Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática Estatística e Informática
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Carlos Antonio Nascimento da Silva
Ana Kely Martins da Silva
Pedro Franco de Sá

Sequência Didática Para o Ensino de Análise Combinatória por Atividades Experimentais

Parauapebas
2025

Carlos Antonio Nascimento da Silva
Ana Kely Martins da Silva
Pedro Franco de Sá

Sequência Didática Para o Ensino de Análise Combinatória por Atividades Experimentais

Produto Educacional apresentado como requisito obrigatório para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM), da Universidade do Estado do Pará (UEPA).

Linha de Pesquisa: Metodologia do Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Kely Martins da Silva.
Coorientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá.

ISBN: 978-65-5291-037-0

Parauapebas
2025

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Estimados colegas de profissão,

Dados recentes da Secretaria de Estado de Educação do Pará apresentados durante a Semana de Planejamento Pedagógico 2023, mostraram que 29,5% das pessoas de 18 a 24 anos, não trabalham e nem estudam, esses números acendem um alerta sobre os quais podemos fazer algumas reflexões. Em primeiro lugar podemos questionar se esses jovens não trabalham e não estudam, apenas? Ou não trabalham, não estudam e nem se formaram? Também podemos questionar sobre quais motivos essas pessoas estão fora do mercado de trabalho.

Outro dado apresentado durante a Semana de Planejamento que também traz bastante preocupação, mostra que 99% dos alunos da 3ª série do ensino médio estão nos níveis de proficiência básico ou abaixo do básico**,** na disciplina Matemática, de acordo com o Sistema Paraense de Avaliação da Educação (SisPAE).

Essas informações mostram a urgência em refletirmos sobre esses números e sobre os fatores que podem estar relacionados a esse baixíssimo desempenho dos estudantes na disciplina durante a etapa final do ensino médio, bem como devemos buscar alternativas para tornar o processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina mais satisfatório e os conteúdos relacionados mais significativos e compreensíveis para os discentes.

Nesse contexto propomos esse Produto Educacional para o ensino de Análise Combinatória para os alunos do ensino médio. Esse Produto resultou da Dissertação de Mestrado intitulada: “O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio por meio Atividades Experimentais”, apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM) da Universidade do Estado do Pará (UEPA), por Silva (2024). A dissertação teve orientação da Professora Dra. Ana Kely Martins da Silva e coorientação do Professor Dr. Pedro Franco de Sá.

Na Dissertação referida o objetivo foi: analisar os possíveis efeitos que a aplicação de uma Sequência Didática, fundamentada na resolução de problemas e no uso de atividades experimentais, podem ter sobre a compreensão e desempenho na resolução de questões sobre o assunto em estudantes do ensino médio. Assim, a Sequência Didática consistiu-se em 17 (dezessete) momentos, sendo: uma atividade de sondagem ou Pré-teste, três atividades de conceituação, seis atividades de redescoberta, seis atividades de aprofundamento e o Pós-teste.

O Ensino de Matemática por Atividades Experimentais, sob a ótica de Sá (2019) e Sá, Mafra e Fossa (2022) e a Resolução de Problemas, na perspectiva de Brasil (2001) e Sá (2021) foram duas Tendências em Educação Matemática que alicerçaram o desenvolvimento e escrita desse Produto Educacional. Além disso, os resultados dos estudos desenvolvidos por Rosas (2018) e Conceição (2019) no âmbito do PPGEM, evidenciam a relevância da inserção de Atividades Experimentais no ensino de Análise combinatória.

Esperamos que esse Produto Educacional, além de oferecer aos professores de Matemática um material alternativo, que poderá facilitar o processo de ensino do conteúdo de Análise Combinatória tendo como perspectiva o ensino de Matemática por Atividades Experimentais, possa proporcionar aos estudantes uma aprendizagem mais satisfatória quanto ao objeto matemático em questão.

Críticas e sugestões no intuito de melhorar esse trabalho, serão sempre bem-vindas. Desejamos boa leitura e sucesso no desenvolvimento do trabalho!

Os Autores

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nessa seção faremos um breve resumo sobre o Ensino de Matemática Por Atividades Experimentais e sobre a Resolução de Problemas, essas tendências fundamentaram esse trabalho e deram sustentação teórica para a escrita desse Produto Educacional.

O Ensino de Matemática Por Atividades Experimentais tem como um dos principais objetivos fazer com que o aluno perceba, ele próprio, tendo orientação apenas quando solicitarem, a partir da resolução de atividades e sistematização das informações, os padrões e regularidades presentes quando resolvemos determinadas questões, dessa forma terá um contato mais direto com o conhecimento matemático. Nessa perspectiva o aluno é colocado como protagonista, construindo ele próprio o conhecimento, e o professor é visto como um mediador mais experiente que deverá organizar e conduzir o processo.

Sobre a capacidade de Resolver Problemas, além de consolidar os conhecimentos adquiridos, pode ser vista como uma competência almejada a ser desenvolvida nos discentes ao trabalharmos a disciplina Matemática. Além disso, devemos valorizar o processo quando o aluno resolve determinados problemas, não apenas o resultado. Ainda podemos fazer uso de um problema para introduzir determinados assuntos e conceitos matemáticos, como veremos adiante.

1.1 ENSINO DE MATEMÁTICA POR ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Diante das dificuldades encontradas, e frequentemente relatadas, tanto por professores quanto por alunos durante o processo de ensino e aprendizagem da disciplina Matemática, bem como dos resultados não raramente frustrantes nas avaliações internas e externas, faz-se necessário refletir sobre esses processos numa busca constante de aperfeiçoa-los, tendo em vista sempre a melhora nos resultados.

Nesse sentido, alguns estudos vêm sendo desenvolvidos sobre o ensino e aprendizagem de Matemática por meio de Atividades Experimentais, e também sobre o uso de diferentes metodologias, diferentes estratégias, recursos e instrumentos, e seus efeitos nesses processos. Iremos tratar nessa subseção sobre o ensino do assunto Análise Combinatória por meio de

Atividades Experimentais.

Diversos e importantes estudos têm revelado que o ensino de Matemática por meio de Atividades Experimentais vem se mostrando bastante promissor, particularmente sobre o conteúdo Análise Combinatória. Nas pesquisas desenvolvidas por Rosas (2018) e Conceição (2019) no âmbito do Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática (PPGEM) da Universidade do Estado do Pará (UEPA), onde eles analisaram os efeitos da inserção de uma Sequência Didática diferente da tradicional, por meio de um conjunto de Atividades Experimentais e do uso de jogos, para o ensino do assunto Análise Combinatória no ensino médio, ambos concluíram que as sequências de atividades traziam consideráveis resultados positivos. Esses resultados reforçam a inclusão de Atividades Experimentais no ensino de Matemática.

Sá (2019, p. 11) afirma que “o processo pedagógico será muito beneficiado sempre que ações precederem as ideias”. Nesse sentindo, podemos conjecturar que grande parte dos resultados negativos revelados nos resultados de avaliações internas e externas, podem estar relacionados aos métodos de ensino adotados, visto que o método: apresentação das ideias, conceitos, teoremas e propriedades, resolução de exemplos e resolução de questões de fixação, ainda é o mais presente nos livros didáticos e predominante na interação pedagógica nas salas de aulas entre professores e alunos.

Em uma palestra ministrada no ano 2022 durante a I Semana de Matemática promovida pelo Centro de Formação de Profissionais de Educação Básica do Estado do Pará (CEFOR-PA), onde foi abordado sobre “As Tendências do Ensino de Matemática na Sala de Aula”, Sá destacou as seguintes vantagens do ensino por Atividade Experimentais:

> *A ação precede a ideia;
> *Permite a vivência do método científico;
> *O aluno aumenta sua autoestima com relação à Matemática;
> *As regras são o final da História;
> *A interação entre os discentes é maior.
> (Sá, 2022)

No ensino de Matemática por meio de Atividades Experimentais o aluno assume um papel de protagonista, enquanto o professor, na maior parte do tempo, deverá organizar o processo e assumir a função de instigar as ações de exploração a serem realizadas pelos próprios alunos. Para Fossa (2020) a construção e consolidação dos esquemas mentais do aprendiz são potencializados em face às atividades pedagógicas centradas nos próprios alunos e em suas próprias iniciativas.

Segundo Sá, Mafra e Fossa (2022) existem diferentes perspectivas quanto ao enfoque do ensino por Atividades Experimentais, eles mencionam as seguintes: **redescoberta**, **conceituação**, **experimento** e **demonstração**; para eles cada aspecto apresenta características próprias, no entanto, estão intrinsecamente ligados. Para Sá (2019) quanto ao objetivo temos as atividades de **redescoberta** ou **conceituação**, e quanto ao modo de desenvolvimento temos as atividades de **demonstração** ou **experimental**. Refletir sobre esses pontos é fundamental para traçar os objetivos específicos de cada atividade.

Com relação as atividades de conceituação, Sá (2019) escreve que:

> Uma atividade de conceituação tem como objetivo levar o estudante a perceber a ocorrência de determinado tipo de situação/tipo de objeto matemático. A definição deste objeto percebido é o objetivo da atividade de conceituação.
> (Sá, 2019, p. 17)

Sá, Mafra e Fossa (2022, p. 3) referindo-se às atividades de conceituação afirmam que "esse tipo de atividade geralmente procura levar o estudante a reconhecer um determinado conceito matemático numa situação vivenciada". Para que o estudante obtenha um entendimento mais profundo do conceito identificado, a partir de suas observações, o professor poderá sintetiza-lo e esclarece-lo procurando induzir o estudante a organizar suas constatações e relacionar os novos conceitos adquiridos com os já existentes em sua base cognitiva.

Em se tratando das atividades de redescoberta, Sá (2019) afirma que:

> Uma atividade de redescoberta tem como objetivo levar o estudante a descobrir uma relação ou propriedade relativa a um dado objeto ou operação matemática. Uma atividade de redescoberta não corresponde a uma demonstração de um resultado matemático, mas sim ao momento de exploração do objeto que antecede a demonstração do resultado.
> (Sá, 2019, p. 17)

Sobre o ensino por Atividades Experimentais e a técnica da redescoberta Sá, Mafra e Fossa (2022) escrevem o seguinte:

> De fato, a técnica da redescoberta é intimamente relacionada ao ensino por Atividades Experimentais e a junção das duas perspectivas pode potencializar tanto a compreensão dos conceitos matemáticos, quanto o desenvolvimento de habilidades de expressão gráfica e/ou simbólica desses conceitos.
> (Sá, Mafra e Fossa, 2022, p. 3)

Ainda segundo Sá (2019), na condução de uma atividade de **demonstração**, o discente deve registrar os resultados enquanto o professor realiza as ações, a partir desses registros os estudantes devem refletir sobre esses resultados e espera-se que chegue ao objetivo previamente planejado pelo professor para a atividade. É aconselhável que a condução de atividades nessa perspectiva, seja realizada quando envolver a manipulação de materiais muito caros, matérias que possam ser danificados, que possam machucar ou molhar os participantes.

No desenvolvimento de uma atividade **experimental** o docente organiza as atividades e elabora o experimento que deve ser realizado pelos próprios alunos. Para Sá (2019) tanto as atividades de **demonstração** quanto **experimental** podem servir como base para a **conceituação** ou **redescoberta**.

O desenvolvimento de uma aula por meio de atividades deve permitir discussões sobre a busca de respostas e a produção do conhecimento matemático, não apenas sobre o conhecimento matemático em si. Nesse sentido é importante que as situações propostas a serem realizadas pelos aprendizes, estimulem a reflexão, a compreensão e a análise, e estejam organizadas dentro de um gradativo grau de dificuldade.

Na condução de uma aula na perspectiva do ensino por Atividades Experimentais devem ser incluídos elementos que potencializem o refinamento e o desenvolvimento de hipóteses, bem como de elementos que despertem a atenção dos discentes às relações encontradas entre os conceitos que estão sendo trabalhados. Assim, elementos como a demonstração, a simulação, a experimentação e a visualização, podem, e devem, ser incluídos.

Na literatura sobre o tema podemos encontrar também recomendações para o planejamento de uma aula de Matemática que será conduzida a partir de Atividades Experimentais. Assim, por exemplo, na organização de uma aula desenvolvida por uma atividade de conceituação ou redescoberta, em Sá (2019) e em Sá, Mafra e Fossa (2022), encontramos orientações sobre os seguintes momentos durante a aula: **organização**, **apresentação**, **execução**, **registro**, **análise** e **institucionalização**. A seguir apresentamos uma síntese de cada um desses momentos.

- **Organização:** Deve ser feita preferencialmente em grupos de 2 a 4 alunos. Entre outras vantagens, esse tipo de organização permitirá maior interação e engajamento entre os discentes;
- **Apresentação:** O professor distribui, ou apresenta na lousa, as orientações para o desenvolvimento das atividades;
- **Execução:** Corresponde a etapa da experimentação na pesquisa

científica. Nesse momento as atividades devem ser executadas pelos alunos. Nesse instante recomenda-se que o professor deixe os alunos desenvolverem livremente as atividades, fique atento a possíveis distrações e tire cuidadosamente as dúvidas dos alunos quando solicitado por eles;

- **Registro:** Equivale a sistematização das informações nos espaços que devem ser previamente destinados pelos professores;
- **Análise:** Os alunos devem analisar as informações registradas; espera-se que nesse momento cheguem a uma relação válida e desejada;
- **Institucionalização:** Etapa primordial, onde devem ser elaboradas as observações e conclusões das atividades pelos alunos, com o auxílio e participação do professor.

Além dos momentos relacionados acima, assim como no desenvolvimento de toda e qualquer atividade pedagógica, um outro cuidado que se deve ter, é com o planejamento cuidadoso da aula e das atividades que serão executadas.

Sá, Mafra e Fossa (2022) destacam os seguintes instantes no planejamento de uma atividade de conceituação de acordo com os momentos descritos anteriormente: **determinação ou seleção dos conceitos**; **elaboração do objetivo da atividade**; **elaboração dos procedimentos da atividade**; **seleção do material**; **elaboração do espaço de registro**; **previsão de observações**; **previsão de institucionalização**; **elaboração de um roteiro**; **verificação se o roteiro permite chegar à observação desejada**; e a **finalização**.

O planejamento de uma atividade de redescoberta segundo Sá, Mafra e Fossa (2022), devem passar pelos seguintes instantes: **determinação do resultado desejado**; **construção do objetivo**; **a produção do material**; **elaboração do procedimento**; **elaboração do espaço de registro**; **elaboração do desafio**; **verificação**; **previsão da institucionalização**; e **elaboração do roteiro**.

De acordo com Sá (2022) deve-se evitar que o desenvolvimento de uma atividade ultrapasse duas aulas consecutivas, é importante que o professor trabalhe com os alunos a elaboração da primeira conclusão e recomenda-se que o professor tenha mais de uma atividade além da prevista para aquela aula em virtude das peculiaridades de cada turma e dos imprevistos que podem acontecer. Em suma, de acordo com a teoria consultada sobre o tema, esses são os principais pontos a serem considerados no desenvolvimento de aulas na perspectiva de Atividades Experimentais.

1.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A resolução de problemas em aulas de Matemática é uma vertente que tem se mostrado bastante eficiente para o ensino e a aprendizagem dessa disciplina. Ela vai além da simples memorização de fórmulas, aplicação de algoritmos e cálculos mecânicos, podendo permitir que os alunos desenvolvam habilidades cognitivas essenciais, como o raciocínio lógico, o pensamento crítico, a criatividade e a capacidade de aplicar conceitos matemáticos em situações do mundo real.

Inicialmente precisamos refletir sobre o que significa um Problema e o que seria a Resolução de Problemas em Aulas de Matemática. Sá (2021) fazendo uma análise de diferentes significados atribuídos por pesquisadores da área educacional para esses termos, considera que:

> Como vimos a palavra problema é devidamente associada a uma situação que uma pessoa ou um grupo de pessoas se sentem incomodadas e buscam encontrar uma maneira de superar a situação estabelecida e não conhecem como alcançar o resultado desejado. Desse modo, uma dada questão poderá ser um problema para uma pessoa ou um grupo de pessoas e não ser um problema para as pessoas que não se sentem incomodados com a situação ou não desejam encontrar uma solução para a mesma.
> (Sá, 2021, p. 13)

Podemos sugerir que Sá (2021), não restringi um problema a uma situação matemática, e que, segundo ele, uma dada situação para ser considerada um problema deve apresentar duas características fundamentais. Em primeiro lugar a situação **não deve ainda possuir um caminho pré-definido conhecido para o processo de resolução**, e, em segundo lugar, quem se depara com a situação **deve sentir-se inclinado para resolvê-la**, ou seja, deve sentir-se provocado.

Os PCN estabelecem que o desenvolvimento da capacidade para Resolver Problemas seja um dos objetivos a serem alcançados quanto ao trabalho com a disciplina Matemática. Segundo Sá (2021) esse documento faz menção em vários pontos dos seus Objetivos Gerais de Matemática Para o Ensino Fundamental, de maneira direta ou indireta, à Resolução de Problemas. Segundo esse autor essa expressão aparece com pelo menos dois significados no documento, **como uma alternativa para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem** e/ou **como uma habilidade a ser desenvolvida**.

Um dos Objetivos Gerias do Ensino Fundamental, estabelecido nos

PCN, é o seguinte:

> Questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.
> (Brasil, 2001, p. 8)

Sobre os Objetivos Gerais de Matemática Para o Ensino Fundamental, nos PCN, três desses objetivos estabelecem:

> - Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas; [...]
> - Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis; [...]
> - Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.
> (Brasil, 2001, p. 51 e 52)

Nos objetivos destacados percebemos explicitamente menções à Resolução de Problemas como um dos objetivos almejados quando se ensina Matemática, tanto com uma alternativa metodológica como uma habilidade a ser desenvolvida. Nos objetivos destacados também percebemos a importância dada a interação, a cooperação, ao respeito a diversidade de pensamentos e ao desenvolvimento de trabalhos em grupos.

Sobre a diferença entre um Problema e Problema Matemático, Dante (apud Sá, 2021) escreve o seguinte.

> - **Problema:** é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la;
> - **Problema Matemático:** é qualquer situação que exija a maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para solucioná-la.
> Dante (apud Sá, 2021, p. 11)

No contexto da sala de aula, sobre a diferença entre Exercício e Problema, de acordo com Sá (2021), um Exercício é caracterizado por uma situação em que já se tem um (alguns) caminho (os), por mais trabalhoso que seja, para solucioná-lo, essa característica ajuda a diferenciar um Exercício de um Problema. Portanto, uma dada situação pode ser considerada um Problema ou um Exercício, dependendo somente de quem o esteja respondendo, isso é, dos conhecimentos existentes em sua base cognitiva.

Quando propomos uma dada situação para que os nossos alunos possam responder em sala de aula, não temos como saber, inicialmente, se os discentes dominam um procedimento ou técnica que leve a solução da mesma. Pode acontecer que alguns alunos dominem determinados procedimentos que levem a solução, nesse caso, para esses alunos, a situação proposta se constitui em um Exercício, no entanto outros alunos podem não saber ainda nenhum procedimento que leve a solução, nesse caso, para esses alunos, a situação proposta representa um Problema. Portanto, para romper essa dicotomia, podemos denominar cada situação proposta simplesmente como **Questão**, visto que, independentemente de possuir o ferramental necessário para solucionar ou não, quer seja um Problema ou um Exercício, o enunciado das situações propostas, sempre terão a forma de Questões.

Nesse sentido, segundo Sá (2021), o ideal é que todas a situações propostas representem meramente exercícios para o professor durante todo o processo pedagógico. Por outro lado, no início do trabalho pedagógico de um determinado conteúdo espera-se que as questões propostas para a maioria dos estudantes representem problemas, e, no final, os alunos tenham adquirido competências para solucioná-los, portanto, para a maioria dos estudantes, no final do trabalho pedagógico, espera-se que as questões propostas representem apenas exercícios.

Nas aulas de Matemática a Resolução de Problemas desempenha um papel essencial ao conectar conceitos abstratos da disciplina com aplicações práticas no mundo real. Através da exploração ativa de desafios matemáticos, os alunos não apenas adquirem um entendimento mais profundo dos princípios, mas também aprendem a aplica-los de maneira mais eficaz para resolver uma variedade de situações da vida cotidiana. Quando os alunos são desafiados a Resolver Problemas, eles não apenas aplicam fórmulas, mas também desenvolvem a capacidade de modelar situações complexas, identificar padrões, construir argumentos lógicos e buscar soluções criativas.

Sobre a condução do trabalho em sala de aula com foco na Resolução de Problemas, os PCN trazem a orientação que Resolver um Problema não se trata apenas de compreender o que foi proposto e dar uma resposta aplicando procedimentos adequados. Apesar de ser importante, precisamos destacar que, isso somente, não garante que o conhecimento envolvido foi apropriado. Segundo esse documento:

> Além disso, é necessário desenvolver habilidades que permitam pôr à prova os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos, para obter a solução. Nessa forma de trabalho, o valor da resposta correta cede lugar ao valor do processo de resolução. (Brasil, 2001, p. 45)

Baseando-se em trabalhos já realizados sobre o tema, Sá (2021) destaca que ao trabalhar utilizando a Resolução de Problemas em sala de aula podemos adotar diferentes concepções para embasar o processo, entre os quais destaca: a Resolução de Questões Como Objetivo, a Resolução de Questões Como Processo e a Resolução de Questões Como Ponto de Partida. Faremos a seguir um breve resumo sobre cada uma dessa perspectivas.

- **Resolução de Questões Como Objetivo**

Nessa concepção entende-se que desenvolver a capacidade para resolver problemas é um dos principais objetivos do processo de ensino e aprendizagem da disciplina Matemática. Na condução do trabalho compreende-se ser suficiente ao processo de ensino e aprendizagem, expor a teoria, e, em seguida, sugerir questões sobre o assunto estudado de maneira mais ou menos engenhosa.

Segundo Sá (2021), nessa perspectiva, foram realizadas pesquisas com o objetivo de responder questões, por exemplo, do tipo: “quais são os fatores que tornam uma questão mais fácil ou mais difícil durante o processo de aprendizagem?” Problemas sobre as quatro operações foram os mais estudados pelos pesquisadores acerca dessas variáveis, sendo essas agrupadas em dois grandes grupos: **variáveis intrapessoais** e **variáveis de situação**.

Sá (2021) também apresenta algumas recomendações quanto a condução do trabalho pedagógico nessa perspectiva. As recomendações apresentadas são: decompor uma questão mais complexa numa sequência de questões mais simples; utilizar as listas de questões propostas como referência para elaboração de testes avaliativos; propor questões com mais de uma solução; propor questões sem solução; propor questões de processos seletivos; e propor questões com aplicações na vida real.

- **Resolução de Questões Como Processo**

Nessa concepção valoriza-se o caminho percorrido pelos alunos ao resolverem os problemas propostos, ou seja, analisa-se as estratégias adotadas. Segundo Polya (1995) de forma geral, podemos considerar os seguintes passos ao resolvermos um problema: Compreensão do Problema; Estabelecimento de um Plano; Execução do Plano e Retrospecto. Para esse autor, seguindo essas fases, os alunos poderão ter mais facilidade, e ter melhor compreensão, ao serem submetidos a determinadas situações problemas, o autor também apresenta algumas orientações, recomendações e exemplos em cada uma dessas fases. Sá (2021) também destaca que:

> Na interpretação da resolução de problemas como processo o objetivo é avaliar e/ou munir os educandos de técnicas ou heurísticas para resolução de problemas, o que é um objetivo louvável, pois na vida em muitas situações que enfrentamos as mesmas nem sempre precisam ser resolvidas através do uso de algoritmos ou fórmulas. Assim, quanto mais maneiras de resolver problemas um aluno for exposto ao longo da vida escolar mais preparado para a vida ele estará.
> (Sá, 2021, p. 72)

Algumas técnicas que poderão ser usadas na Resolução de Problemas são sugeridas por Musser e Shaughnessy (apud Sá, 2021), entre as quais destacamos: Tentativa e Erro; Padrões; Resolver um Problema Mais Simples; Trabalhar em Sentido Inverso e Simulação. De acordo com Sá, a inserção em sala de aula de questões que podem ser resolvidas por meio dessas técnicas podem favorecer o processo de ensino e aprendizagem e tornar o ambiente da sala de aula mais agradável para todos os entes envolvidos no processo.

Algumas recomendações Sugeridas Por Sá (2021) tendo como base a consulta da literatura sobre a resolução de questões como processo e também de acordo com suas próprias concepções, são: use perguntas para focalizar a atenção do aluno na informação pertinente dada no problema; sempre que possível, planeje dentro de cada conteúdo ou unidade trabalhada sessões de resolução de problemas na interpretação de processos; estimule os alunos a resolverem e/ou apresentarem problemas criativos dentro de cada assunto estudado; não subestime a capacidade dos seus alunos em propor e/ou resolver problemas; realize seções de resolução de problemas estimulando o trabalho em grupo; e, para cada unidade desenvolvida do seu planejamento, realize uma sessão de Resolução de Problemas não padrões.

- **Resolução de Questões Como Ponto de Partida**

Na Resolução de Questões Como Ponto de Partida os problemas são usados objetivando introduzir determinados conhecimentos matemáticos selecionados previamente pelo professor, ou seja, o ensino inicia-se com a apresentação de um problema que permitirá desencadear o processo de aprendizagem.

É importante salientar que, para o docente, conduzir o processo de ensino segundo essa perspectiva, vai de encontro com a forma que os assuntos normalmente são trabalhados em grande parte das vezes nas salas de aula, ou seja, apresentação de conceitos, definições e propriedades, exemplos de fixação e aplicações. Em muitos livros didáticos também encontramos essa formatação na apresentação dos conteúdos. A esse respeito Sá (2021) salienta que:

> Entretanto, a História da Matemática mostra que essa sequência não é compatível com a construção do conhecimento matemático que quase sempre é consequência da tentativa de resolver um problema, onde normalmente são identificados invariantes que posteriormente são estudadas suas propriedades e finalmente dão origem à definição de uma operação ou estrutura matemática.
> (Sá, 2021, p. 94)

A Resolução de Questões Como Ponto de Partida, muito tem a ver com o ensino de matemática por meio de Atividades Experimentais, visto que, nessa vertente, procura-se levar o aluno a perceber determinadas regularidades e identificar padrões a partir da resolução de situações propostas planejadas previamente pelo professor. Sá (2021, p. 95) também afirma que, nessa concepção “**o professor deve antes de tudo acreditar que é possível, dentro de certos limites, serem resolvidos problemas sem o domínio de certas operações e conceitos matemáticos**.” (grifo do autor)

Algumas recomendações para o trabalho em sala de aula nessa perspectiva apresentadas por Sá (2021) são: não tente fazer uma aula desse modo de maneira improvisada; determine qual é o problema mais simples e interessante para a turma que uma operação ou conceito matemático auxiliam a solucionar; descubra um processo de resolver o problema sem o uso da operação; proponha a situação-problema em sala e disponibilize um pouco de tempo para a turma pensar numa solução; solicite que a turma apresente uma solução ao problema ou apresente a solução que você tem; faça um registro escrito e detalhado da solução para toda a turma; analise com a turma os invariantes que surgiram na resolução do problema; solicite da turma uma conclusão operacional para resolver o problema apresentado; sistematize o conceito do conteúdo que você tem como objetivo trabalhar; mostre como fica a solução do problema proposto com o uso do conteúdo sistematizado; e proponha outras questões envolvendo o assunto sistematizado.

Precisamos ter clareza da complexidade e diversidade conceitual que envolve essa discussão e o entendimento dessa temática. Ressaltamos que, sem nenhuma dúvida, esse debate não se encerra aqui, muito menos esse texto tem a ingênua pretensão de trazer verdades absolutas. Nessa seção tivemos o tímido objetivo de trazer reflexões inicias, provocações e uma discussão preliminar sobre a importância da Resolução de Problemas em aulas de Matemática.

Para um estudo e entendimento mais aprofundado sobre esse tema sugerimos a leitura de Sá (2021) e a consulta e análise de outros trabalhos, assim, permitindo fazer análises sobre diferentes pontos de vista e perspectivas, o que enriqueceria a amplitude da discussão, a compreensão e as conclusões conceituais.

2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nessa seção apresentamos a Sequência Didática que irá ser desenvolvida em sala de aula, as atividades envolvem o conteúdo Análise Combinatória. Como embasamento teórico para elaborar a Sequência de Atividades nos fundamentamos nos trabalhos de Rosas (2018), Conceição (2019) e Sá (2019).

Noções preliminares sobre esse conteúdo são apresentadas em muitos livros didáticos e em muitas escolas, nos anos iniciais e finais do ensino fundamental, com o desenvolvimento de ideias sobre o Princípio Aditivo, Princípio Multiplicativo e Princípio Fundamental da Contagem. As ideias apresentadas preliminarmente nos anos iniciais e finais do ensino fundamental, são aprofundadas continuamente no 2º ano do ensino médio em muitos sistemas estaduais de ensino.

Em um primeiro momento na condução do trabalho com a Sequência Didática o professor deverá aplicar a atividade de sondagem que se encontra a seguir, isso possibilitará ao docente entender melhor os conhecimentos prévios que os alunos já possuem sobre o conteúdo, traçando um perfil dos estudantes. Após desenvolver o trabalho em sala de aula com a sequência, tendo como objetivo avaliar a eficiência do método, o professor deverá reaplicar a atividade inicial. A atividade de sondagem é compostos por 10 questões.

Após a aplicação da atividade de sondagem o professor deverá dar continuidade a aplicação da Sequência Didática que é composta por 9 atividades intercaladas por questões de aprofundamento. A primeira atividade é de redescoberta e o objetivo é fazer com que o aluno tenha contato com o Princípio Fundamental da Contagem, princípio esse de suma importância para compreensão de todo o restante do conteúdo. A segunda atividade é sobre Permutação Simples, a terceira sobre Fatorial, a quarta sobre uma Importante Relação Envolvendo Fatorial, a quinta sobre a Diferença Entre Arranjo e Combinação, a sexta sobre Arranjo, a sétima sobre Combinação e as duas últimas Sobre Permutação Circular.

A seguir apresentamos as 10 questões que irão compor a atividade de sondagem, e as atividades que irão compor a Sequência Didática.

2.1 ATIVIDADE DE SONDAGEM E PÓS-TESTE

Objetivo: Realizar um diagnóstico da turma refente ao assunto e verificar o desempenho dos alunos na resolução das questões antes e após o trabalho com a sequência;

Recursos: Listas impressas com as questões;

Procedimentos: Entregar uma lista com as questões para cada aluno e destinar um tempo para que possam resolver individualmente.

LEIA COM ATENÇÃO E RESOLVA CADA UMA DAS QUESTÕES A SEGUIR

01. Ao chegar em um restaurante Pedro foi informado que o cliente poderia escolher entre arroz branco ou arroz temperado; feijão preto ou feijão branco; carne de frango, carne de gado ou peixe. De quantas maneiras diferentes Pedro poderá fazer uma refeição escolhendo um tipo de arroz, um tipo de feijão e um tipo de carne?

02. Para compor uma senha de acesso a uma plataforma digital Marcos deverá escolher primeiramente 2 algarismos, escolhidos entre os 10 algarismos de 0 a 9, sem repeti-los. E, em seguida, 2 caracteres especiais entre os 4 símbolos: _ , @, * ou #, podendo ou não repetir o símbolo. Nessas condições, quantas senhas diferentes Marcos poderá compor?

03. Qualquer "palavra" (com ou sem sentido) obtida trocando-se as letras de uma palavra de posição, chama-se anagrama. Dessa forma, quantos são os anagramas da palavra ALUNO?

04. Dispondo os anagramas formados na questão anterior em ordem alfabética, como disposto em um dicionário, que "palavra" ocupa a 25ª posição?

05. Doze pessoas estão disputando a última etapa de uma maratona de corrida de rua. Serão premiados os três primeiros colocados. Sabendo que Bruno foi o primeiro a cruzar a linha de chegada, de quantas formas diferentes poderá ser composto o pódio?

06. De uma turma de 20 alunos de quantas formas poderão ser escolhidos um presidente, um vice e um secretário para representar a turma em uma comissão?

07. De quantas maneiras poderão ser escolhidos três representantes para compor uma comissão em uma turma de 20 alunos?

08. No final de uma festa de aniversário todos os presentes se cumprimentaram com um aperto de mão. Quantos apertos de mãos foram trocados se haviam 12 pessoas na festa?

09. Seis amigos ao chegarem em um restaurante ocuparam uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentes essas pessoas podem se sentar em torno da mesa?

10. De quantas maneiras 7 crianças podem formar uma roda?

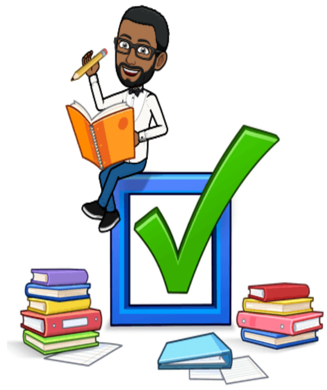
2.2 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM (PFC)

Objetivo: Descobrir uma maneira prática de determinar o total de elementos de um conjunto sem enumerá-los um a um;

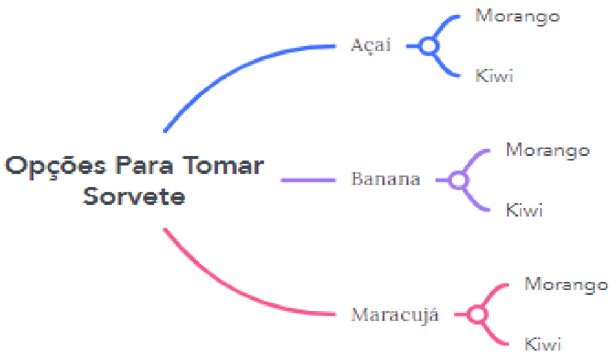
Recursos: Lista de questões, papel, caneta ou lápis, borracha e calculadora;

Procedimentos:

- **Formar grupos de 2 a 4 alunos;**
- **Solicitar aos alunos que resolvam cada questão proposta a seguir;**
- **Com as informações obtidas devem preencher o quadro abaixo.**



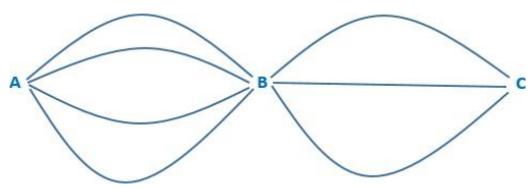
1. Ao chegar em uma sorveteria Raquel foi informada que restavam apenas 3 sabores de sorvete: açaí, banana e maracujá, e 2 tipos de cobertura: kiwi e morango. O esquema abaixo é chamado Árvore de Possibilidades e nele está representado todas as opções que Raquel tem.



De **quantas formas** ela poderá tomar um sorvete utilizando um dos sabores e um tipo de cobertura?

2. Lucas irá participar de uma festa de casamento, ele tem disponível 3 calças e 3 camisas. De **quantas formas** diferentes ele poderá se vestir usando uma das calças e uma das camisas disponíveis?

3. Marcos irá viajar da cidade de Parauapebas (A) para Eldorado (C), no trajeto, deverá passar pela cidade de Curionópolis (B). O esquema abaixo representa todas as opções possíveis para fazer a viagem. Sabendo que existem 4 estradas diferentes ligando Parauapebas a Curionópolis, e 3 estradas que ligam Curionópolis a Eldorado, de **quantas formas** diferentes Marcos poderá fazer todo o percurso da viajem?



4. O esquema a seguir representa os possíveis resultados que podemos encontrar ao lançarmos, sucessivamente, a mesma moeda três vezes, onde **K** representa Cara e **C** representa Coroa. Para identificamos cada um dos resultados possíveis podemos acompanhar, seguidamente, cada uma das ramificações. Por exemplo, dois possíveis resultados são **KKK** e **KKC**, e assim por diante. **Qual o total** de possibilidades de resultados que podemos obter no lançamento das três moedas?

5. Lara deseja montar um esquema de estudos preparatórios para realizar a prova do ENEM onde deseja revisar os assuntos que apresenta maior dificuldade. Sempre, na sexta feira de cada semana, ela estudará Redação. De segunda a quinta ela estudará, alternadamente, um dos seguintes componentes curriculares: Biologia, Física, Matemática ou Química, estudando apenas um desses componentes por dia. Nessas condições, de **quantas formas** diferentes Lara consegue montar seu esquema de estudo?

6. Em um grupo de 10 pessoas deverão ser escolhidas três delas para compor uma comissão, ocupando os cargos de Presidente, Vice-Presidente e Tesoureiro, respetivamente. De **quantas maneiras** diferentes pode ser formada essa comissão?

7. Trocando-se as letras de uma palavra de posição, formamos novas “palavras” (com ou sem sentido), a essas “palavras” formadas chamamos **anagramas**. Quantos são os anagramas da palavra ALUNO?

Questão	O que a questão pedi?	Qual é o número de etapas sucessivas e independentes?	Qual o número de possibilidades da 1ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 2ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 3ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 4ª etapa?	Qual o número de possibilidades da 5ª etapa?	Qual o total de possibilidades?
1ª								
2ª								
3ª								
4ª								
5ª								
6ª								
7ª								

Fonte: Adaptado de Rosas (2018)

Descubra uma maneira prática para obter o total de possibilidades.

Conclusão:

AO FINALIZAR A ATIVIDADE ESPERAMOS QUE OS ALUNOS CHEGUEM A SEGUINTE CONCLUSÃO
Para determinar o total de possibilidades de eventos com etapas sucessivas e independentes basta multiplicar o total de possibilidades de cada etapa do evento.

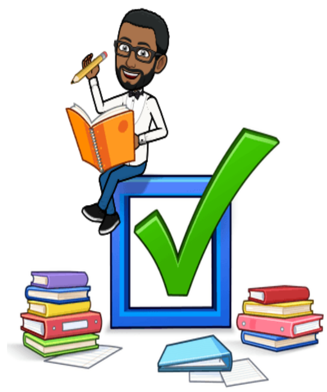
2.3 PERMUTAÇÃO SIMPLES

Objetivo: **Conceituar permutação simples;**

Recursos: **Lista de questões, papel, caneta ou lápis, borracha e calculadora;**

Procedimentos:

- **Formar grupos de 2 a 4 alunos;**
- **Solicitar que os alunos leiam com atenção e resolvam cada questão da lista;**
- **Com as informações obtidas devem preencher o quadro a seguir.**



1. De quantas maneiras é possível confeccionar uma bandeira, com 3 faixas verticais, sem repetir cores, dispondo de 3 cores (amarelo, verde e rosa)?

2. Uma professora realizou uma dinâmica na sua turma, recortou todas as letras da palavra AMOR, depois pediu que os alunos encontrassem anagramas dessa palavra. Qual o número total de anagramas que poderá ser encontrado?

3. Quantos anagramas da palavra FILTRO começam por vogal?

4. Cleonice montou uma lista com uma sequência de atividades físicas que deverá executar de segunda a sexta (caminhada, corrida, natação, luta e ciclismo), ela irá praticar cada dia da semana uma única atividade, não pretende repetir nenhuma atividade na mesma semana, sua intenção é melhorar sua saúde e condicionamento físico. Assim, qual é o número de maneiras DIFERENTES que Cleonice tem para executar as atividades durante uma semana?

5. De quantas maneiras diferentes seis colegas (Anderson, Carlos, Daniel, Pedro, Simone e Vanessa) poderão posicionar-se, um ao lado do outro, todos virados de frente da turma, para apresentar um seminário para o restante dos seus colegas?

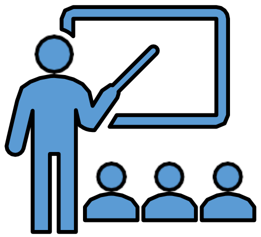
6. Em um "horário especial", um diretor de televisão dispõe de 7 intervalos para anúncios comerciais. Se existem 7 diferentes tipos de anúncios, de quantas formas o diretor poderá colocar os 7 nos intervalos destinados a eles?

7. Quantas senhas de sete dígitos distintos são possíveis formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7?

Questão	O que a questão pedia?	Qual o número de etapas “**n**” (escolhas para realizar o evento) independentes do evento?	Qual o número “**p**” de elementos a disposição do evento, na situação?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual o número de possibilidades da escolha?							Cálculo necessário para se obter o resultado:	Qual o total de possibilidades?
				SIM	NÃO	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª		
1ª														
2ª														
3ª														
4ª														
5ª														
6ª														
7ª														

Fonte: Adaptado de Rosas (2018)

Observação:



INSTITUCIONALIZAÇÃO

Chamamos de Permutação Simples qualquer agrupamento de um conjunto, onde não existem elementos repetidos, e que na sua composição sempre usamos todos os elementos disponíveis. Representamos o número de permutações dos **n** elementos por P_n , e podemos demonstrar que a quantidade total de agrupamentos é dada por:

$\boldsymbol{P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

CONSOLIDANDO O CONHECIMENTO

Estimado professor(a),

Apresentamos a seguir um bloco de questões sobre o Princípio Fundamental da Contagem e sobre Permutação Simples, nosso objetivo é que os discentes tenham a oportunidade de rever e aprofundar os assuntos abordados nas atividades anteriores.

Recomendamos que os docentes respondam inicialmente uma questão de cada tipo no quadro, e, em seguida, solicitem que os alunos tentem responder uma questão do mesmo tipo, as outras questões deverão ser respondidas em casa como atividade de revisão e aprofundamento. Nos blocos de questões também apresentamos algumas questões do ENEM.

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO PARA O PFC

- **Questões de Criação de Senhas**

01. Uma senha eletrônica é constituída por 2 vogais distintas entre as constantes em nosso alfabeto. Qual o número total de senhas que podem ser formadas?

02. Uma senha de acesso a uma plataforma de estudos é constituída por uma vogal (**a**, **e**, **i**, **o** ou **u**) no primeiro dígito e um algarismo ímpar (**1**, **2**, **3**, **4** ou **5**) no segundo dígito. Qual o número total de senhas que podem ser formadas?

03. Visando obter mais informações sobre a denúncia de que uma tribo da região Amazônica estava sendo dizimada, um repórter recorreu a seu computador para acessar a Internet, entretanto não lembrou a senha de acesso, que era composta por três algarismos distintos. Lembrava apenas que a senha era composta por três dos cinco algarismos: 2, 4, 6, 7 e 9. Para encontrar a senha, o repórter escreveu num papel todos os possíveis agrupamentos com esses algarismos. O número de agrupamentos escritos por esse repórter, na tentativa de encontrar a senha de acesso à Internet, é

a) 120 b) 108 c) 84 d) 60 e) 56

- **Questões de Formar Grupos**

04. Um professor de Matemática comprou dois livros para premiar dois alunos de uma classe de 32 alunos. Como são dois livros diferentes, de quantos modos distintos pode ocorrer a premiação?

05. Em um concurso realizado numa universidade, apresentaram-se 4 candidatos para disputar a única vaga existente. A banca examinadora é constituída de 3 membros, devendo cada examinador escolher um candidato. De quantas maneiras diferentes podem ser dados os votos desses examinadores?

06. Atual tendência alimentar baseada no maior consumo de legumes, verduras e frutas impulsiona o mercado de produtos naturais e frescos sem agrotóxicos e uma diminuição no consumo de produtos que levam glúten, lactose e açúcar. Uma empresa especializada no preparo de refeições, visando a esse novo mercado de consumidores, disponibiliza aos seus clientes uma "quentinha executiva" que pode ser entregue no local de trabalho na hora do almoço. O cliente pode compor o seu almoço escolhendo entradas, pratos principais e sobremesas. Se essa empresa oferece 8 tipos de entradas, 10 tipos de pratos principais e 5 tipos de sobremesas, qual o número de possibilidades com que um cliente pode compor seu almoço, escolhendo, dentre os tipos ofertados, uma entrada, um prato principal e uma sobremesa?

<u>QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO SOBRE PERMUTAÇÃO SIMPLES</u>

- **Questões de Anagramas**

01. A partir da palavra NÚMEROS (o acento sempre acompanhará a letra **u**), responda:

a) Quantos anagramas são possíveis de serem formados?

b) Quantos anagramas têm como primeira letra uma vogal?

c) Quantos anagramas começam e terminam em vogal?

d) Quantos anagramas começam com **n**?

e) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras **n** e **u** juntas e nessa ordem?

f) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras **u** e **n** juntas?

g) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras **n**, **u** e **m** junta-se nessa ordem?

h) Quantos anagramas são possíveis de serem formados com as letras **n**, **u** e **m** juntas?

02. O número de anagramas da palavra FUVEST que começam e terminam por vogal é:

a) 24 b) 48 c) 96 d) 120 e) 144

03. O número de anagramas da palavra BRASIL em que as vogais ficam lado a lado, e as consoantes também, é

a) 24 b) 48 c) 96 d) 240 e) 720

- **Questões de Ordenação**

04. Arranjam-se os dígitos 1, 2, 3 e 4 de todos os modos possíveis, formando-se 24 números de 4 dígitos distintos. Listam-se, em ordem crescente, os 24 números formados.

Nessa lista, o número 3241 ocupa a

a) 13ª posição. b) 14ª posição. c) 15ª posição. d) 16ª posição.

05. Ao permutarmos, de todas as formas possíveis, os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, obtemos números de seis dígitos diferentes. Ordenando estes números, em ordem crescente, o número que ocupa a 239ª posição é

a) 264531 b) 265314 c) 265413 d) 265431

06. As permutações das letras da palavra PROVA foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de cinco letras em um dicionário. A 73ª palavra nessa lista é

a) PROVA b) RAOPV c) RAPOV d) ROVAP e) VAPOR

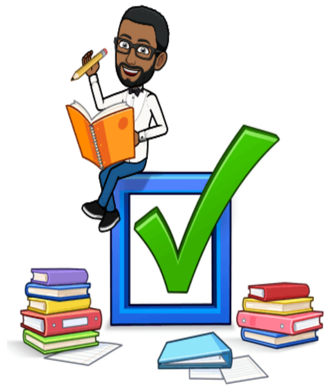
2.4 FATORIAL

Objetivo: **Conceituar fatorial;**

Recursos: **Lista de questões, papel, caneta ou lápis, borracha e calculadora;**

Procedimentos:

- **Formar grupos de 2 a 4 alunos;**
- **Solicitar que os alunos leiam com atenção e resolvam cada questão da lista;**
- **Com as informações obtidas devem preencher o quadro a seguir.**



1. De quantas maneiras 5 pessoas podem sentar-se em um banco de 5 lugares?

2. Quantas senhas de seis dígitos distintos podemos formar utilizando-se dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

3. Quantos são os anagramas da palavra FUTEBOL?

4. Oito atletas participam de uma corrida de rua. De quantas formas diferentes podemos obter os oito primeiros colocados?

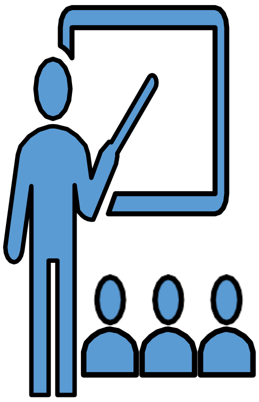
5. Nove amigos resolveram se posicionar, para bater uma foto e postar nas redes sociais. De quantas maneiras diferentes esses jovens poderão se posicionar, um ao lado do outro, para a foto?

6. De quantas maneiras podemos organizar 10 livros diferentes em uma estante?

Questão	Qual o número de etapas independentes do evento?	Qual o número de elementos a disposição do evento, na situação?	Qual é o número de possibilidades da etapa?										Cálculo necessário para se obter o resultado:
			1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	
1ª													
2ª													
3ª													
4ª													
5ª													
6ª													

Fonte: Adaptado de Rosas (2018)

Observação:



INSTITUCIONALIZAÇÃO

No estudo de problemas de Análise Combinatória, frequentemente nos deparamos com produtos em que os termos são números naturais consecutivos e positivos. Para facilitar a representação de alguns desses produtos, foi criada a notação de fatorial.

- **O produto 5.4.3.2.1 é denominado de fatorial de 5.**
- **A expressão fatorial de 5 é representada por 5!**
- **De modo geral, temos:** $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

2.5 UMA RELAÇÃO IMPORTANTE ENVOLVENDO FATORIAL

Objetivo: Descobrir uma relação entre a divisão do fatorial de um número e o próprio número;

Recursos: Lista de questões, papel, lápis, borracha e calculadora;

Procedimentos:

- Formar grupos de 2 a 4 alunos;
- Analise com atenção as informações;
- De acordo com o que se pede preencha o quadro a seguir.

Número	Fatorial do Número	Razão do Fatorial do Número Pelo Próprio Número	Simplificação da Razão Anterior Representada Como Único Fatorial
3			
4			
5			
...			
10			
...			
n			

Observação:

Conclusão:

AO FINALIZAR A ATIVIDADE ESPERAMOS QUE OS ALUNOS CHEGUEM A SEGUINTE CONCLUSÃO...

A razão do fatorial de um número por ele mesmo é igual ao próprio número menos um fatorial, ou seja, $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

CONSOLIDANDO O CONHECIMENTO

Prezado(a) colega,

Apresentamos a seguir um bloco de questões sobre Fatorial, nosso objetivo é que os discentes tenham a oportunidade de rever e aprofundar os assuntos abordados nas atividades anteriores.

<u>QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO SOBRE FATORIAL</u>

1. Represente cada produto a seguir na forma de fatorial.

a) 6.5.4.3.2.1=

b) 13.12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1=

c) 8.7.6.5.4.3.2.1=

d) 1.2.3.4.5.6.7 =

2. Escreva na forma de produto (multiplicação) os seguintes fatoriais

a) 2! = b) 4! = c) 3! = d) 5! =

3. Calcule o que se pede a seguir.

a) $\frac{5!}{3!} =$

b) $\frac{9!}{8!} =$

c) $\frac{10!}{(12-4)!} =$

d) $\frac{12!}{8!\,(12-8)!} =$

e) 2! + 3! =

f) $2! \times 3! =$

g) 4! - 3! =

h) $(3!)^2 =$

4. Represente cada produto na forma de quociente (divisão) entre fatoriais.

a) 5.4.3 =

b) 7.6 =

c) 6.5.4 =

d) 7.6.5.4.3 =

e) 8.7.6 =

f) 10.9.8 =

g) 12.11 =

h) 3.2 =

5. Colocando os símbolos de **( )**, **+** e/ou **!**, transforme a sentença em verdadeira.

a) 1 1 1 = 6

b) 2 2 = 24

6. Simplifique as expressões:

a) $\frac{n!}{(n-1)!}$ b) $\frac{(n+1)!}{n!}$ c) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

7. Simplifique as expressões:

a) $\frac{(n-1)!}{n!}$ b) $\frac{n! + (n-1)!}{(n+1)!}$ c) $\frac{(n+1)!}{n! + (n-1)!}$

8. Resolva as equações e encontre o valor de ***n***:

a) (n – 2)! = 24 b) (n + 4)! = 120 c) $\frac{n!}{(n-1)!} = 20$

9. Resolva as equações e determine o valor de ***n***:

a) $\frac{n!}{(n-2)!} = 6$ b) $\frac{(n-2)!}{(n-4)!} = 2$

2.6 DIFERENÇA ENTRE ARRANJO E COMBINAÇÃO

Objetivo: Diferenciar agrupamentos em que a ordem dos elementos é importante dos agrupamentos em que a ordem ocupada pelos elementos é irrelevante;

Recursos: Lista de questões, papel, caneta ou lápis, borracha e calculadora;

Procedimentos:

- Formar grupos de 2 a 4 alunos;
- Solicitar que os alunos leiam com atenção e resolvam cada questão;
- Com as informações obtidas devem preencher o quadro a seguir.

Analise cada situação abaixo:	**A ordem de escolha de cada elemento no agrupamento é importante?**		**Justificativa**
	Sim	Não	
I) Em um grupo de 10 pessoas, formar uma comissão com duas delas, sendo um Presidente e um Vice.			
II) Em um grupo de 10 pessoas, formar uma comissão com duas dessas pessoas para representar o grupo em um evento.			
III) Para fazer um suco devemos selecionar duas frutas de um total de 5 disponíveis.			
IV) Dispondo dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, criar uma senha usando três desses algarismos.			
V) Serão sorteados dois prêmios para 20 pessoas, no primeiro lugar uma bicicleta e no segundo um liquidificador.			
VI) Serão sorteadas duas bicicletas iguais para 20 pessoas participantes de um evento.			

Notas:

Quando a ordem de escolha dos elementos de um agrupamento altera o agrupamento a questão é um exemplo de **arranjo simples dos elementos.**

Quando a ordem de escolha dos elementos de um agrupamento não altera o agrupamento a questão é um exemplo de **combinação simples dos elementos.**

Quais das questões apresentadas são arranjos?

Quais das questões apresentadas são combinação?

Simbolicamente o Arranjo de 5 elementos tomados dois a dois é costumeiramente representado por: $A_{5,2}$

Simbolicamente a Combinação de 5 elementos tomados dois a dois é costumeiramente representado por: $C_{5,2}$

Represente simbolicamente as 6 questões.

Fonte: Rosas (2018)

CONSOLIDANDO O CONHECIMENTO

Prezado(a) colega,

Apresentamos a seguir um bloco de questões sobre Diferença Entre Arranjo e Combinação, nosso objetivo é que os discentes tenham a oportunidade de rever e aprofundar o assunto abordado na atividade anterior.

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO ARRANJO SIMPLES X COMBINAÇÃO SIMPLES

1. Três amigos marcaram de se encontrar às 17 horas, na biblioteca da escola onde estudam, para realizar um trabalho de matemática. Chegando no local marcado, cada pessoa cumprimenta todas as outras uma única vez com um aperto de mão. Quantos apertos de mãos foram dados?

2. Em um colégio, 4 alunas se candidataram a "miss" dos jogos. Sabendo-se que a 1ª e 2ª colocada mais votadas, receberão os títulos de **Rainha** e **Princesa** dos jogos, respectivamente. Quantas são as possibilidades de escolha dessas duas garotas?

3. Quatro funcionários de uma empresa devem ser divididos em duplas para a realização de algumas tarefas. De quantas maneiras isso poderá ser feito?

4. Bruna deseja pintar as unhas e para isso possui 5 cores distintas de esmalte, de quantas maneiras diferentes Bruna poderá escolher dois esmaltes, entre os que possui?

5. Uma escola tem seis professores de matemática. Três deles deverão representar a escola em um congresso. Quantos grupos de três professores são possíveis formar?

6. Em um torneio internacional de natação participaram seis atletas. De quantos modos distintos poderão ser distribuídas uma medalha de ouro, uma de prata e outra de bronze entre os atletas?

2.7 ARRANJO SIMPLES

Objetivo: Descobrir uma maneira prática de resolver questões de arranjo;

Recursos: Lista de questões, papel, caneta ou lápis, borracha e calculadora;

Procedimentos:

- **Formar grupos de 2 a 4 alunos;**
- **Solicitar que os alunos leiam com atenção e resolvam cada questão;**
- **Com as informações obtidas devem preencher o quadro a seguir.**

1. David, Eduarda, Jéssica e Lucas disputam a última rodada de uma competição de xadrez organizada pela escola que estudam. De quantas maneiras distintas poderão ser selecionados o campeão e o vice nessa competição?

2. Para compor uma comissão de representantes de um bairro 5 pessoas se candidataram, entre os quais deverão ser selecionados um presidente e um vice. De quantas maneiras distintas poderá ser composta essa comissão?

3. Quantas senhas de 3 dígitos distintos são possíveis formar com as letras A, E, I, O e U?

4. Uma torre de transmissão conta com 6 bandeiras sinalizadoras, quando 3 bandeiras são hasteadas, simultaneamente, uma mensagem é enviada. Sabendo que a ordem em que as bandeiras são organizadas interfere diretamente na mensagem transmitida, nessas condições, qual o total de mensagens que poderão ser enviadas?

5. Cleonice pretende realizar atividades físicas, alternadamente, nos dias de segunda, quarta, sexta e sábado. Ela irá praticar em cada um desses dias uma única atividade, não pretende repetir nenhuma atividade na mesma semana, sua intenção é melhorar a saúde e o condicionamento físico. Assim, qual é o número de maneiras diferentes que Cleonice tem para executar as atividades durante uma semana se ela pretende realizar apenas uma das seguintes atividades: caminhada, corrida, natação, luta, ciclismo ou dança em cada dia?

6. Sabendo que uma bandeira tem quatro faixas horizontais quantas são as possibilidades de pintá-la com quatro cores distintas, escolhendo entre: vermelho, laranja, amarelo, verde, azul e roxo?

Questão	Qual o número **n** de elementos a disposição do evento, na questão?	Qual o número **p** de elementos de cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Qual o número de possibilidades de escolha para o elemento na etapa?				Qual o total de possibilidades?	Cálculo necessário para obter o resultado.	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.	Expresse o resultado em função dos valores de **n** e de **p** na situação.
			SIM	NÃO	1ª	2ª	3ª	4ª				
1ª												
2ª												
3ª												
4ª												
5ª												
6ª												

Fonte: Adaptado de Rosas (2018)

Observação:

Conclusão:

AO FINALIZAR A ATIVIDADE ESPERAMOS QUE OS ALUNOS CHEGUEM A SEGUINTE CONCLUSÃO…
O número de arranjos dos elementos de um conjunto, é igual a razão do fatorial do número de elementos a disposição no evento, pelo fatorial da diferença do número de elementos a disposição e o número de elementos que farão parte do agrupamento, isto é, $A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$

CONSOLIDANDO O CONHECIMENTO

Prezado(a) colega,

Apresentamos a seguir um bloco de questões sobre Arranjo Simples, nosso objetivo é que os discentes tenham a oportunidade de rever e aprofundar o assunto abordado na atividade anterior.

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO SOBRE ARRANJO SIMPLES

- **Questões do Tipo Formar Grupos**

1. Duas amigas foram a uma loja comprar guarda-chuvas. Na loja, havia apenas 5 guarda-chuvas do modelo desejado, cada um de uma cor diferente. Considerando que cada uma comprará apenas um guarda-chuva, o número de maneiras diferentes de elas escolherem seus guarda-chuvas é

a) 16 b) 18 c) 20 d) 22 e) 24

2. A Série Arte e Matemática na escola, que será apresentada pela TV ESCOLA, no Programa Salto para o Futuro, é constituída por cinco programas que pretendem oferecer um espaço de reflexão, interação e discussão sobre as múltiplas relações matemáticas existentes nas diversas linguagens.
(Fonte:www.tvebrasil.com.br/SALTO/boletins2002/ame/ameimp.htm)

Considere que os programas acima sejam exibidos em três turnos: o primeiro pela manhã, o segundo pela tarde, e o terceiro pela noite. Então, o número de maneiras distintas que a sequência de programas pode ser exibida é:

a) 10 b) 30 c) 60 d) 80 e) 120

3. Nas Olimpíadas UEPA 2019, foram inscritas 12 equipes de futsal feminino. O número de resultados diferentes para os dois primeiros colocados é:

a) 6 b) 12 c) 66 d) 132 e) 264

4. Durante a Copa do Mundo, que foi disputada por 24 países, as tampinhas de Coca Cola traziam palpites sobre os países que se classificariam nos três primeiros lugares (por exemplo: 1º lugar, Brasil; 2º lugar, Argentina; 3º lugar, Colômbia). Se, em cada tampinha, os três países são distintos, quantas tampinhas diferentes poderiam existir?

a) 69 b) 2.024 c) 9.562 d) 12.144 e) 13.824

5. Uma loja de um Shopping Center na cidade de Parauapebas divulga inscrições para um Torneio de Game. Para realizar essas inscrições, a loja gerou um código de inscrição com uma sequência de quatro dígitos distintos, sendo o primeiro elemento da sequência diferente de zero. A quantidade de códigos de inscrição que podem ser gerados utilizando os elementos do conjunto {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} é

a) 4.500 c) 4.684 e) 5.000

b) 4.536 d) 4.693

- **Questões do Tipo Placas e Senhas**

6. Para acomodar a crescente quantidade de veículos, estuda-se mudar as placas, atualmente com três letras e quatro algarismos numéricos, para quatro letras e três algarismos numéricos, como está ilustrado abaixo.

ABC 1234	ABCD 123	ABCE 123

Considere o alfabeto com 26 letras e os algarismos de 0 a 9. O aumento obtido com essa modificação em relação ao número máximo de placas em vigor seria

a) inferior ao dobro.

b) superior ao dobro e inferior ao triplo.

c) superior ao triplo e inferior ao quádruplo.

d) superior ao quádruplo e inferior ao quíntuplo.

e) mais que o quíntuplo.

7. Uma determinada agência bancária adotou, para segurança de seus clientes, uma senha de acesso de 7 (sete) dígitos, em que os três primeiros dígitos são 3 (três) letras distintas e os quatro últimos dígitos são 4 (quatro) números distintos.

Considerando o alfabeto de 26 (vinte e seis) letras e o conjunto de números de 0 (zero) a 9 (nove), o número possível de senhas distintas que podem ser criadas é:

a) 26! x 10! d) $A_{26,3}$

b) $A_{26,3}$ x $A_{10,4}$ e) $C_{26,3}$

c) $C_{26,3}$ x $C_{10,4}$

8. Para se cadastrar em um site de compras, cada cliente digitava uma senha com quatro algarismos distintos. Com o objetivo de aumentar a segurança, todos os clientes foram solicitados a adotar novas senhas com cinco algarismos distintos. Se definirmos

o nível de segurança com a quantidade possível de senhas, então a segurança nesse site aumentou em

a) 250% b) 500% c) 1.000% d) 1.500% e) 2.000%

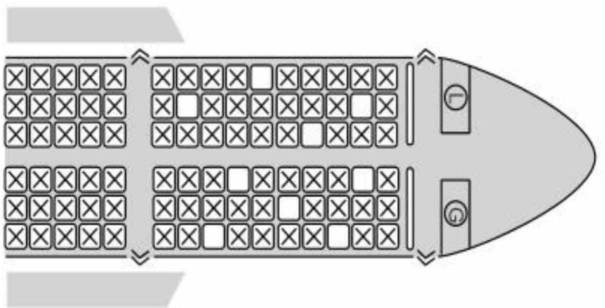
9. Diante do caixa eletrônico de um banco, Mariana não conseguia lembrar-se da sua senha de seis dígitos. Lembrava-se, apenas dos dois primeiros (mês do seu nascimento) e dos dois últimos (sua idade atual). A senha era composta por números distintos. Supondo que levou cerca de um minuto em cada tentativa de completar a senha e que esgotou todas as alternativas distintas possíveis, somente acertando na última. Mariana retirou o dinheiro desejado após cerca de

a) 1h 40min d) 1 h

b) 1h 30min e) 45 min

c) 1h 21min

10. (ENEM 2015) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

a) $\frac{9!}{2!}$ d) $\frac{5!}{2!} \times 4!$

b) $\frac{9!}{7! \times 2!}$ e) $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

c) 7!

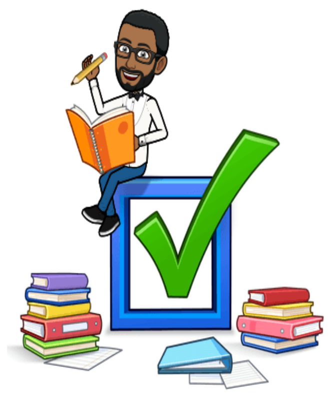
2.8 COMBINAÇÃO SIMPLES

Objetivo: **Descobrir uma maneira prática de resolver questões de arranjo;**

Recursos: **Lista de questões, papel, caneta ou lápis, borracha e calculadora;**

Procedimentos:

- **Formar grupos de 2 a 4 alunos;**
- **Solicitar que os alunos leiam com atenção e resolvam cada questão;**
- **Com as informações obtidas devem preencher o quadro a seguir.**



1. David, Eduarda, Jéssica e Lucas disputam a última rodada de uma competição de xadrez organizada pela escola que estudam. No final da competição todos os competidores se cumprimentaram uma única vez com um aperto de mão. Quantos foram os cumprimentos?

2. Para compor uma comissão de representantes de um bairro 5 pessoas se candidataram, entre os quais deverão ser selecionados dois representantes que desenvolverão as mesmas funções na comissão. De quantas maneiras poderá ser composta essa comissão?

3. Um teste consta de 5 questões, das quais o aluno deve escolher apenas três para resolver. De quantas formas diferentes ele poderá escolher as três questões?

4. Dos seis funcionários de uma empresa, quatro devem ser escolhidos para uma viagem. De quantas maneiras diferentes isso poderá ser feito?

5. Desejamos fazer uma salada de frutas usando 3 frutas diferentes. Sabendo que temos disponíveis um total de 6 frutas, quantas combinações diferentes podemos formar?

6. Para angariar fundos para realizar um passeio, uma turma de alunos da escola Irmã Dulce está organizando um sorteio. Para participar do sorteio os interessados devem escolher 3 números em uma cartela numerada de 1 a 8. O ganhador será o que acertar os 3 números sorteados, não importando a ordem. Nessas condições, de quantas formas diferentes é possível escolher os 3 números?

Questão	Qual o número **n** de elementos a disposição do evento, na situação?	Quantos elementos **p** devemos selecionar para formar cada agrupamento?	A ordem dos elementos altera o agrupamento?		Represente a permutação do número de elementos em cada agrupamento, na forma de fatorial (**p!**).	Qual o número de possibilidades de cada escolha a seguir para o agrupamento?				Qual o total de possibilidades?	Cálculo realizado para obter o resultado.	Expresse o cálculo realizado para obter o resultado por meio de fatorial.	Expresse o resultado em função dos valores de **n** e de **p** na situação.
			SIM	NÃO		1ª escolha	2ª escolha	3ª escolha	4ª escolha				
1ª													
2ª													
3ª													
4ª													
5ª													
6ª													

: Rosas (2018)

Observação:

Conclusão:

AO FINALIZAR A ATIVIDADE ESPERAMOS QUE OS ALUNOS CHEGUEM A SEGUINTE CONCLUSÃO…
O número de combinação dos elementos de um conjunto, é igual a razão do arranjo dos elementos do agrupamento pela permutação desses mesmos elementos, isto é, $C_{n,\,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$ ou $C_{n,\,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

CONSOLIDANDO O CONHECIMENTO

Prezado(a) colega,

Apresentamos a seguir um bloco de questões sobre Combinação Simples, nosso objetivo é que os discentes tenham a oportunidade de rever e aprofundar o assunto abordado na atividade anterior.

QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO SOBRE COMBINAÇÃO SIMPLES

- **Questões do Tipo Formar Grupos**

1. Se existem 6 pessoas em uma sala e cada pessoa cumprimenta todas as outras uma única vez, o número de apertos de mão dados será igual a:

a) 30 c) 15

b) 20 d) 10

2. Formam-se comissões de três professores entre os seis de matemática de uma escola. O número de comissões distintas que podem, assim, ser formados é:

a) 20 c) 120 e) 6!

b) 30 d) 6^3

3. Um fisioterapeuta recomendou a um paciente que fizesse, todos os dias, dois tipos diferentes de exercícios e lhe forneceu uma lista contendo sete tipos diferentes de exercícios adequados a esse tratamento. Ao começar o tratamento, o paciente resolve que, a cada dia, sua escolha dos dois exercícios será distinta das escolhas feitas anteriormente. Qual o número máximo de dias que o paciente poderá manter esse procedimento?

4. Um pesquisador científico precisa escolher três cobaias, num grupo de oito cobaias. Determine o número de maneiras que ele pode realizar a escolha.

5. Um técnico de futebol de salão tem à disposição 8 jogadores de linha que jogam em qualquer posição e 2 goleiros. Um time deve ter quatro jogadores de linha e um goleiro. O número de times distintos que o técnico pode escalar é:

a) 140 c) 80 e) 60

b) 120 d) 70

6. Geralmente os alunos que terminam o Ensino Médio fazem uma festa de formatura, e durante o ano esses alunos realizam bingos, festas, etc. para arrecadar fundos para a festa. Em uma escola há somente uma turma com 20 alunos, que se reuniram para formar uma comissão com 3 membros.
Quantos grupos diferentes podem ser formados, sabendo que a líder da classe terá de fazer parte do grupo?

7. Uma empresa realizou um concurso para preencher 2 vagas de agente administrativo, 3 para técnico em informática, e 1 para serviços gerais. Dos candidatos inscritos, 8 concorreram ao cargo de agente administrativo, 10 ao de técnico em informática e 7 ao de serviços gerais. Qual o número de maneiras distintas que estas vagas podem ser preenchidas pelos candidatos?

8. Por ocasião dos festejos da Semana da Pátria, uma escola decidiu exibir seus melhores atletas e as respectivas medalhas. Desses atletas, em número de oito e designados por a_1, a_2, a_3, ..., a_8, serão escolhidos cinco para, no momento do desfile, fazerem honra à Bandeira Nacional. Do total de grupos que podem ser formados, em quantos o atleta a_2 estará presente?

- **Questões do ENEM**

9. (ENEM 2016) O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro.

Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos.

Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

a) $\frac{10!}{2! \times 8!}$ - $\frac{4!}{2! \times 2!}$

b) $\frac{10!}{8!}$ - $\frac{4!}{2!}$

c) $\frac{10!}{2! \times 8!}$ 2

d) $\frac{6!}{4!}$ + 4 x 4

e) $\frac{6!}{4!}$ + 6 x 4

10. (ENEM 2022) Um prédio, com 9 andares e 8 apartamentos de 2 quartos por andar, está com todos os seus apartamentos à venda. Os apartamentos
são identificados por números formados por dois algarismos, sendo que a dezena indica o andar onde se encontra o apartamento, e a unidade, um algarismo de 1 a 8, que diferencia os apartamentos de um mesmo andar. Quanto à incidência de sol nos quartos desses apartamentos, constatam-se as seguintes características, em função de seus números de identificação:

- naqueles que finalizam em 1 ou 2, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 3, 4, 5 ou 6, apenas um dos quartos recebe sol na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 7 ou 8, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da tarde.

Uma pessoa pretende comprar 2 desses apartamentos em um mesmo andar, mas quer que, em ambos, pelo menos um dos quartos receba sol na parte da manhã.

De quantas maneiras diferentes essa pessoa poderá escolher 2 desses apartamentos para compra nas condições desejadas?

a) $9 \times \frac{6!}{(6-2)!}$

b) $9 \times \frac{6!}{(6-2)! \times 2!}$

c) $9 \times \frac{4!}{(4-2)! \times 2!}$

d) $9 \times \frac{2!}{(2-2)! \times 2!}$

e) $9 \times \{ \frac{8!}{(8-2)! \times 2!} - 1 \}$

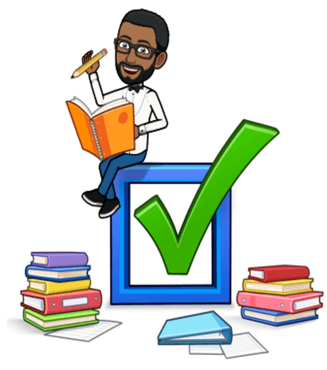
2.9 PERMUTAÇÃO CIRCULAR

Objetivo: Conceituar permutação circular;

Recursos: Lista de questões, papel, caneta ou lápis, borracha e calculadora;

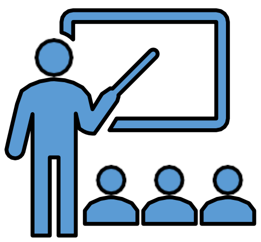
Procedimentos:

- Formar grupos de 2 a 4 alunos;
- Solicitar que os alunos leiam com atenção e resolvam cada questão;
- Com as informações obtidas devem preencher o quadro a seguir.



Analise cada situação abaixo:	**Quando as pessoas se movimentam e trocam de lugar com a pessoa mais próxima a direita, ainda de mãos dadas, é formado um novo agrupamento?**		**Quando as pessoas se movimentam e trocam de lugar com a pessoa mais próxima a esquerda, ainda de mãos dadas, é formado um novo agrupamento?**	
	Sim	Não	Sim	Não
Três pessoas de mãos dadas formam uma roda.				
Quatro pessoas de mãos dadas formam uma roda.				
Cinco pessoas de mãos dadas formam uma roda.				
Seis pessoas de mãos dadas formam uma roda.				
...	**...**	**...**	**...**	**...**
"**n**" pessoas de mão dadas formam uma roda.				

Observação:



INSTITUCIONALIZAÇÃO

Chamamos de **permutação circular** a cada disposição possível quando elementos são dispostos em torno de um círculo. Além disso, são consideradas idênticas, duas permutações circulares onde percorrendo a circunferência no sentido horário ou anti-horário a partir de um elemento comum das duas permutações, encontramos sequências iguais formadas por esses elementos.

2.10 CÁLCULO DE PERMUTAÇÕES CIRCULARES

Objetivo: **Descobrir uma maneira indireta de determinar o número de permutações circulares dos elementos de um conjunto;**

Recursos: **Lista de questões, papel, caneta ou lápis, borracha e calculadora;**

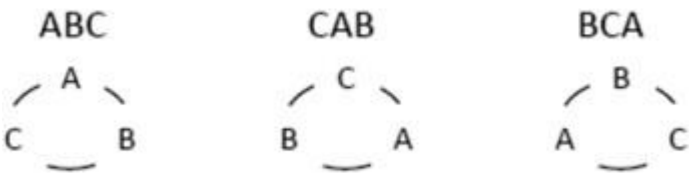
Procedimentos:

- **Formar grupos de 2 a 4 alunos;**
- **Solicitar que os alunos leiam com atenção as informações;**
- **Com as informações obtidas devem preencher o quadro a seguir.**

O quadro a seguir é um apoio para a resolução da atividade. De acordo com a atividade anterior, podemos considerar que duas permutações circulares são iguais, onde, percorrendo a circunferência no sentido horário ou anti-horário a partir de uma mesma letra, encontramos sequências de letras iguais. Imagine cada movimento circular como um movimento horizontal para a esquerda ou para a direita, onde cada letra representa uma pessoa.

Observe que, realizando um movimento horizontal para a direita, a última letra da fila passa a ser a primeira, a primeira passa a ser a segunda, a segunda passa a ser a terceira e assim por diante. De maneira semelhante, realizando um movimento para a esquerda a primeira letra do agrupamento passa ser última, a última passa a ser a penúltima, a penúltima passa a ser a antepenúltima e assim sucessivamente. A ilustração a seguir exemplifica uma relação entre um movimento horizontal e um giro com três elementos, onde cada movimento horizontal representa também um giro de aproximadamente 120°.

Figura 8: Relação entre movimento horizontal e um giro



Fonte: Vasconcelos e Rocha (2019)

Nesse sentido podemos considerar que, na primeira coluna da tabela a seguir, as sequências $\overleftrightarrow{ABC}$, $\overleftrightarrow{CAB}$ e $\overleftrightarrow{BCA}$, são iguais, pois movimentando horizontalmente encontramos a mesma sequência, e assim sucessivamente.

Permutação das Pessoas

3 pessoas	**4 pessoas**		**5 pessoas**				
ABC [1]	ABCD	CABD	ABCDE	BACDE	CABDE	DABCE	EABCD
ACB	ABDC	CADB	ABCED	BACED	CABED	DABEC	EABDC
BAC	ACBD	CBAD	ABECD	BADCE	CADBE	DACBE	EACBD
BCA [1]	ACDB	CBDA	ABEDC	BADEC	CADEB	DACEB	EACDB
CAB [1]	ADBC	CDAB	ABDEC	BAECD	CAEAB	DABCE	EADBC
CBA	ADCB	CDBA	ABDCE	BAEDC	CAEBA	DABEC	EADCB
	BACD	DACB	ACBDE	BCAED	CBADE	DBACE	EBCDE
	BADC	DABC	ACBED	BCADE	CBAED	DBAEC	EBCED
	BDAC	DBCA	ACDEB	BCDAE	CBDAE	DBCEA	EBDCE
	BDCA	DBAC	ACDBE	BCDEA	CBDEA	DBCAE	EBDEC
	BCAD	DCAB	ACEBD	BCEAD	CBEAD	DBEAC	EBACD
	BCDA	DCBA	ACEDB	BCEDA	CBEDA	DBECA	EBADC
			ADCBD	BDACE	CDABE	DCABE	ECABD
			ADCDB	BDAEC	CDAEB	DCAEB	ECADB
			ADBCE	BDCAE	CDBAE	DCBAE	ECBAD
			ADBEC	BDCEA	CDBEA	DCBEA	ECBDA
			ADEBC	BDEAC	CDEAB	DCEAB	ECDAB
			ADECB	BDECA	CDEBA	DCEBA	ECDBA
			AEBCD	BEACE	CEABD	DEABC	EDABC
			AEBDC	BEAEC	CEADB	DEACB	EDACB
			AECBD	BECAD	CEBAD	DEBAC	EDBAC
			AECBD	BECDA	CEBDA	DEBCA	EDBCA
			AEDBC	BEDAC	CEDAB	DECAB	EDCAB
			AEDCB	BEDCA	CEDBA	DECBA	EDCBA

Fonte: autor, 2024

Analise cada situação abaixo:	Qual o número total de permutações dessas pessoas?	Quantas dessas permutações coincidem entre si, no caso dessas pessoas se movimentarem e trocarem de lugar com a pessoa mais próxima a direita ou a esquerda?	Quantas dessas permutações (quantos grupos) são diferentes entre si?	Cálculo necessário para encontrar as permutações diferentes usando fatorial.
Três pessoas de mãos dadas formam uma roda.				
Quatro pessoas de mãos dadas formam uma roda.				
Cinco pessoas de mãos dadas formam uma roda.				
Seis pessoas de mãos dadas formam uma roda.				
...				
“**n**” pessoas de mão dadas formam uma roda.				

Observação:

Conclusão:

AO FINALIZAR A ATIVIDADE ESPERAMOS QUE OS ALUNOS CHEGUEM A SEGUINTE CONCLUSÃO...
O número de Permutações Circulares dos elementos de um conjunto, é igual ao fatorial do número de elementos menos um, ou seja, $(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})!$

CONSOLIDANDO O CONHECIMENTO

Prezado(a) colega,

Apresentamos a seguir um bloco de questões sobre Permutação Circular, nosso objetivo é que os discentes tenham a oportunidade de rever e aprofundar o assunto abordado na atividade anterior.

<u>QUESTÕES DE APROFUNDAMENTO PERMUTAÇÃO CIRCULAR</u>

1. De quantas formas 4 crianças podem formar uma roda?

2. De quantas formas 5 pessoas (Adriely, Allison, Eduarda, Gabriel e Laiany) podem se sentar em uma mesa circular?

3. De quantas maneiras 6 crianças podem brincar de roda, de modo que João e Maria, duas dessas crianças, fiquem sempre juntas?

4. De quantos modos 5 meninos e 5 meninas podem brincar de roda, de modo que crianças do mesmo sexo não fiquem juntas?

5. Determine a expressão matemática que fornece o número de permutações circulares de "**n**" elementos.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o desenvolvimento dessa Sequência Didática (SD) temos o objetivo de contribuir com o ensino e aprendizagem do conteúdo Análise Combinatória em turmas do ensino médio. O Ensino de Matemática por Atividades Experimentais e a Resolução de Problemas fundamentaram a elaboração das atividades propostas.

Com a realização da pesquisa e escrita da Dissertação por Silva (2024), intitulada: "O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio por meio Atividades Experimentais", buscamos investigar o surgimento de competências matemáticas em alunos do 2º ano do ensino médio ao resolverem problemas de Análise Combinatória, a partir de uma sequência de atividades experimentais. Os resultados obtidos até o presente momento, nesse, e em outros estudos, evidenciam que abordagens envolventes e práticas, potencialmente, podem aprimorar a compreensão e o desempenho matemático dos estudantes. A validação desta SD por meio de uma Dissertação de Mestrado é uma etapa primordial na demonstração da sua funcionalidade.

Esse Produto Educacional tem o objetivo de tornar o ensino de Matemática, especialmente o ensino de Análise Combinatória, mais significativo para os alunos, ao proporcionar um recurso educacional organizado e fundamentado em tendências promissoras da Educação Matemática. Essas tendências promovem um ambiente dinâmico de aprendizagem, valorizam a participação ativa dos alunos e os desafiam a resolver problemas reais. Nesse contexto o aluno não é visto apenas como mero receptor e o professor como transmissor de conhecimentos, o aluno assumi um papel central e de protagonista durante todo o processo.

Em fim, esperamos que esta Sequência Didática possa contribuir com avanços do ensino da Matemática, especialmente do conteúdo Análise Combinatória. É nosso desejo que esse material seja realmente implementado e validado em diferentes ambientes educacionais e diferentes contextos. Esperamos que sua aplicação possa contribuir com os estudantes a desenvolverem competências e habilidades matemáticas mais concretas e uma compreensão mais abrangente do assunto em tela. Também esperamos prepara-los para enfrentar com confiança os futuros desafios matemáticos. Reiteramos que elogios, críticas e sugestões serão sempre bem-vindos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Ensino Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, 3º e 4º ciclos (5º a 8º séries) – 3. ed. – Brasília: MEC/SEF, 2001.

CONCEIÇÃO, Dérick de Carvalho. **O Ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio por Atividades**. Belém, 2019. 357f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará.

FOSSA, Jhon Andrew. Algumas considerações teóricas sobre o ensino de matemática por atividades. **REMATEC**, [S. l.], v. 15, n. 35, p. 10–26, 2020. Disponível em: <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/92>. Acesso em: 18 fev. 2024.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**: um novo aspecto do método matemático. 2. reimpr. Tradução e Adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

ROSAS, Leonardo da Silva. **Ensino de Análise Combinatória por Atividades**. Belém, 2018. 315f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará.

SÁ, Pedro Franco de; MAFRA, José Ricardo Souza e; FOSSA, Jhon Andrew. O ensino de matemática por atividades experimentais na educação matemática. **Revista Cocar**, [S. l.], n. 14, p. 1-20, 2022. Disponível em: <https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/5498>. Acesso em: 18 fev. 2024.

______, Pedro Franco de. Palestra: Ensino por atividade. YouTube, 02 de maio de 2022. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=gVCXDlU7wZk>. Acesso em: 17 de dez. de 2022.

______, Pedro Franco de. Possibilidades de Resolução de Problemas em Aulas de Matemática / Pedro Franco de Sá; organizado por Fernando Cardoso de Matos, Raimundo Otoni Melo Figueiredo e Reginaldo da Silva. Belém: SINEPEM, 2021. (Coleção II).

______, Pedro Franco de. Possibilidades do Ensino de Matemática por Atividades / Pedro Franco de Sá; coordenado por Demetrius Gonçalves de Araújo, Glauco Lira Pereira, Raimundo Otoni Melo Figueiredo e Reginaldo da Silva. Belém: SINEPEM, 2019. (Coleção I).

TRANJAN, Patrick. Semana de Planejamento Pedagógico SEDUC/PA. YouTube, 06 de fevereiro de 2023. Disponível em: <https://www.youtube.com/live/vHWsFpg34gs?si=_c-PiiQbnlOzjYpi>. Acesso em: 15 de fev. de 2023.