

$$y = ab^x$$

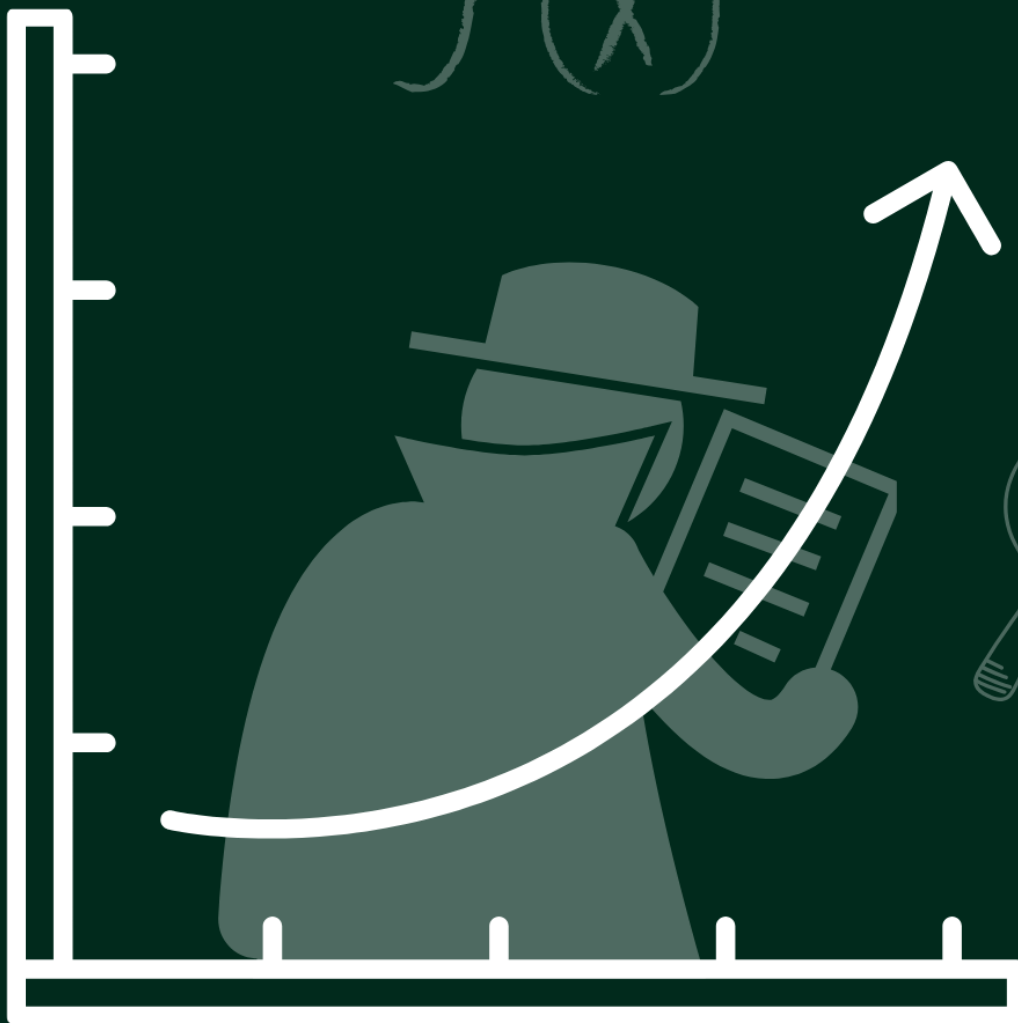


ROLEPLAYING GAME E FUNÇÃO EXPONENCIAL

LIVRO-JOGO: CONSPIRAÇÃO
CONTAMINANTE

$$\frac{1}{2}$$

$$f(x)$$



$$\sqrt{x}$$

Thiago de Vasconcelos Barros
Miguel Chaquiam



***Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) de acordo com o ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade do Estado do Pará***

B277r Barros, Thiago de Vasconcelos

Roleplaying game e função exponencial: livro-jogo: conspiração
contaminante / Thiago de Vasconcelos Barros, Miguel Chaquiam. —
Belém, 2025.
83 f.

Produto educacional vinculado à dissertação "Roleplaying game e
função exponencial" do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
(PPGEM) - Universidade do Estado do Pará, Campus I - Belém, 2025.

1. Ensino de matemática. 2. Jogos no ensino de matemática. 3.
Roleplaying game. 4. Função exponencial. I. Chaquiam, Miguel. II. Título.

CDD 22.ed. 372.1397

Elaborado por Priscila Melo CRB/2-1345

THIAGO DE VASCONCELOS



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FICHA DE AVALIAÇÃO DE PRODUTOS EDUCACIONAIS – BANCA EXAMINADORA

Título: "ROLEPLAYING GAME E FUNÇÃO EXPONENCIAL – LIVRO – JOGOS: CONSPIRAÇÃO CONTAMINANTE".

Mestrando: THIAGO DE VASCONCELOS BARROS

Data da avaliação: 22/10/2025

PÚBLICO ALVO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) Destinado à:

- () Estudantes do Ensino Fundamental ☒ Estudantes do Ensino Médio
() Professores do Ensino Fundamental () Professores do Ensino Médio
() Outros: _____

INFORMAÇÕES SOBRE O PRODUTO EDUCACIONAL

a) Tipo de Produto Educacional

- () Sequência Didática () Página na Internet () Vídeo
() Texto Didático (alunos/professores) ☒ Jogo Didático () Aplicativo
() Software () Outro: _____

b) Possui URL: ☒ Sim, qual o URL: _____
() Não () Não se aplica

c) É coerente com a questão-foco da pesquisa?

- ☒ Sim
() Não. Justifique? _____

d) É adequado ao nível de ensino proposto?

- ☒ Sim
() Não. Justifique? _____

e) Está em consonância com a linguagem matemática do nível de ensino proposto?

- ☒ Sim
() Não. Justifique? _____

ESTRUTURA DO PRODUTO EDUCACIONAL

- a) Possui sumário: ☒ Sim () Não () Não se aplica
b) Possui orientações ao professor: ☒ Sim () Não () Não se aplica
c) Possui orientações ao estudante: ☒ Sim () Não () Não se aplica
d) Possui objetivos/finalidades: ☒ Sim () Não () Não se aplica
e) Possui referências: ☒ Sim () Não () Não se aplica
f) Tamanho da letra acessível: ☒ Sim () Não () Não se aplica

g) Ilustrações são adequadas:

☒ Sim () Não () Não se aplica

CONTEXTO DE APLICAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

a) Foi aplicado?

☒ Sim, onde: Grupo de alunos de Ensino Médio

() Não, justifique: _____

() Não se aplica

b) Pode ser aplicado em outros contextos de Ensino?

☒ Sim, onde: Instituições de Ensino de Ensino Médio

() Não, justifique: _____

() Não se aplica

c) O produto educacional foi validado antes de sua aplicação?

☒ Sim, onde: Exposições de Ensino Médio / Ingressantes de licenciatura em Matemática

() Não, justifique: _____

() Não se aplica

d) Em qual condição o produto educacional foi aplicado?

() na escola, como atividade regular de sala de aula

() na escola, como um curso extra

☒ outro: Atividade extracurricular

e) A aplicação do produto envolveu (marque as alternativas possíveis):

() Alunos do Ensino Fundamental

☒ Alunos do Ensino Médio

() Professores do Ensino Fundamental

() Professores do Ensino Médio

() outros membros da comunidade escolar, tais como _____

() outros membros da comunidade, tais como _____

O produto educacional foi considerado:

☒ APROVADO

() APROVADO COM MODIFICAÇÕES

() REPROVADO

MEMBROS DA BANCA

Prof. Dr. MIGUEL CHAQUIAM (Presidente)
Doutor em Educação
IES de obtenção do título: UFRN

Profa. Dra. ACYLENA COELHO COSTA (Examinador 01)
Doutora em Educação Matemática
IES de obtenção do título: PUC/SP

Prof. Dr. IRAN ABREU MENDES (Examinador 02)
Doutor em Educação
IES de obtenção do título: UFRN

Assinaturas

Miguel Chaquiam

Acylena Coelho Costa

Iran Abreu Mendes

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	6
2. ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR.....	11
3. LIVRO-JOGO: CONSPIRAÇÃO CONTAMINANTE	18
3.1. RELATÓRIO DO INVESTIGADOR.....	63
4. SOBRE FUNÇÃO EXPONENCIAL	66
4.1. POTÊNCIAS DE EXPOENTE REAL	66
4.2. DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO E ALGUNS CONCEITOS	71
4.3. A FUNÇÃO EXPONENCIAL	72
4.3.1. O gráfico da Função Exponencial	78
4.4. CARACTERIZAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL	79
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS	83

1. INTRODUÇÃO

Este Produto Educacional, foi desenvolvido com base na pesquisa que resultou a dissertação intitulada *Roleplaying Game* e Função Exponencial, disponível no link¹ abaixo, entregue como requisito para obtenção do grau em Mestre em Ensino de Matemática no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM), da Universidade do Estado do Pará (UEPA), curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, com o objetivo de contribuir como um recurso pedagógico para ser utilizado pelos professores de matemática da Educação Básica no processo de ensino de conteúdos relacionados a Função Exponencial.

A pesquisa teve por questão central o seguinte questionamento: Que potencialidades apresenta a variante do *Roleplaying Game*, Livro Jogo, destinada aos alunos do ensino médio, com vista a consolidar conteúdos relacionados a função exponencial? Tendo em vista o questionamento elencado, foi traçado como objetivo geral: Elaborar um Livro-Jogo, variante do *Roleplaying Game*, destinado a alunos do ensino médio, com vistas a consolidar conteúdos relacionados a função exponencial.

Esta questão e o objetivo, foram elaborados com base na problemática em torno do ensino de Função Exponencial diretamente relacionada à recorrente percepção da Matemática como uma disciplina de difícil compreensão. É comum, no contexto da educação básica, observar relatos de estudantes que consideram a aprendizagem matemática como algo complexo e, muitas vezes, inacessível.

Essa visão negativa é fruto, em grande parte, de um ensino marcado pela descontextualização, pela fragmentação dos conteúdos e pelo foco no acúmulo de informações. Nesse sentido, documentos como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) e, mais recentemente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), desde os anos 2000, propõem mudanças na busca de superar essas limitações e redefinir o processo de ensino-aprendizagem.

Observei que nestes documentos há ênfase ao conteúdo curricular conceito de função devido a sua relevância tanto para outros tópicos de Matemática como para a aprendizagem de outras disciplinas do currículo educacional nacional. Isto pode ser observado ao estar presente em 15 das 43 habilidades distribuídas em quatro das cinco competências específicas da área de Matemática na BNCC.

¹ Link.provisório

Apesar deste destaque, estudos apontam dificuldades persistentes no ensino de Funções, sobretudo no caso das Funções Exponenciais. Silva (2016) observa que esse conteúdo é considerado desafiador tanto para ser apresentado quanto para ser assimilado, o que contribui para o surgimento de obstáculos significativos na aprendizagem. Para Brucki (2011), a complexidade está relacionada a múltiplos fatores: a percepção limitada, por parte dos alunos, quanto à aplicabilidade prática do tema; as dificuldades em associar a expressão algébrica da função ao significado conceitual subjacente; e, ainda, a carência de estratégias didáticas inovadoras por parte dos professores para tornar o estudo mais acessível e motivador.

No âmbito da Educação Matemática, existem diversas alternativas pedagógicas e didáticas, que possuem potencialidades para auxiliar no processo de ensino-aprendizagem da matemática, como o uso de Jogos, que segundo Fiorentini e Miorim (1990), possibilitam aos alunos estabelecerem conexões entre os conceitos abordados nas aulas e as experiências concretas proporcionadas pela manipulação de objetos.

Dentre diversos jogos, um que vem a apresentar uma ampla gama de possibilidades ao ser implementado em contextos escolares, é o chamado Roleplaying Game (RPG). Segundo Vasques (2008), o *Roleplaying Game* (RPG) apresenta uma ampla gama de possibilidades ao ser implementado em contextos escolares. Contudo, essa ferramenta ainda é pouco conhecida por pesquisadores e professores, mesmo com suas grandes potencialidades para a educação em geral e, especificamente, para a educação matemática.

Mas afinal, o que seriam os Roleplaying Games? O Roleplaying Game, que do inglês significa “jogo de interpretação”, frequentemente abreviado como RPG, é uma modalidade de jogo na qual os jogadores interpretam a identidade de personagens inseridos na trama, sendo responsáveis por descrever suas ações e tomar decisões para superar os desafios propostos. Assim, constitui como um jogo cuja essência reside na narrativa colaborativa, na qual todos os participantes contribuem para o seu desenvolvimento e construção.

Este jogo possui elementos distintos dos demais como, por exemplo, para a elaboração da história, os participantes são divididos em duas categorias distintas: Narrador e os jogadores. O Mestre desempenha o papel de apresentar e narrar a história aos outros jogadores, semelhante ao narrador de um livro ou ao roteirista de um filme enquanto os jogadores desempenham o papel de protagonistas, guiando os

eventos da história por meio de suas ações e escolhas, com o uso de seus personagens como veículos para essas interações.

Ao ser transposto para sala de aula, o professor assume o papel de Mestre do jogo e cabe a ele desenvolver uma história em que os jogadores - os alunos - podem explorar os mais diversos cenários fictícios com base em fatos históricos - conhecer personagens históricos por exemplo - e enfrentar situações problema como questões matemáticas vivenciados por matemáticos da antiguidade. Isto é possível pois no RPG a criação dos elementos da história a ser “jogada” é de livre criação do mestre, e a partir dessa história os jogadores podem tomar as decisões que irão dar prosseguimento e um final a narrativa.

E conforme apontado por Fernandes (2017), os jogos de RPG este jogos abrangem uma vasta diversidade de regras, peculiaridades, regulamentos e modalidades de jogo, algumas das variações notórias deste tipo de jogo são: o *RPG de Mesa* é uma modalidade tida como o RPG tradicional, no qual mais se encaixa com as descrições anteriormente dadas, na qual os participantes assumem o papel de personagens fictícios em um mundo imaginário. O *Live Action Role-Playing* (Larp) é similar ao RPG de Mesa, contudo, os participantes encarnam os papéis de seus personagens, representando-os como atores em uma encenação teatral. *RPG Eletrônico* representa uma vertente do RPG que se desenrola em ambientes digitais, como em computadores, celulares ou consoles de vídeo game. *Aventura solo ou Livro-jogo*, diferentemente dos RPGs tradicionais, o jogador atua de forma solitária, o jogador assume o papel de protagonista, enquanto o livro desempenha o papel de guiar a narrativa, oferecendo ao longo da narrativa diversas opções ao leitor, que deve decidir qual delas seguir, o que influencia o desenvolvimento da história.

A escolha do uso da variante Livro-Jogo do Roleplaying Game para esta pesquisa, em detrimento as demais, foi pautada no equilíbrio entre as potencialidades a serem exploradas e a acessibilidade para professores que não têm familiaridade com RPG. E como no Livro-Jogo o livro desempenha o papel do mestre, por meio de ao longo da narrativa, oferecer diversas opções ao leitor, que deve decidir qual delas seguir; assim, este se constitui como um produto pronto para ser utilizado em sala de aula, não o que não necessita de tanta preparação por parte do professor, e poder ser uma forma com o qual professores, iniciantes ou já experientes no uso do RPG, possam introduzir esse tipo de jogo em suas aulas. E assim, posteriormente possam explorar as demais variantes do RPG.

Desta forma, a partir da investigação que apontou potencialidades do *Roleplaying Game*, como **a relação aluno-personagem**, em que o estudante vivencia papéis distintos dos seus, exercitando a tomada de perspectiva e experiências vicárias, o que amplia sua compreensão e possibilita explorar conceitos como se fosse um cientista ou matemático; e **a relação aluno-narrativa**, em que a interação com os cenários e desafios propostos promove imersão, análise crítica e resolução de problemas em ambientes seguros e de baixo risco. Além de RPG, ao simular situações reais em contextos fictícios, permitir que os alunos apliquem conceitos matemáticos de forma prática e contextualizada, alinhando-se às diretrizes da BNCC.

Desta forma, afim de atingir o objetivo central da pesquisa de se elaborar um Livro-Jogo, variante do *Roleplaying Game*, destinado a alunos do ensino médio. Foram utilizados os aportes de Brousseau (1996, 2008) com sua Teoria das Situações Didáticas, e de Grandó (1995, 2000) que trata sobre jogos no ensino da matemática. Esses aportes constituíram o pilar da proposta, pois, por meio deste estudo se desenvolveu o quadro abaixo em correlaciona ambas pesquisas.

Quadro 1 – Articulação Tipologia das SD x Jogos.

Situações da TSD	Momentos do Jogo	Correlação
Situação de ação	1º Familiarização com o material do jogo	Exploração inicial do jogo e reconhecimento das regras; Momento em que os alunos engajarão no jogo por si só, Reflexão e simulação das tentativas para o desenvolvimentos de estratégias com o objetivo de vencer o jogo;
	2º Reconhecimento das regras	
	3º O “Jogo pelo jogo”: jogar para garantir regras	
Situação de formulação	4º Intervenção pedagógica verbal	Momento de troca de informação entre o aluno e o jogo; Sistematização de processos para resolver os problemas do jogo; O aluno expressa suas estratégias e/ou resoluções, por meio da linguagem oral e/ou escrita;
	5º Registro do jogo	
	6º Intervenção escrita	
Situação de validação	7º Jogar com “competência”	Validação das estratégias e resoluções aos problemas e desafios do jogo; Amplia a compreensão do jogo sob diferentes perspectivas que podem não ter sido inicialmente consideradas;
Situação de institucionalização		Momento em que os alunos destinam a promover o sentido e dão significado ao saber elaborado. E cabe ao professor institucionalizar a tarefa, formalizar e generalizar os conceitos pretendidos;

Fonte: Elaborado pelo autor, 2025.

A elaboração deste quadro de correlações, se mostrou como um modelo norteador para a elaboração posterior, visto que a ausência de parâmetros claros para sua construção de um Livro-Jogo. Portanto, a partir deste quadro de correlações entre os aportes, foi possível desenvolver uma estrutura que orientou a elaboração de uma proposta que seguisse ambas orientações teóricas, e o que permitiu inserir os objetos matemáticos na narrativa e dinâmica do RPG em formato de livro-jogo.

E a partir desta elaboração em que foi gerado um Livro-Jogo intitulado “Conspiração Contaminante”. A qual para a validação desta proposta, O Livro-Jogo foi aplicado com alunos concluintes do Ensino Médio, mas, devido a dificuldades encontradas para aplicá-la em turmas desse nível, optou-se por desenvolvê-la com uma turma do primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará. Para uma compreensão na íntegra da aplicação realizada se recomenda a leitura da pesquisa de dissertação que originou este produto.

A aplicação resultou modificações na proposta do Livro-Jogo para instigar os jogadores a seguir na íntegra os elementos postos na história, visto que, na aplicação, visto o trabalho integral sobre os conteúdos previstos. Além de alterações de menor escala que foram realizadas na narrativa, pois algumas passagens ocasionaram interpretações equivocadas por parte dos estudantes sobre o que estava sendo destacado.

Dessa forma, este Produto Educacional apresenta, em sua versão integral e revisada a partir dos resultados da validação, o Livro-Jogo “*Conspiração Contaminante*”. Nos capítulos seguintes, encontra-se uma **Orientação ao Professor**, na qual são descritas orientações para aplicação do material em sala de aula, com o objetivo de consolidar elementos relacionados à função exponencial, além de destacar outros aspectos a ser ter ciência durante a aplicação. Em seguida, é disponibilizado o Livro-Jogo em sua íntegra, acompanhado de materiais complementares. Por fim, apresenta-se um texto matemático sobre a Função Exponencial, elaborado para contribuir com a formação inicial e continuada do professor de Matemática no que se refere a esse conteúdo.

2. ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Neste capítulo, são abordadas as orientações para a aplicação deste material em sala de aula, com base nas observações e experiências obtidas a partir da aplicação deste material para sua validação na dissertação que deu origem a este Livro-Jogo.

Para tal, é necessário se definir inicialmente como se joga um Livro-Jogo. **Aventura solo ou Livro-jogo**, diferentemente dos RPGs tradicionais, o jogador atua de forma solitária. Conforme Fernandes (2017) observa, nessa variante o jogador assume o papel de protagonista, enquanto o livro desempenha o papel do mestre, oferecendo ao longo da narrativa diversas opções ao leitor, que deve decidir qual delas seguir, influenciando assim o desenvolvimento da história.

O funcionamento desse tipo de jogo, conforme descrito pelo autor, se dá mediante a apresentação de uma ou até três opções de escolha ao final de cada parágrafo, cada uma direcionando o leitor para uma parte distinta do livro. Assim, por meio da leitura e das escolhas feitas, o jogador avança na narrativa, podendo alcançar diferentes desfechos conforme suas decisões ao longo da trama, e este pode jogar aventura novamente caso acredite que não alcançou o final desejado.

E no Livro-Jogo *“Conspiração Contaminante”*, utilizamos deste recurso de tomada de decisão dos alunos para que eles obtenham dados ao longo da história do livro para que assim, desenvolvam estratégias para a resolução dos problemas matemáticos propostos.

E para tal a história do Livro-Jogo ocorre na cidade de Girona, localizada próxima à fronteira espanhola com a França, possui uma pequena população de aproximadamente 17.500 pessoas - 17.496 exatamente. Recentemente, a equipe médica do pequeno hospital da cidade identificou casos de uma doença até então desconhecida, responsável por diversas mortes na cidade. O governo espanhol, acionado pelo prefeito de Girona, Francisco Díaz, começou a prestar esforços na investigação da doença, motivados pela suspeita do prefeito Díaz de que as potências em guerra buscavam sabotar a estabilidade da Espanha.

Uma vez que sua posição de neutralidade a prevenia da destruição e muitos outros males causados pela guerra, o país ibérico representava uma ameaça para os demais países, pois se o governo decidisse entrar na guerra, um dos lados do conflito iria ganhar um inimigo poderoso, com potencial de decidir o rumo da grande guerra

na Europa.

Com vista a verificar a situação da doença na cidade, seu nível de risco e medidas de prevenção, além de colher evidências sobre a possível interferência estrangeira, o governo espanhol destacou um investigador, protagonista da história cujas decisões são tomadas pelos jogadores; cuja missão é encontrar o prefeito Francisco Díaz na cidade de Girona, colher seus depoimentos e realizar uma investigação no hospital do município, recolhendo qualquer material ou vestígio que possa ser analisado, seja para o estudo da doença, seja para indícios de sabotagem.

Quanto ao objeto matemático de Funções exponenciais, este ocorre em intervalos de blocos específicos ao longo do Livro-Jogo. Nos blocos 13 a 22, trabalhou-se um problema envolvendo uma função exponencial crescente do tipo $f(x) = a^x$, com o uso de problemas sequenciais que permitissem aos alunos explorar a situação proposta, com o objetivo de analisar a relação de interdependência entre as variáveis. Nos blocos 43 a 53, trabalhou-se um problema envolvendo uma função exponencial decrescente do tipo $f(x) = a^x$ e ao final, se espera que os alunos sejam capazes de desenvolver uma expressão que modelasse matematicamente a situação, representando o número de leitos disponíveis em um hospital fictício da história em função das dias percorridos.

E entre os blocos de 66 a 87. A depender das escolhas realizadas durante a experiência, nesta etapa os alunos podem ser levados a explorar uma função exponencial do tipo $f(x) = ba^x$, a qual representa de forma mais precisa o avanço da quantidade de infectados. Caso contrário, a função trabalhada será do tipo $f(x) = a^x$, o que resultará em uma estimativa menos precisa para o tempo de ação contra a doença. Essa imprecisão poderá levar a um final de jogo com consequências negativas, decorrentes do erro na investigação conduzida pelo jogador.

O Livro-Jogo apresenta nove finais distintos, os quais variam de acordo com as decisões tomadas e com as respostas obtidas pelos jogadores, isto foi feito para compreender uma das características do RPG, em que as escolhas e ações do jogadores afetam diretamente o desfecho da história. Assim, para definir qual desfecho seguir, os alunos devem reunir as informações construídas ao longo da narrativa e articular esse conteúdo com os conhecimentos desenvolvidos sobre função exponencial, o que evidencia a necessidade de compreensão conceitual e tomada de decisões fundamentadas para concluir a atividade.

2.1. COMO OS ALUNOS JOGAM?

Anteriormente à apresentação das orientações específicas para a aplicação desta proposta em sala de aula, é imprescindível que o professor possua domínio sobre o material a ser utilizado. Para tanto, a seguir será descrita detalhadamente a dinâmica do jogo, com o objetivo de auxiliar o docente para que este possa sanar quaisquer dúvidas que venham a surgir durante a condução da atividade.

A dinâmica proposta no Livro-Jogo difere da de uma obra convencional, uma vez que sua narrativa é segmentada em blocos de texto numerados. Estes blocos são parágrafos isolados nos quais ocorrerá uma escolha do caminho a ser seguido na história ou no qual haverá um problema matemático a ser solucionado. Ao término de cada bloco, é apresentado ao discente um 'comando', entre parênteses e em negrito, cuja função é orientar a ação subsequente. Como exemplos de tais comandos, têm-se: **(Vá para o bloco 10); (Dificuldade: 2); (Perca 2 pontos de saúde).**

Esses comandos são introduzidos no decorrer da narrativa, sobretudo nos momentos que demandam uma tomada de decisão por parte do leitor. Dessa forma, a escolha do aluno determina qual comando seguir, como (Vá para o bloco 10), direcionando o prosseguimento da leitura para o bloco correspondente e conferindo um caráter não-linear à história.

Figura 1 – Exemplificação de um bloco e de Comandos.

[1]

Acomodado em uma poltrona, você observa pela janela os vastos campos agrícolas que se estendem até onde a vista alcança. Ao longe, elevam-se colinas e montanhas baixas. Trata-se das terras ao redor de Girona, cidade próxima à fronteira com a França — seu destino.

O trem segue firme pelos trilhos, embalando o pensamento. Você tenta recordar, com clareza, qual sua missão. Em busca de respostas, volta o olhar para suas mãos: nelas, um envelope oficial, endereçado ao prefeito de Girona.

O documento é sua credencial — e talvez sua chave para entender o que está por vir. Diante de você, sentados na poltrona oposta, dois homens permanecem atentos. São os agentes designados para garantir sua segurança. Silenciosos, prontos para agir ao menor sinal de perigo. Então você decide:

- Perguntar aos homens detalhes da missão **(Vá para o bloco 2)**
- Abrir e ler o documento **(Vá para o bloco 3)**
- Forçar a mente e tentar se lembrar sem ajuda **(Vá para o bloco 4)**

Fonte: Elaborado pelo Autor, 2025.

Outros tipos de comando, são os comandos de dificuldade - como **(Dificuldade: 2)** - ocorrem conforme desafios surgem, e para superar estes desafios é necessário jogar um dado. Caso o valor do dado seja igual ou maior à dificuldade você obtém um sucesso; caso seja menor ocorre uma falha. Exemplo:

(Dificuldade: 3)

Sucesso: **(Vá para o bloco 9)**

Falha: **(Vá para o bloco 37)**

Ao ver este comando é necessário que o aluno role o dado. Caso o valor rolado no dado **seja igual ou maior o valor da dificuldade**, no caso acima igual ou maior que 3, será um **Sucesso**. Já uma **Falha** ocorre quando o valor do dado é **menor que o valor da dificuldade**. Ou seja, no exemplo acima, um valor menor que 2. Sucesso ou falhas levam a caminhos diferentes na história, mas não necessariamente a caminhos melhores ou piores.

Outra ferramenta importante para este Livro-Jogo é o chamado "**Relatório do Investigador**", um material complementar a este Livro. Neste material o aluno irá registrar informações do seu personagem, dos caminhos traçados durante a sua história e os registros matemáticos.

No **Relatório do Investigador** o aluno deve registrar as informações do nome do seu personagem, os pontos de saúde, os equipamentos descritos que o personagem possui. Contudo os elementos de destaque são a trajetória percorrida, isto é, a sequência de cenas escolhidas ao longo da aventura, desde o início até o desfecho. Este registro deve ser feito nos quadrados indicados.

Por fim, como os alunos assumem o papel do personagem principal, portanto devem registrar os Itens que irão lhe auxiliar ao longo da história e tomar cuidado com a saúde do personagem. Assim o personagem dos jogadores possui **10 pontos de saúde** que representam o bem-estar do personagem. Algumas escolhas podem acabar afetando a saúde do personagem como **(Perca 2 pontos de saúde)**.

Caso o Investigador chegue a 0 pontos de saúde ***o aluno não perde o jogo***, mas representa que o seu personagem foi tomado pela doença, e deve continuar a história mesmo assim.

Existem também **equipamentos**, listados na secção de regras do Livro-Jogo, que os alunos utilizarão ao longo da história. Cada equipamento terá seu uso indicado como um comando ao decorrer da narrativa. Sempre que a história apresentar a opção de usar um item, cabe ao jogador utilizá-lo ou não. Visto que cada equipamento **pode ser usado apenas uma vez**.

2.2. COMO APLICAR O MATERIAL?

A aplicação do Livro-Jogo 'Conspiração Contaminante' tem como objetivo central a consolidação de conteúdos relacionados à Função Exponencial. Dessa forma, sua implementação pressupõe que a turma já possua conhecimento prévio sobre o tópico abordado, de modo que este recurso pedagógico possa atuar como uma contribuição complementar ao processo de aprendizagem do referido conteúdo.

O recurso principal é o próprio Livro-Jogo, o qual deve ser entregue aos alunos em formato impresso ou digital (PDF). Adicionalmente, faz-se uso do 'Relatório do Investigador', um documento cuja disponibilização em formato impresso é imprescindível, a fim de que os alunos possam realizar os devidos registros no decorrer da narrativa, ambos podem ser obtidos em sua íntegra no Capítulo 3 desta obra ou por meio do link².

Para além dos recursos já mencionados, faz-se necessária a utilização de **dados de seis faces** para a superação dos desafios propostos nos blocos de 'Dificuldade'. Cabe destacar, contudo, que os dados físicos são passíveis de

² <https://drive.google.com/drive/folders/1mWI1LwTeeQx76EHxKrnsVJogxrNTJ5pu?usp=sharing>

substituição por suas versões digitais, disponíveis em plataformas online ou aplicativos que emulam o seu lançamento.

Com conhecimento dos materiais a serem aplicados, recomenda-se a leitura atenta das regras, tanto as que são dissertadas neste capítulo quanto as descritas no próprio Livro-Jogo. Tal procedimento tem como objetivo assegurar a plena compreensão da dinâmica do jogo, de modo a capacitar o professor para a exposição clara de seu funcionamento aos alunos.

Uma vez que os materiais estejam preparados e as regras compreendidas, pode-se dar início à aplicação em sala de aula. Embora a proposta possa ser implementada de forma individual, os resultados obtidos durante a validação da pesquisa indicam contribuições mais significativas quando aplicado em grupo.

Dessa forma, recomenda-se a organização dos discentes **em equipes de 3 a 5 integrantes**. Ainda que não haja um limite técnico para o número de grupos por turma — visto que não interagem entre si —, ressalta-se que um quantitativo superior a cinco equipes pode dificultar o gerenciamento da atividade por parte do professor.

A aplicação da proposta pode ser conduzida em um único encontro, com uma duração total estimada entre duas e três horas. Contudo, é pertinente observar que o volume expressivo de leitura pode tornar a atividade exaustiva para os alunos. Nesse sentido, recomenda-se a realização de pausas estratégicas durante a implementação ou, como alternativa, o seu fracionamento em múltiplos encontros.

Desta forma ao chegar em sala de aula deve se iniciar com a divisão da turma em grupos, e então realizar a distribuição dos materiais para cada grupo, uma cópia do Livro-Jogo “Conspiração Contaminante”, uma cópia do Relatório do investigador e um dado de seis faces. Após isso se deve realizar a explicação da atividade à turma, assim como a explicação das regras.

Durante a condução da atividade, recomenda-se que o docente incentive a autonomia dos discentes, uma vez que a proposta foi estruturada para que estes possam, por si sós, realizar a leitura e solucionar os problemas apresentados. Nesse sentido, é fundamental que o professor atue como um mediador do processo, proporcionando aos alunos a liberdade para refletir e desenvolver suas próprias estratégias. Sua intervenção deve se limitar a sanar dúvidas pontuais, sem, contudo, fornecer as respostas de forma direta, a fim de não comprometer o protagonismo do estudante.

3. LIVRO-JOGO: CONSPIRAÇÃO CONTAMINANTE

Neste capítulo apresentamos na íntegra o Livro-Jogo “Conspiração Contaminante” e em conjunto disponibilizamos o Relatório do investigador para que possam ser impressos e assim disponibilizados aos alunos, e para facilitar este processo estes dois materiais podem ser obtidos a partir do seguinte link³.

Objetivos: Consolidar conteúdos relacionados a função exponencial

Materiais utilizados: Livro-Jogo “Conspiração Contaminante”, Relatório do Investigador; Dados de 6 fases, papel, caneta ou lápis.

Tempo Estimado: 3 a 4 horas/aula.

Procedimento: O primeiro Passo dessa atividade é dividir os alunos em equipes de até 5 alunos de modo que todos possam participar. Entregar para os alunos os materiais correspondentes aos grupos, fazer a explicação para a turma das regras do jogo, e assim iniciar a atividade.

³ <https://drive.google.com/drive/folders/1mWI1LwTeeQx76EHxKrnsVJogxrNTj5pu?usp=sharing>

CONSPIRAÇÃO CONTAMINANTE

(LIVRO-JOGO)

INTRODUÇÃO

Você está prestes a iniciar a leitura de um Livro-Jogo, ou seja, uma história interativa em que você pode tomar as decisões durante todo o percurso da história. Cada uma de suas decisões podem refletir diretamente na história.

Nessa História fictícia você irá assumir o papel de um Investigador do Governo Espanhol, durante o ano de 1918. Sua missão consiste em apurar a origem de uma doença misteriosa que assola a cidade de Girona. O prefeito local suspeita de uma conspiração internacional, na qual potências em guerra estariam utilizando a enfermidade para desestabilizar a Espanha. Então você deverá buscar pistas, solucionar os problemas relacionados à doença e reunir indícios que possam confirmar a existência da conspiração na cidade.

REGRAS

Para guiar sua experiência com estes jogos, ele possui, como todo jogo, regras a serem seguidas. Temos as regras das cenas e as regras da ficha de seu personagem, como descrevermos a seguir.

REGRAS DE LEITURA

A história é dividida em blocos numerados, e em cada bloco há comandos a qual sempre aparecem entre parênteses e negrito, exemplo:

(Vá para o bloco 10);

(Dificuldade: 2);

(Perca 2 pontos de saúde);

Os comandos aparecem conforme você realiza escolhas ao longo da história, então para se seguir a história é necessário segui-los.

Comandos como **(Vá para o bloco 10)** indicam a que bloco é preciso seguir para dar continuidade a leitura;

COMANDOS DE DIFICULDADE

Já os comandos de dificuldade - como **(Dificuldade: 2)** - ocorrem conforme desafios surgem, e para superar estes desafios é necessário jogar o dado. Caso o valor do dado seja igual ou maior à dificuldade você obtém um sucesso; caso seja menor ocorre uma falha. Exemplo:

(Dificuldade: 3)

Sucesso: **(Vá para o bloco 9)**

Falha: **(Vá para o bloco 37)**

Ao ver este comando role o dado. Você terá um **Sucesso** caso o valor rolado no dado **seja igual ou maior o valor da dificuldade**, no caso acima igual ou maior que 3.

Já uma **Falha** ocorre quando o valor do dado é **menor que o valor da dificuldade**. Ou seja, no exemplo acima, um valor menor que 2.

Sucesso ou falhas levam a caminhos diferentes na história, mas não necessariamente a caminhos melhores ou piores.

RELATÓRIO DO INVESTIGADOR

A ferramenta mais importante para este Livro-Jogo é o chamado "**Relatório do Investigador**", um material complementar a este Livro. Neste material você irá registrar informações do seu investigador e os caminhos traçados durante a sua história.

No **Relatório do Investigador** você deve:

(I) Registrar a trajetória percorrida, isto é, a sequência de cenas escolhidas ao longo da aventura, desde o início até o desfecho. Este registro deve ser feito nos quadrados indicados.

(II) No relatório, além de registrar o caminho percorrido, deve-se anotar decisões tomadas, justificativas, cálculos e demais informações sempre que solicitado ao longo da aventura. Cada bloco possui uma área de registro correspondente.

O INVESTIGADOR

Como este se trata de um Livro-Jogo, você irá encarnar no papel do personagem principal, portanto cabe a você escolher o nome do **Investigador**, registrar os Itens que irão lhe auxiliar ao longo da história e tomar cuidado com a saúde do personagem.

Registre as seguintes informações no Relatório do Investigador:

Nome: Escolha um nome para seu personagem;

Pontos de Saúde: 10

Seu Investigador possui pontos de saúde que representa o bem-estar do seu personagem. Algumas escolhas podem acabar afetando a saúde do personagem como **(Perca 2 pontos de saúde)**.

Caso o Investigador chegue a 0 pontos de saúde ***você não perde o jogo***, mas representa que o seu personagem foi tomado pela doença. Continue a história mesmo assim.

Equipamentos:

Cada equipamento terá seu uso indicado como uma das ações do personagem.

Sempre que a história apresentar a opção de usar um item, você poderá utilizá-lo e seguir o caminho correspondente. Mas atenção: cada item pode ser usado apenas uma vez. Assim que usar apague-o do Relatório.

Portanto, pense bem antes de usá-lo.

1 equipamento de proteção contra contaminação (após seu uso descarte-o);

50 Pesetas (Moeda Espanhola);

Carta do prefeito de Girona;

Agora que você viu as regras, vamos iniciar a investigação

(Vá para o bloco 1)

[1]

Acomodado em uma poltrona, você observa pela janela os vastos campos agrícolas que se estendem até onde a vista alcança. Ao longe, elevam-se colinas e montanhas baixas. Trata-se das terras ao redor de Girona, cidade próxima à fronteira com a França — seu destino.

O trem segue firme pelos trilhos, embalando o pensamento. Você tenta recordar, com clareza, qual sua missão. Em busca de respostas, volta o olhar para suas mãos: nelas, um envelope oficial, endereçado ao prefeito de Girona.

O documento é sua credencial — e talvez sua chave para entender o que está por vir. Diante de você, sentados na poltrona oposta, dois homens permanecem atentos. São os agentes designados para garantir sua segurança. Silenciosos, prontos para agir ao menor sinal de perigo. Então você decide:

- Perguntar aos homens detalhes da missão **(Vá para o bloco 2)**
- Abrir e ler o documento **(Vá para o bloco 3)**
- Forçar a mente e tentar se lembrar sem ajuda **(Vá para o bloco 4)**

[2]

Um dos agentes, um homem de expressão rígida e olhar atento, inclina-se levemente em sua direção.

— Recebemos ordens diretas de Madri para garantir que você fique em segurança — diz ele, em tom contido: — Há rumores de que algo grave está acontecendo em Girona. Não é só uma doença comum. Acredita-se que possa haver interferência estrangeira, talvez até sabotagem.

O outro agente, mais jovem, completa: — Sua missão é descobrir o que está por trás disso tudo e manter discrição total. Não confie em ninguém.

O agente interrompe a fala por alguns instantes, voltando o olhar para a janela. Após uma breve pausa, diz com seriedade:

— Estamos nos aproximando de Girona. É melhor que esteja preparado. Um único erro pode custar bem mais do que apenas o fracasso da missão.

(Vá para o bloco 7)

[3]

Você observa o envelope em suas mãos por alguns segundos, hesitante. Com cuidado, rompe o lacre de cera e retira os papéis do interior.

As primeiras linhas confirmam a gravidade da situação: o surto em Girona já causou dezenas de mortes, e há indícios de que os sintomas não correspondem a nenhuma doença conhecida.

O documento serve, sobretudo, para identificá-lo como agente da Coroa Espanhola, mas não concede qualquer poder policial. E garante liberdade de investigação dentro dos limites da cidade.

Uma nota final, sublinhada em letras firmes, chama sua atenção:

"A possibilidade de ação inimiga não deve ser descartada. Seja discreto. Seja rápido."

— Estamos nos aproximando de Girona. É melhor que esteja preparado. Diz um dos agentes, o encara por um breve instante, depois volta o olhar para a janela.

(Vá para o bloco 7)

[4]

Você fecha os olhos por um momento, tentando puxar da memória os detalhes que lhe foram passados. A viagem até Girona, a escolta discreta, o nome do prefeito; tudo ainda parece envolto em névoa, como se as informações tivessem sido entregues às pressas — ou propositalmente em pedaços.

(Dificuldade: 2)

- Sucesso: **(Vá para o bloco 5)**
- Falha: **(Vá para o bloco 6)**

[5]

Você se lembra de homens em Madri, relatando um surto na cidade de Girona... uma doença desconhecida, mortes rápidas, suspeitas de sabotagem. Seu papel é descobrir a verdade. Mas quanto mais força faz para lembrar, mas percebe que certas partes foram deixadas de fora — talvez de propósito.

Enquanto você estava imerso em seus pensamentos, uma voz firme cortou o silêncio e o fez levantar os olhos num sobressalto

— Estamos nos aproximando de Girona. É melhor que esteja preparado. Diz um dos agentes e depois volta o olhar para a janela **(Vá para o bloco 7)**

[6]

Você força a cabeça, tentando se lembrar...mas nada vem.

Lembra de uma sala escura, alguém falando rápido, talvez até demais, e o som de um selo sendo carimbado — e só.

Sem não conseguir lembrar, vai ter que confiar nos outros... e isso, nesse tipo de missão, pode ser um erro bem perigoso.

Enquanto você estava imerso em seus pensamentos, uma voz firme cortou o silêncio e o fez levantar os olhos num sobressalto.

— Estamos nos aproximando de Girona. É melhor que esteja preparado.

Os dois agentes continuam te encarando. O clima no vagão pesa, como se o ar estivesse mais denso a cada minuto.

Fugir passa pela sua cabeça. Mas ao mesmo tempo... você sabe que isso não vai apagar o que está vindo.

E talvez fugir só torne tudo pior. A missão parece suicida, mas continuar é a única coisa que você pode fazer agora — ou pelo menos é o que parece.

- Continuar a missão e seguir até Girona **(Vá para o bloco 7)**
- Fugir do trem na próxima parada **(Vá para o bloco 87)**

[7]

O trem para devagar na estação. Quando você olha pela janela, a cidade de Girona aparece bem na sua frente — bonita, cheia de prédios antigos e ruas estreitas. Já são 10h da manhã, e a cidade começa a ganhar movimento. Você desce do trem sabendo o que precisa fazer primeiro: achar a prefeitura e tentar falar com o prefeito.

- Tentar encontrar a prefeitura por conta própria, andando pelas ruas e observando placas e prédios oficiais **(Vá para o bloco 8)**
- Pedir informações a um dos moradores **(Vá para o bloco 9)**

[8]

Você começa a caminhar pelas ruas de pedra, observando com atenção as construções ao redor. Placas antigas, fachadas trabalhadas, cruzamentos estreitos... tudo parece igual à primeira vista. Ainda assim, você segue.

(Dificuldade: 3)

- Sucesso: **(Vá para o bloco 11)**
- Falha: **(Vá para o bloco 10)**

[9]

Você se aproxima de um senhor de boina que carrega uma sacola de frutas. Ele te encara com curiosidade, mas seu olhar logo muda ao notar os seguranças que caminham logo atrás de você. Ele fica intimidado, hesita em responder, mas ainda parece disposto a ouvir o que você tem a dizer.

(Dificuldade: 4)

- Sucesso: Você transmite segurança e o morador, ainda que apreensivo, responde a sua pergunta **(Vá para o bloco 12)**
- Falha: Sua aproximação só aumenta o desconforto. O homem assustado, se afasta sem dar qualquer resposta. **(Vá para o bloco 10)**

[10]

Você e os seguranças caminham pelas ruas. Depois de algum tempo andando em círculos, os três já estão claramente desorientados. É então que um senhor, de aparência simples e olhar gentil, percebe a confusão. Ele se aproxima devagar, com as mãos nos bolsos do casaco surrado, e pergunta:

— Estão perdidos, rapaz?

Você explica que está procurando a prefeitura. O homem sorri com simpatia e aponta para o final da rua.

— Siga por ali, depois vire à esquerda. Vai ver um prédio grande, com quatro andares e janelas altas. É lá.

Antes de se despedir, ele dá uma leve batida no seu ombro com a mão e, em seguida, solta uma tosse seca e forte, sem conseguir desviar o rosto a tempo. O som rasgado ecoa por um segundo, talvez fosse só uma gripe comum ou não.

(Dificuldade: 5)

Sucesso: Você não sente nenhum sintoma e segue o caminho sem problemas.

Falha: Uma sensação estranha começa a surgir **(Perca 4 pontos de saúde).**

(Vá para o bloco 11)

[11]

Você segue pelas ruas da cidade até finalmente chegar à prefeitura. À sua frente, se ergue um grande prédio de quatro andares, com traços arquitetônicos que misturam o gótico do século XV com detalhes mais recentes, típicos do início do século XX.

Ao entrar no edifício, nota que está quase vazio, e atrás de uma mesa de madeira, bem ao centro, uma jovem mulher branca, de cabelos e olhos castanhos, se levanta assim que percebe sua chegada. Ela sorri de maneira cordial e os cumprimenta.

— Bom dia, Cavalheiros, eu me chamo Clara, como posso ajudá-los?

Você puxa o documento oficial que carrega consigo e o entrega a Clara. Ela pega o papel com certo cuidado, lê rapidamente e, ao terminar, ergue os olhos com uma expressão um pouco mais séria.

— Entendo... — diz, devolvendo o documento. — Nesse caso, por favor, me acompanhe. Vou levá-lo até o gabinete do prefeito. **(Vá para o Bloco 13)**

[12]

Apesar da presença dos seguranças causar um certo desconforto, você consegue manter a calma e aborda o morador de forma educada. Ele hesita por um momento, mas acaba respondendo em voz baixa, ainda desconfiado:

— Saindo da estação, vá pela avenida principal em frente, siga reto até passar por uma pequena praça com uma fonte. Depois, entre na segunda rua à direita. A prefeitura fica logo adiante, é um prédio de quatro andares.

Sem prolongar a conversa, ele se despede com um aceno contido e segue seu caminho. Agora, você já tem uma direção clara para seguir.

(Volte para o bloco 11)

[13]

Clara segue à frente guiando vocês ao quarto andar. Ao chegarem diante de uma porta, Clara pede que aguardem um instante, bate suavemente e ouve-se uma voz masculina respondendo do outro lado.

Ela abre a porta com cuidado, troca algumas palavras rápidas com quem está lá dentro e, logo em seguida, faz sinal para que entrem.

O prefeito Díaz sentado à mesa, rodeado por pilhas de papéis e com uma caneta-tinteiro em mãos. De estatura mediana, aparentando seus 45 anos, Díaz tem cabelos grisalhos, barba por fazer e olhos de um azul profundo.

— Sejam bem-vindos — diz ele, com um gesto para que entrem.

— Me chamo Díaz, prefeito de Girona. Gostaria de conhecer cada um de vocês, mas antes, precisamos ir direto ao que importa.

— A doença apareceu no hospital da cidade há alguns dias — explica Díaz. — Foi identificada pelo médico Dr. Santiago. Os sintomas são sérios: febre alta, dores fortes nas articulações e na cabeça, além de comprometer o sistema respiratório. E o pior é que, os pacientes só pioram... muitos já não resistiram.

— Ainda estamos tentando entender como essa doença se espalha — continua o prefeito, com um tom preocupado.

— Pelo que conseguimos levantar ***dentro do intervalo de uma semana o total de contaminados é triplicado.***

— O que você me diz, doutor? Ao que parece na primeira semana de infecção tínhamos 3 casos. ***Há como estimar quantos casos teríamos na primeira, na segunda e na terceira semana, respectivamente?***

Você pensa por um momento e responde:

- 3, 6 e 9 casos, respectivamente. **(Vá para o bloco 14)**
- 3, 9 e 27, casos, respectivamente. **(Vá para o bloco 15)**

[14]

Ao compartilhar sua ideia com o prefeito, diz que talvez o número de infectados aumente de forma linear, crescendo de três em três — três na primeira semana, seis na segunda, nove na terceira. O prefeito não parece convencido:

— O Dr. Santiago não era tolo... Por que ele escreveria com tanta urgência se o avanço fosse tão lento assim?

Algo no tom de voz dele denuncia inquietação. Com calma, abre um relatório sobre a mesa, empurrando-o em sua direção.

Talvez, completando os dados deixados pelo médico, você consiga entender melhor o que ele quis dizer com "***triplicar***". Será mesmo um crescimento lento? Ou a ameaça é maior do que parece? **(Vá para o bloco 16)**

[15]

— Sua linha de raciocínio está certa — responde Díaz, assentindo com a cabeça. — É exatamente o que o Dr. Santiago relatou.

Com isso, Díaz destranca uma das gavetas da mesa e puxa um envelope com o símbolo de um hospital estampado. Coloca o documento sobre a mesa, bem à sua frente. — Esse é o relatório preliminar que o Dr. Santiago conseguiu me entregar — diz, com um olhar sério.

— Mas, com tantos doentes chegando, ele não teve tempo de completar tudo. Mesmo assim, o que tem aí já dá uma boa ideia de como essa doença está se espalhando. Você acha que consegue me ajudar a completar essas informações? pergunta Díaz. **(Vá para o bloco 16)**

[16]

Na carta o Dr. Santiago descreve os sintomas enfrentados pelos pacientes e destaca que, até o momento, nenhum tratamento apresentou qualquer eficácia. Diante disso, o médico sugere que medidas de contenção devem começar a serem tomadas de imediato, para impedir o espalhar da doença pela cidade e pelo país.

Logo abaixo na carta, o Dr. Santiago apresenta uma relação incompleta do número de infectados registrados a cada semana desde a identificação dos primeiros casos.

Figura 1 - Relação Incompleta Carta de Santiago;

HOSPITAL SANTA CATALINA 	
SEMANA	NUMÉRO DE CONTAMINADOS
1	3
	9
3	
4	

(Esboce e preencha o quadro no seu Relatório do Investigador)
(Vá para o bloco 17)

[17]

O prefeito agradece pela sua dedicação e fala sobre o pedido do Dr. Santiago para estudar a sequência de casos da doença, mas admite que, com todos os problemas que enfrenta na cidade, não conseguiu dar conta da tarefa.

Ele aponta para a anotação deixada pelo médico na carta:

“A chave está em escrever o valor do número de infectados como um produto de um ou mais números.”

Ele franze a testa, balança a cabeça devagar e desabafa:

— Confesso que não entendi muito bem o que ele quis dizer com isso... talvez tenha algo a ver com matemática. Você conseguiria me ajudar a escrever esses números dessa forma?

(Anote no seu Relatório do Investigador)
(Vá para o bloco 18)

[18]

O prefeito coça a cabeça, confuso, e olha para os números escritos na folha com uma expressão cansada.

— Obrigado por me ajudar nesta etapa... — diz ele. — Mas como não sou muito hábil com matemática, esse tipo de representação ainda parece complicado pra mim. Existe alguma forma mais simples de entender essas multiplicações repetidas?

Você pensa por um instante e lembra de um recurso útil: **Potenciação.**

(Vá para o bloco 19)

[19]

— Era exatamente isso que Santiago havia pensado... — diz em voz baixa, quase para si mesmo. — ***Está na última página da carta. Ele deixou um quadro, disse que aquilo ajudaria a entender de vez a gravidade da doença. Na época, confesso que não compreendi, mas agora...***

Figura 2 – Quadro final da Carta de Santiago;

HOSPITAL SANTA CATALINA 		
SEMANA	NUMÉRO DE CONTAMINADOS	NUMÉRO DE CONTAMINADOS COMO UMA POTÊNCIA
1	3	3
	9	3^2
4		

SANTIAGO
 DRº. SANTIAGO
 Médico Chefe

(Esboce o quadro e o preencha no seu Relatório do Investigador)
 (Vá para o bloco 20)

[20]

Díaz folheia a carta com mais cuidado, os olhos buscando algo específico. Então, aponta para o rodapé da última página. Há uma anotação feita à mão, com a caligrafia trêmula de Santiago, como se tivesse sido escrita às pressas.

— Aqui está... — diz o prefeito, deslizando o dedo sob a frase sublinhada. — Essa foi a última pergunta que ele me fez antes de me entregar a carta.

"Díaz, meu amigo... você consegue, não é? Perceber que existe uma relação entre o número de semanas e o valor contido na potência?"

Ele se encosta na cadeira e cruza os braços, olhando para você como se esperasse que a resposta viesse agora, não de Santiago, mas de você.

- Se você acredita ter entendido a relação entre o número de semanas e o valor do expoente na potência **(Anote no seu Relatório do Investigador e Vá para o bloco 22).**
- Se ainda não consegue ver essa relação, ou prefere não arriscar **(Vá para o bloco 21)**

[21]

Díaz suspira fundo, mas não com decepção — e sim com preocupação, e percebendo a sua confusão diante dos números e potências, se inclina levemente para frente, repousando os cotovelos sobre a mesa. Com um tom mais calmo e paciente, ele diz:

— Entendo que não seja simples à primeira vista. Vamos fazer assim: coloque os números lado a lado. De um lado, as semanas — 1, 2, 3, e assim por diante e ao lado desses números coloque as potências de base 3: 3^1 , 3^2 ...

— Perceba que a cada semana o número de infectados é um 3 multiplicado por ele mesmo várias vezes.

(Desenvolva a expressão no seu Relatório do Investigador)
(Vá para o bloco 22)

[22]

Díaz cruza os braços e solta um suspiro, com um tom de alívio.

— Agora finalmente conseguimos entender o comportamento da doença — diz ele, enquanto observa novamente o relatório. — Para saber o número de contaminados, basta olhar a semana estamos e usar potências de base 3.

— Agora, antes de enviarmos essas informações ao Hospital Santa Catalina, precisamos desenvolver uma forma clara para que os médicos de lá também possam fazer os cálculos e acompanhar o avanço da doença.

— ***Vamos chamar de t o tempo em semanas e C o número de contaminados.***

Com base descobriu, pode-se escrever a expressão assim:

(Desenvolva a expressão no seu Relatório do Investigador)
(Vá para o bloco 23)

[23]

— Leve essas informações ao Hospital Santa Catalina o quanto antes. O Dr. Santiago e sua equipe precisam saber disso. Talvez, com esses dados, eles consigam conter a doença antes que ela se espalhe ainda mais. Confio essa tarefa a você, investigador... vidas dependem disso.

Anote o Item “***Permissão do Prefeito***” no seu Relatório do Investigador.

— Pensando bem. Reflete o prefeito.

— Você mal chegou à cidade. Deve estar cansado da viagem. Talvez o melhor agora fosse ir até o hotel e descansar um pouco antes de seguir para o hospital. Mas deixo essa escolha em suas mãos. Seja como for, o tempo é precioso.

- Ir ao hotel primeiro, para recuperar as energias e se preparar melhor para os próximos desafios. **(Vá para o bloco 24)**
- Ir direto ao hospital, para encontrar médicos em meio ao caos e talvez fazer a diferença imediatamente. **(Vá para o bloco 35)**

HOTEL ROSA DE OÑAR

[24]

Você segue até o hotel para sua estadia em Girona. Trata-se do Hotel Rosa de Oñar, nome dado em homenagem a um dos rios que corta a cidade.

O prédio, de três andares e fachada vermelha, tem um estilo que lembra as tavernas medievais. Assim que atravessa a porta, percebe que o térreo funciona como restaurante: mesas e cadeiras de madeira estão distribuídas por todo o salão, criando um ambiente acolhedor.

Atrás do balcão, encontra-se um senhor idoso — cabelos brancos, roupas vermelhas simples, e um sorriso quase desdentado, mas cheio de simpatia.

— Venham, venham, sejam muito bem-vindos ao Rosa d'Oñar, a melhor hospedaria da cidade, não tenham a menor dúvida! — diz com entusiasmo. — No que o velho senhor Ortega poderia lhes ser útil?

Você se apresenta ao senhor Ortega, e solicita um quarto. Agora, é hora de decidir como deseja proceder para garantir sua acomodação no Rosa d'Oñar:

- Apenas pagar pela estadia (**Use as o item "50 Pesetas" e vá para o bloco 25**)
- Relatar que está a serviço do prefeito (**Vá para o bloco 26**)

[25]

Você apenas menciona que precisa de um quarto e realiza o pagamento.

— Muito bem! Com um gesto tranquilo, entrega a chave do quarto 7, no segundo andar. — Cama boa e banho quente, é o que oferecemos.

Nas paredes, você repara em várias fotos antigas em molduras gastas. Em algumas, vê uma jovem sorridente de cabelos castanhos e olhos vivos.

O velho percebe seu olhar fixo nas fotos e, com um suspiro quase imperceptível, comenta: — Essa é minha filha Rosa, ele se cala por alguns segundos. Sua expressão muda, deixando transparecer certa tristeza.

- Percebendo a expressão do senhor Ortega, você pergunta o que houve (**Vá para o bloco 27**)
- Optando por não se envolver, você apenas agradece, entra no quarto e encerra a conversa ali. (**Vá para o bloco 28**).

[26]

Assim que você menciona que está a serviço do prefeito, o semblante de Ortega muda. Seu sorriso diminui e um olhar preocupado surge em seus olhos.

— O prefeito me disse que vocês vieram para ajudá-lo com problemas no saneamento, mas pelas suas roupas e equipamentos... diria que são médicos!

— Talvez isso seja um abuso de minha parte, mas apenas se tiverem tempo, eu peço por favor que ajudem a minha Rosa, ela está muito doente.

Você entra no quarto com a chave em mãos, mas agora carrega mais do que bagagem — carrega também um pedido comovente.

- Se desejar ajudar Ortega e sua filha Rosa. (**Vá para o bloco 28**)
- Se preferir descansar, vá direto para o quarto. Afinal, a investigação que o aguarda no dia seguinte é urgente. (**Vá para o bloco 29**)

[27]

Ao notar a expressão entristecida, você pergunta se está tudo bem.

Ele fala com a voz carregada de pesar.

— Desculpe,... é que... tenho passado noites em claro por causa da minha filha. Rosa. Desde que minha esposa se foi, ela é tudo o que me resta. Mas agora, a pobrezinha está doente e nenhum remédio tem feito efeito.

— Sei que não devo me meter na vida de ninguém, mas... pelo seu jeito, me parece um médico, ou algo do tipo. Seria um abuso da minha parte pedir para dar uma olhada nela? Ela está muito doente.

- Se desejar ajudar Ortega e sua filha Rosa **(Vá para o bloco 28)**
- Se preferir descansar, vá direto para o quarto. Afinal, a investigação que o aguarda no dia seguinte é urgente **(Vá para o bloco 29)**

[28]

Ao ouvir que você está disposto a ajudar, o senhor Ortega parece aliviado. Seus olhos marejam discretamente e ele solta um suspiro contido.

— Muito obrigado, meu jovem... por favor, me acompanhem. Ela está no andar de cima, no quarto ao final do corredor.

Antes de girar a maçaneta, você pensa se algum dos seus itens pode ser útil nessa situação:

- Entrar diretamente no quarto para examinar Rosa **(Vá para o Bloco 30)**
- Verificar seus Itens antes de entrar **(Vá para o Bloco 31)**

[29]

Ao entrar em seu quarto, a luz suave do abajur ilumina as paredes vermelhas e os móveis simples de madeira. O corpo pede por descanso. Deita-se na cama, olhando por instantes para o teto antes de fechar os olhos. Sabe que o dia seguinte será decisivo para entender essa doença.

(Vá para o bloco 34)

[30]

Você entra no quarto com cuidado. O ambiente é abafado e com pouca luz. Sobre a cama, uma jovem de cerca de 15 anos está sentada.

Ela segura uma tigela de ensopado, tentando se alimentar apesar do cansaço evidente. A cada movimento, solta um leve gemido de dor.

O senhor Ortega se aproxima da cama e fala com carinho:

— Minha filha, esse grupo gentil decidiu nos ajudar. Eles são médicos e sabem o que fazer para que você melhore. Deixe que eles a examinem.

À primeira vista, os sintomas da jovem lembram apenas um resfriado comum. No entanto, ao realizar um exame mais cuidadoso, você começa a notar sinais preocupantes.

Na mão esquerda dela, há um lenço de pano branco, manchado com sangue vindo do nariz e da boca. Ao medir sua temperatura, o resultado ultrapassa os 39,5°C. Ela relata dores fortes na cabeça e nas articulações, além de demonstrar clara dificuldade para respirar.

(Vá para o bloco 32)

[31]

Você vasculha rapidamente seus pertences, refletindo sobre a possibilidade de contágio. Então se lembra de um dos itens que carrega: um equipamento de proteção contra contaminação. Luvas grossas e uma máscara ajustável compõem o conjunto, usado anteriormente em zonas de risco sanitário.

Gaste o Item "**equipamento de proteção contra contaminação**"

Com rapidez e cuidado, você veste o equipamento, ajustando cada parte ao corpo. Ortega observa em silêncio, surpreso com a precisão e o profissionalismo de seus movimentos.

Quando termina, você leva a mão até a maçaneta da porta do quarto de Rosa, pronto para examiná-la.

(Volte para o bloco 30)

[32]

Ortega cruza os braços e observa a filha com preocupação.

— Ela está nessa cama há três dias. Antes disso, estava bem, trabalhando normalmente no restaurante. Isso é... até aquele rapazinho aparecer.

Rosa, de voz fraca e interrompida por tosses, tenta defender o visitante:
— Papai, por favor... (tosse) o rapaz foi um cavalheiro. Ele só estava me ajudando a entender os pedidos.

O velho franze o cenho, impaciente.

— Ele estava perto demais, perto demais de você pro meu gosto. Aquele tal de Maxwell, com aquele uniforme Francês.

— É Maximilien... — corrige Rosa, com esforço — e não é nada do que o senhor pensa, meu pai... (espiro) deixe o rapaz fora disso, por favor...

Com isso, você percebe que Rosa, filha do senhor Ortega, foi infectada após o contato com um rapaz de nome **Maximilien**.

O velho pousa a mão no peito, como quem tenta conter a raiva:

— Eu não poderia ter mais certeza. Vi aquele sujeito tossindo o tempo todo enquanto esteve aqui. **Mal ele apareceu, e essa doença começou a se espalhar. Foi aquele francesinho... Ele que começou tudo isso.**

Adicione o Item "**Informações sobre Rosa e Maximilien**" no seu Relatório do Investigador.

(Vá para o bloco 33)

[33]

Você explica ao senhor Ortega que, como ainda não existe um tratamento específico para a doença, o melhor a fazer é manter Rosa em isolamento.

Diz também que qualquer pessoa que teve contato direto com ela sem proteção deve se afastar por um tempo, além de reforçar a importância da alimentação e da hidratação. Ortega escuta com atenção e logo responde:

— Muito obrigado. Me desculpem pelo incômodo. Farei tudo como disseram.

Após orientar o senhor Ortega sobre os cuidados com Rosa, você se despede e sai do quarto com passos calmos, sentindo o peso do que descobriu.

Ao entrar em seu quarto, a luz suave do abajur ilumina as paredes vermelhas e os móveis simples de madeira. O corpo pede por descanso. Deita-se na cama, olhando por instantes para o teto antes de fechar os olhos.

Caso você não utilizou o Item "***Equipamento de proteção contra contaminação***" ao consultar Rosa (Perca 5 pontos de saúde).

(Vá para o Bloco 34)

[34]

Na manhã seguinte, a luz do sol atravessa as cortinas do quarto, aquecendo suavemente o ambiente. Você desperta com a mente mais clara e o corpo revigorado — o breve descanso foi suficiente para renovar suas forças.

- Seguir para o Hospital Santa Catalina **(Vá para o Bloco 35)**
- Caso já tenha investigado o Hospital **(Vá para o Bloco 65)**

HOSPITAL SANTA CATALINA

[35]

Após uma caminhada de cerca de um quilômetro pelas ruas da cidade, você finalmente avista o Hospital Santa Catalina.

Os portões estão abertos, sem nenhum guarda ou funcionário por perto.

A construção, feita em parte com as pedras de Girona — típicas da região —, destaca-se pelos detalhes em porcelanato amarelo, especialmente a partir do segundo andar, dando ao local um aspecto elegante e acolhedor.

Próximo à entrada principal, uma jovem de cabelos loiros e curtos chama a atenção. Ela usa um uniforme de enfermeira impecável e segura uma prancheta com a mão direita, escrevendo com agilidade com a mão esquerda.

Mesmo com a expressão calma e um leve sorriso no rosto, seus olhos permanecem fixos nas anotações, sem dar muita atenção ao redor.

— Olá, no que posso ajudar? — pergunta a enfermeira;

— Preciso informar que nossa capacidade de atendimento está limitada.

Usar o Item "**Permissão do Prefeito**" para se identificar (**Vá para o bloco 36**)

[36]

Você retira de dentro da bolsa a carta com o selo da prefeitura e a entrega à jovem enfermeira. Ela pausa por um instante, encara o documento e, ao reconhecer o brasão, sua postura muda sutilmente.

— Ah, entendo... vieram a mando do prefeito, me acompanhem.

A enfermeira se vira e começa a guiá-los pelos corredores do hospital.

— Me chamo Patrícia. Fico à disposição.

Com isso ela coloca sua máscara e adentra ao hospital.

- Gastar o Item "equipamento de proteção contra contaminação" (**Vá para o bloco 37**)
- Pedir um "equipamento de proteção contra contaminação" a enfermeira (**Vá para o bloco 38**)

[37]

A jovem enfermeira os guia para dentro do hospital, sem trocar palavras com os pacientes que gemem ao redor, ela segue confiante e durante o trajeto, sua postura chama atenção: indiferente aos doentes que sofrem nos corredores, ela segue ajeitando os cabelos com os dedos e trocando olhares insinuantes com outros funcionários.

Mudando de direção, a moça conduz o grupo por outro corredor. Ali, três enfermeiras e um médico atendem pacientes deitados fora dos quartos, sobre leitos improvisados.

O médico, de costas, preenche prontuários em uma prancheta. É um homem baixo, careca, por volta dos 50 anos, com um cavanhaque branco e barriga proeminente. Ele observa a enfermeira e pergunta:

— Senhorita Patrícia, terminou suas tarefas?

Ela responde:

— Ainda não, doutor. Estes senhores têm assuntos a tratar com o hospital, então os trouxe até o senhor. Com licença.

A enfermeira se despede com um aceno e o médico se vira lentamente para o grupo e ajusta a máscara sobre o rosto:

— Por favor, sejam breves. Quem são os senhores e o que desejam?

Você informa que está a serviço do prefeito da cidade, trazendo dados importantes sobre o avanço da nova doença.

Ao ouvir isso, o médico se mostra mais atento, ajeita os óculos sobre o nariz e diz com um leve aceno:

— Muito bem, senhores. Sou o Dr. Perez, responsável por esta ala do hospital. Acompanhem-me até minha sala, acredito que precisamos discutir.

(Vá para o bloco 39)

[38]

Ao perceber que está prestes a adentrar uma ala com risco de contaminação, você leva a mão à bolsa instintivamente, mas logo se dá conta: Você não tem mais seu equipamento de proteção.

Com a situação exigindo cautela, você se aproxima da enfermeira Patrícia. E pergunta a ela se há algum disponível no hospital.

— Estamos com falta de equipamentos, infelizmente... — responde a enfermeira em tom preocupado, mas logo acrescenta, enquanto olha em direção a uma sala ao lado

— Espere aqui. Talvez eu consiga algo para você.

(Dificuldade: 4)

Sucesso: Ela o entrega um "equipamento de proteção contra contaminação".

Falha: Não há equipamentos disponíveis, terá que prosseguir sem proteção.

(Volte para o bloco 37)

[39]

Enquanto seguem pelo corredor em direção à sala do doutor, você passa diante de uma grande janela de vidro, parcialmente transparente, que dá vista para a zona de quarentena, um setor isolado do hospital.

Através dela, é possível ver o ambiente superlotado, com mais de 80 pacientes em leitos improvisados, distribuídos por todo o espaço.

O olhar dos pacientes transmite angústia, e a cena deixa claro que o lugar já ultrapassou sua capacidade há muito tempo. O médico reduz o passo, observa a cena por alguns segundos e comenta em tom baixo:

— Essa é uma situação deplorável... me envergonha não poder fazer nada. Santiago, mesmo com todo seu talento, nada pôde fazer além de manter os doentes em isolamento. Creio que ele percebeu que não havia mais o que fazer por essas pessoas... e decidiu pedir ajuda externa enquanto concentra seus esforços nos hospitais de campanha. Partiu há quatro dias.

➤ Caso você possui o item "**Informações sobre Rosa e Maximilien**" (**Vá para o bloco 40**)

➤ Senão (**Vá para o bloco 41**)

[40]

Após o comentário sobre Santiago, o doutor começa a explicar:

— Ainda não sabemos o nome exato da doença. Os sintomas surgem de forma repentina: febre acima de 39°C, dores musculares e nas articulações, cefaleia intensa, tosse seca persistente, espirros e, nos casos mais graves, sangramentos nas vias respiratórias, como nariz e boca. Em alguns pacientes, nota-se também dificuldade para respirar, olhos avermelhados e uma fadiga que os impede de se levantar da cama...

Nesse momento, o médico é interrompido por sua memória. Lembra-se do caso da jovem Rosa, que apresentava exatamente os mesmos sinais: febre elevada, tosse com sangue, dores fortes e cansaço extremo.

O caso da garota também envolvia um visitante recente, o que poderia indicar uma origem clara para o contágio.

O doutor para por um instante, observando com atenção:

— Interessante... você tem um olhar atento. Vai ser de grande ajuda por aqui. Precisamos de gente assim.

(Vá para o bloco 42)

[41]

Após o comentário sobre Santiago, o doutor retoma o passo e, enquanto caminha, começa a explicar com seriedade:

— Ainda não sabemos o nome exato da doença. Os sintomas surgem de forma repentina: febre acima de 39°C, dores musculares e nas articulações, cefaleia intensa, tosse seca persistente, espirros e, nos casos mais graves, sangramentos nas vias respiratórias, como nariz e boca. Você ouve com atenção a informação dada pelo médico, e continua o trajeto até a sua sala.

(Vá para o bloco 42)

[42]

Ao chegarem à sala, o doutor destranca a porta e a empurra com certa pressa. O ambiente é simples, com pilhas de prontuários sobre a mesa e um mapa da cidade afixado à parede.

Dr. Perez, ele observa os quadros e a expressão matemática que você produziu em conjunto com o prefeito. Ao analisá-los com atenção, sua expressão muda, tornando-se mais séria.

— Estes números confirmam o que já suspeitávamos... a situação está se agravando rapidamente.

O médico então reforça mais uma vez que quem poderá fazer um uso ainda mais estratégico dessas informações é o Dr. Santiago, ele conclui:

— ***Santiago entenderá o valor disso tudo e saberá o que fazer. Encontre-o, por favor.*** Pelo que eu soube ele está em um hospital de campanha a leste da cidade.

— Contudo, há uma situação aqui no hospital que requer atenção imediata. Preciso da sua ajuda agora. É algo que não posso ignorar, e, francamente, não há ninguém além de vocês disponíveis no momento.

(Vá para o bloco 43)

[43]

— A situação aqui está fora de controle — diz o doutor, com o olhar cansado. — ***O hospital foi projetado para comportar um máximo de 512 até leitos, mas com o avanço da doença, esse número está diminuindo pela metade a cada dia.***

— Você concorda comigo, não é? — indaga o médico, ajustando os óculos no rosto. — ***Se começamos com 512 leitos e perdemos metade a cada dia, então me diga... quantos leitos temos no final do primeiro dia? E no segundo? E no terceiro?***

- 256, 128 e 64, respectivamente. **(Vá para o bloco 44)**
- 512, 1024, 2048, respectivamente. **(Vá para o bloco 45)**

[44]

— Exatamente, isso mostra o estado preocupante que estamos enfrentando aqui no hospital. A cada dia conseguimos suportar menos pacientes — diz o doutor, tirando um lenço do bolso para enxugar a testa.

Ele caminha até sua mesa, abre uma gaveta e retira um papel timbrado com o selo do hospital.

(Vá para o bloco 46)

[45]

O Dr. franze o cenho e cruza os braços, demonstrando certa desconfiança.

— Hm... creio que está se equivocando — diz ele, com tom mais sério. — Não estamos lidando com um aumento... observe: a cada dia o número de leitos é cortado pela metade.

O Dr. Perez estende a mão até a borda da mesa e puxa um documento: — Este é o formulário oficial que pretendo encaminhar ao prefeito. Preciso de ajuda para preenchê-lo com a projeção correta. Talvez, ao fazê-lo junto a mim, você compreenda melhor a situação crítica que enfrentamos.

(Vá para o bloco 46)

[46]

— Eu gostaria de solicitar ao prefeito que apenas os casos mais graves permanecessem internados, mas para isso preciso de um documento que mostre a ele uma projeção clara da redução no número de leitos a cada dia. Poderia me ajudar com isso?

Figura 3 – Relatório dos Leitos do Hospital;

PROJEÇÃO DO NÚMERO DE LEITOS DISPONÍVEIS	
DIA	NUMÉRO DE LEITOS
0	512
1	
	128
3	
4	

(Esboce o quadro e o preencha no seu Relatório do Investigador)
(Vá para o bloco 47)

[47]

Com o documento preenchido, o Dr. Perez observa atentamente os números anotados e, após alguns segundos de silêncio, ergue o olhar:

— Agora precisamos de algo mais preciso... Uma expressão matemática que represente essa progressão. Se conseguirmos desenvolver essa expressão, poderemos anexá-la ao documento e reforçar a gravidade da situação.

— Veja... na situação da propagação da doença, observamos uma multiplicação sucessiva — os casos aumentavam vezes três a cada intervalo. **Mas agora, com os leitos, temos o contrário: uma divisão sucessiva por 2.**

Ele faz uma pausa, ajustando os óculos.

— Me diga, seria possível representar essa divisão por 2 de outra forma, talvez como uma multiplicação? Afinal, dividir por 2 repetidamente também parece seguir um padrão...

— **Se no primeiro dia temos metade dos 512 leitos, como podemos escrever isso como uma multiplicação de dois números?**

➤ $512 \cdot 2$ (Vá para o bloco 48)

➤ $512 \cdot \frac{1}{2}$ (Vá para o bloco 49)

[48]

— Não, meu caro — o Dr. Perez responde com firmeza, mas sem perder a paciência —, lembre-se de que não se trata de um aumento de leitos. Muito pelo contrário. A cada dia, mais enfermos chegam ao hospital, e os recursos se esgotam. É natural que o número de leitos diminua, não aumente.

— Teste e verifique qual fração, torna o 512 para sua metade que é 256.

(Vá para o bloco 50)

[49]

— Exatamente meu amigo, — diz ele, animado —, se no primeiro dia temos 512 leitos, e no segundo dia esse número é dividido por 2, podemos pensar que estamos multiplicando 512 por um fator que represente essa metade, neste caso $\frac{1}{2}$.

Então, o Dr. continua:

— E se seguirmos, a cada novo dia, multiplicamos o valor anterior por $\frac{1}{2}$

(Vá para o bloco 50)

[50]

O Dr. Perez pega novamente o quadro de projeção que haviam começado juntos. Com um gesto rápido, traça uma nova coluna à direita e diz:

— Vamos fazer como combinamos. Já que você entendeu como representar a diminuição com multiplicação, vamos organizar isso aqui.

Figura 4 – Relatório dos Leitos do Hospital 2;

HOSPITAL SANTA CATALINA 		
DIA	NUMÉRO DE LEITOS	NUMÉRO DE LEITOS COMO UM PRODUTO POR 512
0	512	512.1
1	256	512.
		512.
		512.
		512.
		512.

(Esboce o quadro e o preencha no seu Relatório do Investigador)

(Vá para o bloco 51)

[51]

O Dr. Perez aponta para a última coluna preenchida e comenta:

— Agora que temos o quadro completo, veja com atenção... ***Você consegue perceber a relação entre o número do dia e a quantidade de vezes que multiplicamos por meio?***

Ele espera a resposta, observando você.

(Anote sua percepção no seu Relatório do Investigador)

(Vá para o bloco 52)

[52]

O Dr. Perez, agora visivelmente mais animado, comenta com um leve sorriso no rosto:

— Isso mesmo, acredito que agora podemos entender o comportamento do número de leitos em relação aos dias. Veja, meu caro, aquilo que você utilizou antes... como se chama mesmo? Ah, ***Potenciação!***

Ele pega um novo papel e começa a rascunhar com a caneta, dizendo:

— ***Vamos chamar o número de leitos por L, e os dias que se passam por d. Como a quantidade de leitos está sendo multiplicada por $\frac{1}{2}$ a cada dia, vamos desenvolver uma expressão usando isso.***

(Desenvolva a Expressão no seu Relatório do Investigador)

(Vá para o bloco 53)

[53]

O Dr. Perez aponta para a expressão que acabaram de montar e diz, pensativo:

— ***Então estamos no 5º dia... segundo nossa expressão, temos um total de quantos leitos, meu caro?***

Ele cruza os braços, aguardando atentamente a resposta do jogador com um olhar avaliativo.

(Registre o resultado, no seu Relatório do Investigador)

(Vá para o bloco 54)

[54]

O Dr. Perez respira fundo ao olhar para os quadros preenchidos e a expressão matemática que produziram juntos e diz:

— Agradeço imensamente por toda a sua ajuda. Com esses dados que acabamos de organizar, acredito que finalmente conseguirei convencer o prefeito a liberar o hospital apenas para os casos mais graves. Isso pode nos dar algum fôlego para lidar com a situação.

Ele faz uma breve pausa, ajusta os papéis sobre a mesa e prossegue com firmeza:

— Enquanto eu me encarrego disso, você precisa encontrar o Dr. Santiago. Só com ele será possível tomar as medidas necessárias para conter essa contaminação antes que a cidade entre em colapso. O olhar do médico é sério, mas carregado de esperança.

(Vá para o bloco 55)

A PROCURA DE SANTIAGO

[55]

Ao sair da sala de Dr. Perez, você mal tem tempo de reagir antes que um jovem de aparência séria se aproxima discretamente, ele segura o seu braço, meio hesitante, ele fala com você em tom de segredo:

— Com licença, peço desculpa pela interrupção e por ter ouvido a conversa de vocês... O rapaz se apresenta como Juan, assistente do Dr. Santiago.

Ele prossegue dizendo que sua namorada, Clara, o informou sobre sua missão na cidade. Juan compartilha da desconfiança de Díaz: ***confirma que o paciente zero veio de fora do país e revela que há pessoas trabalhando ativamente para facilitar a propagação da doença.***

— Trabalho aqui há três anos, e nunca vi médicos ou enfermeiros virarem as costas para quem precisa...mas a novata, Patrícia, não é como os outros. Já a vi recusar atendimento a pacientes com sintomas sérios.

— Ela chegou há menos de seis meses, por indicação misteriosa. ***Ela costuma escrever num diário durante o expediente...*** tenho certeza de que ela esconde algo.

Juan olha ao redor, garantindo que ninguém os ouça, e finaliza:

— Se vocês realmente quiserem ajudar, talvez esse diário possa revelar mais do que as aparências deixam ver.

Nesse momento, Dr. Perez aparece ao fim do corredor e chama por Juan com certa urgência:

— Juan, preciso de você aqui com o paciente do leito 27, agora!

O jovem hesita por um instante, encara o personagem como se quisesse dizer mais, mas apenas assente com a cabeça:

— Vou precisar ir... mas cuidado com quem confiam.

- Investigar a enfermeira **(Vá para o bloco 56)**
- Ir à procura de Santiago de forma imediata **(Vá para o bloco 64)**

[56]

Você caminha pelos corredores do hospital, até que você chega no que parece ser uma sala de descanso dos funcionários. Lá pela fresta da porta entreaberta você avista Patrícia.

Ela está sentada no sofá, curvada sobre um pequeno caderno escuro, escrevendo com pressa e concentração.

De repente, a porta se abre por completo — um homem entra sorrindo, cumprimenta Patrícia e a surpreende. Ela esconde o caderno num movimento brusco, enfiando-o na bolsa ao seu lado. Depois, disfarça com um sorriso e inicia uma conversa leve com o recém-chegado. Eles trocam palavras rápidas e risos — e você percebe: estão prestes a sair juntos da sala.

É agora. A escolha está em suas mãos:

- Entrar na sala e confronta Patrícia imediatamente **(Vá para o bloco 57)**
- Ou espera que ambos saiam, na tentativa de pegar o diário discretamente **(Vá para o bloco 58)**

[57]

Você dá passos firmes à frente e empurra a porta da sala de descanso.

Patrícia, ainda sorrindo, se vira surpresa ao vê-lo entrar. Seu olhar se estreita imediatamente. Você diz que sabe que ela está escondendo algo. E pede que ela o entregue.

O sorriso dela se desfaz, mas antes que possa responder, o enfermeiro ao lado se coloca entre vocês, erguendo a mão como se quisesse barrar sua aproximação.

— Ei! Você não tem autoridade para fazer isso — diz em tom ríspido, os olhos faiscando indignação. — Aqui é um hospital!

No mesmo instante, seus dois seguranças, atentos à movimentação e à sua expressão, entram na sala atrás de você. Com um gesto eles se posicionam à sua frente, o corpo entre você e o enfermeiro.

A tensão se instala no ar.

(Dificuldade: 3)

- Sucesso: **(Vá para o bloco 59)**
- Falha: **(Vá para o bloco 62)**

[58]

Você observa atentamente o corredor enquanto Patrícia e o enfermeiro conversam de maneira descontraída.

Ela larga a bolsa sobre uma das cadeiras da sala de descanso e se levanta junto ao colega. Ao que tudo indica, pretendem sair juntos.

Assim que Patrícia e o outro enfermeiro saem da sala, rindo e conversando casualmente, você age.

Avança com passos contidos e silenciosos até a porta entreaberta. Espia rapidamente o interior. A sala está vazia, tranquila, iluminada por uma luz suave que atravessa as persianas. A bolsa repousa sozinha sobre uma cadeira.

(Dificuldade: 4)

- Sucesso: **(Vá para o bloco 60)**
- Falha: **(Vá para o bloco 61)**

[59]

Patrícia observa os seguranças à sua frente e o silêncio absoluto que domina o corredor. Percebe que não há saída daquela situação. Seu semblante tenso se transforma em um sorriso forçado.

— Está bem... — ela diz em voz baixa, evitando encarar o enfermeiro ao lado. Com movimentos lentos, retira o pequeno caderno de sua bolsa. O

Ela estende o diário em sua direção, os dedos hesitando por um breve instante antes de soltá-lo.

— Espero que saiba o que está fazendo...

Ela dá um passo atrás, visivelmente abalada, e sai da sala em silêncio, acompanhada pelo outro enfermeiro que agora evita qualquer olhar. Em suas mãos, o diário — talvez a chave para os segredos por trás daquela enfermaria.

(Vá para o bloco 63)

[60]

Com movimentos rápidos, mas silenciosos, você vasculha o interior da bolsa. Entre itens pessoais e papéis amassados, encontra o que buscava: um caderninho de capa escura, com páginas escritas à mão. O diário.

Você o esconde sob o manto de sua roupa, fecha a bolsa da forma mais parecida possível com a original e sai discretamente, fechando a porta atrás de si. Os seguranças observam à distância e você sinaliza que está tudo certo.

Agora, com o diário em mãos, é hora de descobrir o que, afinal, Patrícia tem a esconder.

(Vá para o bloco 63)**[61]**

Entra com cuidado, evitando chamar atenção. O ambiente está silencioso, você se aproxima da bolsa, estende a mão...

— Ei! — uma voz feminina grita da porta.

— Alguém ajude! Estão mexendo nas coisas da Patrícia!

O pânico se espalha no corredor. Seus próprios seguranças já estão em posição, um deles grita:

— Vamos, senhor, agora!

Você sai da sala correndo, mãos vazias, com o coração martelando no peito. A confusão no corredor lhe dá tempo para escapar pelos fundos do hospital, cruzando uma saída de emergência.

Agora do lado de fora, entre os becos ao redor do prédio, você recupera o fôlego. O diário continua com Patrícia, mas a certeza permanece: você precisa encontrar o Dr. Santiago.

(Vá para o bloco 64)**[62]**

O clima já é tenso quando Patrícia percebe que não há como escapar apenas com palavras. Seus olhos encontram os do enfermeiro ao lado e, em um sutil aceno, ela dá o sinal.

De forma repentina, o homem empurra um dos seus seguranças com força, e a confusão se instala na sala. Cadeiras tombam, uma bandeja metálica cai ao chão com estrondo. Pessoas do corredor se aglomeram na porta, tentando entender o que está acontecendo.

— Ela está fugindo! — grita um dos seus guardas, tentando ultrapassar o enfermeiro em meio ao tumulto.

Mas já é tarde. Você a perdeu de vista em meio ao hospital cheio de pacientes. Mas agora, mais do que nunca, você tem certeza: ela estava escondendo algo.

Agora só lhe resta procurar Santiago.

(Vá para o bloco 64)

[63]

O pequeno caderno revela algo mais complexo do que um simples diário. Escrito em francês, contém relatórios detalhados que denunciam uma série de ações suspeitas: negligência médica deliberada, **registros da entrada clandestina de um homem identificado como Adam, supostamente o portador inicial da doença.**

Sobretudo, a revelação de que Patrícia é, na verdade, Emmanuelle Meurer, uma agente do governo francês incumbida de espalhar o contágio na cidade.

Qualquer pessoa, ao ler aquilo, acreditaria sem hesitar que a doença foi uma arma usada por interesses estrangeiros.

Mas algo não parece certo. Você, um investigador experiente, estranha a facilidade com que esse material foi deixado para trás. Um agente treinado deixaria suas anotações comprometedoras largadas em uma sala comum? Não.

É como se quisessem que esse caderno fosse encontrado. Como se quisessem fabricar um culpado. Felizmente, foi você quem encontrou o caderno. Se caísse nas mãos erradas, a culpa certamente recairia sobre os franceses, alimentando acusações diplomáticas e conflitos internacionais.

Adicione o Item "**Diário de Patrícia**" no seu Relatório do Investigador.

Ao sair do hospital, você observa ao redor: pessoas com máscaras improvisadas, olhares desconfiados e ruas cada vez mais silenciosas. Há uma tensão no ar difícil de ignorar. A situação do contágio é mais séria do que imaginava.

No entanto, apesar da preocupação crescente, uma certeza o acompanha: você está mais próximo de desvendar essa trama. Resta agora encontrar Santiago — talvez ele tenha as peças que faltam para completar esse quebra-cabeça.

Caso você esteve no hospital sem o Item "**Equipamento de proteção contra contaminação**" (Perca 6 pontos de saúde)

- Caso você descansou no Hotel anteriormente (**Vá para o bloco 65**)
- Senão (**Vá para o bloco 64**).

[64]

O peso da descoberta ainda pulsa em sua mente. O caderno de Patrícia, as anotações comprometedoras, a cidade está à beira do colapso, o contágio avança sem controle, tudo isso indica que cada minuto pode ser crucial.

Mas seu corpo protesta. Desde a chegada a esta cidade você não descansou um instante. Foi direto ao hospital, enfrentou corredores sombrios, médicos tensos e revelações perturbadoras. Agora, os músculos doem, os olhos pesam e até a clareza de raciocínio começa a se apagar. Um investigador exausto é um investigador vulnerável.

Você respira fundo. Sabe que a urgência exige ação imediata, mas também reconhece que um breve descanso pode ser a diferença entre agir com precisão ou cometer erros fatais.

- Seguir em busca de Santiago **(Perca 3 pontos de saúde e Vá para o Bloco 65)**
- Ir ao hotel descansar e recuperar as forças **(Vá para o Bloco 24)**

DR. SANTIAGO**[65]**

Você e seus seguranças seguem pela trilha de terra batida que leva à saída leste da cidade.

Após algumas horas você observa barracas verdes que dominam a paisagem como um campo de batalha recém-erguido, alinhadas de maneira meticulosa, mas sempre em expansão, como se o avanço da doença as obrigasse a crescer a cada dia.

Você adentra com passo firme, seus seguranças logo atrás. Lá dentro, o ar é mais abafado e o cheiro de álcool, suor e medicamentos é forte.

Um homem imponente vira-se brevemente, encarando você com um olhar analítico, quase indiferente. Cabelos escuros ondulados caem até os ombros e sua presença se impõe mesmo em silêncio. A barba espetada contrasta com o jaleco branco que ostenta detalhes verdes, remetendo à organização daquele posto avançado de resistência médica.

O homem ergue uma sobrancelha, sem alterar muito a expressão séria, e pergunta com um tom direto, mas sem agressividade:

— Posso ser útil?

Você se apresenta de forma firme, revelando sua posição como investigador enviado pela Coroa Espanhola para auxiliar na contenção da crise e descobrir a verdade por trás da epidemia.

Ao ouvir isso, o homem cruza os braços e responde:

— Fico feliz em saber que a Coroa os mandou para resolver a situação.

O que informações você coletou até o momento?

Você abre sua pasta e mostra os documentos que trouxe do hospital central — os quadros com os números de leitos, as projeções e a expressão matemática construída em conjunto com o prefeito.

(Vá para o bloco 66)

[66]

Santiago observa tudo com atenção, inclina a cabeça, e seus olhos ganham um brilho de surpresa.

— Isso é impressionante... uma abordagem clara e organizada. Com certeza, isso pode ajudar bastante — comenta, enquanto folheia os papéis.

Guardando os documentos, ele se recosta levemente sobre uma mesa repleta de prontuários e mapas da região. Então, começa a falar

— ***Estamos, oficialmente, na quarta semana de contágio. Mas os primeiros casos... surgiram há 33 dias.***

Ele faz uma breve pausa e cruza os braços, encarando o chão por um instante antes de continuar: — ***A cada semana, o número de infectados triplica.*** E não é uma suposição... é o que temos visto na prática.

— E pelas minhas investigações aqui no hospital de campanha e com os registros que consegui recuperar... ***o primeiro infectado foi um soldado chamado Adam.*** Francês. Chegou à cidade de forma clandestina, há pouco mais de um mês.

— Ele faleceu há cerca de dez dias. O corpo já estava em estado crítico quando conseguimos atendimento. Nenhum tratamento surtiu efeito.

Santiago solta um suspiro pesado, então aponta para os números no quadro mais uma vez:

— Com base na progressão que você demonstrou e nos dados que coletamos aqui, acredito que podemos, enfim, fazer uma estimativa mais precisa da situação. Se o contágio de fato triplica a cada semana, e se Adam foi o paciente zero... então temos um ponto de partida. Podemos trabalhar juntos para prever a extensão do surto nas próximas semanas.

Ele o encara por um instante, firme e determinado: — ***Essa pode ser a chave para convencer o alto escalão a tomar decisões mais drásticas... e talvez salvar muitas vidas.***

- Se você tiver o Item "***Informações sobre Rosa e Maximilien***" (Vá para o bloco 67)
- Senão (Vá para o bloco 68)

[67]

Ao ouvir o nome **Adam**, algo desperta na sua memória. A conversa que você teve com Ortega e Rosa, ditas dias atrás no hotel, voltam com nitidez, e lhe levantam um questionamento: **"O homem que trouxe a doença não se chamava Maximilien? Um também Francês..."**

Você franze a testa, encara Santiago e compartilha a lembrança. Explica que, segundo os relatos, outro francês — **Maximilien** — também teria chegado à cidade com sintomas e, supostamente, espalhado a doença.

Santiago o escuta atentamente, a expressão endurecendo a cada palavra. Por um momento, ele permanece em silêncio, então dá um passo para trás, visivelmente surpreso.

— **Então quer dizer que... não foi apenas uma pessoa que trouxe a infecção para cá... foram duas?** Santiago caminha de um lado ao outro da tenda, refletindo em voz alta:

— Isso muda tudo. Explicaria por que o contágio avançou tão rápido em regiões distintas da cidade...

(Vá para o bloco 69)

[68]

Ele franze o cenho, como se estivesse tentando antecipar o pior cenário. Com um tom grave, mas controlado, comenta:

— Com base nessas informações, acredito que a situação vai **se tornar incontrolável no momento em que a doença atingir um quarto da população de Ginona.**

Ele caminha até uma prancheta próxima, puxa um papel e continua:

— **Pelo último censo, a cidade tem 17.496 habitantes. Precisamos saber em quantas semanas o número de infectados ultrapassará esse limite.**

(Esboce sua resposta no Relatório do Investigador)

(Vá para o bloco 72)

[69]

Santiago encara o quadro por um instante, em silêncio, depois franze a testa e se volta a você.

— Com dois infectados iniciais, e considerando que o número de contaminados triplica a cada semana, não teremos apenas três ao fim da primeira semana... mas seis. Isso significa que a situação é ainda mais grave.

Ele se vira, apanha o quadro anterior com os cálculos feitos com base em um único infectado, e apaga os valores cuidadosamente. Em seguida, traça novamente a estrutura da tabela, deixando os espaços em branco.

— Precisamos reformular essa expressão. Vamos refazê-la com base nesse novo dado. Pode me ajudar a preenchê-la?

Figura 5 – Número de Contaminado versão 2;



SEMANA	NÚMERO DE CONTAMINADOS
0	2
1	
2	
3	

(Esboce o quadro e o preencha no seu Relatório do Investigador)
(Vá para o bloco 70)

[70]

Com o quadro preenchido, Santiago observa os números se multiplicando a cada linha, com os olhos atentos, como se enfim pudesse visualizar com clareza o que antes era apenas uma suspeita.

— Agora temos uma noção concreta da forma como a propagação está ocorrendo — diz ele, com um tom mais grave.

— É essencial que o prefeito compreenda a urgência da situação. Ele se volta a você com firmeza.

— Com base no que desenvolvemos até agora, ***preciso que utilize os conhecimentos que aplicou anteriormente para construir uma nova expressão. Uma que represente de forma fiel a real propagação da doença. Isso será fundamental para decidirmos os próximos passos.***

(Esboce a expressão no seu Relatório do Investigador)
(Vá para o bloco 71)

[71]

Santiago com os olhos fixos no quadro com os números recém-preenchidos. Ele franze o cenho, como se estivesse tentando antecipar o pior cenário. Com um tom grave, mas controlado, comenta:

— ***Com base nessas informações, acredito que a situação vai se tornar incontrolável no momento em que a doença atingir um quarto da população de Ginona.***

Ele caminha até uma prancheta próxima, puxa um papel e continua:

— ***Pelo último censo, a cidade tem 17.496 habitantes. Precisamos saber em quantas semanas o número de infectados chegará a esse limite.***

(Desenvolva no seu Relatório do Investigador)

(Vá para o bloco 72)

[72]

Santiago observa atentamente os dados diante de si, traça mentalmente as semanas e murmura com preocupação contida:

— Agora que temos uma noção de quantas semanas levará para a situação sair de controle, ***precisamos saber quantos dias ainda temos para tentar contê-la.***

Ele se vira para você, direto e objetivo:

— ***Estamos no 33º dia de infecção. Assim, quantos dias ainda temos?***

(Anote no seu Relatório do Investigador)

(Vá para o bloco 73)

[73]

Santiago cruza os braços, olhando fixamente para os números no quadro. Após alguns segundos de silêncio, ele se volta a você com um semblante mais duro:

— Agora que sabemos quantos dias temos, só falta descobrir ***quem é o responsável por trazer essa doença para nosso país.*** Ele caminha lentamente pela tenda, como se reunisse as peças de um quebra-cabeça.

— O primeiro infectado que identificamos foi Adam. Francês. E se somarmos isso à proximidade dessa cidade com a fronteira... bem, ***é difícil não concluir que os franceses estejam por trás disso.***

Você reflete sobre as palavras de Santiago. O peso da situação parece se intensificar à medida que as possibilidades se desenrolam em sua mente.

➤ Concordar com Santiago **(Vá para o bloco 74)**

➤ Questionar se foram realmente os franceses **(Vá para o bloco 75)**

[74]

Você pensa por um momento, refletindo sobre tudo o que foi dito. A conexão entre a chegada de **Adam** e o surto da doença parece inegável.

As evidências se alinham, e as circunstâncias apontam para os franceses como os responsáveis. Concorde com Santiago.

Está bem claro: O governo francês ordenou que Adam, de alguma forma, trouxesse a doença para a cidade.

(Anote o culpado no seu Relatório do Investigador)

(Vá para o bloco 78)

[75]

Você pensa por um momento, algo não se encaixa. As peças ainda não estão completas, e embora a teoria sobre os franceses faça sentido à primeira vista, uma dúvida persiste em sua mente, mas é necessário uma prova concreta.

- Sem provas basta concordar com Santiago **(Volte para o bloco 74)**
- Apresentar o Item "Diário de Patrícia" a Santiago **(Vá para o bloco 76)**

[76]

Você apresenta o diário a Santiago, explicando que, embora os relatos de Patrícia só reforcem a ideia de que os franceses são os culpados, algo não parece certo. Levanta o fato de que isso seria conveniente demais, talvez até demais fácil para ser a verdade.

Santiago fica em silêncio por um momento, seu semblante mudando para algo mais sério e triste. Ele suspira profundamente antes de começar a falar:

— ***A Enfermeira Patrícia foi indicada ao cargo pelo próprio prefeito Díaz.*** — Ele faz uma pausa, como se digerisse o peso da informação.

— O prefeito de Girona é espanhol, mas tem ascendência alemã, um segredo que não está documentado e que poucas pessoas sabem. Parte da família dele está na Alemanha e, se bem me lembro, podem ser usados como reféns. Isso me faz pensar... talvez tudo isso não tenha sido coincidência. — Ele dá um longo suspiro e olha fixamente para você.

— Isso poderia ser parte de uma conspiração para envolver a Espanha em um conflito com a França. Se a Espanha estivesse em guerra com a França, a Alemanha, que está ao norte, também começaria a pressionar pelo outro lado. Assim, a França estaria cercada, com suas frentes tanto ao sul quanto ao norte, uma situação insustentável. A doença pode ter sido usada como um catalisador para essa trama.

O peso das palavras de Santiago ressoam no ar.

(Vá para o bloco 77)

[77]

Santiago continua olhando para você com uma expressão grave, como se estivesse compartilhando uma informação crucial:

— o prefeito Díaz e eu somos amigos de infância, ele sempre foi um bom estrategista. — Ele pausa por um momento, refletindo sobre o que vai dizer.

— E além disso, eu me lembro de uma vez que ouvi Patrícia sussurrando algo para Adam, enquanto estavam no hospital. Eu estava perto, e embora eu seja fluentemente espanhol, português, inglês, francês e italiano, porém não entendi nada do que foi sussurrado. ***Por isso, eles devia estar falando alemão na época.***

(Vá para o bloco 78)

CONCLUSÕES

[78]

Você respira fundo, absorvendo as palavras de Santiago, que agora te observa com seriedade.

Como investigador da coroa você é a chave para resolver essa situação. Somente você por meio das provas que reuniu, pode, no momento certo, mobilizar a coroa ***antes que a doença se torne incontrolável.***

E mais, ***será você quem revelará o verdadeiro culpado por essa tragédia.***

A tensão no ambiente é palpável, e você sente o peso da responsabilidade recair sobre seus ombros. O destino da cidade, talvez até do país, está em suas mãos.

Santiago dá um leve aceno, como se entendesse a magnitude do que lhe foi confiado. E lhe diz:

— ***Agora, o desenrolar do que acontecerá, e a decisão de como tudo se resolverá.***

Agora siga com base nas respostas obtidas e nos seus pontos de vida, da seguinte forma: **(Dias restantes/Culpado/Pontos de vida)**

Resposta:

(23 dias/França/Igual ou menor que zero) (Vá para o bloco 79)

(16 dias/França/Igual ou menor que zero) (Vá para o bloco 80)

(23 dias/Alemanha/Igual ou menor que zero) (Vá para o bloco 81)

(16 dias/Alemanha/Igual ou menor que zero) (Vá para o bloco 82)

(23 dias/França/Maior que zero) (Vá para o bloco 83)

(16 dias/França/Maior que zero) (Vá para o bloco 84)

(23 dias/Alemanha/Maior que zero) (Vá para o bloco 85)

(16 dias/Alemanha/Maior que zero) (Vá para o bloco 86)

[79]

Você se esforçou. Cruzou dados, construiu a expressão matemática que modelava a propagação da doença com base nos relatos e nos documentos obtidos. Mas a doença começou a escapar do controle antes do previsto.

Suas estimativas indicavam que a epidemia se tornaria incontrollável apenas dali a **23 dias**, mas a realidade se impôs com brutalidade: **uma semana antes do esperado, os casos explodiram em ritmo alarmante.**

O governo agiu, sim — mas às pressas. Tropas de contenção mal treinadas tentavam barrar a fuga de moradores. Médicos adoeciam tão rápido quanto tratavam os outros. Centenas, talvez milhares, sucumbiram. Filas de carroças transportavam corpos pelas trilhas até os cemitérios improvisados.

Você esteve lá, e sua presença evitou que Girona fosse completamente engolida pela epidemia. Ainda assim, a sensação é amarga. Restou apenas o peso de uma pergunta que não cessa de ecoar em sua mente: **Qual caminho ignorei na pressa de avançar?**

Ao chegar na capital você relata diante das autoridades que a origem da doença está nas ações de **Adam**, um agente francês que teria atravessado clandestinamente a fronteira com o conhecimento e respaldo do próprio governo francês.

O diário encontrado em posse da enfermeira **Patrícia** reforça suas palavras com detalhes precisos: datas, movimentações, e até mesmo instruções escritas em francês. Tudo aponta para uma ação orquestrada.

O prefeito Díaz confirma sua acusação e compartilha as informações com as autoridades da Coroa.

A revelação abala os ânimos do Conselho Real. A França já está fragilizada por conflitos internos e externos, e agora se vê às portas de uma possível retaliação diplomática — ou até militar. Você percebe o peso do que acaba de provocar. Talvez tenha evitado uma catástrofe maior, ou talvez tenha acendido o estopim de uma guerra.

E após tudo passar, você observa o desfecho de tudo em casa. As janelas estão fechadas, e a luz do fim de tarde atravessa o vidro, dourando as paredes. A cidade lá fora parece tranquila.

A sensação de dever cumprido está lá, mas misturada a outra, mais amarga.

Você tosse. Levemente no início, depois com força. Quando afasta a mão dos lábios, o sangue se espalha pela palma. A mente corre para os momentos em que poderia ter evitado esse fim: o hospital lotado, o contato próximo com pacientes, os dias sem descanso. Talvez tivesse sido imprudente. Talvez tivesse sido inevitável.

Agora, só resta aguardar. Que o destino seja gentil. Afinal, não há arrependimento — apenas a certeza de que você fez o que era preciso, mesmo que o preço tenha sido sua própria vida.

FIM

[80]

Graças à análise minuciosa que você fez junto ao Dr. Santiago foi possível determinar com precisão o ritmo acelerado da contaminação.

A descoberta de que dois indivíduos foram os portadores iniciais da doença — **Adam e Maximilien** — foi decisiva. Isso dobrou a velocidade esperada da propagação, e sem esse ajuste, o tempo teria sido desperdiçado.

Com os números atualizados, você mobilizou a Coroa no momento certo. Médicos e remédios chegaram em grandes quantidades e, embora ainda houvesse sofrimento, o caos foi evitado. A cidade se manteve à beira do abismo — mas não caiu.

Adam, o francês citado nos documentos da enfermeira, foi oficialmente registrado como falecido pela doença. Já Maximilien desapareceu sem deixar rastros.

Ao chegar na capital você relata diante das autoridades que a origem da doença está nas ações de **Adam**, um agente francês que teria atravessado clandestinamente a fronteira com o conhecimento e respaldo do próprio governo francês.

O diário encontrado em posse da enfermeira **Patrícia** reforça suas palavras com detalhes precisos: datas, movimentações, e até mesmo instruções escritas em francês. Tudo aponta para uma ação orquestrada.

O prefeito Díaz confirma sua acusação e compartilha as informações com as autoridades da Coroa.

A revelação abala os ânimos do Conselho Real. A França já está fragilizada por conflitos internos e externos, e agora se vê às portas de uma possível retaliação diplomática — ou até militar. Você percebe o peso do que acaba de provocar. Talvez tenha evitado uma catástrofe maior, ou talvez tenha acendido o estopim de uma guerra.

E após tudo passar, você observa o desfecho de tudo em casa. As janelas estão fechadas, e a luz do fim de tarde atravessa o vidro, dourando as paredes. A cidade lá fora parece tranquila.

A sensação de dever cumprido está lá — mas misturada a outra, mais amarga.

Você tosse. Levemente no início, depois com força. Quando afasta a mão dos lábios, o sangue se espalha pela palma. A mente corre para os momentos em que poderia ter evitado esse fim: o hospital lotado, o contato próximo com pacientes, os dias sem descanso. Talvez tivesse sido imprudente. Talvez tivesse sido inevitável.

Agora, só resta aguardar. Que o destino seja gentil. Afinal, não há arrependimento — apenas a certeza de que você fez o que era preciso, mesmo que o preço tenha sido sua própria vida.

FIM

[81]

Você se esforçou. Cruzou dados, construiu a expressão matemática que modelava a propagação da doença com base nos relatos e nos documentos obtidos. Mas a doença começou a escapar do controle antes do previsto.

Suas estimativas indicavam que a epidemia se tornaria incontrolável apenas **dali a 23 dias**, mas a realidade se impôs com brutalidade: **uma semana antes do esperado, os casos explodiram em ritmo alarmante**.

O governo agiu, sim — mas às pressas. Tropas de contenção mal treinadas tentavam barrar a fuga de moradores. Médicos adoeciam tão rápido quanto tratavam os outros. Centenas, talvez milhares, sucumbiram. Filas de carroças transportavam corpos pelas trilhas até os cemitérios improvisados.

Você esteve lá, e sua presença evitou que Girona fosse completamente engolida pela epidemia. Ainda assim, a sensação é amarga. Restou apenas o peso de uma pergunta que não cessa de ecoar em sua mente: **Qual caminho ignorei na pressa de avançar?**

Quanto aos culpados pelas mortes, você se lembra que junto a Santiago, vocês confrontaram o **prefeito Díaz** diretamente dentro da própria prefeitura.

O homem, abatido tanto fisicamente quanto emocionalmente, tenta sustentar o silêncio, mas seus olhos já não escondem a culpa. Ao final, com a voz embargada, ele confessa: **Patrícia** era agente do governo alemão, e ele, ameaçado pela segurança de seus familiares ainda na Alemanha, concordou em colaborar com o plano.

A epidemia seria o pretexto para instigar um conflito entre a Espanha e a França. A confissão choca todos os presentes. Em um ato rápido, as forças leais à Coroa prendem Díaz e Patrícia.

Santiago é nomeado governador provisório de Girona, assumindo o controle da cidade em meio ao caos. A notícia chega à Corte espanhola, que agora precisa decidir que medidas serão tomadas contra a Alemanha.

Você observa o desfecho em casa. As janelas estão fechadas, e a luz do fim de tarde atravessa o vidro, dourando as paredes. A cidade lá fora parece tranquila. A missão foi concluída.

A Coroa recebeu suas descobertas, os responsáveis foram identificados, o avanço da doença, contido. A sensação de dever cumprido está lá — mas misturada a outra, mais amarga.

Você tosse. Levemente no início, depois com força. Quando afasta a mão dos lábios, o sangue se espalha pela palma. A mente corre para os momentos em que poderia ter evitado esse fim: o hospital lotado, o contato próximo com pacientes, os dias sem descanso.

Talvez tivesse sido imprudente. Talvez tivesse sido inevitável. Agora, só resta aguardar. Que o destino seja gentil. Afinal, não há arrependimento — apenas a certeza de que você fez o que era preciso, mesmo que o preço tenha sido sua própria vida.

FIM

[82]

Graças à análise minuciosa que você fez junto ao Dr. Santiago foi possível determinar com precisão o ritmo acelerado da contaminação.

A descoberta de que dois indivíduos foram os portadores iniciais da doença — **Adam e Maximilien** — foi decisiva. Isso dobrou a velocidade esperada da propagação, e sem esse ajuste, o tempo teria sido desperdiçado.

Com os números atualizados, você mobilizou a Coroa no momento certo. Médicos e remédios chegaram em grandes quantidades e, embora ainda houvesse sofrimento, o caos foi evitado. A cidade se manteve à beira do abismo — mas não caiu.

Adam, o francês citado nos documentos da enfermeira, foi oficialmente registrado como falecido pela doença. Já Maximilien desapareceu sem deixar rastros.

Quanto aos culpados pelas mortes, você se lembra que junto a Santiago, vocês confrontaram o **prefeito Díaz** diretamente dentro da própria prefeitura.

O homem, abatido tanto fisicamente quanto emocionalmente, tenta sustentar o silêncio, mas seus olhos já não escondem a culpa. Ao final, com a voz embargada, ele confessa: **Patrícia** era agente do governo alemão, e ele, ameaçado pela segurança de seus familiares ainda na Alemanha, concordou em colaborar com o plano.

A epidemia seria o pretexto para instigar um conflito entre a Espanha e a França. A confissão choca todos os presentes. Em um ato rápido, as forças leais à Coroa prendem Díaz e Patrícia.

Santiago é nomeado governador provisório de Girona, assumindo o controle da cidade em meio ao caos. A notícia chega à Corte espanhola, que agora precisa decidir que medidas serão tomadas contra a Alemanha.

Você observa o desfecho em casa. As janelas estão fechadas, e a luz do fim de tarde atravessa o vidro, dourando as paredes. A cidade lá fora parece tranquila. A missão foi concluída.

A Coroa recebeu suas descobertas, os responsáveis foram identificados, o avanço da doença, contido. A sensação de dever cumprido está lá — mas misturada a outra, mais amarga.

Você tosse. Levemente no início, depois com força. Quando afasta a mão dos lábios, o sangue se espalha pela palma. A mente corre para os momentos em que poderia ter evitado esse fim: o hospital lotado, o contato próximo com pacientes, os dias sem descanso.

Talvez tivesse sido imprudente. Talvez tivesse sido inevitável. Agora, só resta aguardar. Que o destino seja gentil. Afinal, não há arrependimento — apenas a certeza de que você fez o que era preciso, mesmo que o preço tenha sido sua própria vida.

FIM

[83]

Você se esforçou. Cruzou dados, construiu a expressão matemática que modelava a propagação da doença com base nos relatos e nos documentos obtidos. Mas a doença começou a escapar do controle antes do previsto.

Suas estimativas indicavam que a epidemia se tornaria incontrolável apenas dali a **23 dias**, mas a realidade se impôs com brutalidade: **uma semana antes do esperado, os casos explodiram em ritmo alarmante.**

O governo agiu, sim — mas às pressas. Tropas de contenção mal treinadas tentavam barrar a fuga de moradores. Médicos adoeciam tão rápido quanto tratavam os outros. Centenas, talvez milhares, sucumbiram. Filas de carroças transportavam corpos pelas trilhas até os cemitérios improvisados.

Você esteve lá, e sua presença evitou que Girona fosse completamente engolida pela epidemia. Ainda assim, a sensação é amarga. Restou apenas o peso de uma pergunta que não cessa de ecoar em sua mente: **Qual caminho ignorei na pressa de avançar?**

Ao chegar na capital você relata diante das autoridades que a origem da doença está nas ações de **Adam**, um agente francês que teria atravessado clandestinamente a fronteira com o conhecimento e respaldo do próprio governo francês.

O diário encontrado em posse da enfermeira **Patrícia** reforça suas palavras com detalhes precisos: datas, movimentações, e até mesmo instruções escritas em francês. Tudo aponta para uma ação orquestrada.

O prefeito Díaz confirma sua acusação e compartilha as informações com as autoridades da Coroa.

A revelação abala os ânimos do Conselho Real. A França já está fragilizada por conflitos internos e externos, e agora se vê às portas de uma possível retaliação diplomática — ou até militar. Você percebe o peso do que acaba de provocar. Talvez tenha evitado uma catástrofe maior, ou talvez tenha acendido o estopim de uma guerra.

Você observa o desfecho de tudo pela janela de um trem, assim como no começo. A locomotiva serpenteia pelos trilhos que cortam os campos ao redor da cidade, agora mais silenciosa.

Os dados foram entregues à Coroa. Os responsáveis, apontados. A epidemia, finalmente contida. Pode não ter sido uma vitória sem perdas, mas foi, sem dúvidas, uma vitória.

Enquanto a paisagem desfila diante dos seus olhos, permite-se um raro momento de alívio. As lembranças se alinham como páginas de um relatório que só você conhece: o primeiro contato com o prefeito Díaz, o hospital, a tensão das decisões urgentes.

Tudo isso agora faz parte de quem você é. Mesmo que algumas perguntas permaneçam, há uma certeza firme em seu peito: você cumpriu o seu dever

FIM

[84]

Graças à análise minuciosa que você fez junto ao Dr. Santiago foi possível determinar com precisão o ritmo acelerado da contaminação.

A descoberta de que dois indivíduos foram os portadores iniciais da doença — **Adam e Maximilien** — foi decisiva. Isso dobrou a velocidade esperada da propagação, e sem esse ajuste, o tempo teria sido desperdiçado.

Com os números atualizados, você mobilizou a Coroa no momento certo. Médicos e remédios chegaram em grandes quantidades e, embora ainda houvesse sofrimento, o caos foi evitado. A cidade se manteve à beira do abismo — mas não caiu.

Adam, o francês citado nos documentos da enfermeira, foi oficialmente registrado como falecido pela doença. Já Maximilien desapareceu sem deixar rastros.

Ao chegar na capital você relata diante das autoridades que a origem da doença está nas ações de **Adam**, um agente francês que teria atravessado clandestinamente a fronteira com o conhecimento e respaldo do próprio governo francês.

O diário encontrado em posse da enfermeira **Patrícia** reforça suas palavras com detalhes precisos: datas, movimentações, e até mesmo instruções escritas em francês. Tudo aponta para uma ação orquestrada.

O prefeito Díaz confirma sua acusação e compartilha as informações com as autoridades da Coroa.

A revelação abala os ânimos do Conselho Real. A França já está fragilizada por conflitos internos e externos, e agora se vê às portas de uma possível retaliação diplomática — ou até militar. Você percebe o peso do que acaba de provocar. Talvez tenha evitado uma catástrofe maior, ou talvez tenha acendido o estopim de uma guerra.

Você observa o desfecho de tudo pela janela de um trem, assim como no começo. A locomotiva serpenteia pelos trilhos que cortam os campos ao redor da cidade, agora mais silenciosa.

Os dados foram entregues à Coroa. Os responsáveis, apontados. A epidemia, finalmente contida. Pode não ter sido uma vitória sem perdas, mas foi, sem dúvidas, uma vitória.

Enquanto a paisagem desfila diante dos seus olhos, permite-se um raro momento de alívio. As lembranças se alinham como páginas de um relatório que só você conhece: o primeiro contato com o prefeito Díaz, o hospital, a tensão das decisões urgentes.

Tudo isso agora faz parte de quem você é. Mesmo que algumas perguntas permaneçam, há uma certeza firme em seu peito: você cumpriu o seu dever.

FIM

[85]

Você se esforçou. Cruzou dados, construiu a expressão matemática que modelava a propagação da doença com base nos relatos e nos documentos obtidos. Mas a doença começou a escapar do controle antes do previsto.

Suas estimativas indicavam que a epidemia se tornaria incontrolável apenas dali a **23 dias**, mas a realidade se impôs com brutalidade: **uma semana antes do esperado, os casos explodiram em ritmo alarmante.**

O governo agiu, sim — mas às pressas. Tropas de contenção mal treinadas tentavam barrar a fuga de moradores. Médicos adoeciam tão rápido quanto tratavam os outros. Centenas, talvez milhares, sucumbiram. Filas de carroças transportavam corpos pelas trilhas até os cemitérios improvisados.

Você esteve lá, e sua presença evitou que Girona fosse completamente engolida pela epidemia. Ainda assim, a sensação é amarga. Restou apenas o peso de uma pergunta que não cessa de ecoar em sua mente: **Qual caminho ignorei na pressa de avançar?**

Quanto aos culpados pelas mortes, você se lembra que junto a Santiago, vocês confrontaram o **prefeito Díaz** diretamente dentro da própria prefeitura.

O homem, abatido tanto fisicamente quanto emocionalmente, tenta sustentar o silêncio, mas seus olhos já não escondem a culpa. Ao final, com a voz embargada, ele confessa: **Patrícia** era agente do governo alemão, e ele, ameaçado pela segurança de seus familiares ainda na Alemanha, concordou em colaborar com o plano.

A epidemia seria o pretexto para instigar um conflito entre a Espanha e a França. A confissão choca todos os presentes. Em um ato rápido, as forças leais à Coroa prendem Díaz e Patrícia.

Santiago é nomeado governador provisório de Girona, assumindo o controle da cidade em meio ao caos. A notícia chega à Corte espanhola, que agora precisa decidir que medidas serão tomadas contra a Alemanha.

Você observa o desfecho de tudo pela janela de um trem, assim como no começo. A locomotiva serpenteia pelos trilhos que cortam os campos ao redor da cidade, agora mais silenciosa.

Os dados foram entregues à Coroa. Os responsáveis, apontados. A epidemia, finalmente contida. Pode não ter sido uma vitória sem perdas, mas foi, sem dúvidas, uma vitória.

Enquanto a paisagem desfila diante dos seus olhos, permite-se um raro momento de alívio. As lembranças se alinham como páginas de um relatório que só você conhece: o primeiro contato com o prefeito Díaz, o hospital, a tensão das decisões urgentes.

Tudo isso agora faz parte de quem você é. Mesmo que algumas perguntas permaneçam, há uma certeza firme em seu peito: você cumpriu o seu dever.

FIM

[86]

Graças à análise minuciosa que você fez junto ao Dr. Santiago foi possível determinar com precisão o ritmo acelerado da contaminação.

A descoberta de que dois indivíduos foram os portadores iniciais da doença — **Adam e Maximilien** — foi decisiva. Isso dobrou a velocidade esperada da propagação, e sem esse ajuste, o tempo teria sido desperdiçado.

Com os números atualizados, você mobilizou a Coroa no momento certo. Médicos e remédios chegaram em grandes quantidades e, embora ainda houvesse sofrimento, o caos foi evitado. A cidade se manteve à beira do abismo — mas não caiu.

Adam, o francês citado nos documentos da enfermeira, foi oficialmente registrado como falecido pela doença. Já Maximilien desapareceu sem deixar rastros.

Quanto aos culpados pelas mortes, você se lembra que junto a Santiago, vocês confrontaram o **prefeito Díaz** diretamente dentro da própria prefeitura.

O homem, abatido tanto fisicamente quanto emocionalmente, tenta sustentar o silêncio, mas seus olhos já não escondem a culpa. Ao final, com a voz embargada, ele confessa: **Patrícia** era agente do governo alemão, e ele, ameaçado pela segurança de seus familiares ainda na Alemanha, concordou em colaborar com o plano.

A epidemia seria o pretexto para instigar um conflito entre a Espanha e a França. A confissão choca todos os presentes. Em um ato rápido, as forças leais à Coroa prendem Díaz e Patrícia.

Santiago é nomeado governador provisório de Girona, assumindo o controle da cidade em meio ao caos. A notícia chega à Corte espanhola, que agora precisa decidir que medidas serão tomadas contra a Alemanha.

Você observa o desfecho de tudo pela janela de um trem, assim como no começo. A locomotiva serpenteia pelos trilhos que cortam os campos ao redor da cidade, agora mais silenciosa.

Os dados foram entregues à Coroa. Os responsáveis, apontados. A epidemia, finalmente contida. Pode não ter sido uma vitória sem perdas, mas foi, sem dúvidas, uma vitória.

Enquanto a paisagem desfila diante dos seus olhos, permite-se um raro momento de alívio. As lembranças se alinham como páginas de um relatório que só você conhece: o primeiro contato com o prefeito Díaz, o hospital, a tensão das decisões urgentes.

Tudo isso agora faz parte de quem você é. Mesmo que algumas perguntas permaneçam, há uma certeza firme em seu peito: você cumpriu o seu dever.

FIM

FINAL ALTERNATIVO O PREÇO DA FUGA**[87]**

Assim que o trem começou a diminuir a velocidade na próxima parada, você agiu no impulso. Você se levantou rápido, pegou sua maleta e desceu sem dar tempo pros agentes perceberem. Entrou no meio da pequena multidão da estação, virou em uma rua qualquer, trocou o casaco com um ambulante e sumiu.

Coração acelerado, pernas bambas, mas você tinha escapado. Passou os dias seguintes escondido numa pensão esquecida no interior, tentando se convencer de que fez o certo. Que continuar seria loucura. Que aquilo nunca foi sua responsabilidade. Mas aí vieram as manchetes:

"Surto em Girona sai do controle"

"Mortes aumentam em ritmo assustador"

"Governo espanhol culpa a França por sabotagem"

A doença se espalhou. Ninguém soube dizer como começou, ninguém conseguiu conter. Sem investigação, só sobrou desconfiança — e ela virou raiva. Agora o país está em pé de guerra, e o caos que você podia ter ajudado a evitar já tomou conta. Deitado na cama do quarto abafado, você encara o teto e se pergunta:

E se eu tivesse ficado?

FIM?

3.1. RELATÓRIO DO INVESTIGADOR

[illegible]

CONSPIRAÇÃO CONTAMINANTE REGISTROS BLOCO 22:		CONSPIRAÇÃO CONTAMINANTE REGISTROS BLOCO 52:	
BLOCO 50:	BLOCO 46:	BLOCO 53:	BLOCO 68:
BLOCO 51:		BLOCO 69:	

CONSPIRAÇÃO CONTAMINANTE
REGISTROS

BLOCO 70

BLOCO 71

DIAS RESTANTES: CULPADO:

NOTAS:

CONSPIRAÇÃO CONTAMINANTE
REGISTROS SOLICITADOS
RASCUNHOS:

4. SOBRE FUNÇÃO EXPONENCIAL

Neste capítulo apresento conteúdos matemáticos relacionados a Função Exponencial com vistas a subsidiar a elaboração das atividades inseridas ao longo do jogo, bem como contribuir à formação inicial ou continuada do professor de matemática. Utilizou-se como referências as obras de Bezerra (2018), Iezzi (2013), Lima (1996), Lima *et.al* (2016), Oliveira (2015), Stewart (2013), Táboas (2008).

4.1. POTÊNCIAS DE EXPOENTE REAL

Antes de abordar o estudo das funções exponenciais, é fundamental introduzir o conteúdo de potências, incluindo suas definições e resultados para cada conjunto numérico. Isso facilitará a compreensão e definição subsequente da Função Exponencial, bem como de suas propriedades e proposições.

Define-se a Potência de Expoente Natural, conforme Lima *et.al* (2016): Seja a um número real positivo e n um número natural. A potência a^n , onde há a convenção de chama a de base e n de expoente, é definida como o produto de n fatores iguais de a . Visto que não existe produto de um fator somente, para $n = 1$, põe-se $a^1 = a$.

Ademais, é definido que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, tem-se $a^{n+1} = a^n \cdot a$. A prova ocorre por meio da indução. Bezerra (2018), define que para provar que uma proposição $P(n)$ é válida para todo inteiro $n \geq n_0$, para algum inteiro n_0 fixado. São necessários dois passos:

- I. Mostar que $P(n_0)$ é verdadeira, ou seja, que a propriedade é válida para o primeiro inteiro n_0 .
- II. Assume a propriedade $P(n)$ é verdadeira, e é preciso mostra que se $P(n)$ é verdadeira então $P(n + 1)$ também será verdadeira.

Com isso, a prova de $a^{n+1} = a^n \cdot a$ é verdadeira, ocorre da seguinte forma, para $n_0 = 1$, tem-se que $a^{1+1} = a^2 = a^1 \cdot a$. E então se toma $a^{n+1} = a^n \cdot a$ como verdade, e é preciso mostrar que vale para $(n + 1)$. Então:

$$a^{(n+1)+1} = a \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a \cdot a}_{n \text{ vezes}} = a \cdot a^n \cdot a$$

Por hipótese $a^{n+1} = a^n \cdot a$, logo

$$a^{(n+1)+1} = a^{(n+1)} \cdot a$$

■

Com base nessas definições, para $a, b \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{N}^*$ são válidas as seguintes propriedades para as potências de expoente natural:

- I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- II. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$
- III. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Como estas propriedades são essenciais durante o trabalho e cálculo com potências de expoente natural, faz-se necessário terem sua validade demonstrada. Com base em Oliveira (2015), a primeira propriedade, comumente chamada de produto de potências de mesma base, pode ser demonstrada por meio da indução. Para tal, é válida para $n_0 = 1$, pois que recai na proposição anterior $a^m \cdot a^1 = a^m \cdot a = a^{m+1}$.

Agora, suponha que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, logo para $(n + 1)$:

$$a^m \cdot a^{(n+1)} = a^m \cdot a^n \cdot a \xrightarrow{\text{por hipótese}} a^{m+n} \cdot a = a^{(m+n)+1} = a^{m+(n+1)}$$

Já para a segunda propriedade, tem-se:

$$(a \cdot b)^m = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{m \text{ vezes}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ vezes}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{m \text{ vezes}} = a^m \cdot b^m$$

Por fim, para a terceira, temos:

$$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m = \underbrace{a^m + \dots + a^m}_{n \text{ vezes}} = a^{m \cdot n}$$

■

Uma característica do estudo de potências que auxiliará no posterior estudo da função exponencial é que se $a > 1$ então a sequência $(a, a^2, a^3, \dots, a^n)$ é crescente. Se $0 < a < 1$ então a sequência $(a, a^2, a^3, \dots, a^n)$ é decrescente.

Para provar o primeiro caso, se $a > 1$, basta multiplicar ambos os membros da inequação por a^n , assim obtém-se que $a^{n+1} > a^n$. Com o uso do mesmo procedimento no segundo caso, para $0 < a < 1$, tem-se $0 < a^{n+1} < a^n$.

Portanto,

$$a > 1 \Rightarrow 1 < a^1 < a^2 < a^3 < \dots < a^n < a^{n+1}$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow 1 > a^1 > a^2 > a^3 > \dots > a^n > a^{n+1}$$

■

Com isso posto, é preciso agora compreender o comportamento da potência, quando $n \in \mathbb{Z}$, ou seja, atribuir um significado para quando for um número negativo ou zero. Lima *et.al.* (2016), aponta que é preciso definir de forma que seja mantida a propriedade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Inicialmente, com base nos autores, para definir a^0 é necessário que seja válido $a^{n+1} = a^n \cdot a$, logo $a^{0+1} = a^0 \cdot a$, ou seja $a^1 = a^0 \cdot a$, portanto $a^0 = 1$. Agora a partir da definição de a^0 , é possível compreender o comportamento de uma potência de expoente negativo. Assim dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, é preciso que:

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1, \text{ logo: } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Agora, vamos provar que este argumento realmente mantem a prioridade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Com base em Oliveira (2015), é necessário analisar os casos possíveis em relação a propriedade $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ para expoentes inteiros, ou seja, que

$$\text{Sejam } a \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ e } m, n \in \mathbb{Z}. \text{ Então } a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

e assim verificar se esta definição consegue preservar a prioridade. Para os casos analisados para as potências de expoente inteiro temos os seguintes: Os expoentes m e n ambos são positivos, outro caso é m e n ambos negativos, por fim m e n um positivo e outro negativo.

Primeiramente, suponhamos que expoentes m e n ambos são positivos, logo podemos afirmar que $m, n \in \mathbb{N}$, portanto $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ é valido como demonstrado anteriormente para expoentes naturais.

Para m e n ambos negativos, temos que $m, n \in \mathbb{Z} - (\mathbb{N} \cup \{0\})$, escrevemos $m = -x$ e $n = -y$, com $x, y \in \mathbb{N}$. Então:

$$a^m \cdot a^n = a^{-x} \cdot a^{-y} = \frac{1}{a^x} \cdot \frac{1}{a^y} = \frac{1}{a^{x+y}} = a^{-(x+y)} = a^{-x+(-y)} = a^{m+n}$$

Por fim m e n um positivo e outro negativo, suponhamos que $m = -x$ e $n =$

y , com $x, y \in \mathbb{N}$ e $x < y$, tem-se:

$$a^m \cdot a^n = a^{-x} \cdot a^y = \frac{1}{a^x} \cdot a^y$$

Como $x < y$ e $x, y \in \mathbb{N}$, existe um número natural w de forma que $w + x = y$, logo

$$a^m \cdot a^n = a^{-x} \cdot a^y = \frac{1}{a^x} \cdot a^y = \frac{1}{a^x} \cdot a^{x+w} = \frac{a^{x+w}}{a^x}$$

$$a^w = a^{y-x} = a^{y+(-x)} = a^{(-x)+y} = a^{m+n}$$

Portanto, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se que é válido:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

■

No conjunto dos números racionais, é preciso verificar o sentido para a potência a^r , quando $r = m/n$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, de forma com que novamente seja mantido a propriedade $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$. Para isso, dada a seguinte potência, com $r = m/n$:

$$(a^r)^n = a^r \cdot a^r \cdot \dots \cdot a^r = a^{r \cdot n} = a^m$$

Assim, como aponta Lima *et.al.* (2016) a^r pode ser tido como o número positivo real cuja n -ésima potência é a^m , portanto, por definição de raiz, este número é a raiz n -ésima de a^m , $\sqrt[n]{a^m}$. Dessa maneira, define-se a potência a^r , com $r = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, como:

$$a^r = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Agora, dado $a > 0$, com a^r definido para todo número racional r . É preciso assegurar que $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ vale para $r, s \in \mathbb{Q}$, conforme Lima (1996). Assim, com $r = m/n$ e $s = u/v$ fracionários e $m, u \in \mathbb{Z}$, $n, v \in \mathbb{N}^*$. Dado as propriedades 1, 2 e 3 válidas para os números inteiros, por 3:

$$(a^r)^n = a^m \text{ e } (a^s)^v = a^u$$

Logo, por 2:

$$(a^r \cdot a^s)^{nv} = (a^r)^{nv} \cdot (a^s)^{nv} = a^{r nv} \cdot a^{s nv} = a^{mv} \cdot a^{un} = a^{mv+un}$$

Assim, $a^r \cdot a^s$ é o número cuja nv -ésima potência é a^{mv+un} , logo por

definição de raiz:

$$a^r \cdot a^s = \sqrt[nv]{a^{mv+un}} = a^{(mv+un)/nv}$$

Como:

$$\frac{mv + un}{nv} = \frac{m}{n} + \frac{u}{v}$$

Portanto

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

■

Outro ponto que vale destaque acerca das potências de expoente racional, para Lima *et.al.* (2016), trata que embora estas potências não contenham todos os números reais positivos, em todo o intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência de a^r com $r \in \mathbb{Q}$, desde que $a \neq 1$. Ou seja, tem-se o seguinte Lema, que posteriormente auxiliará a definir as potências de base irracional.

Lema: Fixado um número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência de a^r , com $r \in \mathbb{Q}$.

Demonstração: Dado o intervalo $[\alpha, \beta]$, com $0 < \alpha < \beta$, para provar o lema, deve existir um a^r , com $r \in \mathbb{Q}$, que pertença ao intervalo. Suponha que a e α sejam maiores que 1. Como será visto posteriormente durante estudo sobre a monotonicidade da função exponencial, as potências de expoente natural de números maiores que 1 crescem acima de qualquer cota fixada. Logo, obter-se $M, n \in \mathbb{N}$ tais que:

$$\alpha < \beta < a^M \text{ e } 1 < a < \left(1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M}\right)^n$$

Segue que:

$$1 < a^{1/n} < 1 + \frac{\beta - \alpha}{a^M} \text{ e } 0 < a^M (a^{1/n} - 1) < \beta - \alpha$$

Tomando $m \in \mathbb{Z}$, vale:

$$\frac{m}{n} \leq M \Rightarrow 0 < a^{\frac{m}{n}} (a^{\frac{1}{n}} - 1) < \beta - \alpha$$

Portanto,

$$0 < a^{\frac{m+1}{n}} - a^{\frac{m}{n}} < \beta - \alpha$$

Assim, as potências

$$a^0, a^{\frac{1}{n}}, a^{\frac{2}{n}}, \dots, a^M$$

são extremos de intervalos consecutivos com comprimento menor que $\beta - \alpha$ do intervalo $[\alpha, \beta]$. E como $[\alpha, \beta] \subset [1, a^M]$, pelo menos um desses extremos está contido no intervalo $[\alpha, \beta]$. ■

Para definir a^r , para r irracional, é necessário realizar o estudo através da função, $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(r) = a^r$. Portanto, essa definição e a definição a^r , para r real, são apresentadas de forma posterior após a apresentação sobre a função exponencial.

4.2. DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO E ALGUNS CONCEITOS

Função pode ser definida dados dois conjuntos não vazios A e B , uma função de A em B , denotada por $f: A \rightarrow B$, é a lei que associa cada elemento de $x \in A$ a um único elemento de $y \in B$, indicado por $f(x)$. E dada uma função $f: A \rightarrow B$, denotamos os conjuntos A e B como, respectivamente, *domínio* ou $D(f)$, e *contra-domínio* de f , $CD(f)$. Os elementos do domínio são chamados de *variáveis independentes* e os elementos do contra-domínio, *variáveis dependentes*. ■

Outro elemento de destaque nas função é a *imagem* da função, dado um y_0 pertencente ao contra-domínio de f , caso $y_0 = f(x_0)$, então y_0 é chamado de imagem de x_0 . E O conjunto de todos os elementos de B que são imagem de algum elemento de A se denomina conjunto-imagem de f , e pode ser indicado com a notação $Im(f)$, e definido como:

$$Im(f) = \{y \in CD(f) | \exists x \in D(f); f(x) = y\}$$

Ademais, seja uma função f de A em B . Dizemos que esta função é *injetora* e somente se, dado um elemento do domínio este nunca assume a mesma imagem duas vezes, isto é para qualquer $x_1, x_2 \in A$, com $x_1 \neq x_2$, tem-se que

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$

Também, é possível definir uma função como *sobrejetora*. Dizemos uma função f de A em B esta função é *sobrejetora* se, e somente se, $\forall y \in CD(f)$ existe $x \in D(f)$, tal que $f(x) = y$.

■

Posteriormente, será necessário em algumas demonstrações o uso do Teorema da Sequência Monótona. Portanto, traremos este teorema e sua demonstração, segundo Oliveira (2015).

Teorema 1: *Toda sequência monótona limitada é convergente*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência monótona não-decrescente e limitada. Escrevendo os termos da sequência dada como um conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, então ele possui um supremo denotado por $a = \sup X$. Dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de X , pois a é a menor das cotas. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Portanto, $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$, onde $\lim x_n = a$. Ou seja, temos também que $\lim x_n$ é o supremo do conjunto dos valores de x_n . De modo análogo prova que se (x_n) for não-crescente então $\lim x_n$ é o ínfimo do conjunto dos valores de x_n .

■

4.3. A FUNÇÃO EXPONENCIAL

Definição: Seja a um número real positivo, com $a \neq 1$. Chamamos $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de uma *função exponencial* de base a , aquela definida por $f(x) = a^x$.

Com isso, como apontado por Oliveira (2015), é possível observar então que na função exponencial a variável independente atua como o expoente de uma base positiva. Portanto, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, valem as seguintes propriedades como vistas anteriormente:

- I. $a^x + a^y = a^{x+y}$;
- II. $f(1) = a^1 = a$;
- III. Se $x < y$ então $a^x < a^y$, quando $a > 1$ e

Se $x < y$ então $a^x > a^y$, quando $0 < a < 1$.

■

A partir, destas propriedades, algumas proposições podem ser observadas. Primeiramente, agora com a função exponencial definida, é possível, realizar o estudo sobre as potências de base irracional. Tomemos então como ponto de partida a propriedade III, para realizar o estudo.

A propriedade III no diz que a função exponencial definida de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$, de forma a satisfazer esta propriedade para a^x com x irracional. Tomemos então $r, s \in \mathbb{Q}$, sendo dois números racionais que se aproximam por falta e excesso de x , respectivamente, e suponhamos ainda $a > 1$. Logo:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < a^x < a^s$$

Ou seja, a potência a^x , cujo o expoente é um número irracional, pode ser definido como o número real cujas as aproximações por falta são a^r , com $r < x$, $r \in \mathbb{Q}$, e cujas aproximações por excesso são a^s , com $s > x$, $s \in \mathbb{Q}$.

O número a^x está bem definido, pois não existem dois números reais distintos que satisfaçam a propriedade anterior. Para demonstrar isso, consideremos $a > 1$ (a prova para $0 < a < 1$ é análoga) e suponhamos que existam dois números reais distintos α e β , tais que:

$$r < x < s \Rightarrow a^r < \alpha < \beta < a^s$$

Tal fato, irá contradizer o demonstrado anteriormente, a qual foi mostrado que fixado um número real positivo $a \neq 1$, em todo intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência de a^r , com $r \in \mathbb{Q}$, dado que no intervalo compreendido entre α e β , não existe nenhuma potência de a^r , com r racional. Portanto, o número real cujas as aproximações por falta são a^r e cujas aproximações por excesso são a^s , com $r, s \in \mathbb{Q}$ e $r < x < s$, é único.

Desta forma, definido a^x para todo x real, pode-se iniciar o estudo sobre a função exponencial, visto que esta é definida de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

■

Dado a propriedade (I), a função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, assume o valor 0,

somente se for identicamente nula, ou seja, $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pois, dado um $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $f(x_0) = 0$, então para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0$$

Logo f será identicamente nula. ■

Ademais, por meio da propriedade (I) e da proposição acima, é possível demonstrar a positividade da função exponencial, ou seja, que todo elemento do contra-domínio pertence aos $\mathbb{R}^+$. Pois, se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possui a propriedade (I) e que não seja identicamente nula, tomando um $x \in \mathbb{R}$ arbitrário, temos:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0$$

Ou seja, o contra-domínio de qualquer função exponencial pode ser tomado, tanto como $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$. ■

A função exponencial não possui limite superior, ou seja, não existe um número N , tal que N seja maior ou igual a todo elemento da imagem de f . Para verificar tal característica da função, demonstremos que dado $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$, a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.

Esta demonstração é baseada no lema anterior, a qual foi mostrado que em todo o intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência de a^r com $r \in \mathbb{Q}$, desde que $a \neq 1$. Ou seja, por toda a totalidade do $\mathbb{R}^+$ podemos encontrar uma imagem a^x de f , com um x racional. Assim, quando a função for crescente, $a > 1$, então a^x cresce sem limites, quando dado $x > 0$ torna-se cada vez mais grande. E no caso da função decrescente, $0 < a < 1$, a^x cresce sem limites conforme, dado $x < 0$, torna-se cada vez mais grande, em valor absoluto. ■

Na função exponencial, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}^+$ e $a \neq 1$, tem-se que $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = a^0 = 1$. Esta afirmação será utilizada para a posterior prova da continuidade da função exponencial, visto isso segue a demonstração, com base em (Oliveira, 2015).

A demonstração decorre da definição de limite, Táboas (2008) define limite como, dados um função $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ e um ponto de acumulação a do conjunto B , diz-se que o limite $\ell \in \mathbb{R}$ é o limite de f em a , ou em outra notação $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, se está satisfeita a seguinte condição:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$x \in B, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Assim, com o uso dessa definição, devemos mostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |a^x - a^0| < \varepsilon \quad (1.1)$$

Para mostramos que esta condição é satisfeita, vamos mostrar que é um absurdo que isto não ocorra, ou seja que $\lim_{x \rightarrow 0} a^x$ não seja a^0 . Portanto, existe $\varepsilon_0 > 0$, tal que para todo $\delta > 0$, existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |a^x - a^0| \geq \varepsilon_0 \quad (1.2)$$

Visto que deve valer $\delta > 0$, tomemos $\delta_n = \frac{1}{n}$, com $n \in \mathbb{N}$, o que implica que existe um $x_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < |x_n - 0| < \frac{1}{n} \Rightarrow |a^{x_n} - a^0| = |a^{x_n} - 1| \geq \varepsilon_0 \quad (1.3)$$

Com base na primeira metade da sentença acima, temos que quando $n \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0$, visto que $\frac{1}{n}$ ficará cada vez menor. Pode-se, então, escolher uma subsequência (x_{nk}) de (x_n) de forma que (x_{nk}) seja monótona (decrecente ou crescente).

Suponhamos que (x_{nk}) seja decrecente (caso crescente é análogo). Notemos que $0 \leq x_{nk}$ e que $1 = a^0 \leq \dots \leq a^{x_{nk}} \leq \dots \leq a^{x_{n1}}$. Então $(a^{x_{nk}})$ é monótona decrecente e limitada. E sabe-se que toda sequência monótona limitada é convergente, como visto no Teorema 1, logo ela é convergente. Como $(a^{x_{nk}})$ é monótona decrecente, limitada e converge, os valores $a^{x_{nk}}$ tendem ao ínfimo de $a^{x_{nk}}$, a qual $\inf a^{x_{nk}} = 1$.

Mas como $(a^{x_{nk}})$ é uma subsequência de (a^{x_n}) , (1.3) deve valer também

para $(a^{x_{nk}})$, contudo isso contraria o fato de que $a^{x_{nk}} \rightarrow 1 = \inf\{a^{x_{nk}}, k \in \mathbb{N}\}$. Portanto, não existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que (1.2) seja verdade, ou seja, é um absurdo. Dessa forma, tem-se que $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = a^0 = 1$.

■

A função exponencial é contínua, como definido por Lima *et.al.* (2016), isso quer dizer que, dado $x_0 \in \mathbb{R}$, é possível tornar a diferença $|a^x - a^{x_0}|$ tão pequena quanto se deseje, desde que x seja tomado suficientemente próximo de x_0 . Com o uso de uma análise mais informal, por ser contínua a função exponencial pode ser pode ser traçada em uma folha sem retirar a caneta do papel.

Ademais, para então provarmos a continuidade da função exponencial, tomemos $x = x_0 + h$ para algum $h \in \mathbb{R}$, então

$$|a^x - a^{x_0}| = |a^{x_0+h} - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^h - 1|$$

Como visto na demonstração anterior, a^h irá tender a 1, conforme h seja suficiente pequeno, ou seja $a^h \rightarrow 1$ quando $h \rightarrow 0$. Assim, fazendo $x \rightarrow x_0$, então $h \rightarrow 0$. Logo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |a^x - a^{x_0}| = \lim_{h \rightarrow 0} a^{x_0}|a^h - 1| = \lim_{h \rightarrow 0} a^{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} |a^h - 1|$$

Como a^{x_0} é constante,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |a^x - a^{x_0}| = a^{x_0} \cdot |1 - 1| = 0$$

Como, $a^x, a^{x_0} \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x - a^{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} a^x - \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} a^x - a^{x_0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$$

■

A função exponencial é uma função *bijetora*. A *injetividade* da função exponencial decorre da monotonicidade da função, pois como visto em (III), caso $a > 1$, então

$$x < y \Rightarrow a^x < a^y \text{ e } x > y \Rightarrow a^x > a^y$$

Portanto, para $x \neq y$, tem-se $a^x \neq a^y$.

De modo análogo para quando $0 < a < 1$, tem-se

$$x < y \Rightarrow a^x > a^y \text{ e } x > y \Rightarrow a^x < a^y$$

Portanto, para $x \neq y$, tem-se $a^x \neq a^y$.

Agora, para provar que a função exponencial é *sobrejetiva*, temos que mostrar que para todo $y > 0$, existe um $x \in \mathbb{R}$, tal que $a^x = y$, ou em outras palavras que todo elemento do contradomínio é imagem de f .

Como visto, anteriormente em todo o intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência de a^r com $r \in \mathbb{Q}$, desde que $a \neq 1$. Dessa forma, esse lema nos garante que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma potência a^{r_n} , com $r_n \in \mathbb{Q}$, que pertence ao intervalo $\left(y - \frac{1}{n}; y + \frac{1}{n}\right)$. Com isso, temos que $|a^{r_n} - y| < \frac{1}{n}$, e, portanto, podemos dizer que $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = y$.

Para $a > 1$, escolheremos as potências sucessivas de a^{r_n} , tais que

$$a^{r_1} < a^{r_2} < \dots < a^{r_n} < \dots < y$$

Visto que a função exponencial, como visto anteriormente, é ilimitada superiormente, então existe uma potência a^s , com $s \in \mathbb{Q}$, tal que $y < a^s$. E como a função exponencial é monótona e crescente, neste caso, temos que

$$r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots < s$$

Dessa forma, como (r_n) é uma sequência monótona, cujos os elementos estão limitado superiormente por s . E como descrito por Stewart (2013), o axioma da completude nos diz que para o conjunto dos números reais, que diz que, se S é um conjunto não vazio de números reais, e é limitado superiormente, então S admite um supremo. Tomando o supremo de (r_n) como um número real qualquer x , temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$. Como a função exponencial é contínua, temos que

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{r_n} = y$$

Ou seja, mostramos que todo $y > 0$, existe um $x \in \mathbb{R}$, tal que $a^x = y$. Logo a função exponencial é *sobrejetiva*. A demonstração para o caso $0 < a < 1$, é realizado de forma análoga.

■

A partir do debatido acima acerca da função exponencial, tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \text{ caso } a > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \text{ caso } 0 < a < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \text{ caso } a > 1$$

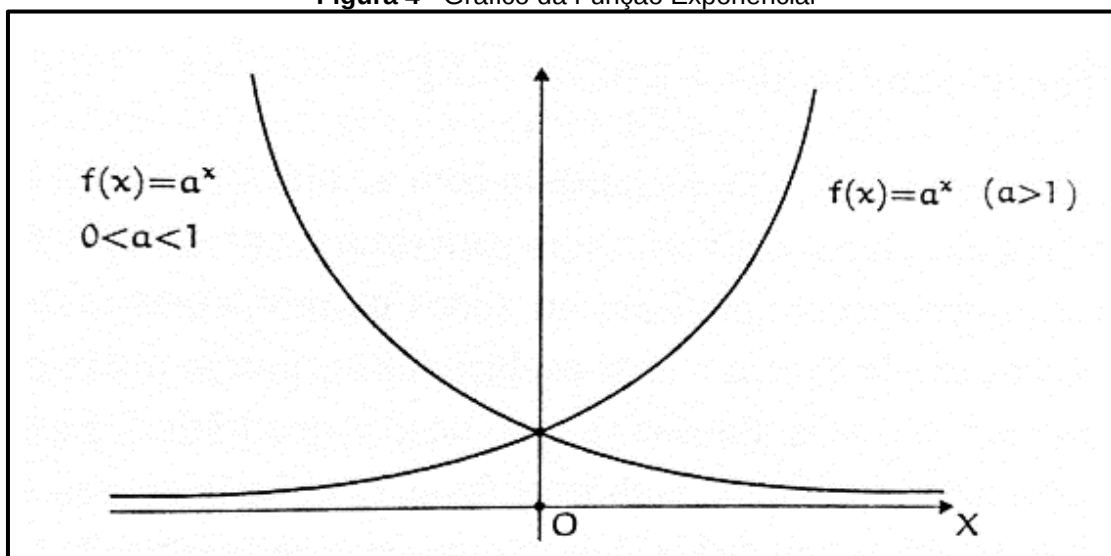
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \text{ caso } 0 < a < 1$$

4.3.1. O gráfico da Função Exponencial

A partir dos elementos discutidos acima, pode-se apontar que o gráfico da função exponencial possui as seguintes características:

- É um gráfico contínuo, ou seja, sem descontinuidades ou alterações bruscas ao longo de seu traçado;
- O domínio está compreendido em $(-\infty; +\infty)$ e o conjunto imagem em $(0; +\infty)$;
- Como visto, a função exponencial é monótona, ou seja, seu gráfico é crescente, se $a > 1$, e decrescente $0 < a < 1$;
- É ilimitada superiormente, mas limitada inferiormente;
- Intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0,1)$;
- Não intercepta o eixo das abcissas em nenhum ponto;

Figura 4 - Gráfico da Função Exponencial



Fonte: Lima *et.al.* (2016, p. 185)

Em relação ao crescimento e decrescimento da função, de acordo com Lima *et.al.* (2016). Quando $a > 1$, ou seja, quando é crescente, nota-se que a curva apresenta um crescimento lento conforme o valor de x aumenta, enquanto negativo. Conforme que x cresce, o crescimento de y , torna-se cada vez mais acelerado.

O mesmo ocorre quando $0 < a < 1$. Quando x varia da esquerda para a direita, apresenta um decrescimento acelerado enquanto x é negativo. À medida que x cresce, o decrescimento de y se torna cada vez mais lento.

Este fato, reflete na inclinação da tangente do gráfico, se $a > 1$; para valores muito grandes de x , a tangente é quase horizontal, e assim como destaca Lima *et.al.* (2016) o crescimento exponencial superar o de qualquer polinômio. E se $0 < a < 1$, o mesmo ocorre para valores negativos de x , cujo valor absoluto são muito grandes.

4.4. CARACTERIZAÇÃO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Em conjunto com a função afim e a função quadrática, a função exponencial constitui um dos modelos mais recorrentes na resolução de problemas elementares em ambiente escolar. Assim, para determinar o modelo mais adequado ao estudo de um problema, é imprescindível compreender as propriedades características de cada função. Dessa forma, torna-se necessário destacar as propriedades específicas da função exponencial, o que é abordado no seguinte teorema. Com base em Oliveira (2015) e Lima *et. al* (2016), temos:

Teorema da Caracterização da função exponencial: Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, uma função monótona e injetora. As seguintes afirmações são equivalentes.

- I. $f(xn) = f(x)^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.
- II. $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a = f(1)$;
- III. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Para provar esta afirmação, seguiremos da seguinte forma $(I) \Rightarrow (II) \Rightarrow (III) \Rightarrow (I)$.

Para provar que $(I) \Rightarrow (II)$, iniciemos com a hipótese (I) e mostrar que é válida para todo número racional $r = m/n$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, onde $f(rx) = f(x)^r$. Escrevendo $nr = m$, temos

$$f(rx)^n = f(nrx) = f(mx) = f(x)^m.$$

Logo

$$f(rx) = f(x)^{m/n} = f(x)^r.$$

Além disso para, $f(1) = a$, tem-se

$$f(r) = f(r \cdot 1) = f(1)^r = a^r, \text{ para todo } r \in \mathbb{Q}.$$

Agora, suponhamos que f seja uma função crescente, portanto $1 = f(0) < f(1) = a$. Suponhamos agora, por absurdo, que exista um $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) \neq a^x$. Se $f(x) < a^x$ (o caso $f(x) > a^x$ é análogo), então segundo o Lema de que em todo o intervalo de $\mathbb{R}^+$ existe alguma potência de a^r com $r \in \mathbb{Q}$, desde que $a \neq 1$, temos que existe um número racional r tal que

$$f(x) < a^r < a^x \Rightarrow f(x) < f(r) < a^x$$

Como f é crescente, então se $f(x) < f(r)$ implica que $x < r$. Mas como visto acima $a^r < a^x$, o que implica que $r < x$. Assim temos uma contradição, então é um absurdo afirmar que exista um $x \in \mathbb{R}$, tal que $f(x) \neq a^x$. Logo $f(x) = a^x$, o que prova que $(I) \Rightarrow (II)$, quando f for crescente. A prova é análoga para f decrescente.

Para provar que $(II) \Rightarrow (III)$, temos que seja $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ e $a = f(1)$. Sendo $y \in \mathbb{R}$, obtemos

$$f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$$

Por fim, para (III) $\Rightarrow$ (I), seja $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Para $n \in \mathbb{N}$, vale

$$f(nx) = f(\underbrace{x + x + x + \cdots + x}_{n \text{ vezes}}) = \underbrace{f(x) \cdot f(x) \cdot f(x) \cdots f(x)}_{n \text{ vezes}} = f(x)^n$$

Agora para o caso de n ser um número negativo, ou de outra forma o caso $f(-nx) = f(x)^{-n}$. Para isto, analisemos o caso $f(-x)$. Temos que

$$f(-x) \cdot f(x) = f(-x + x) = f(0) = 1 \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

Com base nisso, tem-se

$$f(-nx) = f(\underbrace{-x - x - x - \cdots - x}_{n \text{ vezes}}) = \underbrace{f(-x) \cdot f(-x) \cdot f(-x) \cdots f(-x)}_{n \text{ vezes}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{f(x)} \cdots \frac{1}{f(x)}}_{n \text{ vezes}} = \frac{1}{f(x)^n} = f(x)^{-n}$$

■

Pode-se destacar, também, as funções do tipo exponencial. Visto que em muitas situações problemas que possuem um crescimento ou decrescimento exponencial, como o montante de uma aplicação a juros compostos em função do tempo, ou como também a desintegração radioativa; estas aparecem na forma que chamamos de "tipo exponencial". Este tipo de função pode ser definida como:

Definição: Uma função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ é de tipo exponencial quando se tem $g(x) = ba^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas.

Além disso, Oliveira (2015) afirma que as funções de tipo exponencial gozam das mesmas propriedades da função exponencial, tais como, a monotonicidade, a injetividade e serem crescentes quando $a > 1$ e decrescentes quando $0 < a < 1$. Agora partiremos para caracterizar este tipo de função.

■

Teorema da Caracterização da função de tipo exponencial: Uma função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ é de tipo exponencial se, e somente se, for monótona e injetora, tal que, para $x, h \in \mathbb{R}$ quaisquer, $g(x + h)/g(x)$ depende apenas de h , mas não de x .

Este teorema indica que as situações em que o modelo matemático das

funções do tipo exponencial deve ser aplicado são aquelas em que a variação relativa independe do valor de x , mas sim do acréscimo h aplicado a x . Como por exemplo, a meia-vida de uma substância radioativa, que corresponde ao tempo necessário para que metade da massa de uma amostra se desintegre. Nesse contexto, o tempo necessário para reduzir pela metade a radioatividade de uma tonelada de urânio é o mesmo que para um grama da mesma substância.

Demonstração: Seja $g(x) = a, b \in \mathbb{R}^+$. Então

$$\frac{g(x+h)}{g(x)} = \frac{ba^{x+h}}{ba^x} = \frac{ba^x(a^h)}{ba^x} = a^h$$

Dessa forma, percebe-se que $g(x+h)/g(x)$ depende apenas de h e não de x . Com isso, seja $g(x+h)/g(x) = \phi(h)$, e definindo $f(x) = g(x)/b$, com $b = g(0)$. Então f é monótona e injetora. Temos

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = \frac{g(x+h)/b}{g(x)/b} = \frac{g(x+h)}{g(x)} = \phi(h).$$

Com isso, como $f(0) = 1$, podemos então colocar $x = 0$ na igualdade, obtendo

$$\frac{f(x+h)}{f(x)} = \phi(h) \Rightarrow \frac{f(0+h)}{f(0)} = \phi(h) \Rightarrow \frac{f(h)}{1} = \phi(h) \Rightarrow f(h) = \phi(h)$$

Assim, f cumpre a propriedade $f(x+h) = f(x) \cdot f(h)$, ou seja, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, vale $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, logo, com base no teorema da Caracterização da função exponencial, podemos afirmar que $f(x) = a^x$. Por fim, isso resulta em $g(x) = bf(x) = ba^x$, ou seja, é uma função do tipo exponencial.

■

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente produto educacional é resultante de uma pesquisa desenvolvida no âmbito do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (PPGEM/UEPA). O objetivo central do estudo consistiu na elaboração de um Livro-Jogo, uma variante do Roleplaying Game, destinado a discentes do ensino médio, visando à consolidação de conteúdos relacionados à função exponencial.

A investigação se fundamentou em uma análise da abordagem da Função Exponencial em livros didáticos, bem como em teses e dissertações produzidas nos últimos cinco anos. A proposta distingue-se por sua abordagem inovadora, que associa os aportes teóricos e metodológicos das Fases da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996, 2008), os momentos do jogo descritos por Grandó (1995, 2000) e a utilização dos jogos de Roleplaying Game. Adicionalmente, a pesquisa debruçou-se sobre os Roleplaying Games com o intuito de apresentar o gênero àqueles não familiarizados, dissertando sobre suas definições, mecânicas e variações. Foram discutidas, ainda, as potencialidades de seu uso em sala de aula, justificando-se a seleção da variante do Livro-Jogo para a constituição da proposta.

A validação do Livro-Jogo elaborado, intitulado “Conspiração Contaminante”, foi realizada com uma turma do primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática da UEPA, composta por estudantes recém-egressos da educação básica. A escolha deste público-alvo justifica-se pelo fato de os participantes possuírem o conhecimento prévio necessário sobre o conteúdo, o que se alinha à finalidade da atividade de consolidar os conceitos envolvidos.

A aplicação piloto evidenciou resultados positivos e proporcionou ajustes no material, o que resultou no seu aprimoramento. Portanto, a proposta aqui apresentada já foi validada, conforme detalhado na referida dissertação. Sugere-se, contudo, que a mesma possa ser adaptada para diferentes contextos ou para discentes com distintos níveis de proficiência no conteúdo.

Em resumo, a pesquisa apresenta uma contribuição valiosa para o campo do ensino de Funções Exponenciais. E o referido produto educacional fica disponível para que novos aspectos possam ser explorados mais a fundo para fortalecer ainda mais o processo de pesquisa e que novas estruturas no ensino de funções possam ser desenvolvida de forma a torna seu ensino mais atraente e cheios de possibilidade para os professores e alunos da educação básica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEZERRA, Maria de Nazaré Carvalho. **Teoria dos Números**: um curso introdutório. Belém: EditAedi/UFAPA, 2018. Disponível em: <https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/206368/2/livro_teorias_dos_numeros.pdf>. Acesso em 12 jul. 24.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e métodos da didática da Matemática. In: BRUM, Jean. (Org.). **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996. p. 35-114.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos. Ática. São Paulo, 2008.

FERNANDES, Alexsandro Marcelino et al. **Ypostírixi**: modelo de apoio baseado em RPG aventura solo para o desenvolvimento de objetos de aprendizagem. 2017, 97 f. Dissertação (Mestrado em Informática), Universidade Federal da Paraíba, 2017.

GRANDO, Regina Celia. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, São Paulo. 2000.

GRANDO, Regina Celia. **O jogo [e] suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da matemática**. 1995. 175f. : il. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP, 1995.

IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar 2**: logaritmos. 10 ed. - São Paulo: Atual, 2013.
JUNIOR, Sebastiao da Silva Lima. **UM ESTUDO SOBRE A FUNÇÃO EXPONENCIAL: PROPOSTAS DE ATIVIDADES LÚDICAS**. 2022 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino) Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Rio de Janeiro. 2022.

LIMA, Elon Lages. *et. al.* **A Matemática do Ensino Médio - Volume 1**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LIMA, Elon Lages. **Logaritmos**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1996.
MARCATTO, Alfeu. **Saindo do quadro – uma metodologia lúdica e participativa baseada no role playing game**. 2. ed. São Paulo: A. Marcatto, 1996.

OLIVEIRA, Rafael Henrique de. **Um estudo sobre a função exponencial**. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. 2015. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=2375543>. Acesso em 01 jul. 24.

SCHICK, Lawrence. **Heroic Worlds: A History and Guide to Role-Playing Game**. Buffalo: Prometheus Books, 1991, 448p.

SILVA, Rodrigo Felipe da. **Função exponencial e logarítmica**. 118 p. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. 2016.

SOUZA, Roger Thiago Aires de; BARROS, Thiago de Vasconcelos. **Conspiração Contaminante: Roleplaying Game e conteúdos matemáticos**. 2023. 88 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) Universidade do Estado do Pará, Belém, 2023.

STEWART, James. Cálculo – Volume II. 7. ed. Traduzido por EZ2 Translate. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2013.

TÁBOAS, Plácido Zoega. **Cálculo em uma variável real**. São Paulo. Editora da Universidade de São Paulo, 2008.

VASQUES, Rafael Carneiro. **As potencialidades do RPG (Role Playing game) na educação escolar**. 2008. 169 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Letras de Araraquara, 2008.



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n - Telégrafo
66113 - 200 Belém-Pa
<https://propesp.uepa.br/ppgem/>