atividades, retiramos as indicações que o autor deixou e colocamos apenas os enunciados das questões e as alternativas, para melhor entendimento dos estudantes. Na atividade dois, trocamos a “série” para turmas do “1º ano A” e “1º ano B”, deixando-a mais próxima à realidade dos estudantes que realizariam a sequência.

Na atividade quatro, compreendemos que não seria viável a utilização dos calçados dos estudantes, por receio de uma possível vergonha ou constrangimento. No intuito de evitarmos esse problema, utilizamos canudos de plástico – que podem ser reutilizados e são de fácil manuseio –, possibilitando que os estudantes pudessem fazer as figuras na própria carteira. Das atividades de número cinco a sete, apenas retiramos as indicações feitas ao professor.

A atividade oito, apresentada anteriormente, não foi aplicada em sala de aula, por escolha nossa, já que entendemos ser suficiente os exercícios descritos de um a sete para explicar a relação de conjuntos infinitos e cardinalidade, além do fato de que esta última atividade (de número oito) suscitaria a explicação de outros conceitos envolvendo geometria.

Ressaltamos que as atividades foram realizadas gradativamente, conforme a progressão dos estudantes, e a cada novo raciocínio construído, colocávamos as informações na lousa, além de retomarmos alguns conceitos para auxiliar na construção do aprendizado.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa objetivou aplicar uma atividade em uma escola estadual da rede pública, com alunos do 1º Ano do Ensino Médio, envolvendo a noção de infinito em conjuntos numéricos, a fim de analisar suas potencialidades e desafios, a partir do trabalho proposto por Gonçalves (2023) e baseando-nos na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008), além de proporcionar aos estudantes um melhor entendimento e interpretação dos conteúdos sobre conjuntos infinitos e cardinalidade, promovendo a participação, a colaboração e a motivação.

O experimento foi dividido em três etapas: planejamento, implementação e análise dos resultados. Trazer práticas diferenciadas para escola é o que pode tornar a aprendizagem mais significativa e interessante e uma possibilidade de fugir do sistema tradicional, no qual o professor é um transmissor do conhecimento e o estudante um receptor – e é nesse cenário que se encaixa o uso das situações didáticas de Broussau (2008).

Quando os alunos veem sentido nas atividades que realizam, o processo de aprendizagem se torna mais fácil, levando em consideração as relações do indivíduo com o meio ao qual está inserido, com o professor e com seus colegas de classe. Conforme aponta Santos (2019, p. 86), "é essencial conectar o ensino com a vida do aluno, dando a ele oportunidade de encontrar sentido naquilo que compõe o foco de estudo na sala de aula, pois quando eles veem sentido na atividade proposta a aprendizagem se torna mais significativa".

Com as atividades, os alunos, em sua maioria, se mostraram pró-ativos e dispostos a realizarem as sequências, principalmente quando faziam parte do problema. Pudemos notar que os mais interessados conseguiam realizar as atividades com mais facilidade; nem todos os alunos se comprometeram da forma esperada, pois sabemos que alguns estudantes têm problemas pessoais que os prejudicam na escola.

É importante destacar que levando em conta as situações didáticas de devolução, ação e formulação é possível proporcionar um ambiente onde os estudantes são os principais responsáveis pelo seu processo de aprendizagem, tornando-os ativos e propensos a buscar seu conhecimento, além de fazê-los se sentirem mais confiantes no momento de apresentar as hipóteses.

Nas situações didáticas de validação e institucionalização, o professor media e dá sentido às especulações dos alunos, podendo apresentar teorias e definições com a linguagem matemática apropriada, o que permite trabalhar a autonomia dos alunos em sala de aula, sem perder a essência das explicações, da apresentação do conteúdo na lousa, corroborando o seu papel em campo, que é tão importante na vida dos estudantes.

Deste modo, utilizar uma sequência didática como proposta para o ensino de Matemática no Ensino Médio apresentou-se como uma boa alternativa educacional, dado a realização nas condições apresentadas, proporcionando um ensino diferenciado e de qualidade. Durante o relato da pesquisa, foi possível perceber que potencialidades e desafios foram perpassados. Contudo, as atividades trouxeram uma oportunidade de superar os obstáculos epistemológicos, que criam certas barreiras, e essa superação pôde acontecer de uma maneira participativa e significativa.

Embora tenham havido alguns desafios, consideramos uma ótima maneira de se trabalhar com os conteúdos de conjuntos infinitos. É uma proposta que pretendemos realizar com outras turmas, a partir da experiência que tivemos e baseado nas adaptações sugeridas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, F. A. **Sequência didática da proposição a aplicação**: uma análise das interações em sala de aula sob o ponto de vista das situações adidáticas. Orientador: Fernando Emílio Leite de Almeida. 2019. 225f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2019.

BACHELARD, G. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Trad. De Estela dos Santos Abreu. Contraponto: Rio de Janeiro, 2005 [1996].

BRASIL. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas:** Conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008. 128p.

CHALOM, G.; WEISS, A. **Teoria dos Conjuntos** – Uma introdução. IME-USP-Departamento de Matemática. 93f. 2019.

GONÇALVES, V. L. **Cardinalidade de conjuntos infinitos na educação básica**. Orientador: Rogério Ferreira da Fonseca. 2023. 87f. Dissertação (Mestrado Profissional Stricto Sensu em Matemática em Rede Nacional), Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2023.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de metodologia científica**. 8ª. ed. São Paulo: Atlas, 2017.

LORIN, J. H.; BATISTA, I. L. Uma discussão a respeito da natureza do conceito de infinito. **RIPEM,** Brasília, v. 13, n. 2, p. 1-17, maio/ago. 2023.

MENDES, L. O. R.; PEREIRA, A. L. Revisão sistemática na área de Ensino e Educação Matemática: análise do processo e proposição de etapas. **Educ. Matem. Pesq**. São Paulo, v. 22, n.3, p 196-228, 2021.

MOREIRA, M. A. A teoria de aprendizagem significativa de Ausubel. *In:* MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem**. São Paulo: EPU, 1999. p. 151-165.

PARANHOS, Y. F. **Histórias para contar**: uma maneira lúdica de trabalhar as complexidades de conjuntos finitos e infinitos no ensino básico. Orientador: Guido Gerson Espiritu Ledesma. 2023. 124f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Centro de Tecnologia e Ciências, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

PEREIRA, L. M. C. **A noção de infinito na educação básica**: reflexões e proposta. Orientador: Abel Rodolfo Garcia Lozano. Coorientador: Adriano Vargas Freitas. 2015. 109 f. Dissertação (Mestrado em Ensino das Ciências na Educação Básica) -

Universidade do Grande Rio "Prof. José de Souza Herdy", Duque de Caxias, 2015.

SAMPAIO, P. A. S. R. Infinito: uma realidade à parte dos alunos do Ensino Secundário. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 22, n. 32, p. 123-146, 2009.

SANTOS, N. L. **Sala de aula invertida**: um experimento no ensino de Matemática. Orientador: Rodrigo Medeiros dos Santos. 2019. 108f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Instituto de Ciências da Educação, Universidade Federal Do Oeste Do Pará, Santarém, 2019.

SANTOS, T. S. L. **O conceito de infinito**: uma abordagem a partir da resolução de problemas. Orientador: Evandro Carlos Ferreira dos Santos. 2015. 54f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015.

SIQUEIRA, F. K. S. LORIN, J. H. Obstáculos epistemológicos do conceito de infinito identificados em alunos ingressantes e concluintes do curso de matemática. **RPEM**, Campo Mourão, v. 09, n.19, p. 555-577, jul./out. 2020.

SIQUEIRA, F. K. S. LORIN, J. H. Os conceitos de infinito atual e infinito potencial em revistas brasileiras. **ACTIO,** Curitiba, v. 6, n. 2, p.1-16, maio/ago. 2021.