UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

ADRIÉLI MUCHAU KOSINSKI

REDESCOBRINDO A ARITMÉTICA: CONECTANDO A TEORIA À PRÁTICA EM ATIVIDADES

CURITIBA

2025

ADRIÉLI MUCHAU KOSINSKI

REDESCOBRINDO A ARITMÉTICA: CONECTANDO A TEORIA À PRÁTICA EM ATIVIDADES

Rediscovering arithmetic: Connecting Theory to Practice in Activities

Recurso Educacional decorrente de Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. A dissertação está disponível em <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/38846>.
Linha de pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias.
Orientadora: Profa. Dra. Mari Sano.
Coorientadora: Profa. Dra. Patrícia Massae Kitani.

CURITIBA

2025

RESUMO

O presente recurso educacional está voltado para o ensino da aritmética na Educação Básica por meio de atividades propostas na dissertação de mestrado de Kosinski(2025). A metodologia de rotação por estações foi empregada para a exploração de polígonos e padrões, visando promover um aprendizado dinâmico e interativo. Para o ensino do máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, foram desenvolvidas atividades baseadas no modelo visual de área retangular, facilitando a compreensão desses conceitos. Além disso, o crivo de Eratóstenes foi utilizado para introduzir os números primos, acompanhado de atividades que auxiliam na identificação e memorização desses números. A abordagem dos números triangulares se deu através de desafios que estabelecem conexões com a combinatória. O objetivo geral deste recurso é fornecer ferramentas pedagógicas que tornem o ensino da aritmética mais envolvente, lúdico e eficaz.

Palavras-chave: Aritmética; polígonos; crivo de Eratóstenes; números riangulares.

ABSTRACT

This educational resource is aimed at teaching arithmetic in Basic Education through proposed activities in Kosinski's master's dissertation (2025). The station rotation methodology was used to explore polygons and patterns, aiming to promote dynamic and interactive learning. To teach the greatest common divisor and least common multiple, activities based on the visual model of rectangular area were developed, facilitating the understanding of these concepts. In addition, the sieve of Eratosthenes was used to introduce prime numbers, accompanied by activities that help in the identification and memorization of these numbers. Triangular numbers were approached through challenges that establish connections with combinatorics. The general objective of this resource is to provide pedagogical tools that make the teaching of arithmetic more engaging and effective.

Keywords: Arithmetic; polygons; sieve of Eratosthenes; triangular numbers.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 ATIVIDADES PROPOSTAS DE APLICAÇÕES NA ARITMÉTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Apresentaremos uma série de atividades que visam aplicar os conceitos aritméticos discutidos nos Capítulos, 2, 3 e 4 da dissertação (Kosinski 2025). Essas atividades são propostas com o intuito de proporcionar aos alunos experiências concretas e significativas, estimulando a resolução de problemas e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

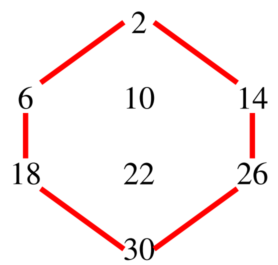
1.1 PROPOSTA DE ATIVIDADE: POLÍGONOS E PADRÕES

A interdisciplinaridade entre geometria e aritmética através da exploração de polígonos e padrões numéricos, configura-se como uma estratégia pedagógica alternativa para tornar a aprendizagem mais engajadora. A associação de representações visuais às operações aritméticas, como adição e multiplicação, configura-se como um recurso que pode auxiliar os estudantes a consolidar conhecimentos geométricos e desenvolver uma compreensão mais profunda das propriedades dos polígonos.

Algumas das relações interessantes presentes no hexágono, octógono e losango, envolvendo as operações de adição e multiplicação, que podem ser exploradas em sala de aula com o intuito de tornar o conhecimento matemático mais atrativo e engajador para os discentes, serão abordadas nas atividades propostas.

Vamos relembrar brevemente as relações vistas no capítulo 2 da dissertação de Kosinski (2025). Chamaremos de P a soma dos números que se encontram nos vértices do polígono e I a soma dos números do interior do polígono. Ao escolhermos 8 termos consecutivos de uma progressão aritmética com primeiro termo a e razão r, e posicioná-los como mostra a Figura 1.1 (para $a = 2$ e $r = 4$) obtemos um hexágono, cuja relação é $P = 3I$, ou seja, a soma dos números dos vértices é igual a três vezes a soma dos números do seu interior.

Figura 1.1 – Exemplo de polígonos e padrões: hexágono



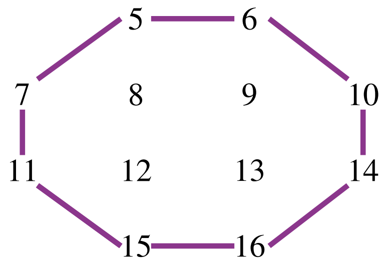
$a = 2$ e $r = 4$

Fonte: Autora.

Observe que $P = 2 + 6 + 18 + 30 + 26 + 14 = 96$, $I = 10 + 22 = 32$ e $P = 3 \cdot 32 = 3I$.

Ao escolhermos 12 termos consecutivos podemos formar um octógono que possui a relação $P = 2I$, a Figura 1.2 mostra um exemplo para esse fato.

Figura 1.2 – Exemplo de polígonos e padrões: octógono

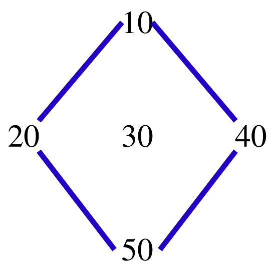


$a = 5$ e $r = 1$
Fonte: Autora.

Logo, $P = 5+7+11+15+16+14+10+6 = 84$, $I = 8+9+12+13 = 42$ e neste caso $P = 84 = 2 \cdot 42 = 2I$.

Se escolhermos apenas 5 termos consecutivos de uma progressão aritmética, obtemos um losango que apresenta a relação $P = 4I$, vide a Figura 1.3.

Figura 1.3 – Exemplo de polígonos e padrões: losango



$a = 10$ e $r = 10$
Fonte: Autora.

Note que $P = 10 + 20 + 50 + 40 = 120 = 4 \cdot 30 = 4I$.

As atividades propostas buscam fixar conteúdos que envolvem polígonos e operações de maneira atrativa, curiosa e desafiadora para o estudante. As atividades foram baseadas em Duncan e Litwiller (1990).

Objetivo Geral: Reconhecer padrões com somas e produtos de números em polígonos.

Objetivos Específicos:

1. Reconhecer polígonos e suas características (vértices, nomenclatura);
2. Identificar e verificar padrões existentes nos polígonos;
3. Estimular a concentracão e a curiosidade do estudante;

4. Fixar conteúdos;

5. Resolver exercícios de maneira lúdica.

Contexto didático: As atividades aqui apresentadas foram planejadas para serem aplicadas a alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, após a conclusão de uma sequência de conteúdo sobre polígonos e operações de adição e produto. Também, podem ser estudadas na 3ª série do Ensino Médio durante o conteúdo de progressões aritméticas.

Quantidade de aula: 2 aulas de 45 minutos.

Material didático:

- Fichas com polígonos impressas disponíveis no Apêndice A;
- Caça-octógonos impresso, disponível no Apêndice A;
- Lápis, borracha e papel para rascunho;
- Lápis para colorir;
- Dados de 6 faces;
- Tablets ou computadores com acesso a internet.

Metodologia: O encaminhamento da aula se dará de forma explicativa e dialogada recorrendo a metodologia ativa "Rotação por Estações", uma estratégia de ensino que divide a sala de aula em diferentes "estações", cada uma com uma atividade de aprendizagem específica. Os alunos são divididos em grupos e rotacionam entre as estações, completando as atividades propostas em cada uma delas.

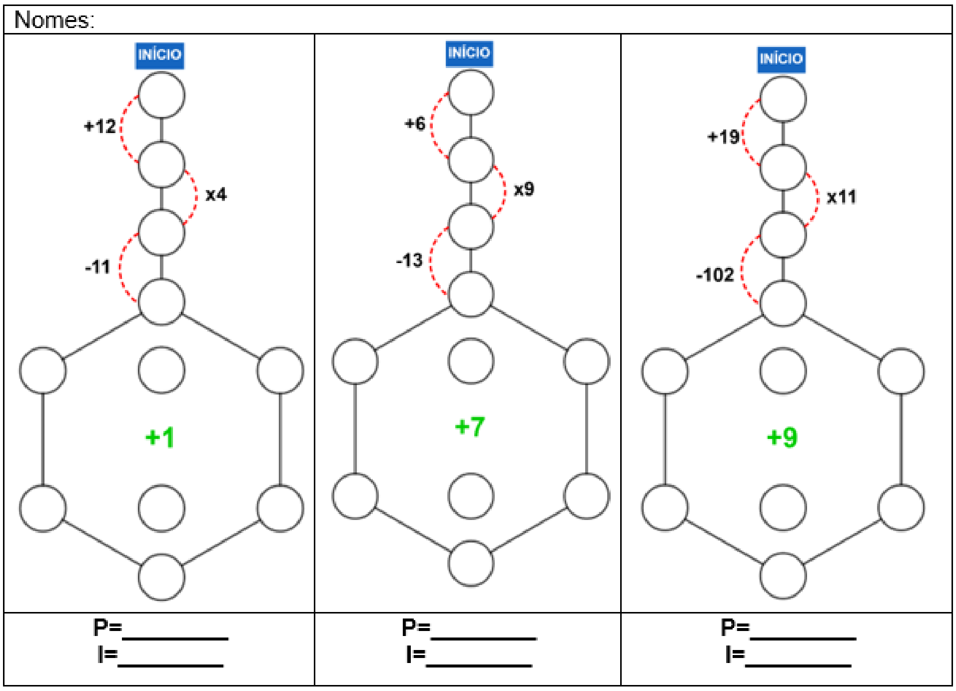
Para o desenvolvimento da aula o professor deverá separar os estudantes em grupos de 3 até 5 integrantes.Teremos quatro atividades sobre o conteúdo, cada atividade terá duração de 20 minutos. E nos 10 minutos finais o professor pode retomar as dúvidas e questionamentos dos estudantes. Após montar os grupos, o professor pode direcionar cada grupo a uma estação. Depois de passar o tempo os grupos trocam de estação.

Logo que todos os grupos percorrerem todas as estações, os estudantes voltam aos lugares do início da aula para um feedback. A seguir o professor realiza a correção dos exercícios com os estudantes identificando as dificuldades que ocorreram e as dúvidas.

1.1.1 1ª ESTAÇÃO: HEXÁGONOS

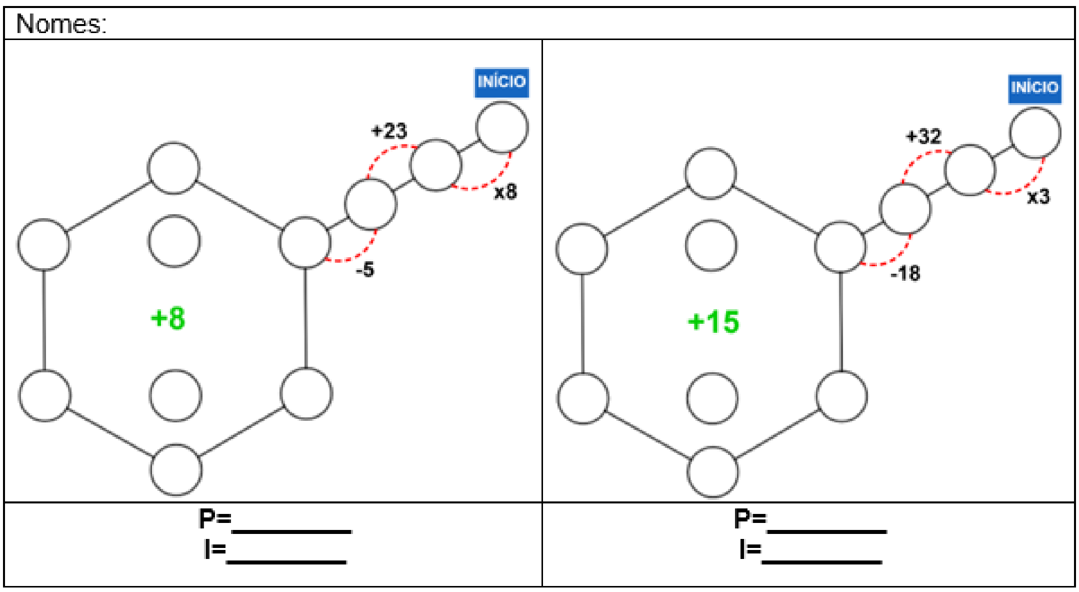
Serão disponibilizadas algumas fichas com polígonos como mostra a Figura 1.4, 1.5 e 1.6 e um dado. Os estudantes devem jogar o dado e o número que cair deve ser escrito no círculo do segmento externo ao hexágono e adjacente à palavra início e imediatamente realizar as operações solicitadas escrevendo o resultado nos círculos. Quando chegar em um dos círculos pertencentes ao hexágono inicia o preenchimento dos outros círculos, incluindo os círculos do interior do polígono, obedecendo a razão r que se encontra no centro da figura (no caso da Figura 1.4 seriam +1, +7, +9, no caso da Figura 1.5 são +8 e +15, no caso da Figura 1.6 seriam +2, +3 e +5). Em seguida, precisam determinar os valores de P e I com os números obtidos e verificar a relação $P = 3I$.

Figura 1.4 – Ficha de atividade: 1



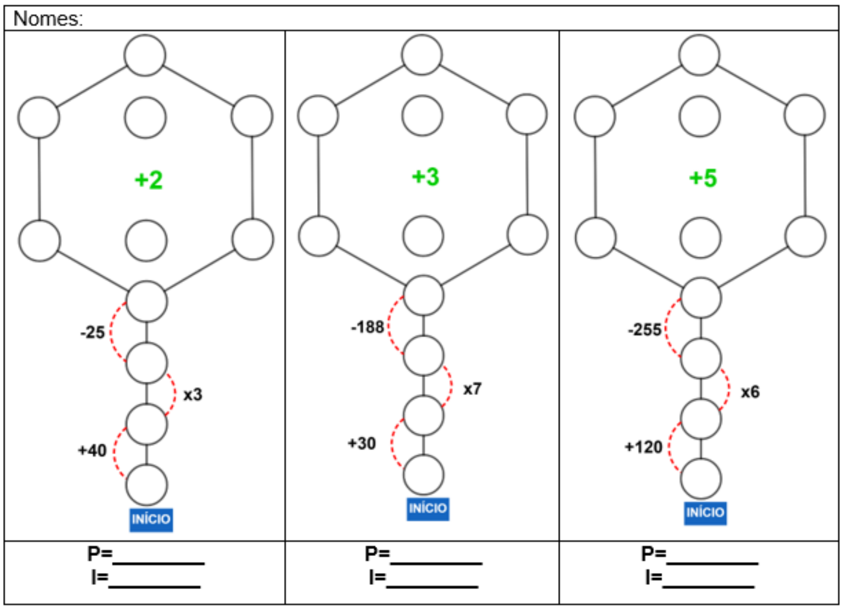
Fonte: Autora.

Figura 1.5 – Ficha de atividade: 2



Fonte: Autora.

Figura 1.6 – Ficha de atividade: 3



Fonte: Autora.

1.1.2 2ª ESTAÇÃO: ATIVIDADES UTILIZANDO O GEOGEBRA

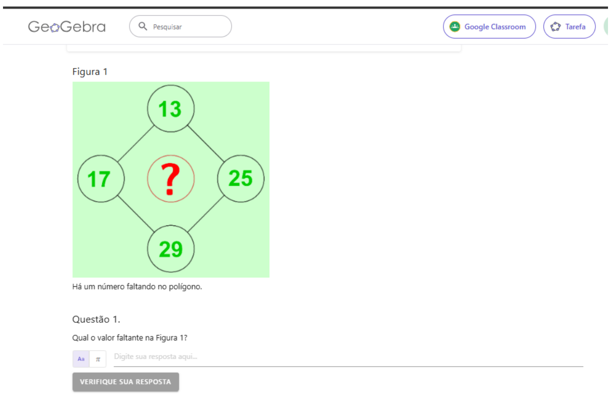
Os alunos responderão um quiz de questões que envolvem as relações presentes nos polígonos estudados. Esse quiz foi criado pelo software GeoGebra (2025) e pode ser compartilhado com o estudante pelo Google Sala de Aula.

As atividades propostas são encontradas no link a seguir:

<https://www.geogebra.org/m/u6wcbpz7>.

Os estudantes deverão responder 11 questões sobre o tema polígonos e padrões, identificando valores faltantes, e em algumas questões os valores de P e I. Há também uma atividade para completar os números faltantes no polígono. Os alunos devem responder as questões no tempo de 20 minutos. A Figura 1.7 mostra uma atividade a ser resolvida pelo estudante.

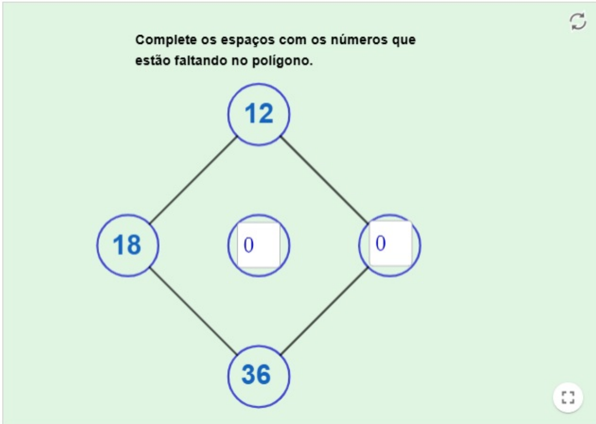
Figura 1.7 – Atividade no GeoGebra



Fonte: Autora.

Os alunos também deverão determinar os valores faltantes na atividade, como mostra a Figura 1.8.

Figura 1.8 – Atividade proposta no GeoGebra



Fonte: Autora.

1.1.3 3ª ESTAÇÃO: OCTÓGONOS

Nesta estação os alunos deverão encontrar octógonos que apresentem a relação estudada durante as aulas, ou seja, $P = 2I$. Para isso o grupo receberá uma folha de caça octógonos, como mostra a Figura 1.9.

Figura 1.9 – Caça-octógonos

Nome: ______________________________

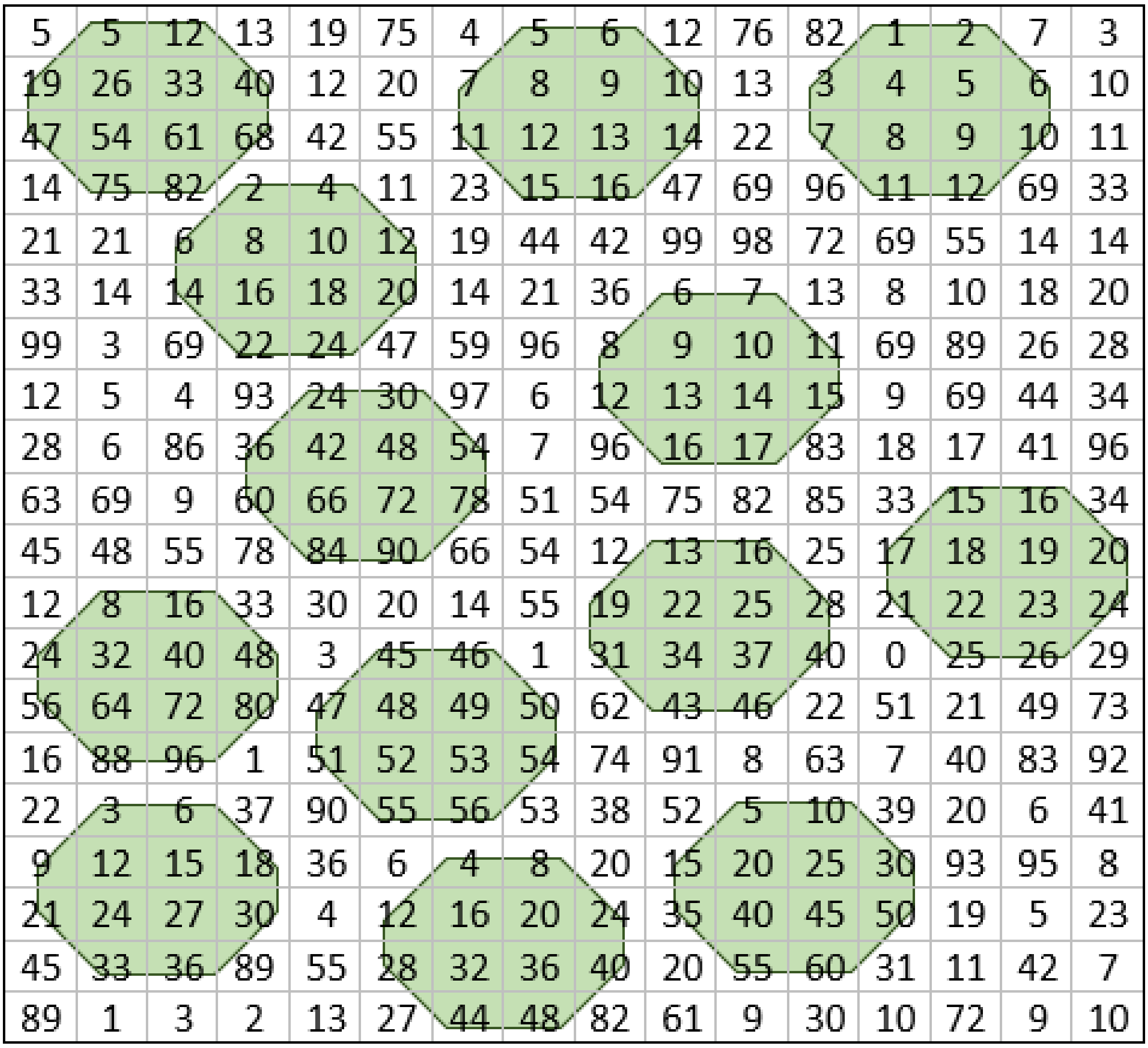
Caça-octógonos

5	5	12	13	19	75	4	5	6	12	76	82	1	2	7	3
19	26	33	40	12	20	7	8	9	10	13	3	4	5	6	10
47	54	61	68	42	55	11	12	13	14	22	7	8	9	10	11
14	75	82	2	4	11	23	15	16	47	69	96	11	12	69	33
21	21	6	8	10	12	19	44	42	99	98	72	69	55	14	14
33	14	14	16	18	20	14	21	36	6	7	13	8	10	18	20
99	3	69	22	24	47	59	96	8	9	10	11	69	89	26	28
12	5	4	93	24	30	97	6	12	13	14	15	9	69	44	34
28	6	86	36	42	48	54	7	96	16	17	83	18	17	41	96
63	69	9	60	66	72	78	51	54	75	82	85	33	15	16	34
45	48	55	78	84	90	66	54	12	13	16	25	17	18	19	20
12	8	16	33	30	20	14	55	19	22	25	28	21	22	23	24
24	32	40	48	3	45	46	1	31	34	37	40	0	25	26	29
56	64	72	80	47	48	49	50	62	43	46	22	51	21	49	73
16	88	96	1	51	52	53	54	74	91	8	63	7	40	83	92
22	3	6	37	90	55	56	53	38	52	5	10	39	20	6	41
9	12	15	18	36	6	4	8	20	15	20	25	30	93	95	8
21	24	27	30	4	12	16	20	24	35	40	45	50	19	5	23
45	33	36	89	55	28	32	36	40	20	55	60	31	11	42	7
89	1	3	2	13	27	44	48	82	61	9	30	10	72	9	10

Fonte: Autora.

Os estudantes devem em 20 minutos, encontrar o máximo de octógonos que obedeçam a relação estudada. Quando encontrar um octógono, o estudante deve colorir o polígono com lápis de cor. O professor pode atribuir pontuações aos octógonos encontrados de acordo com o nível de dificuldade, por exemplo, números consecutivos que aumentam de 1 em 1 recebem uma pontuação menor que números que são múltiplos consecutivos ou que obedecem uma determinada razão. A Figura 1.10 mostra o gabarito do caça-octógonos.

Figura 1.10 – Gabarito: caça-octógonos



5	5	12	13	19	75	4	5	6	12	76	82	1	2	7	3
19	26	33	40	12	20	7	8	9	10	13	3	4	5	6	10
47	54	61	68	42	55	11	12	13	14	22	7	8	9	10	11
14	75	82	2	4	11	23	15	16	47	69	96	11	12	69	33
21	21	6	8	10	12	19	44	42	99	98	72	69	55	14	14
33	14	14	16	18	20	14	21	36	6	7	13	8	10	18	20
99	3	69	22	24	47	59	96	8	9	10	11	69	89	26	28
12	5	4	93	24	30	97	6	12	13	14	15	9	69	44	34
28	6	86	36	42	48	54	7	96	16	17	83	18	17	41	96
63	69	9	60	66	72	78	51	54	75	82	85	33	15	16	34
45	48	55	78	84	90	66	54	12	13	16	25	17	18	19	20
12	8	16	33	30	20	14	55	19	22	25	28	21	22	23	24
24	32	40	48	3	45	46	1	31	34	37	40	0	25	26	29
56	64	72	80	47	48	49	50	62	43	46	22	51	21	49	73
16	88	96	1	51	52	53	54	74	91	8	63	7	40	83	92
22	3	6	37	90	55	56	53	38	52	5	10	39	20	6	41
9	12	15	18	36	6	4	8	20	15	20	25	30	93	95	8
21	24	27	30	4	12	16	20	24	35	40	45	50	19	5	23
45	33	36	89	55	28	32	36	40	20	55	60	31	11	42	7
89	1	3	2	13	27	44	48	82	61	9	30	10	72	9	10

Fonte: Autora.

1.1.4 4ª ESTAÇÃO: JOGOS NA PLATAFORMA WORDWALL

Nesta seção os estudantes testarão seus conhecimentos em jogos utilizando a plataforma Wordwall (2025) sobre o tema polígonos e padrões. Os alunos deverão em 20 minutos responder questões para determinarem os valores de P e I em cada caso, respeitando a relação correspondente a cada polígono. O professor pode disponibilizar folhas para rascunho e lápis para os cálculos. É necessário tablets ou computadores com acesso a internet e o link dos jogos.

<https://wordwall.net/pt/resource/85650668>.
<https://wordwall.net/pt/resource/85653716>.

Os alunos responderão questões para determinar os valores de P e I dos polígonos.

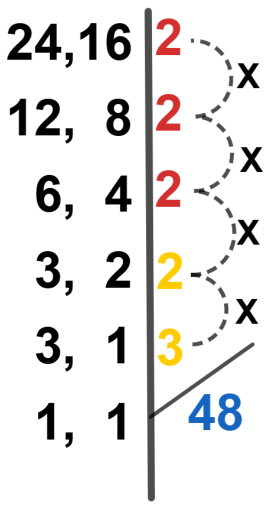
Avaliação: A avaliação ocorrerá de forma diagnóstica pelo professor. Ela será realizada durante a execução das atividades pelos estudantes, identificando as dificuldades e complementando o assunto se há necessidade.

1.2 PROPOSTA DE ATIVIDADE: MODELOS VISUAIS DO MÁXIMO DIVISOR COMUM E MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Um dos conteúdos abordados no Ensino Fundamental pelos professores é o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum. Segundo a BNCC (Brasil, 2018, p. 308) espera-se que após a aplicação do tema os estudantes adquiram a seguinte habilidade: (EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.

Só a aplicação tradicional do algoritmo não garante que o estudante compreenda o processo usual, como mostra a Figura 1.11, que representa o cálculo para o mínimo múltiplo comum utilizando fatoração entre os números 16 e 24.

Figura 1.11 – Mínimo múltiplo comum entre 16 e 24



Fonte: Autora.

Utilizando modelos visuais para determinar o máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, o estudante consegue compreender os passos para encontrar o resultado.

Mostraremos algumas atividades que podem ser utilizadas para uma melhor compreensão do máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum em sala de aula. As atividades propostas foram baseadas em Lidan e Pjanić (2020) e MathVentures (2008).

Objetivo Geral: Compreender os processos para determinar o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum.

Objetivos Específicos:

1. Determinar o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum entre dois números;
2. Estimular a aprendizagem;
3. Fixar conteúdos;
4. Resolver exercícios de maneira lúdica.

Contexto didático: As atividades apresentadas podem ser aplicadas durante as aulas de matemática para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental quando o professor abordar o tema máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum.

Quantidade de aulas: 2 aulas de 45 minutos.

Material didático:

- Cartolina ou papel tamanho A4 ou A3;
- Régua, tesoura, cola;
- Papeis coloridos;
- Canetinhas ou lápis de cor;
- Quebra-cabeça disponível no Apêndice B.

Metodologia: A atividade proposta utiliza o modelo de área retangular para explorar os conceitos de máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum, exemplificados pelos pares de valores 22 e 5 e outro exemplo para os números 38 e 16, com a possibilidade de adaptação para outros valores.

Os alunos podem ser dividos em grupos e em seguida o professor propõe a cada grupo os valores para determinar o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum utilizando o modelo de área retangular.

Inicialmente, os estudantes desenham o retângulo cujos lados tem medidas 22 e 5 unidades. Com os papéis coloridos deverão construir quadrados até preencher todo o retângulo 22 por 5. Da mesma forma se deve proceder para determinar o máximo divisor comum entre os números 38 e 16.

Para determinar o mínimo múltiplo comum entre 22 e 5 e entre 16 e 38, utilizando o modelo de área retangular, podemos aproveitar as construções realizadas pelos estudantes ao determinar o máximo divisor comum.

Também é proposto um desafio no formato de quebra-cabeça utilizando o modelo de área retangular para determinar o mínimo múltiplo comum entre 22 e 5. Os alunos devem realizar a montagem do quebra-cabeça e em seguida realizar os cálculos para determinar o mínimo múltiplo comum entre os valores.

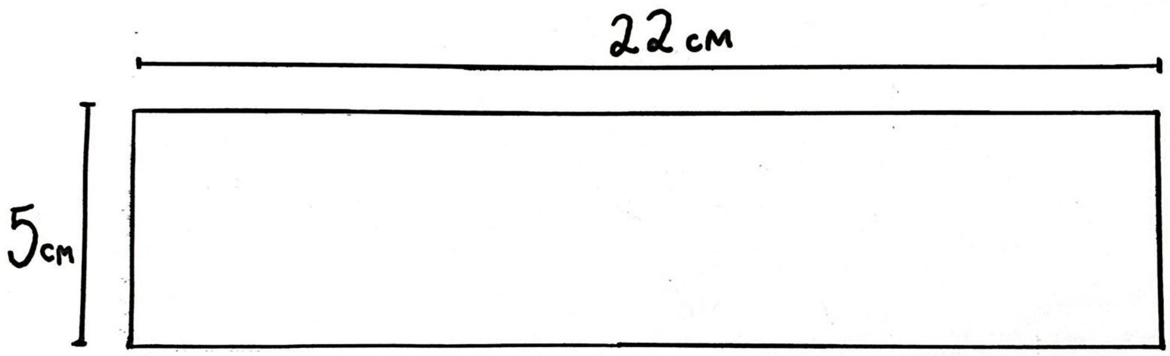
1.2.1 ATIVIDADE: MODELO DE ÁREA RETANGULAR

Apresentaremos uma forma de sistematizar com os estudantes os conteúdos de máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum utilizando o modelo de área retangular.

- **Atividade 1:** Determine o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de 22 e 5 utilizando o modelo de área retangular.
- **Atividade 2:** Determine o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de 16 e 38 utilizando o modelo de área retangular.

Atividade 1: Inicialmente vamos determinar o máximo divisor comum de 5 e 22. Com o auxílio de uma régua os alunos deverão desenhar um retângulo de lados com medidas 22 e 5 centímetros (pode ser utilizada outras unidades de medida), como mostra a Figura 1.12.

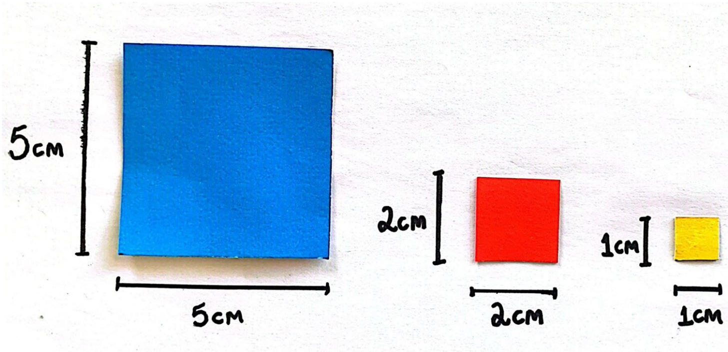
Figura 1.12 – Retângulo de 22 por 5 centímetros



Fonte: Autora.

Agora os alunos deverão analizar qual é o maior quadrado possível que cabe no retângulo e em seguida preencher todo o retângulo com esses quadrados. A Figura 1.13 mostra as medidas dos quadrados necessários para ladrilhar toda a figura.

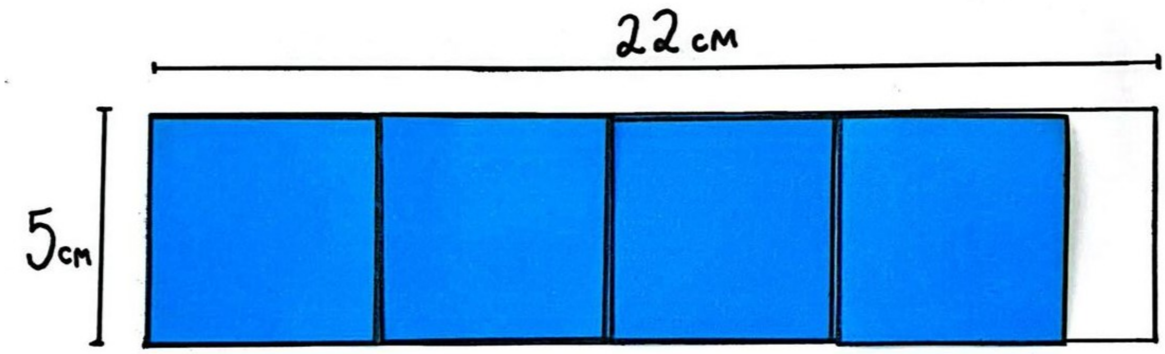
Figura 1.13 – Quadrados necessários para preencher o retângulo de lados com medidas 22 e 5



Fonte: Autora.

Utilizando o Algoritmo de Euclides podemos representar $22 = 4 \cdot 5 + 2$, ou seja, são necessários quatro quadrados de lado 5 centímetros como mostra a Figura 1.14.

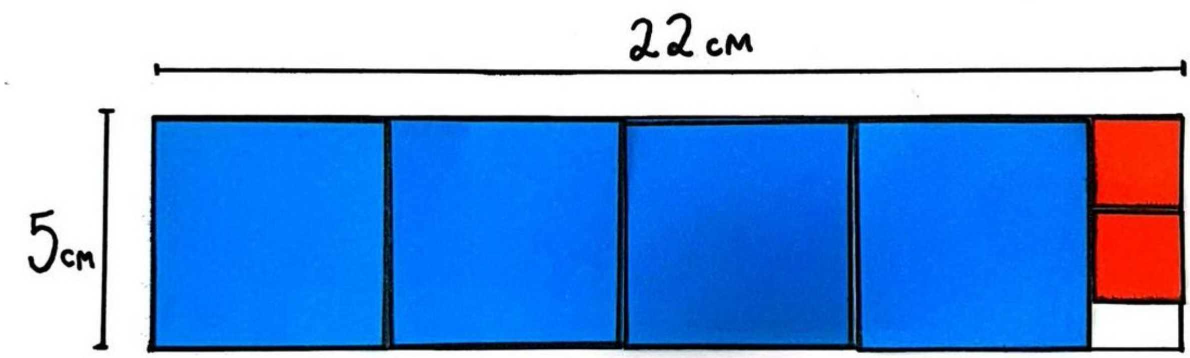
Figura 1.14 – Quadrados de medidas 5 centímetros



Fonte: Autora.

Continuando o processo, agora devemos adicionar o máximo de quadrados possíveis para preencher o retângulo restante. Como $5 = 2 \cdot 2 + 1$, necessitamos de dois quadrados de lado 2 centímetros. Vide a Figura 1.15.

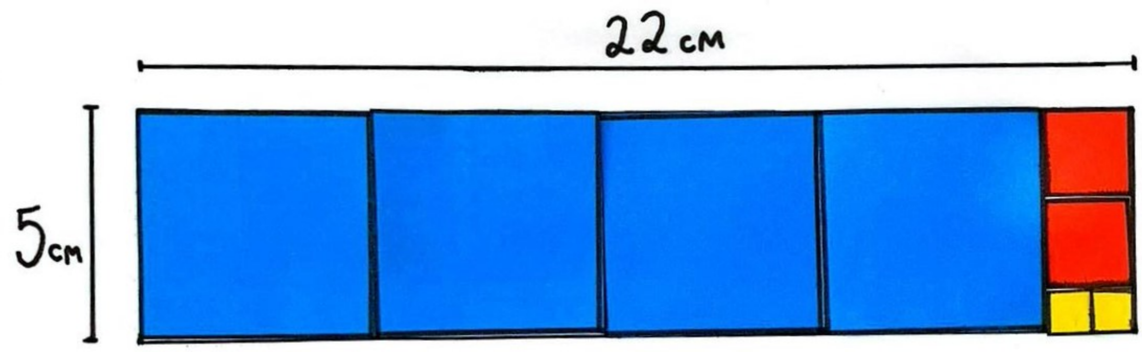
Figura 1.15 – Quadrados de medidas 2 centímetros



Fonte: Autora.

Para finalizar precisa-se preencher o espaço restante agora com $2 = 2 \cdot 1 + 0$, ou seja, dois quadrados de lado medindo 1 centímetro. Portanto, todo o retângulo foi ladrilhado e a medida do lado do último quadrado representa o máximo divisor comum de 22 e 5, isto é, 1. A Figura 1.16 ilustra esse fato.

Figura 1.16 – Retângulo de lados 22 e 5 centímetros ladrilhado

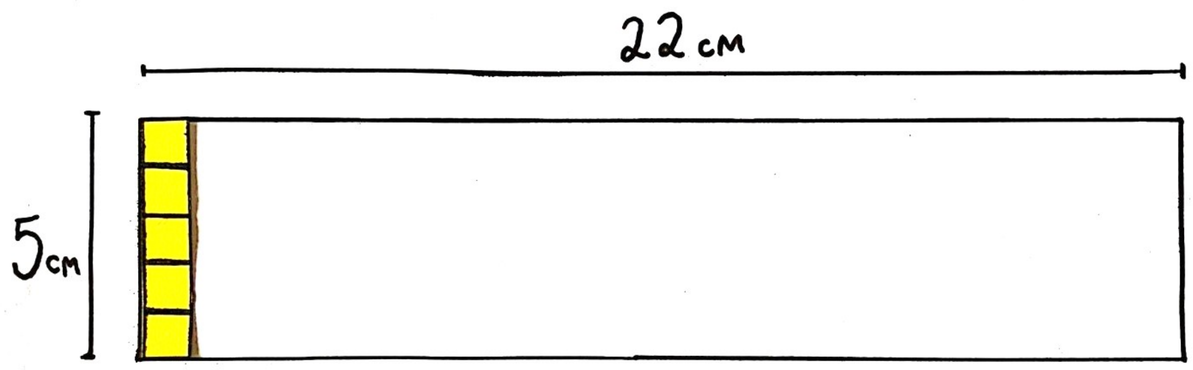


Fonte: Autora.

Para determinar o mínimo múltiplo comum recorrendo a um dos modelos de área retangular, utilizamos o quadrado de lado igual ao máximo divisor comum, isto é, o quadrado de lado 1 centímetro.

Primeiro desenhamos ao longo do lado medindo 5 centímetros os quadrados de lado igual a 1 centímetro de modo a preencher todo o comprimento, vide Figura 1.17.

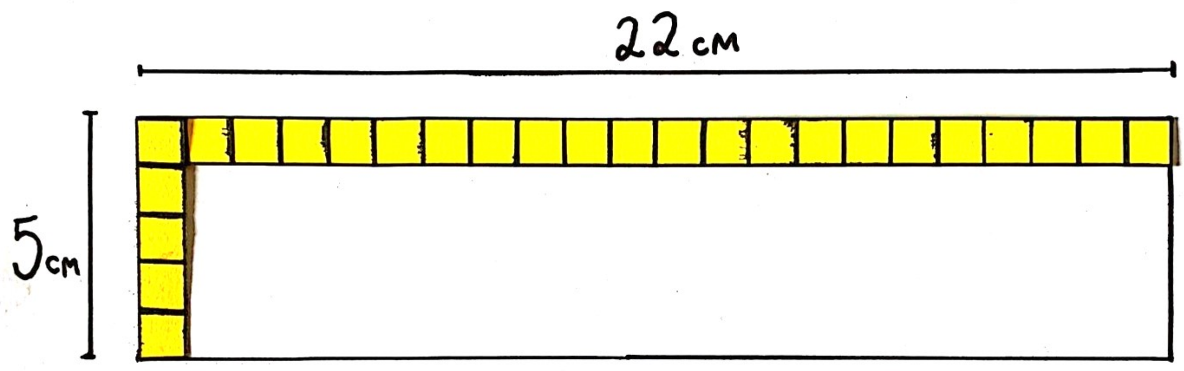
Figura 1.17 – Quadrados sobre o lado medindo 5 centímetros



Fonte: Autora.

Em seguida, desenhamos ao longo da aresta medindo 22 centímetros os quadrados de lado igual a 1 centímetro de modo a preencher todo comprimento como ilustra a Figura 1.18.

Figura 1.18 – Quadrados sobre o lado medindo 22 centímetros



Fonte: Autora.

Ao longo do lado de 5 centímetros é possível desenhar 5 quadrados de lado 1 centímetro. Já no lado medindo 22 centímetros foram desenhados 22 quadrados de lado 1 centímetro.

Para determinar o mínimo múltiplo comum devemos multiplicar a quantidade de quadrados sobre o lado menor (5 cm), pela medida do lado maior, isto é, 22 centímetros e portanto $5 \cdot 22 = 110$.

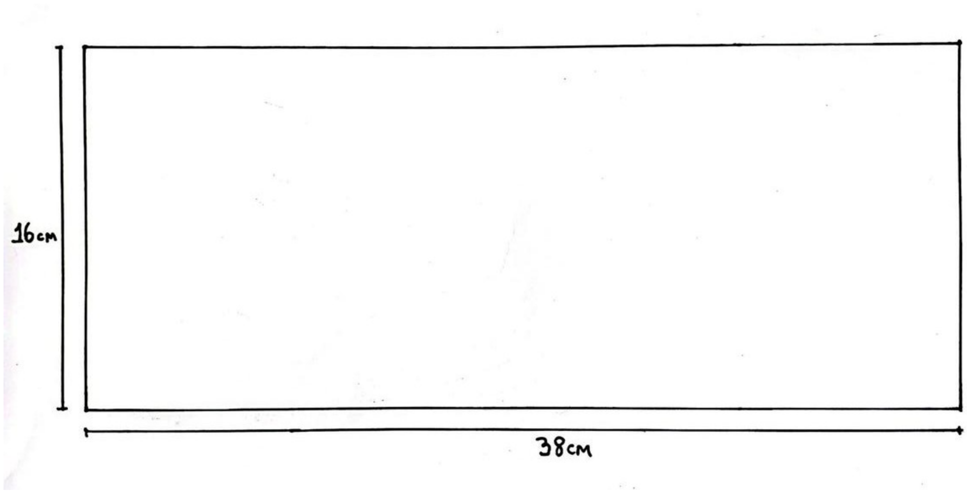
Podemos também obter o resultado multiplicando a quantidade de quadrados de lado 1 centímetro sobre o lado maior (22 cm), pela medida do lado menor, 5 centímetros, logo o mínimo múltiplo comum é $22 \cdot 5 = 110$.

Esse resultado é válido já que $[a, b] = \frac{|ab|}{(a,b)}$, com a e b inteiros, apresentado no capítulo 3 da dissertação de Kosinski (2025). Logo o mínimo múltiplo comum de 22 e 5 é dado por

$$[22, 5] = \frac{22 \cdot 5}{1} = 110.$$

Atividade 2: Para determinar o máximo divisor comum dos números 16 e 38 desenhamos um retângulo de lados de medida 16 e 38 centímetros. Como mostra a Figura 1.19.

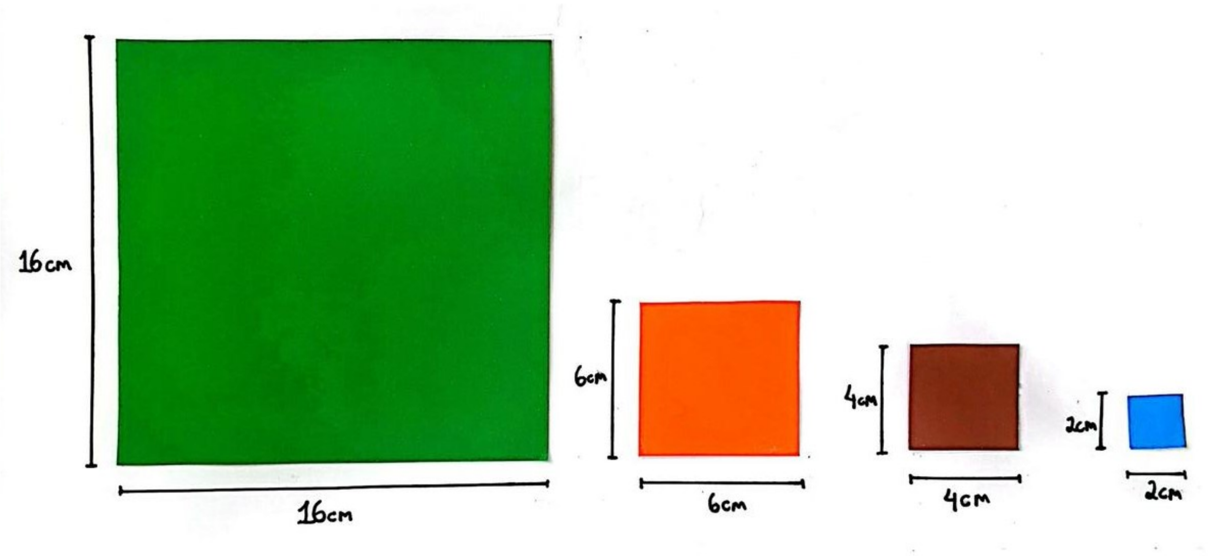
Figura 1.19 – Retângulo com medidas 16 e 38 centímetros



Fonte: Autora.

Agora é preciso verificar qual é o maior quadrado possível que possa cobrir parte do retângulo. Para essa atividade são necessários quadrados como mostra a Figura 1.20.

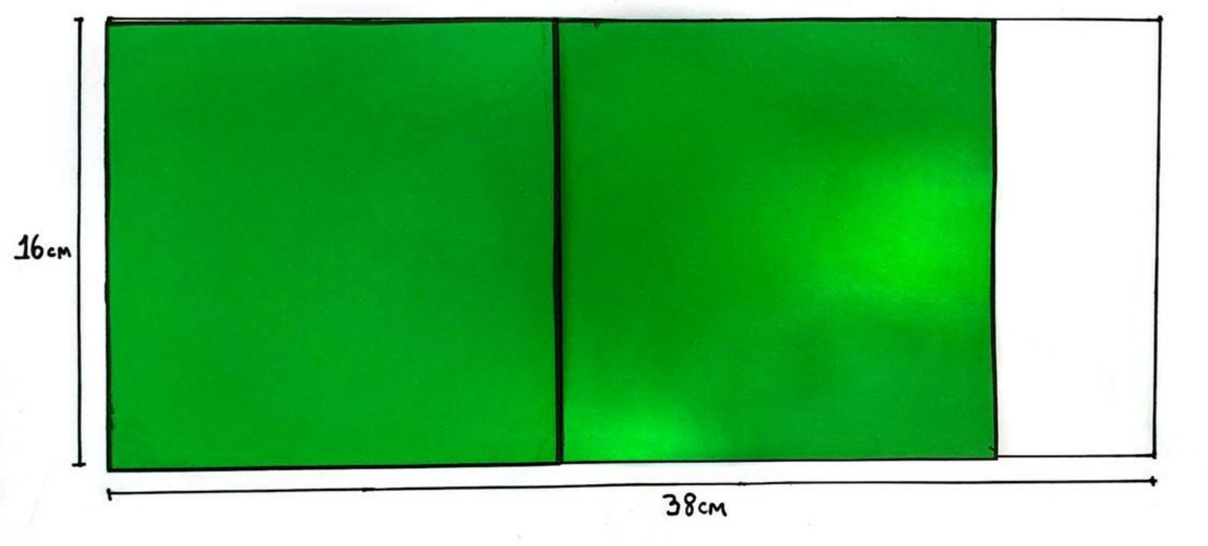
Figura 1.20 – Quadrados para preencher o retângulo de lados com medidas 16 e 38



Fonte: Autora.

Utilizando o Algoritmo de Euclides podemos determinar quantos quadrados de cada medida são necessários para cobrir a maior parte possível do retângulo. Temos que $38 = 2 \cdot 16 + 6$, logo é preciso dois quadrados de lado 16 centímetros. Vide Figura 1.21.

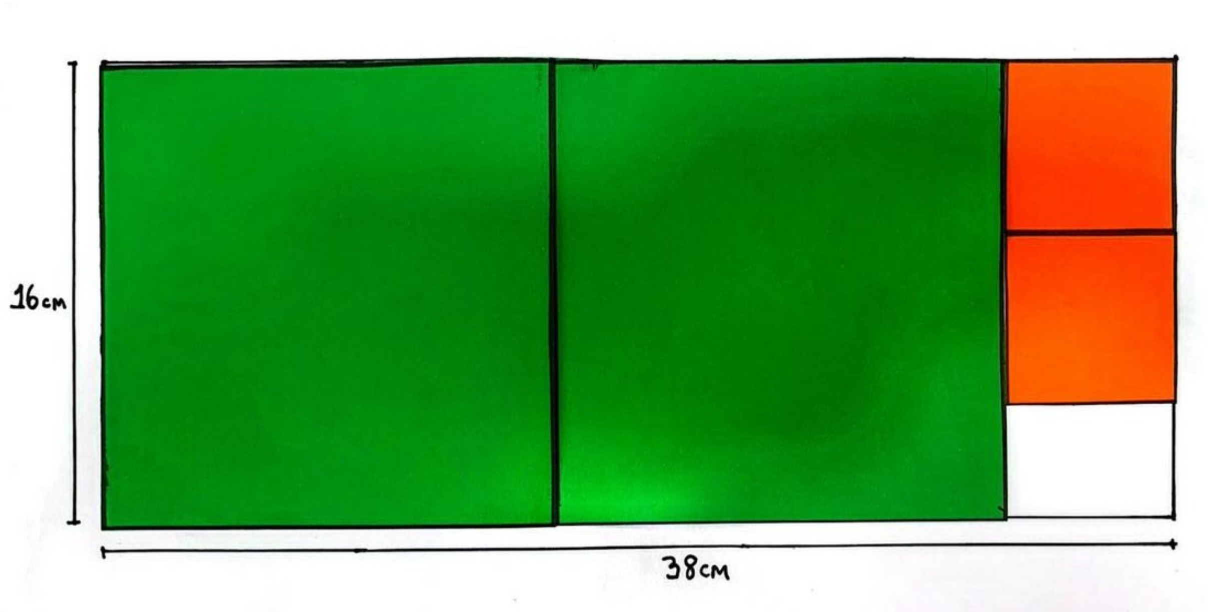
Figura 1.21 – Quadrados de 16 centímetros



Fonte: Autora.

Agora resta preencher um retângulo de lado medindo 16 e 6 centímetros. Aplicando o Algoritmo de Euclides novamente tem-se que $16 = 2 \cdot 6 + 4$, ou seja, precisamos de dois quadrados medindo 6 centímetros de lado como mostra a Figura 1.22.

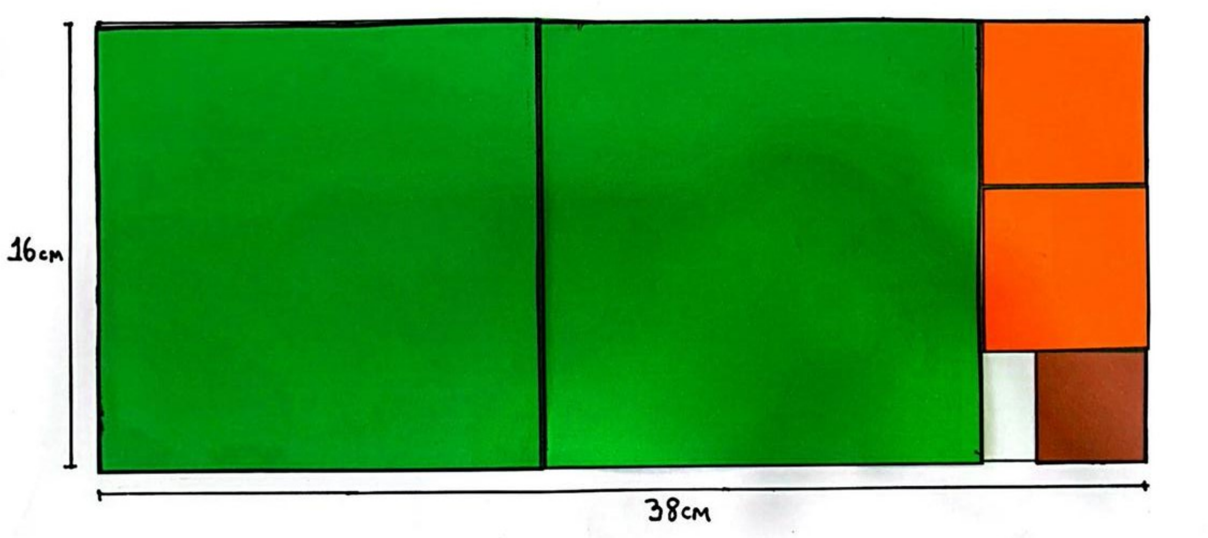
Figura 1.22 – Quadrados de 6 centímetros



Fonte: Autora.

Repetindo o processo, $6 = 1 \cdot 4 + 2$, então precisamos de um quadrado de lado 4 centímetros. A Figura 1.23 representa esse caso.

Figura 1.23 – Quadrados de 4 centímetros

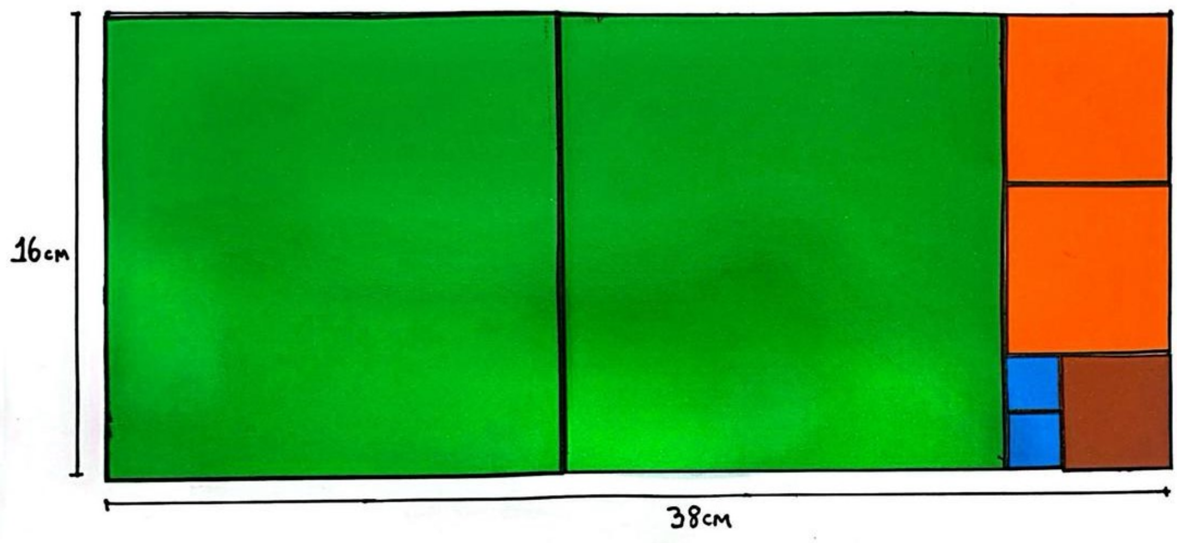


Fonte: Autora.

Finalmente temos que $4 = 2 \cdot 2 + 0$, ou seja, precisamos de dois quadrados de lado 2 centímetros para preencher todo o retângulo 16 por 38 centímetros, logo o máximo divisor comum de 16 e 38 é 2, vide Figura 1.24.

Para encontrar o mínimo múltiplo comum de 16 e 38 utilizaremos os quadrados de lado medindo 2 centímetros, determinados pelo máximo divisor comum.

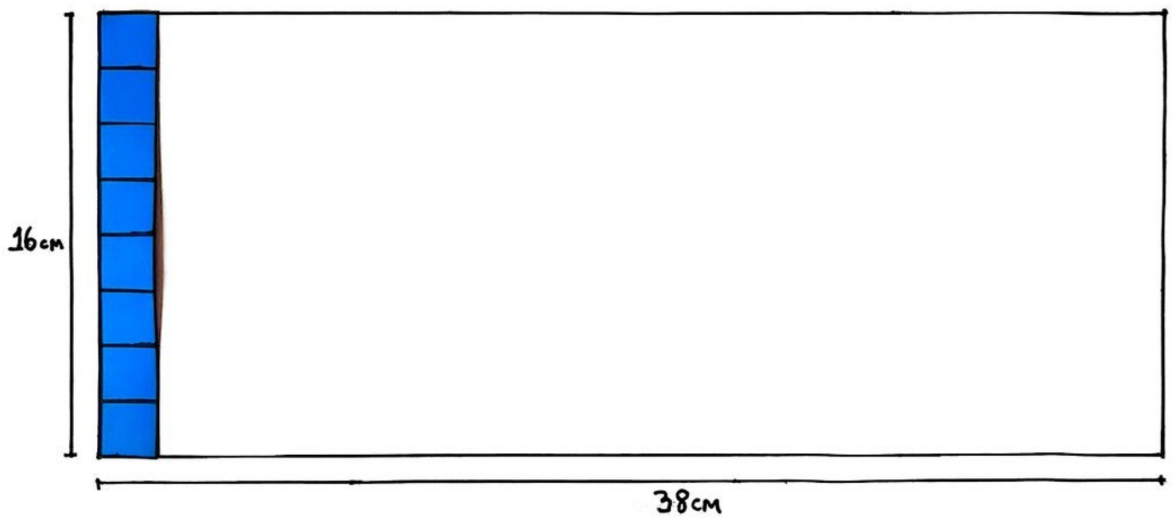
Figura 1.24 – Retângulo de lados 16 e 38 ladrilhado



Fonte: Autora.

Ao desenharmos sobre o lado medindo 16 centímetros, temos um total de 8 quadrados de lado 2 centímetros. A Figura 1.25 mostra esta representação.

Figura 1.25 – Quadrados sobre aresta medindo 16 centímetros

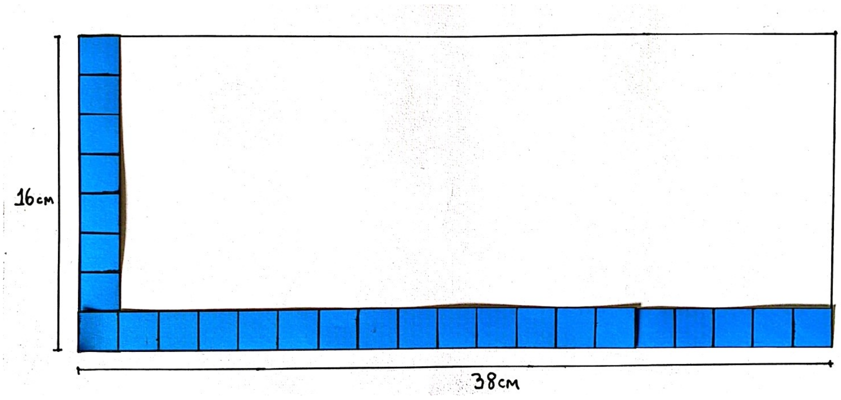


Fonte: Autora.

Já sobre o lado medindo 38 centímetros é possível desenhar 19 quadrados de lado 2 centímetros, vide Figura 1.26.

Para determinar o mínimo múltiplo comum de 16 e 38, multiplicamos a quantidade de quadrados sobre o lado menor, ou seja, de lado medindo 16 centímetros pelo comprimento do lado maior de 38 centímetros, isto é, $8 \cdot 38 = 304$.

Figura 1.26 – Quadrados sobre aresta medindo 38 centímetros



Fonte: Autora.

Para verificar o resultado podemos multiplicar a quantidade de quadrados de lado 2 centímetros sobre a aresta maior, ou seja, de lado medindo 38 centímetros pelo comprimento do lado menor, isto é, 16 centímetros. Portanto $19 \cdot 16 = 304$.

Como $[a, b] = \frac{|ab|}{(a,b)}$, então o mínimo múltiplo comum de 16 e 38, é dado por,

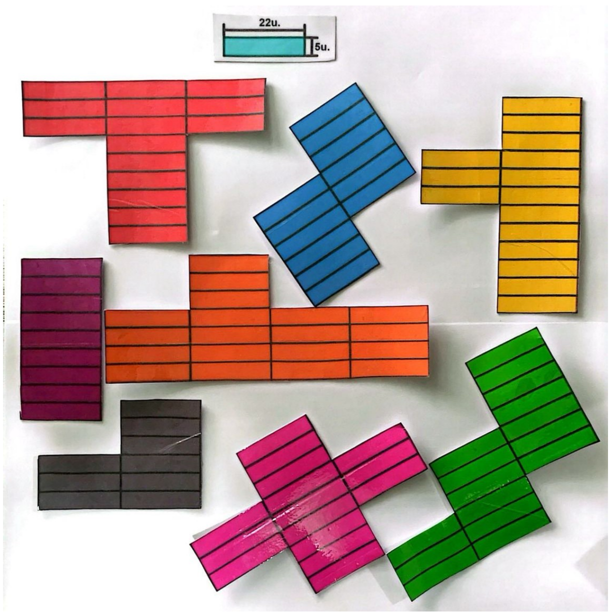
$$[38, 16] = \frac{38 \cdot 16}{2} = 38 \cdot 8 = 304 \text{ ou } \frac{38 \cdot 16}{2} = 19 \cdot 16 = 304.$$

1.2.2 DESAFIO

Utilizando o quebra-cabeça disponível no Apêndice B, determine o mínimo múltiplo comum utilizando o modelo de área retangular.

Atividade desafio: Para determinar o mínimo múltiplo comum com o modelo de área retângular utilizaremos o quebra-cabeça que mostra a Figura 1.27.

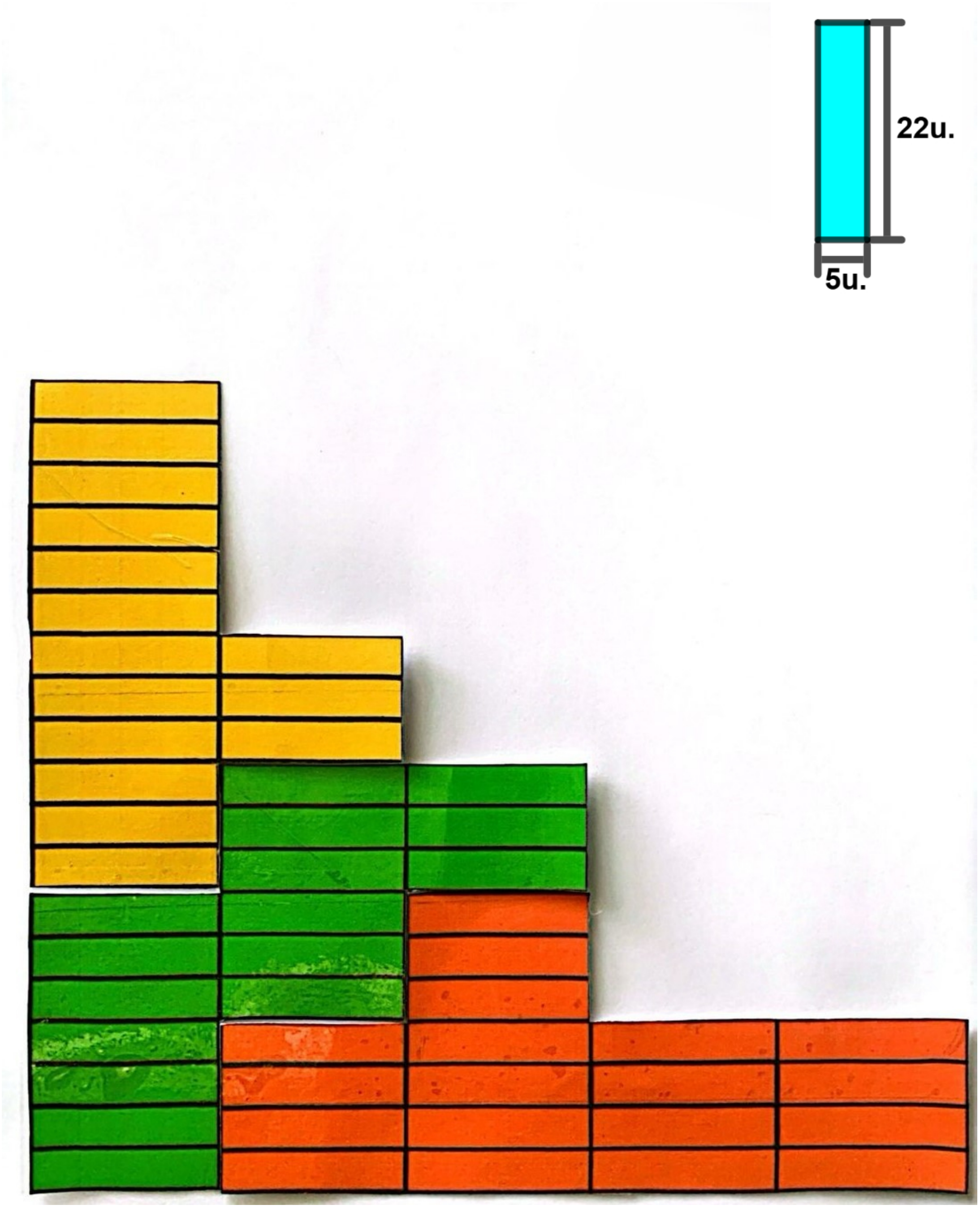
Figura 1.27 – Quebra-cabeça



Fonte: Autora.

Em seguida os estudantes devem montar as peças de modo a obter um quadrado com os retângulos de lados de medida 22 e 5 unidades (u). A Figura 1.28 mostra o início do processo de montagem.

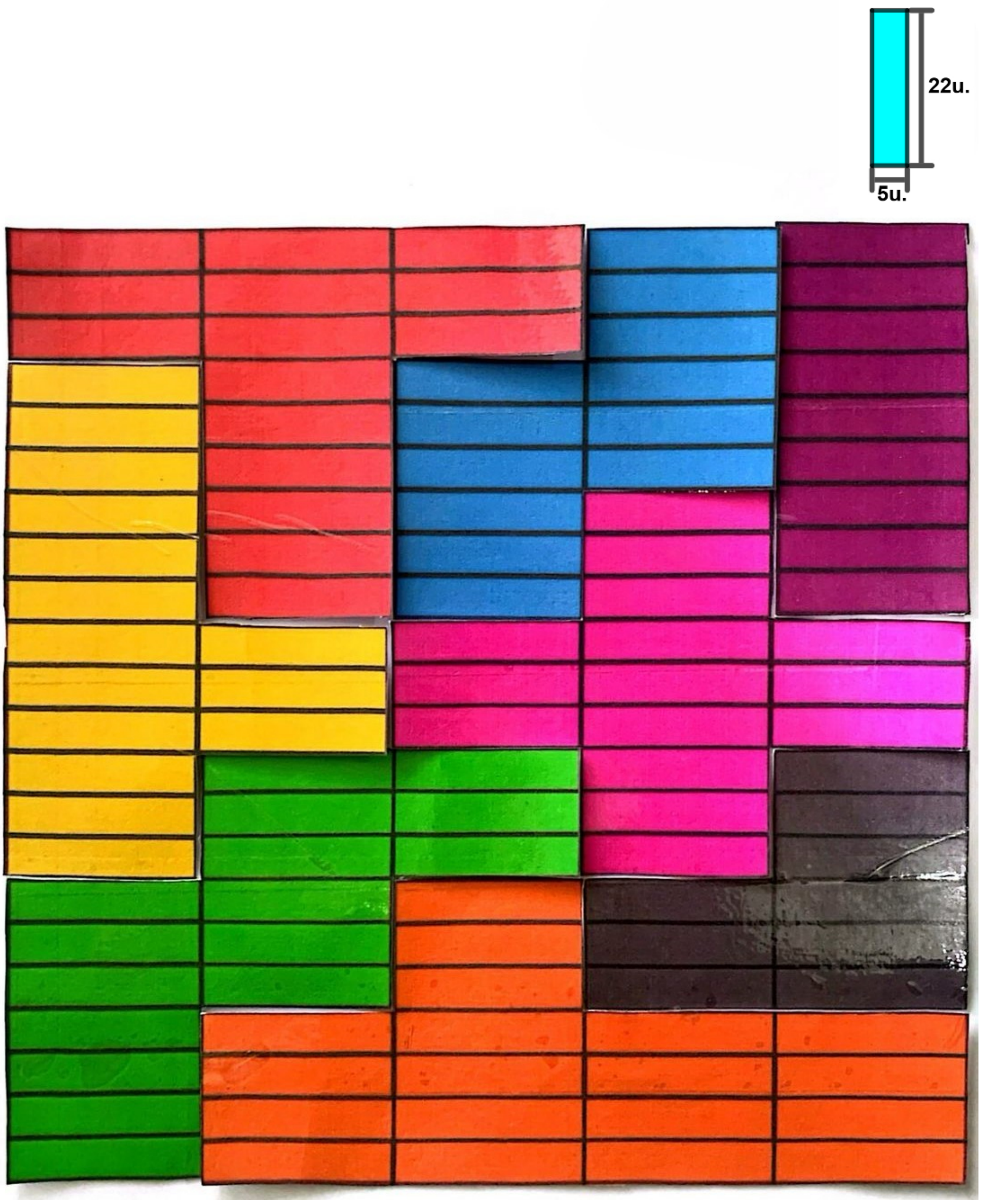
Figura 1.28 – Quebra-cabeça início da montagem



Fonte: Autora.

Após concluirem a montagem, como mostra a Figura 1.29, os estudantes deverão realizar os cálculos de acordo com as medidas apresentadas. Em uma das laterais temos 22 vezes a medida de $5u$. o que equivale a $22 \cdot 5 = 110u$, enquanto a outra lateral possui 5 vezes a medida de $22u$, portanto $5 \cdot 22 = 110u$. Logo o mínimo múltiplo comum de 5 e 22 é 110.

Figura 1.29 – Quebra-cabeça pronto



Fonte: Autora.

Avaliação: Deve ocorrer durante o desenvolvimento da atividade verificando as principais dúvidas e dificuldades, além da compreensão dos estudantes sobre o conteúdo. O professor pode propor outras atividades caso seja necessário.

1.3 PROPOSTA DE ATIVIDADE: CRIVO DE ERATÓSTENES COM SEIS COLUNAS E NÚMEROS PRIMOS

Um dos recursos utilizados em sala de aula para a apresentação e identificação dos números primos é o crivo de Eratóstenes, que consiste em eliminar todos os múltiplos restando apenas os números primos.

Utilizando uma estratégia diferente da usual com 10 colunas, vamos propor a utilização do crivo com apenas seis colunas. Existem vantagem ao utilizar esse modo, pois além de eliminar os múltiplos com mais facilidade o professor pode explorar com os alunos outros conceitos, como retas paralelas.

Apresentaremos algumas atividades que visam aprimorar a compreensão e fixação dos números primos em sala de aula, oferecendo uma alternativa visualmente rica e conceitualmente integrada ao currículo do 6º ano do Ensino Fundamental. O crivo de Eratóstenes com seis colunas foi baseado em Omejc (1972).

Para a consolidação do aprendizado, são propostas mais duas atividades sobre os números primos: jogo de trilha e bingo. As atividades podem ser um recurso para que o estudante identifique e reconheça quais são os números primos.

Objetivo Geral: Conhecer e identificar números primos.

Objetivos Específicos:

1. Conhecer os números primos;
2. Identificar os múltiplos de outros números;
3. Estimular a curiosidade do estudante;
4. Fixar conteúdos;
5. Diferenciar números primos e compostos.

Contexto didático: As atividades podem ser utilizadas durante a aula de matemática para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental quando abordar o tema números primos e compostos.

Quantidade de aula: 2 aulas de 45 minutos.

Material didático:

- Quadro de números até 120, disponível no Apêndice B;
- Lápis para colorir;
- Jogo de trilha, disponível no Apêndice B;

- Dois Dados;
- Cartelas de bingo disponíveis no Apêndice B.

Metodologia: O encaminhamento da aula ocorrerá de maneira explicativa e dialogada. Cada estudante receberá um quadro numerado de 1 a 120, dividido em 6 colunas. O professor deve solicitar aos estudantes que o número 1 seja riscado, pois não atende as condições necessárias de um número primo. Em seguida solicita aos alunos que devem colorir os múltiplos de 2, exceto o próprio 2. Procede de maneira semelhante aos próximos números que não estão coloridos, 3 depois o 5, 7 e 11.

O professor pode pedir aos estudante que identifiquem os múltiplos de 13, 17, 19 até que percebam que não existe mais números para colorir. Neste momento, mostra aos estudante que o processo não precisa ocorrer para todos os números, mas apenas para os números menores que a maior raíz quadrada exata até os valores solicitados. Como $11 \cdot 11 = 121$ então a maior raíz quadrada exata é 10, logo ao colorir todos os múltiplos dos números primos até 10, já identificou todos os primos até 120.

Após essa atividade, para a fixação o professor deve propor uma “corrida dos primos”, utilizando um jogo de trilha númerado de 1 a 100. Primeiramente ao jogarem os dados o estudante deve realizar a soma dos números das duas faces dos dados voltados para cima e verificar no tabuleiro a casa onde parou. Caso o número seja primo deve avançar 5 casas, caso contrário deve permanecer no número em que parou até a próxima jogada.

Em seguida, utilizando as cartelas de bingo o professor pode jogar com os estudantes o bingo dos primos. Ao sortear números primos os alunos devem marcá-lo em sua cartela. Caso o professor faça o sorteio de um número composto o aluno não deverá marcar na sua cartela, mesmo que contenha o número. Ganha quem marcar primeiro 3 números primos corretamente.

1.3.1 PRIMEIRA ATIVIDADE: CRIVO DE ERATÓSTENES COM SEIS COLUNAS

Determine os números primos utilizando o Quadro 1.1.

Atividade: O professor deve solicitar aos estudantes que risquem o número 1. Em seguida, começar a colorir os múltiplos de 2 exceto o próprio 2. Do mesmo modo com o número 3. O Quadro 1.2 e o Quadro1.3 mostram como devem ficar após os alunos marcarem os múltiplos de 2 e de 3.

Quadro 1.1 – Quadro de números

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

Fonte: Autora.

Quadro 1.2 – Múltiplos de 2

X	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

Fonte: Autora.

Quadro 1.3 – Múltiplos de 2 e 3

X	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

Fonte: Autora.

O aluno deve seguir colorindo o quadro até restar apenas primos. Veja o Quadro 1.4 com a representação de todos os múltiplos coloridos.

Quadro 1.4 – Números primos até 120

X	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

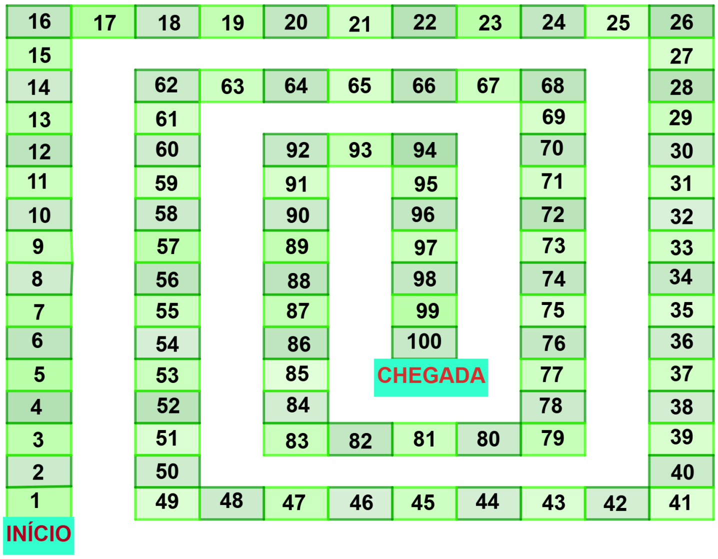
Fonte: Autora.

Em seguida o professor pode solicitar aos alunos que colem o quadro em seus cadernos para futuras consultas aos números primos em caso de dúvidas.

1.3.2 SEGUNDA ATIVIDADE: CORRIDA DOS PRIMOS

Esta atividade propõe um jogo de tabuleiro (disponível no Apêndice B) no qual o professor pode imprimir antecipadamente. Sugere-se dividir a turma em grupos, com 3 ou 4 integrantes cada um. Cada grupo receberá dois dados e um tabuleiro. O objetivo é que na sua vez, cada aluno lance os dois dados e realize a soma dos valores que aparecem nas faces voltadas para cima. Por exemplo, no primeiro dado lançado saiu o número 3 e no segundo dado 5, então $5 + 3 = 8$. Assim, o aluno deve percorrer 8 casas consecutivas sobre o tabuleiro. Se o aluno parar sobre um número primo, ele ganhará a vantagem de avançar mais 5 números. Caso o número no qual o aluno parou não seja primo, deve permanecer no mesmo lugar até a próxima jogada. Vence aquele que alcançar primeiro a chegada. A Figura 1.30 mostra o modelo do tabuleiro.

Figura 1.30 – Modelo da trilha



Fonte: Autora.

1.3.3 TERCEIRA ATIVIDADE: BINGO DOS PRIMOS

Esta é uma versão do bingo mas com regras que reforcem o estudo dos números primos. Utilizando as cartelas disponíveis no Apêndice B, o professor pode realizar o sorteio de números de 1 até 99 para testar os conhecimentos dos discentes sobre os números primos. A Figura 1.31 mostra alguns modelos de cartelas.

Figura 1.31 – Modelo de cartelas de bingo

BINGO DOS PRIMOS

79	4	14	37
22	7	18	9
15	32	23	68
11	91	77	53

BINGO DOS PRIMOS

5	6	9	69
47	33	29	42
39	17	87	89
23	32	75	81

BINGO DOS PRIMOS

19	48	15	5
39	49	85	21
53	43	79	74
7	1	38	99

BINGO DOS PRIMOS

8	79	45	29
43	24	44	63
72	16	11	47
95	17	86	55

BINGO DOS PRIMOS

13	6	16	83
27	2	33	42
61	51	69	17
78	41	88	93

BINGO DOS PRIMOS

7	4	22	3
10	66	23	99
35	29	96	46
43	57	34	97

BINGO DOS PRIMOS

12	49	52	97
43	93	37	39
27	96	11	81
5	58	15	83

BINGO DOS PRIMOS

1	18	46	11
20	41	89	26
37	65	97	50
8	32	77	23

Fonte: Autora.

Durante o sorteio o discente deve marcar apenas os números primos. O primeiro aluno que marcar três números primos na rodada será o vencedor. O professor pode perceber durante a atividade quais são as dificuldades dos estudantes. Opcionalmente pode-se deixar os estudantes consultarem o crivo de Eratóstenes construído por eles.

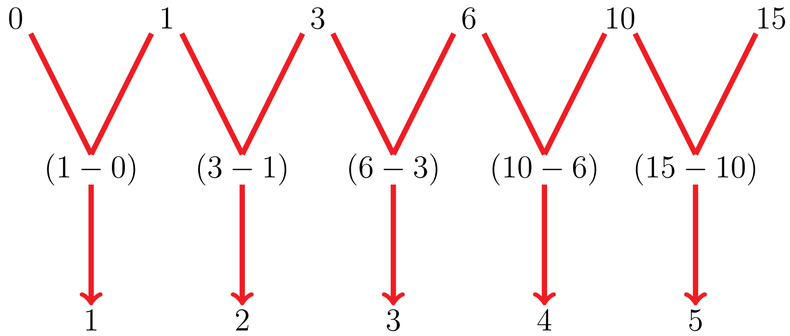
Avaliação: Deve ocorrer de maneira simultânea com a realização das atividades. O professor pode identificar os estudantes que não compreenderam o conteúdo e propor novas atividades.

1.4 PROPOSTA DE ATIVIDADE: NÚMEROS TRIANGULARES

Os números triangulares são contagens que podem ser representados por um triângulo como abordado no Capítulo 4. Os primeiros 6 números triangulares são $1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15$ e 21. Esses valores são encontrados a partir da soma de números naturais consecutivos, por exemplo, $21 = 1+2+3+4+5+6$ e, portanto, o 6º número triangular é 21.

Outro fato é a diferença entre dois números triangulares consecutivos:

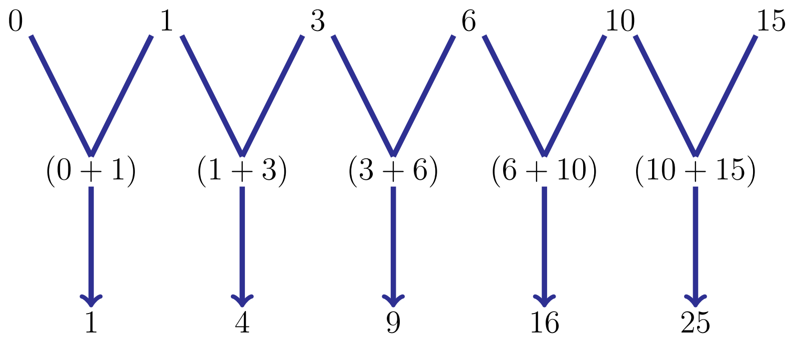
Figura 1.32 – Diferença entre dois números triangulares consecutivos



Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

Observa-se que a diferença entre os dois números triangulares consecutivos resulta nos números naturais. Quando fazemos a soma desses números obtemos números quadrados como mostra a Figura 1.33.

Figura 1.33 – Soma de números triangulares consecutivos



Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

Nesta atividade abordaremos uma relação entre números triangulares e a combinatória baseadas em Bacche(2023).

Objetivo Geral: Abordar números triangulares e sua relação com a combinatória.

Objetivos Específicos:

1. Compreender e identificar números triangulares;
2. Encontrar relações entre números triangulares e a combinatória;
3. Realizar cálculos que envolvem números triangulares e combinatória;
4. Estimular a aprendizagem;
5. Fixar conteúdos.

Contexto didático: Esta aula foi planejada para ser aplicada após uma sequência de aulas de matemática sobre princípio fundamental da contagem e combinações no 8º ano do Ensino Fundamental ou na 2ª série do Ensino Médio em que já foi abordado o tema números triangulares e alguns exercícios com combinatória.

Quantidade de aula: 1 aula de 45 minutos.

Material Didático:

- Fichas com desafios impressas pelo professor, disponível no Apêndice C;
- Lápis, borracha e papel para rascunho.

Metodologia: O encaminhamento da aula ocorrerá de forma explicativa e dialogada. Para o desenvolvimento da aula o professor pode separar os estudantes em grupos para resolver os exercícios. Serão três atividades que o professor pode optar por fazê-las em sequência com toda a turma.

O professor deverá disponibilizar aos alunos uma ficha com desafio que juntos devem discutir e resolver o problema. Após acabar o tempo resolver junto com os estudantes e verificar suas soluções e os métodos utilizados pelos alunos.

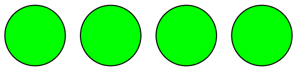
1.4.1 DESAFIO: APERTO DE MÃO

Ana estava muito animada para a festa de aniversário de seu amigo Bernardo. Além do bolo e dos presentes, ela queria descobrir quantos apertos de mão aconteceriam durante a festa. Ao chegar na festa, Ana, Bernardo, Carol, Davi e Edu começaram a se cumprimentar com calorosos apertos de mão. Enquanto todos se divertiam, Ana não conseguia tirar da cabeça a pergunta: “Quantos apertos de mão foram dados até agora?”.

1. Utilize os conteúdos estudados sobre números triangulares para ajudar Ana a resolver esse problema. Então quantos apertos de mão acontecem no total?
2. Se tivéssemos 10 pessoas na festa, qual seria o número de apertos de mão?
3. E para n pessoas?

Solução da Questão 1: Na festa estão cinco pessoas que deverão se cumprimentar com aperto de mão. Representaremos cada aperto de mão que acontece com um círculo como mostra a Figura 1.34. A primeira pessoa a cumprimentar deverá apertar a mão das outras quatro pessoas e se retira.

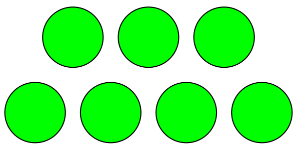
Figura 1.34 – Apertos de mão: 4



Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

Agora, das quatro pessoas, uma delas aperta a mão das outras três e se retira. Então, mais três apertos de mão contecem. Já temos $4 + 3$ apertos de mão até o momento. Novamente podemos representar os apertos de mão como mostra a Figura 1.35.

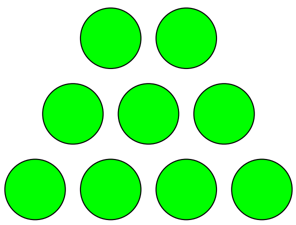
Figura 1.35 – Apertos de mão: 4+3



Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

Continuando o processo, das três pessoas restantes uma delas cumprimenta as outras duas e se retira. Então, dois apertos de mão acontecem, logo ja aconteceram $4 + 3 + 2$ cumprimentos. A Figura 1.36 representa os apertos de mão.

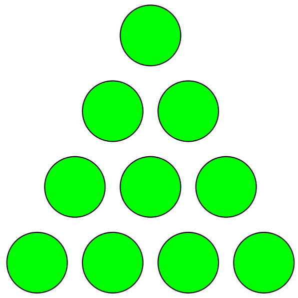
Figura 1.36 – Apertos de mão: 4+3+2



Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

Para concluir as duas pessoas restantes se cumprimentam com um aperto de mão. A Figura 1.37 representa o total de apertos de mão.

Figura 1.37 – Apertos de mão no total entre 5 pessoas



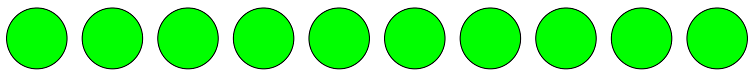
Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

Logo, o total de apertos de mão é $4 + 3 + 2 + 1 = 10$. O que temos aqui é um número triangular $t_4 = 10$. O número de apertos de mão entre cinco pessoas, onde cada uma aperta a mão das outras pessoas uma única vez é 10.

A mesma atividade pode ser resolvida utilizando os conhecimentos em combinatória. Temos 5 pessoas presentes e cada uma delas pode cumprimentar com aperto de mão uma única vez as demais pessoas. Essa situação pode ser resolvida como $C_2^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = t_4 = 10$.

Solução da Questão 2: Procedemos de maneira semelhante a solução anterior. No caso de 10 pessoas, a primeira cumprimenta as outras nove e se retira. A Figura 1.38 mostra o número de apertos de mão até o momento com círculos.

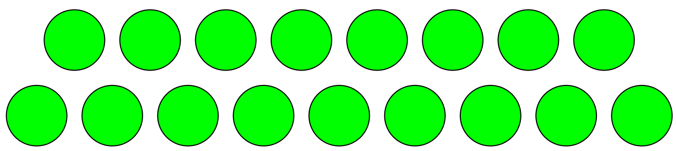
Figura 1.38 – Primeiros apertos de mão



Fonte: Autora.

Agora, uma das nove pessoas restantes cumprimenta com aperto de mão as oito pessoas e se retira. Temos agora $9 + 8$ apertos de mão. A Figura 1.39 mostra esse caso.

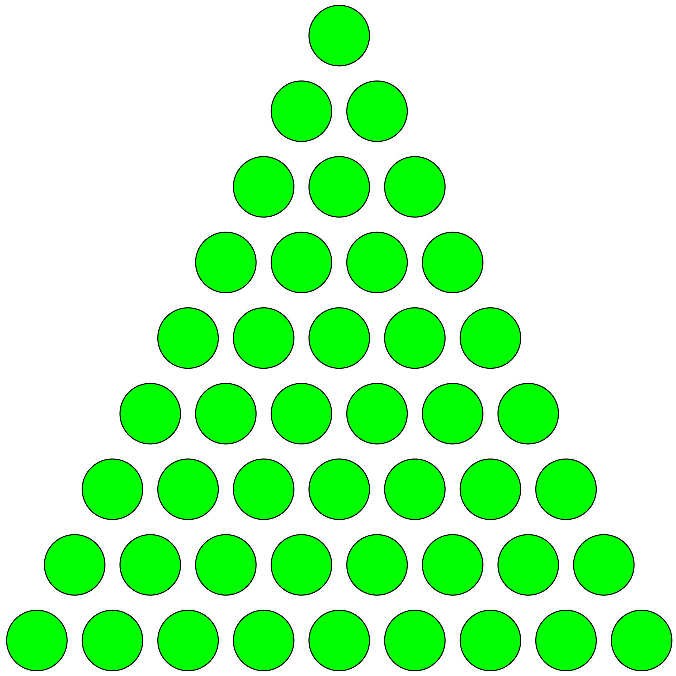
Figura 1.39 – Apertos de mão: 9+8



Fonte: Autora.

Repetimos o processo para as oito pessoas restantes, uma delas cumprimenta com aperto de mão as outras sete pessoas e se retira. Em seguida, uma das sete pessoas cumprimenta as seis pessoas restantes e se retira. Uma das seis pessoas cumprimenta as outras cinco restante e se retira. Agora com as cinco pessoas restantes repetimos o processo mostrado na solução da Questão 1. Logo, o total de apertos de mão com 10 pessoas pode ser representado como mostra a Figura 1.40.

Figura 1.40 – Apertos de mão no total entre 10 pessoas



Fonte: Autora.

Portanto o total de apertos de mão entre 10 pessoas é dado por

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45 = t_9.$$

No link é possível verificar outros casos de apertos de mão possíveis.

<https://www.geogebra.org/m/gesb4smd>.

Para resolver o problema utilizando a combinatória temos que $C_2^{10} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = t_9 = 45.$

Solução da Questão 3: Caso existissem n, com $n \geq 2$, pessoas o número de apertos de mão também poderia ser representado utilizando os números triangulares. Se uma das n pessoas cumprimentasse as outras $(n-1)$, já aconteceriam $(n-1)$ apertos de mão. Repetindo esse processo até finalmente chegar no último aperto de mão então teríamos um total de:

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = t_{n-1}.$$

Para n pessoas temos t_{n-1} apertos de mão.

Mostraremos esta afirmação por indução em n.

Para o caso de 2 pessoas o número de apertos de mão será,

$$1 = t_1.$$

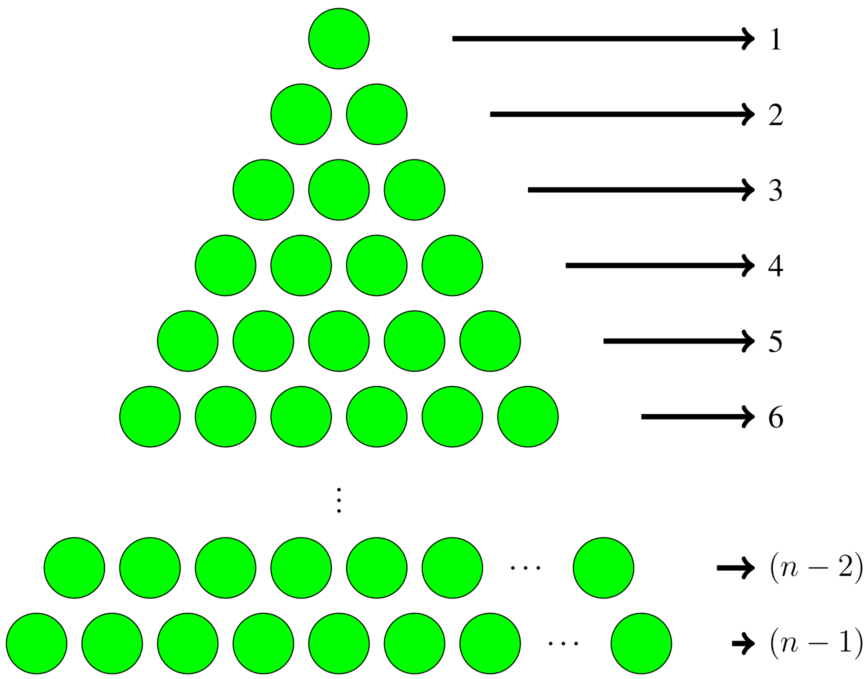
Suponhamos que para algum $n \geq 2$, temos t_{n-1} apertos de mão entre as n pessoas. Mostremos que temos t_n apertos de mão entre $n+1$ pessoas.

Considerando que uma dessas $n+1$ pessoas cumprimente todas as n pessoas presentes. Ocorreram então n apertos de mão. Portanto, ficamos com n pessoas para dar apertos de mão. Pela hipótese indutiva temos $(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1 = t_{n-1}$ apertos de mão entre as n pessoas. Assim, em total teremos $n + t_{n-1} = t_n$ apertos de mão entre as $n+1$ pessoas.

Logo, pelo princípio de indução finita a propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$.

A Figura 1.41 mostra a representação para o caso de apertos de mão entre n pessoas.

Figura 1.41 – Apertos de mão por n pessoas



Fonte: Autora.

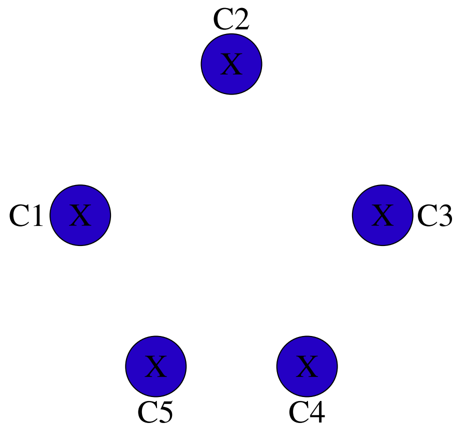
Utilizando a combinatória para resolver a atividade temos que,

$$C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = t_{n-1}.$$

1.4.2 DESAFIO: REDE DE MALHA DE ESTRADAS

1. Dadas 5 cidades, representadas pelos círculos $C1$, $C2$, $C3$, $C4$ e $C5$, conforme mostra a Figura 1.42, quantas estradas precisam ser construídas para que haja uma conectividade rodoviaria direta de qualquer cidade para outra cidade?

Figura 1.42 – Posição das cidades $C1$, $C2$, $C3$, $C4$ e $C5$

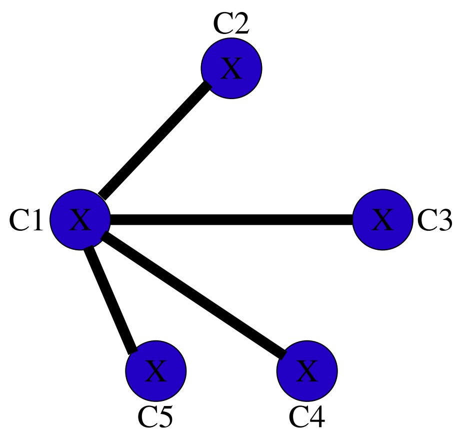


Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

2. Se fossem dadas 7 cidades?
3. Caso existissem n cidades?

Solução da Questão 1: Para resolver esse problema os estudantes podem iniciar escolhendo uma das cidades e desenhar as possíveis estradas que ligam as outras quatro cidades como mostra a Figura 1.43.

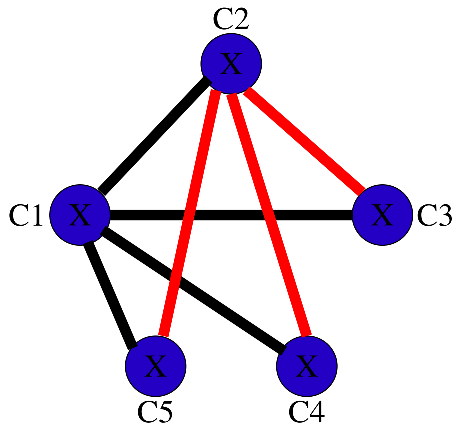
Figura 1.43 – Estradas partindo da cidade $C1$



Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

Logo, temos um total de 4 estradas partindo da cidade $C1$. Continuando o processo agora com a cidade $C2$, como mostra a Figura 1.44, temos mais três estradas.

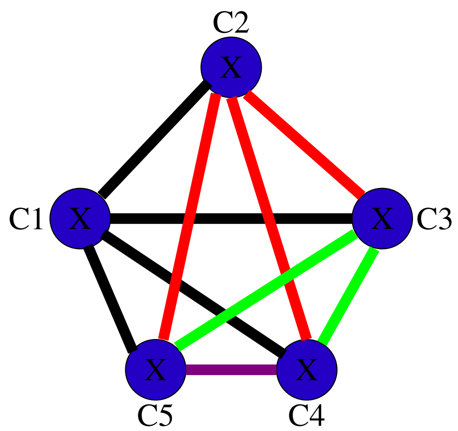
Figura 1.44 – Estradas partindo das cidades $C1$ e $C2$



Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

Repetindo o processo para as cidades 3 e 4, obtemos um total de $4+3+2+1=10$ estradas. A Figura 1.45 mostra essas estradas.

Figura 1.45 – Total de estradas da malha



Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

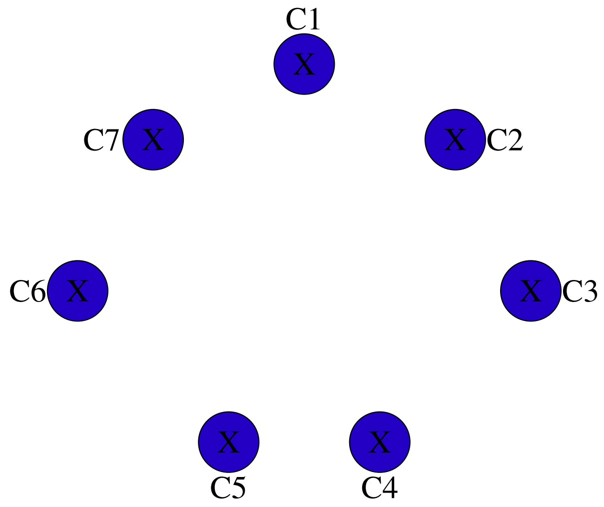
O número de estradas entre 5 cidades também está associado aos números triangulares, ou seja, $4+3+2+1=10=t_4$.

Essa mesma atividade pode ser resolvida utilizando a combinatória. Temos 5 cidades que precisam de apenas uma estrada que ligue diretamente as outras cidades, portanto

$$C_2^5 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = t_4 = 10.$$

Solução da Questão 2: Agora tem-se 7 cidades e é preciso determinar o números de estradas que precisam ser construídas para que haja uma conexão direta para a outra cidade. Podemos proceder como na questão anterior. Na Figura 1.46 temos as 7 cidades.

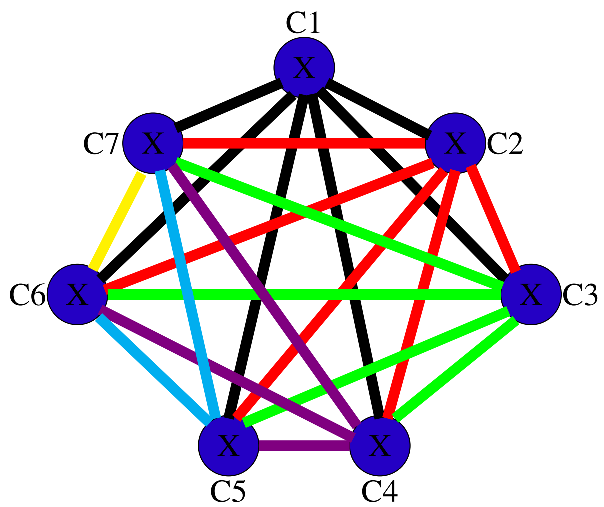
Figura 1.46 – Posição das cidades $C1$, $C2$, $C3$, $C4$, $C5$, $C6$ e $C7$



Fonte: Autora.

Fazendo as ligações possíveis como mostra a Figura 1.47, temos $6+5+4+3+2+1 = 21$ estradas possíveis. Esse número representa o número triangular t_6.

Figura 1.47 – Caminhos possíveis para 7 cidades



Fonte: Autora.

Portanto, o número de estradas possíveis é $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = t_6 = 21$.

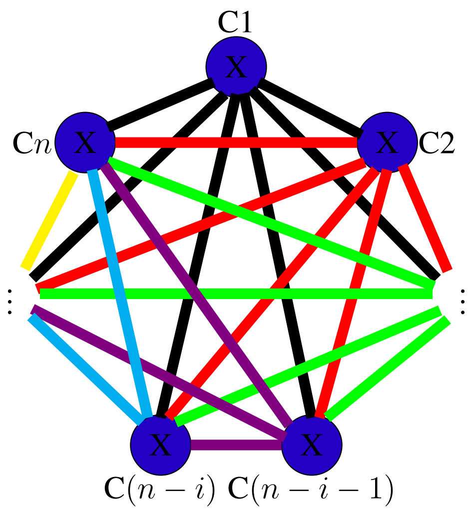
Utilizando a combinatória para calcular o número de estradas necessárias entre as 7 cidades mencionadas temos que $C_2^7 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = t_6 = 21$.

Solução da Questão 3: Como aconteceu na atividade dos apertos de mão, temos que o resultado para n cidades é:

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 3 + 2 + 1 = t_{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

A Figura 1.48, ilustra o caso de n estradas. A demontração ocorre por indução em n como na atividade anterior.

Figura 1.48 – Caminhos possíveis para n cidades



Fonte: Autora.

1.4.3 DESAFIO: TIRAS NUMÉRICAS

Considere uma tira de papel como mostrada na Figura 1.49. Quantas tiras com números diferentes você pode fazer, se você pode apenas cortar a tira, mas não juntar tiras menores cortadas? Por exemplo, é possível fazer 12, 2345 ou 789 e assim por diante. No entanto não é permitido o número 15, pois você precisará cortar duas tiras menores, 1 e 5, e juntá-las.

Figura 1.49 – Tira numérica

Fonte: Adaptado de Bacche (2023).

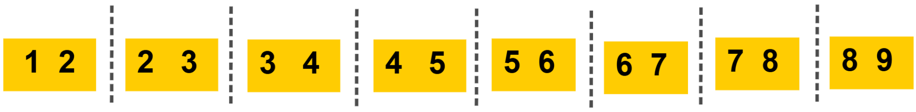
Atividade: Vamos considerar as diferentes tiras a serem formadas. Primeiro recortamos a tira em números de um dígito como mostra a Figura 1.50.

Figura 1.50 – Recortes de um dígito

Fonte: Autora.

Logo, há 9 opções de tiras com recortes de um dígito. Outra opção é recortes com dois dígitos, como mostra a Figura 1.51. Neste caso temos 8 opções de tiras com dois dígitos.

Figura 1.51 – Recortes de dois dígitos



Fonte: Autora.

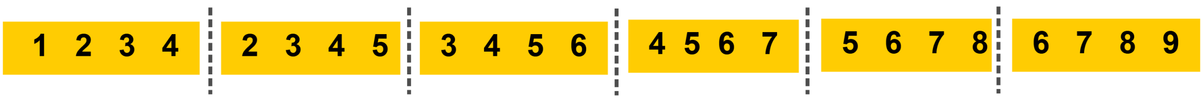
Continuando o processo de cortes da tira agora com 3 dígitos, obtemos 7 opções como mostra a Figura 1.52.

Figura 1.52 – Recortes de três dígitos

Fonte: Autora.

Para o caso de 4 dígitos temos agora 6 opções de cortes na tira como ilustrado na Figura 1.53.

Figura 1.53 – Recortes de quatro dígitos



Fonte: Autora.

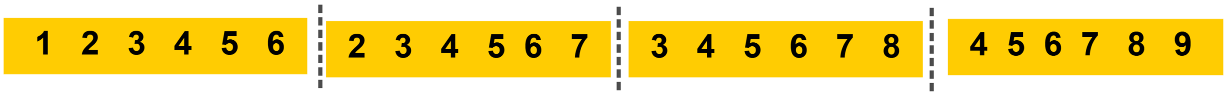
Com tiras de 5 dígitos temos 5 opções de tiras mostradas na Figura 1.54.

Figura 1.54 – Recortes de cinco dígitos

Fonte: Autora.

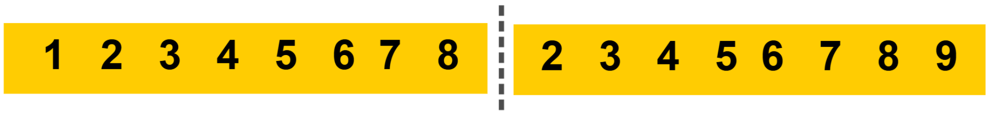
Na Figura 1.55 temos as tiras de 6 dígitos, 7 dígitos e 8 dígitos.

Figura 1.55 – Recortes na tira numérica



(a) Recorte de seis dígitos

(b) Recorte de sete dígitos



(c) Recortes de 8 dígitos

Fonte: Autora.

E também a tira sem recortes equivale a 1 opção de tira. Vide Figura 1.49. Portanto, o número total de tiras é dado pela soma $9+8+7+6+5+4+3+2+1=45=t_9$. Logo a solução da questão está associada a números triangulares e o professor pode abordar diferentes tiras numéricas com os estudantes para uma melhor compreensão do tema.

Avaliação: Ocorre de maneira simultânea com a resolução das atividades pelos estudantes, com objetivo de identificar dificuldades e diagnosticar a necessidade de atividades complementares sobre o tema.

REFERÊNCIAS

BACCHE, K. A. **Triangular numbers & combinations**. 2023. Disponível em: <https://www.mathematicsmagazine.com/corresp/KiranBacche/TriangularNumbersandCombinations.pdf>. Acesso em: 18 abr. 2025. 31, 32, 33, 34, 37, 38, 40

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf>. Acesso em: 18 abr. 2025. 14

DUNCAN, D. R.; LITWILLER, B. H. Number-lattice polygons and patterns: Sums and products. **National Council of Teachers of Mathematics**, v. 37, n. 5, p. 14–15, 1990. 8

GEOGEBRA. **GeoGebra**. 2025. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 29 set. 2025. 11

KOSINSKI, A. M. **Redescobrindo a aritmética através de perspectivas diferentes**. 86 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, 2025. 2, 3, 7, 19

LIDAN, E.; PJANIĆ, K. Evaluation of three visual models for the greatest common factor and the least common multiple. v. 8/9, p. 7–21, 09 2020. 15

MATHVENTURES. **Finding the Least Common Multiple Visually, without Calculation**. MathVentures, 2008. Disponível em: <https://www.mathematicool.org/math/mathed/Arithmetic/FindingLCM.htm>. Acesso em: 18 abr. 2025. 15

OMEJC, E. A different approach to the sieve of eratosthenes. **The Arithmetic Teacher**, v. 19, p. 192–196, 1972. 26

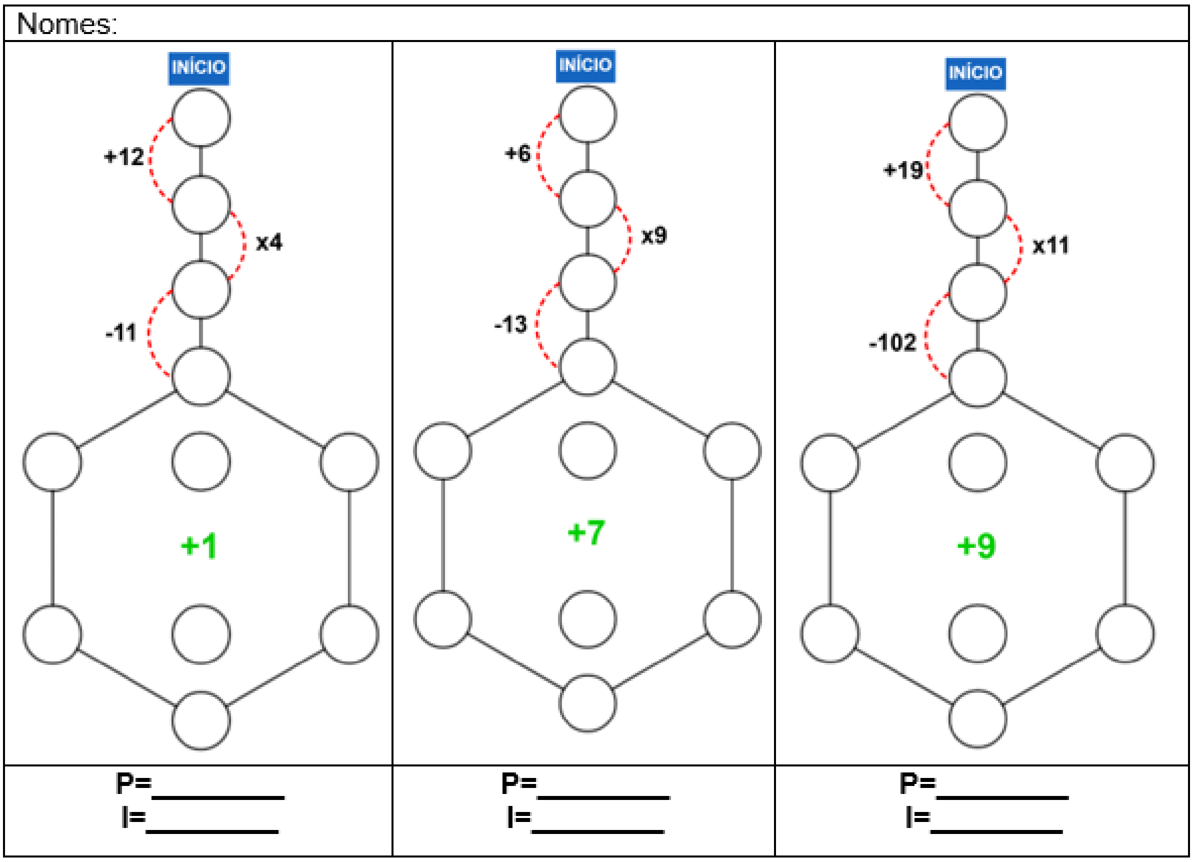
WORWALL. **Crie lições melhores e mais rapidamente**. 2025. Disponível em: <https://wordwall.net/pt>. Acesso em: 29 set. 2025. 13

APÊNDICE A – ATIVIDADE: POLÍGONOS E PADRÕES

Utilize o material abaixo para aplicar a metodologia ativa “Rotação por Estação” no tema polígonos e padrões.

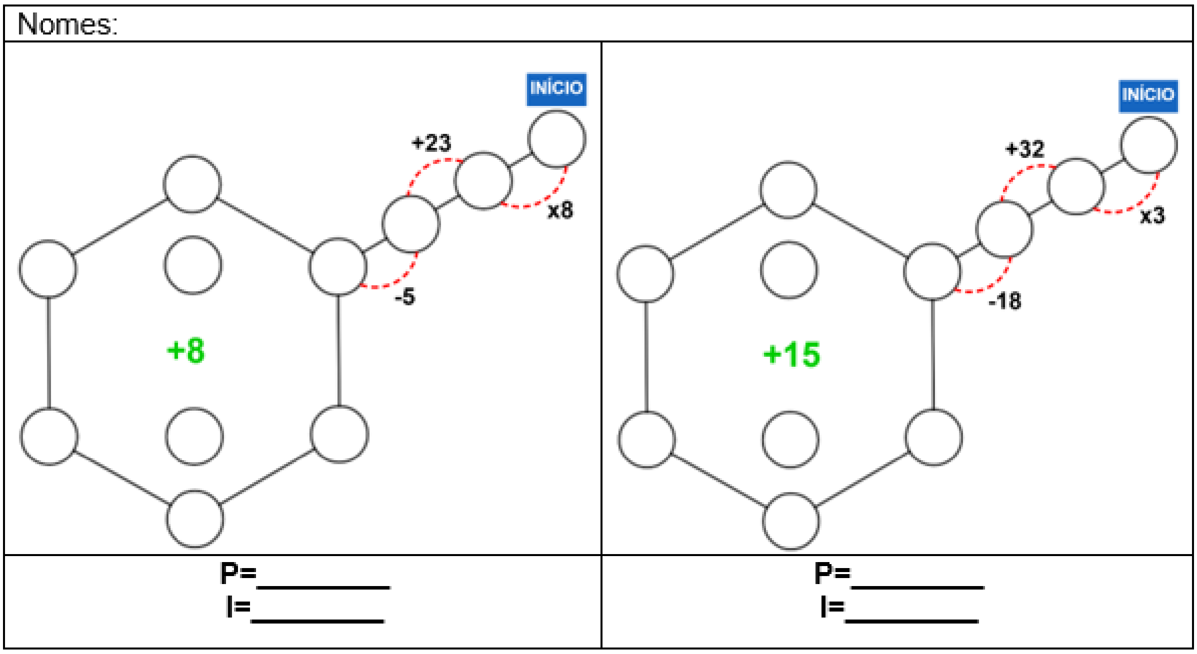
1ª Estação – fichas com hexágonos: Com o auxílio das fichas previamente impressas, os estudantes executarão a seguinte sequência de ações: lançar um dado, preencher o círculo inicial adjacente à palavra “início”, realizar as operações aritméticas subsequentes até alcançar o círculo posicionado no hexágono. Ao atingir o hexágono, proceder ao preenchimento de todos os círculos localizados nos vértices e na área interna do polígono, utilizando o valor da razão numérica especificada no centro do hexágono.

Figura A.1 – Ficha de atividade – 1



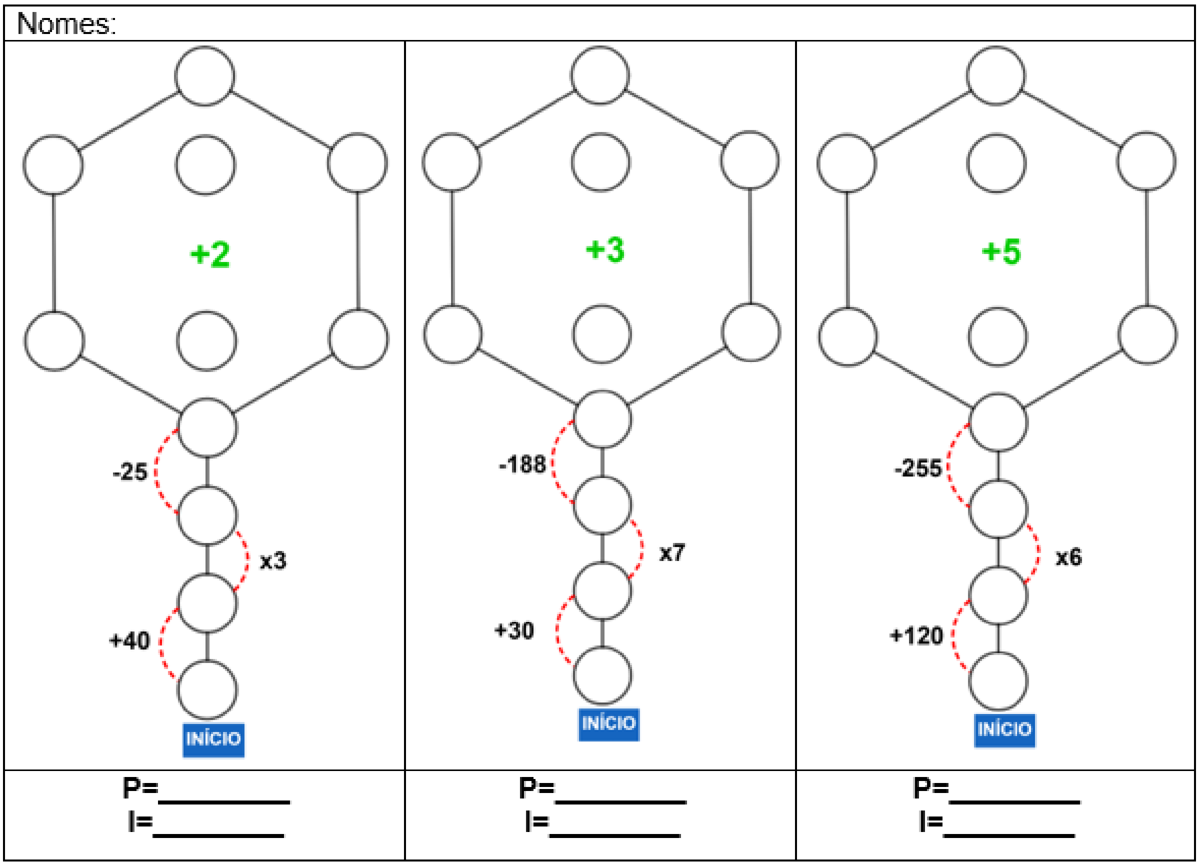
Fonte: Autora.

Figura A.2 – Ficha de atividade – 2



Fonte: Autora.

Figura A.3 – Ficha de atividade – 3



Fonte: Autora.

2ª Estação – caça-octógonos: Encontre no caça-octógonos, os octógnos que obedecem a relação estudada $P = 2I$. O professor pode atribuir pontuações aos octógonos encontrados de acordo com a razão presente no polígono.

Figura A.4 – Caça-octógonos

Nome: ____

Caça-octógonos

5	5	12	13	19	75	4	5	6	12	76	82	1	2	7	3
19	26	33	40	12	20	7	8	9	10	13	3	4	5	6	10
47	54	61	68	42	55	11	12	13	14	22	7	8	9	10	11
14	75	82	2	4	11	23	15	16	47	69	96	11	12	69	33
21	21	6	8	10	12	19	44	42	99	98	72	69	55	14	14
33	14	14	16	18	20	14	21	36	6	7	13	8	10	18	20
99	3	69	22	24	47	59	96	8	9	10	11	69	89	26	28
12	5	4	93	24	30	97	6	12	13	14	15	9	69	44	34
28	6	86	36	42	48	54	7	96	16	17	83	18	17	41	96
63	69	9	60	66	72	78	51	54	75	82	85	33	15	16	34
45	48	55	78	84	90	66	54	12	13	16	25	17	18	19	20
12	8	16	33	30	20	14	55	19	22	25	28	21	22	23	24
24	32	40	48	3	45	46	1	31	34	37	40	0	25	26	29
56	64	72	80	47	48	49	50	62	43	46	22	51	21	49	73
16	88	96	1	51	52	53	54	74	91	8	63	7	40	83	92
22	3	6	37	90	55	56	53	38	52	5	10	39	20	6	41
9	12	15	18	36	6	4	8	20	15	20	25	30	93	95	8
21	24	27	30	4	12	16	20	24	35	40	45	50	19	5	23
45	33	36	89	55	28	32	36	40	20	55	60	31	11	42	7
89	1	3	2	13	27	44	48	82	61	9	30	10	72	9	10

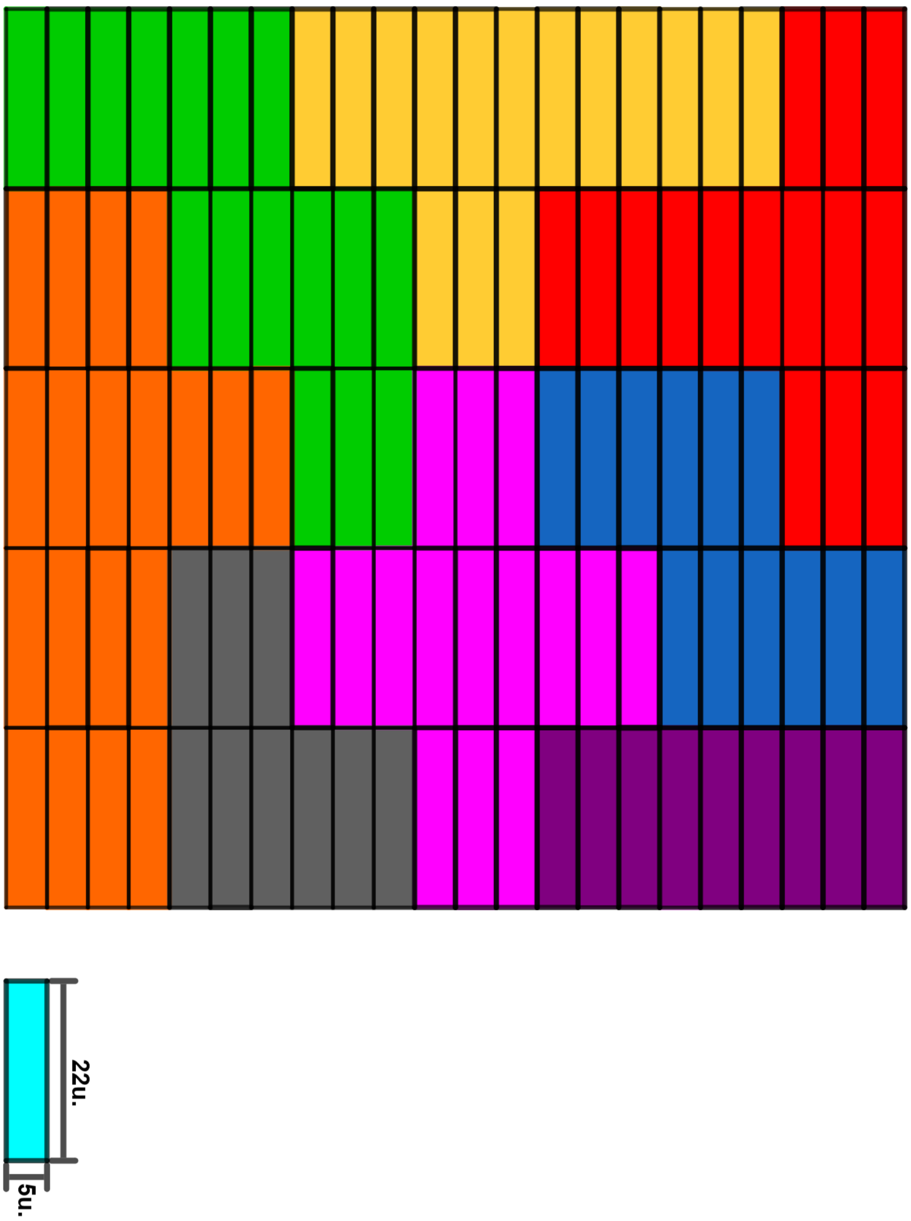
Fonte: Autora.

APÊNDICE B – ATIVIDADE: MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM, CRIVO DE ERATÓSTENES E NÚMEROS PRIMOS

Desafio: quebra-cabeça

Antecipadamente, proceda com o recorte da figura, destacando os polígonos maiores que compartilham a mesma coloração. Em seguida, solicite aos estudantes que construam um quadrado utilizando as peças recortadas. Após a conclusão da montagem, realize o cálculo do mínimo múltiplo comum entre os números 5 e 22.

Figura B.1 – Quebra-cabeça: mínimo múltiplo comum entre 22 e 5



Fonte: Autora.

Atividade: crivo de Eratóstenes com seis colunas

O professor deve proceder solicitando aos alunos que:

- Risquem o número 1;
- Colorir os múltiplos de 2, exceto o próprio 2;
- Colorir os múltiplos de 3, exceto o próprio 3;
- Colorir os múltiplos de 5, exceto o próprio 5;
- Repetir o processo até todos os múltiplos estarem coloridos.

Quadro .5 – Encontre os números primos

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

Fonte: Autora.

Quadro .6 – Encontre os números primos-1

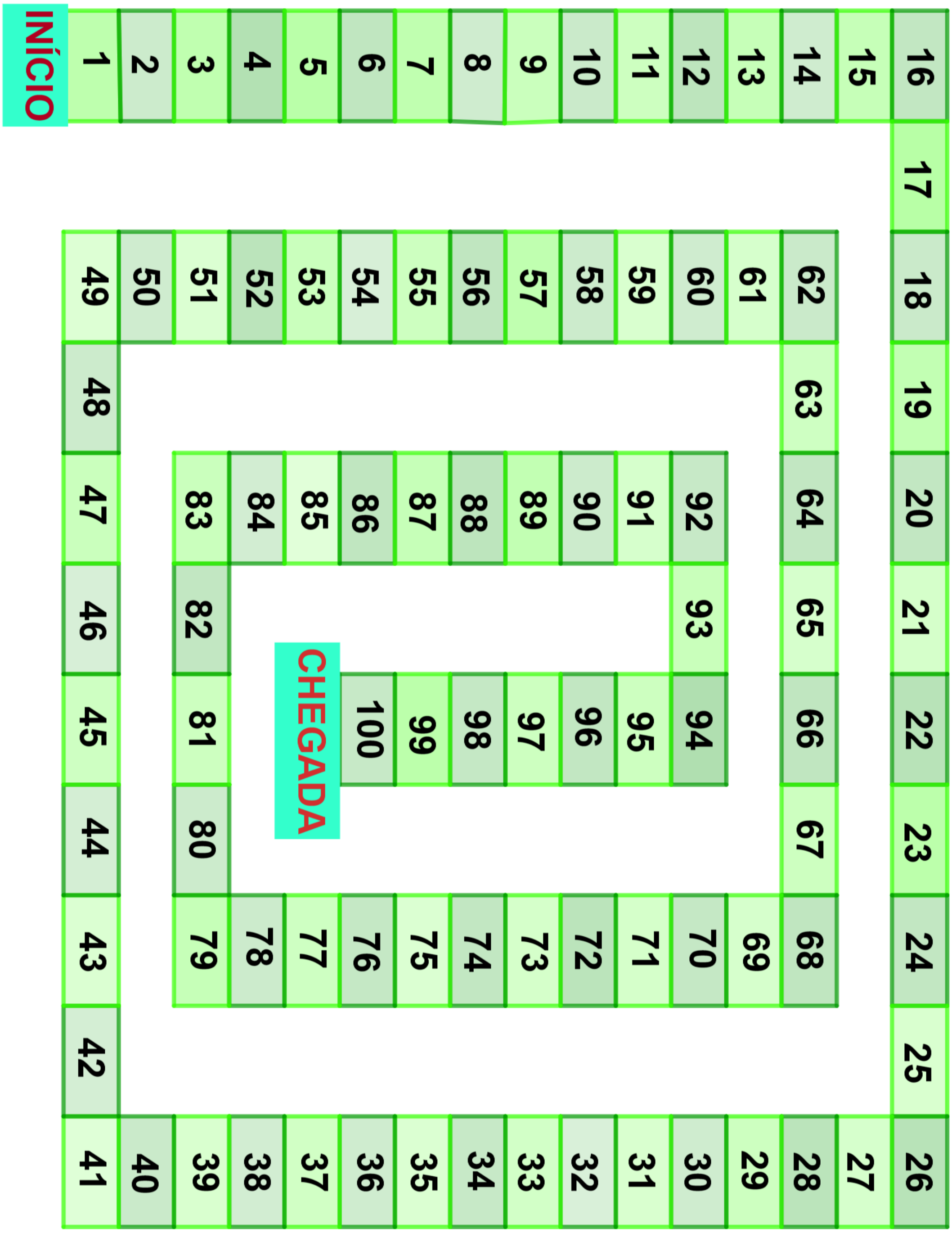
1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102
103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114
115	116	117	118	119	120

Fonte: Autora.

Atividade: corrida dos primos

O jogo "Corrida dos Primos" será realizado utilizando o tabuleiro fornecido. Os discentes, organizados em grupos, deverão lançar dois dados e somar os valores obtidos nas faces superiores. O resultado da soma determinará o número de casas que o aluno deverá percorrer no tabuleiro. Caso o estudante pare em uma casa correspondente a um número primo, este avançará cinco casas adicionais. Caso contrário, permanecerá na mesma posição até a próxima rodada. O aluno que alcançar a última casa do tabuleiro primeiro será o vencedor.

Figura B.2 – Jogo: corrida dos primos



Fonte: Autora.

Atividade: Bingo dos primos

Utilize as cartelas fornecidas para a realização do jogo. Os participantes deverão marcar três números primos em cada rodada, para ser o vencedor.

Figura B.3 – Bingo dos primos: cartelas – 1

BINGO DOS PRIMOS

13	6	16	83
27	2	33	42
61	51	69	17
78	41	88	93

BINGO DOS PRIMOS

79	4	14	37
22	7	18	9
15	32	23	68
11	91	77	53

BINGO DOS PRIMOS

7	4	22	3
10	66	23	99
35	29	96	46
43	57	34	97

BINGO DOS PRIMOS

5	6	9	69
47	33	29	42
39	17	87	89
23	32	75	81

BINGO DOS PRIMOS

12	49	52	97
43	93	37	39
27	96	11	81
5	58	15	83

BINGO DOS PRIMOS

19	48	15	5
39	49	85	21
53	43	79	74
7	1	38	99

BINGO DOS PRIMOS

1	18	46	11
20	41	89	26
37	65	97	50
8	32	77	23

BINGO DOS PRIMOS

8	79	45	29
43	24	44	63
72	16	11	47
95	17	86	55

Fonte: Autora.

Figura B.4 – Bingo dos primos: cartelas – 2

BINGO DOS PRIMOS

19	44	1	59
20	2	16	99
15	33	71	65
73	91	76	67

BINGO DOS PRIMOS

5	6	39	69
47	38	13	49
26	83	87	31
67	30	70	81

BINGO DOS PRIMOS

17	40	15	3
27	40	82	21
73	29	31	82
7	1	98	99

BINGO DOS PRIMOS

10	79	25	11
41	22	55	69
76	16	19	53
90	89	87	54

BINGO DOS PRIMOS

17	54	14	79
35	2	34	46
71	51	84	23
70	41	80	94

BINGO DOS PRIMOS

5	1	21	13
12	56	37	91
35	29	94	40
43	57	33	89

BINGO DOS PRIMOS

10	65	18	61
43	98	31	30
27	36	19	81
5	28	85	71

BINGO DOS PRIMOS

9	6	20	11
28	3	97	38
47	62	31	10
78	32	27	59

Fonte: Autora.