



educa-pe

Fascículo I

MATEMÁTICA



Matrizes e Sistemas Lineares

Expediente

Governador de Pernambuco

Paulo Henrique Saraiva Câmara

Vice-governadora de Pernambuco

Luciana Barbosa de Oliveira Santos

Secretário de Educação e Esportes de Pernambuco

Frederico da Costa Amancio

Autores

Profª. Amanda Rodrigues Marques da Silva
Prof. Jhonatan de Holanda Cavalcanti

Projeto gráfico

Clayton Quintino de Oliveira

Diagramação

Caio Renato Tavares da Silva

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISDB

GOVERNO de Pernambuco. Secretaria de Educação e Esportes.
Matemática: Matrizes e Sistemas Lineares. – Recife: Secretaria de Educação e Esportes, 2020.
16p.

2º Ano Ensino Médio. Educa-PE. Fascículo 1.

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Matrizes (Matemática) 3. Sistemas lineares. I. Título.

CDU – 51

Elaborado por Hugo Carlos Cavalcanti | CRB-4 2129



Você já jogou
Batalha Naval?

O jogo tem objetivo de afundar as
embarcações dos adversários que
serão desenhadas nas grades e
funciona assim:



1. Criamos uma grade nomeando as linhas com letras e as colunas com números.
No nosso modelo, a grade terá 6 linhas e 6 colunas.
2. Indicamos uma posição, através da posição da linha e da coluna para atirar. O objetivo é atirar nas embarcações do adversário para afundá-las. Como estamos estudando matemática, vamos nomear com números as linhas e as colunas. Fica combinado de sempre dizer primeiro o número da linha e em seguida o número da coluna.

3. No nosso modelo de jogo, teremos quatro tipos de embarcações:



Destroyers



Fragata



Porta - Aviones



Hidroavião

4. Cada jogador desenha na sua grade e terá 01 destroyer, 01 fragata, 01 porta-aviões e 02 hidroaviões. Temos um exemplo abaixo. Você pode dispor suas embarcações da forma que preferir na grade.

	1	2	3	4	5	6
1	Red					
2	Red		Green	Green	Green	
3						Orange
4						Orange
5	Yellow	Purple	Yellow			Orange
6	Purple	Yellow	Purple			Orange

Sabendo como funciona nosso jogo, tomemos a grade apresentada e vamos observar a posição de cada quadrado da grade. Suponha que essa grade é a minha e você quer atirar no destroyer (embarcação vermelha)! Você terá que apontar a posição de cada quadrado que o forma, lembrando que primeiro vem a linha, que vamos chamar de i , e, em seguida, vem a coluna, que vamos chamar de j . Como você apontaria essa localização?

Se você respondeu que diria linha 2 e coluna 1 e em seguida linha 1 e coluna 1, ou vice-versa, você acertou! Se você errou, não tem problema. Observe a imagem abaixo que vai ajudar a compreender o sentido das posições. Eu vou chamar a grade de G e cada quadradinho de g_{ij} , lembrando que i é o número da linha e j é o número da coluna. O destroyer é formado pelos quadrados $g_{1,1}$ e $g_{2,1}$, da mesma forma a fragata $g_{2,3}$, $g_{2,4}$ e $g_{2,5}$.

$$D = \begin{bmatrix} g_{1,1} \\ g_{2,1} \end{bmatrix}$$

$$F = [g_{2,3} \ g_{2,4} \ g_{2,5}]$$

	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6



Desafio 1

Agora é a sua vez! Identifique quais quadradinhos formam o porta-avião e os dois hidroavião juntos. **(Reposta no Gabarito)**

Todo esse esquema pode ser associado ao conceito de matriz, que é a ordenação de elementos em linhas e colunas, dentro de colchetes ou parênteses, como fizemos na imagem anterior para as embarcações. As letrinhas i e j são chamadas de índices; as matrizes são nomeadas com letras maiúsculas do nosso alfabeto.

Algumas matrizes recebem nomes especiais. Você observou que a matriz que representa o Destroyer ($D = \begin{bmatrix} g_{1,1} \\ g_{2,1} \end{bmatrix}$) tem duas linhas e somente uma coluna? Pois é! Essa matriz recebe o nome de **matriz coluna**. A quantidade de linhas é representada pela letra m e a quantidade de colunas é representada pela letra n . Assim, a matriz D tem $m = 2$ e $n = 1$.



Desafio 2

05

Agora observe a matriz que representa a fragata. Que nome você chutaria para ela?
Quantas linhas (m) e quantas colunas (n) ela tem? **(Resposta no Gabarito)**

Existem outros tipos de matrizes que recebem nomes especiais. Veja algumas a seguir:

Matriz Quadrada

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 0 & 6 & 5 \\ 2 & -10 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, lemos: Matriz A formada pelos elementos a_{ij} de ordem 3.

Uma matriz quadrada tem sempre o número de linhas e de colunas iguais.

Toda matriz quadrada possui diagonal principal (destaque azul) e diagonal secundária (destaque vermelho).

Matriz Identidade

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz identidade é sempre quadrada e tem em sua diagonal principal apenas elementos 1 e todos os demais elementos iguais a 0. Essa é uma matriz identidade de ordem 3, que poderia ser representada assim: I_3

Igualdade de matrizes, Matriz Transposta e Matriz Simétrica

06

Duas ou mais matrizes são iguais quando os elementos que estão na mesma posição em ambas são iguais.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & a & 3 \\ 5 & 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 5 & 3 \\ 5 & c & -2 \end{bmatrix}$$

usando a igualdade de matrizes você pode concluir que:

$$a = 5, b = -3 \text{ e } c = 7$$

Em algum momento dos seus estudos de matrizes, você pode esbarrar numa escrita assim: A^t . Esse “tezinho” em cima do A significa que estamos falando de matriz **transposta**, as linhas se transformam em colunas e as colunas se transformam em linhas. É como se a gente girasse a matriz original.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \text{então } A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Algumas vezes acontece da matriz original e a matriz transposta serem exatamente iguais. Aí temos a **matriz simétrica**.



Desafio 3

07

Experimente encontrar a matriz transposta de $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. O que você concluiu?

(Reposta no Gabarito)

As operações com matrizes

Quando aprendemos a somar e subtrair números naturais, quando ainda éramos crianças, o que nossa professora ensinou? Unidade soma com unidade, dezena soma com dezena, centena soma com centena e por aí vai. Quando estamos trabalhando na operação com matrizes, você consegue imaginar como faria? Pense um pouquinho antes de prosseguir.

Vamos ver se você acertou?

Antes de começar a somar ou subtrair as matrizes precisamos pensar em uma coisa que não precisamos pensar quando somamos números, precisamos verificar se elas são do mesmo tipo. **Matrizes do mesmo tipo são matrizes que possuem quantidades de linhas e de colunas iguais.** Se elas são do mesmo tipo, podemos ir no passo a passo e resolver. Se não, é porque não é possível somar ou subtrair com essas matrizes.

É bem simples! Basta a gente somar ou subtrair os elementos que estão na mesma posição.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 + 5 & 5 + 7 & 3 + (-2) \\ 5 + 3 & 3 + 6 & -1 + (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 13 & 1 \\ 8 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 - 5 & 5 - 7 & 3 - (-2) \\ 5 - 3 & 3 - 6 & -1 - (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 3 + 2 \\ 2 & -3 & -1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Nas matrizes, não trabalhamos com a operação de divisão. Mas a operação de multiplicação aparece de duas formas: *Multiplicação de um número (de um escalar) por uma matriz* ou *Multiplicação de Matriz por Matriz*. Segue comigo para verificar cada um desses dois casos.

1º Caso de Multiplicação: Um número por uma matriz

Suponha que a lanchonete de perto da escola faz seus registros de vendas em uma matriz R de duas linhas com três colunas, ou seja, $R_{2 \times 3}$. Na linha 1, eles registram as vendas da manhã e na linha 2 as vendas realizadas a tarde. Na coluna 1, eles registram a quantidade dos salgados vendidos, na coluna 2 o número de doces vendidos e, na coluna 3, a quantidade de bebidas vendidas (suco, água, refrigerante). A seguir, você vai ver o registro de vendas do dia 18 de março, dia que as aulas foram suspensas para combater a infecção com o novo coronavírus.

$$R = \begin{pmatrix} 15 & 16 & 14 \\ 10 & 20 & 16 \end{pmatrix}$$

O dono da lanchonete me disse que em dias de aula na escola, ele vende o triplo do que havia vendido naquele dia. Vamos descobrir que matriz ele monta em dias de aula normal? Antes de seguir para as próximas linhas, pense um pouco numa possível solução, não tenha medo de errar.

Vamos de descoberta!

Se ele vende o triplo, ele vende três vezes mais. Ou seja, três vezes a matriz R que temos. Fica assim:

$$3 \times R = 3 \times \begin{pmatrix} 15 & 16 & 14 \\ 10 & 20 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 48 & 42 \\ 30 & 60 & 48 \end{pmatrix}$$

Assim, sabemos que ele vende pela manhã: R_{11} (45 salgados), R_{12} (48 doces) e R_{13} (42 bebidas); e vende a tarde: R_{21} (30 salgados), R_{22} (60 doces) e R_{23} (48 bebidas).

2º Caso de Multiplicação: Matriz por Matriz

Nesse caso, temos umas regrinhas para pensar, antes de iniciar uma multiplicação. É o seguinte, nem sempre será possível multiplicar duas matrizes e eu vou te dizer o porquê. Quando vamos multiplicar duas matrizes, o número de colunas da primeira matriz precisa ser igual ao número de linhas da segunda matriz.

Pense comigo na seguinte situação: Seu João gosta de Matemática e de embaralhar a cabeça dos netos com suas charadas matemáticas. Ele desafiou Pedro e Marina a descobrir os valores de x e y em uma multiplicação de matrizes. Ele escreveu, em seu caderno, duas matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e disse: Descubram os valores de x e y, sabendo que $A \times B$ é igual a matriz $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Pedro e Marina começaram a pensar em como resolveriam o problema e decidiram fazer por etapas, como você verá nas próximas linhas.

1ª Etapa: Verificar as ordens de cada uma das matrizes. Trocando em miúdos, eles verificaram se o número de colunas da primeira matriz era igual ao número de linhas da segunda matriz. Assim:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

Quantidade de Colunas = Quantidades de Linhas

Feito isso, perceberam que é possível multiplicar.

2ª Etapa: Multiplicar a 1ª linha da primeira pela 1ª coluna da segunda. Observe!

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2 \times 1} \rightarrow \begin{array}{l} 2 * x + (-1) * y \\ \text{Temos então: } 2x - y \end{array}$$

3ª Etapa: Multiplicar a 2ª linha da primeira matriz pela 1ª coluna da segunda matriz. É uma espécie de multiplicação chuveirinho que os professores ficam falando o tempo todo.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{2 \times 1} \rightarrow \begin{array}{l} 5 * x + 1 * y \\ \text{Temos então: } 5x + y \end{array}$$

4ª Etapa montar a matriz resultado:

$$\begin{bmatrix} 2x - y \\ 5x + y \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz resultado tem o mesmo número de linhas da primeira e o mesmo número de colunas da segunda. Sempre seguiremos esse padrão.



5ª Etapa: Encontrar os valores de x e y . Temos uma matriz resultado com incógnitas e sabemos que ela é igual a matriz $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Então, podemos escrever assim:

$\begin{bmatrix} 2x - y \\ 5x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, você já sabe que duas matrizes são iguais quando os termos que estão na mesma posição são iguais. A partir daí, temos um sistema linear com duas equações e duas incógnitas e podemos resolver pelo método da adição ou da substituição.

6ª Etapa: Convido você a resolver comigo pelo método da adição.

$$\begin{array}{r} 2x - y = 2 \\ 5x + y = 4 \end{array}$$

$$\boxed{7x + 0 = 6}$$

$$7x = 6$$

$$x = \frac{6}{7}$$



Encontramos o valor de x . Agora vamos substituir $\frac{6}{7}$ no lugar de x em uma das equações e descobrir o valor de y .

Substituindo, $x = \frac{6}{7}$ na equação $5x + y = 4$, temos:

$$5 * \frac{6}{7} + y = 4$$

$$\frac{30}{7} + y = 4$$

$$y = 4 - \frac{30}{7}$$

$$y = \frac{28 - 30}{7}$$

$$y = -\frac{2}{7}$$

QUESTÕES



1. (UERJ - ADAPTADA) A temperatura corporal de um paciente foi medida, em graus Celsius, três vezes ao dia, durante cinco dias. Cada elemento a_{ij} da matriz abaixo corresponde à temperatura observada no momento (primeiro, segundo terceiro) i do dia j .

35,6	36,4	38,6	38,0	36,0
36,1	37,0	37,2	40,5	40,4
35,5	35,7	36,1	37,0	39,2

Determine o momento e o dia em que o paciente apresentou a maior temperatura.

2. Determine a , b , c e d para que tenhamos $\begin{pmatrix} a & -3 \\ 4 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d \\ b & -4 \end{pmatrix}$.

GABARITO

Desafio 1

$$P = \begin{pmatrix} p_{3,6} \\ p_{4,6} \\ p_{5,6} \\ p_{6,6} \end{pmatrix} \text{ e } H = \begin{pmatrix} h_{5,1} & h_{5,2} & h_{5,3} \\ h_{6,1} & h_{6,2} & h_{6,3} \end{pmatrix}$$

Desafio 2

Se a matriz com apenas uma coluna, se chama matriz coluna. Uma matriz com uma linha se chamará linha! E essa matriz tem $m=1$ e $n = 3$

Desafio 3

$B^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, seguindo a ideia de matriz simétrica e observando que $B = B^t$, podemos concluir que B é uma matriz simétrica.

1. Primeiro vamos identificar qual elemento representa a temperatura mais alta. A temperatura mais alta é 40,5 que está na posição segunda linha e quarta coluna. Assim, a temperatura foi registrada no segundo momento do dia, no quarto dia de aferição.

2. Sabemos que a igualdade de matrizes está condicionada a igualdade dos elementos que ocupam a mesma posição. Logo, observando $\begin{pmatrix} a & -3 \\ 4 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & d \\ b & -4 \end{pmatrix}$, podemos concluir que: $a = 0$, $b = 4$, $c = -4$ e $d = -3$.

Mande suas dúvidas que a gente responde

