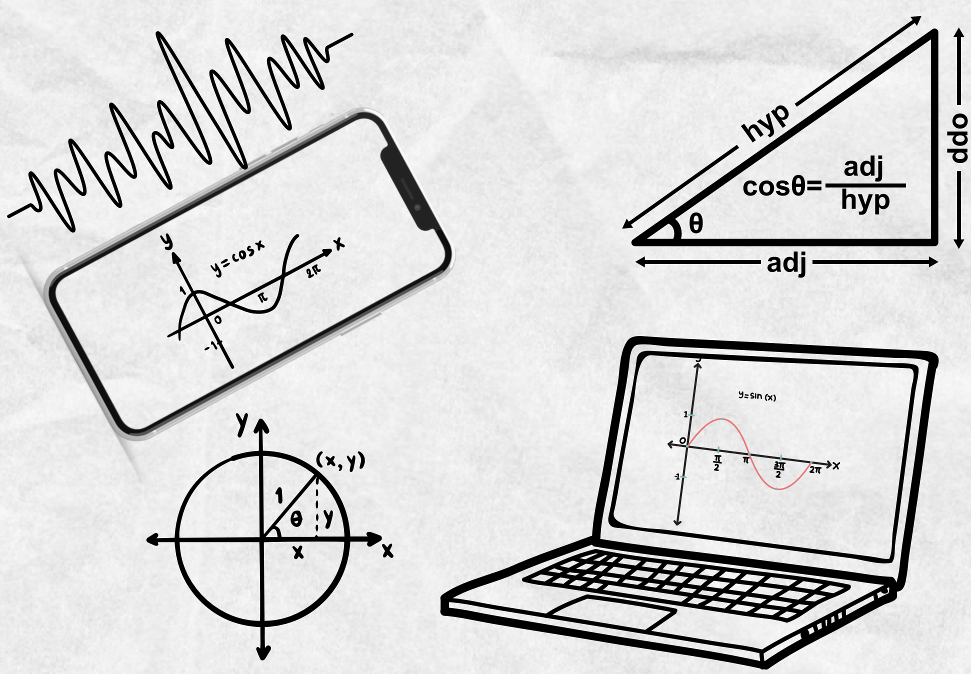
Produto Educacional

O ENSINO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO POR ATIVIDADES EXPERIMENTAIS COM O GEOGEBRA



Josué Augusto Gonçalves da Silva
Pedro Franco de Sá

2025

Josué Augusto Gonçalves da Silva

ENSINO DAS FUNÇÕES SENO E COSSENO POR ATIVIDADES EXPERIMENTAIS COM O GEOGEBRA

Produto Educacional apresentado como requisito obrigatório para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós graduação em Ensino de Matemática (PPGEM), da Universidade do Estado do Pará (UEPA).

Linha de Pesquisa: Metodologia para o Ensino de Matemática no Nível Médio.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá

ISBN: 978-65-5291-035-6

BELÉM-PA

2025

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este produto educacional é fruto da nossa dissertação de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – PPGEM, da Universidade Estadual do Pará – UEPA, que tem como título **O ensino das funções seno e cosseno por atividades experimentais com o GeoGebra** desenvolvido por Silva (2025), sob a orientação do Prof.° Dr. Pedro Franco de Sá.

Este caderno de atividades é fruto de uma pesquisa que "**Investigou as contribuições de uma sequência didática, com intuito de melhorar o Ensino e Aprendizagem dos alunos do 2° ano do Ensino Médio sobre o conteúdo das Funções Trigonométricas seno e cosseno, com a utilização do aplicativo GeoGebra".** O material foi desenvolvido com base no trabalho de Corrêa (2016), adaptado para o GeoGebra. A sequência didática (SD) foi validada por professores de matemática, que poderão ajustá-la às necessidades específicas de cada turma.

A elaboração do nosso conjunto de atividades teve como base as ideias e pressupostos da Engenharia Didática, metodologia da vertente da Didática Matemática, que segundo Artigue (1995, p. 36) "caracteriza-se antes de mais por um esquema experimental baseado nas realizações didáticas na sala de aula, ou seja, na concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino". Além disso, a nossa metodologia de ensino se baseou no ensino por atividades experimentais com os trabalhos de Sá, Mafra e Fossa (2022), Sá (2020, 2019), Piccolo (2012), Corrêa (2016).

Neste caderno, apresentamos um conjunto de 9 (nove) atividades, cada uma explorando 11 (onze) aplicativos desenvolvidos no GeoGebra. O público-alvo são estudantes do 2º ano do Ensino Médio. Para aprimorar a nossa SD, incorporamos opiniões e sugestões de professores de matemática do Ensino Médio. Como resultado, criamos um livro digital complementar com os mesmos aplicativos, mas com questões de múltipla escolha, oferecendo um material alternativo para a fixação dos conceitos de funções seno e cosseno, disponível no link: https://www.geogebra.org/m/gbmxwepa

Ressaltamos que o objetivo principal da SD não é instruir os alunos no manuseio de comandos, na criação de desenhos geométricos ou no desenvolvimento de aplicativos. Em vez disso, a SD visa promover a interação dos alunos com um aplicativo já existente, permitindo que observem as modificações nos objetos, os resultados obtidos em diferentes ângulos e os padrões gráficos gerados para cada parâmetro da expressão $\boldsymbol{f(x) = a + b.Trig.(cx + d)}$.

Com uma organização e planejamento adequados, o professor pode criar aulas dinâmicas para explorar as configurações e comandos do GeoGebra, permitindo que os alunos visualizem simultaneamente gráficos e textos. Essa abordagem incentiva a interação e o aprendizado prático. Além disso, o professor pode aproveitar a versão online do GeoGebra, que funciona como uma rede social de aprendizado colaborativo. Nessa plataforma, os alunos podem baixar construções, modificá-las, alterá-las e salvá-las, contribuindo para um repositório de materiais compartilhados.

Os resultados da avaliação indicaram que SD foi bem recebida pelos professores. A interação entre Professor, Aluno e Conhecimento promove situações de aprendizagem em sala de aula que, por meio de questionamentos, indagações e intervenções nas atividades, despertam o interesse do aluno, tornando a experiência de aprendizado mais envolvente e proveitosa para todos.

Nesse sentido, acreditamos que nossa SD promove um avanço no aprendizado de funções trigonométricas, pois o GeoGebra facilita a visualização de conceitos matemáticos em situações cotidianas, como em atividades sobre corridas em pistas circulares, roletas, vibrações sonoras e rodas gigantes. Ao responder às atividades, seja individualmente ou em grupo, o estudante é desafiado a completar tabelas, analisar dados e formular hipóteses. Esse processo permite que ele descubra os padrões "escondidos" nos movimentos periódicos, construindo um aprendizado mais significativo e autônomo.

Boa leitura e um excelente trabalho!

Os autores.

1. REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, apresentamos algumas alternativas relacionadas às Tendências da Educação Matemática que foram abordadas na SD desenvolvidas nesta pesquisa. As tendências exploradas foram: o Ensino por Atividades, a Resolução de Problemas e o uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs). Essas abordagens oferecem aos estudantes um ambiente propício para testar hipóteses, formular indagações, explorar sua curiosidade e aplicar a criatividade na resolução de situações-problema durante a prática.

1.1. ENSINO POR ATIVIDADES EXPERIMENTAIS

Nossa fundamentação está baseada nos trabalhos de Sá, Mafra e Fossa (2022), Sá (2020, 2019), Piccolo (2012), Corrêa (2016).

Sá, Mafra e Fossa (2022) apresentam propostas de atividades experimentais no ensino de Matemática que podem servir como orientação ao aprendiz por meio de uma sequência de etapas, nas quais diversas noções matemáticas estão presentes. Os autores afirmam que o ensino por atividades é significativamente mais eficaz quando “implementado em situações sociais que proporcionam uma real possibilidade de discussões propositivas, visando à elaboração final de um dado conceito matemático” (SÁ; MAFRA; FOSSA, 2022, p. 2). Para que isso ocorra, é papel do professor organizar um ambiente investigativo, que estimule ações exploratórias por parte do estudante.

Nessa linha, a BNCC (2018) destaca a importância de construir uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade do aprendiz, em diferentes contextos, afirmando que:

> [...] é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros (BRASIL, 2018, p. 526).

Entendemos que uma das principais dificuldades que são enfrentadas pelos estudantes é a forma como a matemática é ensinada. Muitas vezes, o ensino é direcionado apenas na memorização de fórmulas e procedimentos, sem uma contextualização prática que possa ajudar o estudante a entender o “porque” ocorre aquele padrão e qual o seu significado conceitual. Isso conduz para que a matemática pareça ser somente abstrata e que não tem nenhuma relação com a realidade.

Dessa forma, percebemos que necessitamos investir mais na maneira de como ensinar Matemática, criando meios de ensino e aprendizagem que incentive o aluno a constituir sua rede de conhecimentos matemáticos.

Para Corrêa (2016) “O Ensino por Atividades caracteriza-se como uma configuração prática do Método da Descoberta”, segunda ela:

> o ensino por atividades se propõe a instigar o aluno a chegar ao conceito a ser estudado, e isso se dá por meio de sua própria ação durante a execução de atividades relacionadas a um conteúdo matemático, de forma que o mesmo se faça mais presente no momento da aprendizagem, ou seja, o aluno é a peça principal neste processo chamado de experimentação, a qual se faz em várias etapas seguindo os objetivos de aprendizagem que se desejam alcançar (CORRÊA, 2016, p. 22).

A fim de que o estudante participe do processo de aprendizagem e consiga de forma mais significativa relacionar a prática real ao conhecimento abstrato, Sá (99, p. 78), apresenta “o método da descoberta como uma das alternativas viáveis para o ensino da Matemática”.

Sá (99, p.8) afirma que o método da descoberta se aproxima muito do método científico, que possibilita ao aluno desenvolver habilidades básicas como: observar, analisar e concluir e possui três técnicas básicas: Técnica da redescoberta, técnica dos problemas e técnicas de projetos. Técnicas concebidas no Brasil por Hennig (1986) na década de 80 (SÁ, 2019, p. 15). Hennig (1986), citado por Sá (2019, p. 15) afirma que:

> 1ª: Aprender por descoberta é aprender a aprender.
> 2ª: Aprender por descoberta é automotivador e autogratificante.
> 3ª: Aprender por descoberta aumenta a capacidade de pensar e de raciocinar.
> 4ª: Aprender por descoberta facilita a transferência e memorização.

O ensino de matemática por atividades, segundo Sá (2019), possui as seguintes características:

> 1) É diretivo;
> 2)Tem compromisso com o conteúdo;
> 3)Tem compromisso com o desenvolvimento de habilidades para além do conteúdo;
> 4) É estruturado
> 5) É sequencial
> 6) Não está necessariamente associado à resolução de problemas
> 7) Leva em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes
> 8) Os resultados são institucionalizados ao final da atividade
> 9) Não dispensa a participação do professor
> 10) É adequado para formação de conceitos e acesso a resultados operacionais ou algorítmicos.
> 11) É iterativo entre estudantes e professor (SÁ, 2019, p.16-17).

Para Sá (2019, p. 17), o ensino de Matemática por meio de atividades, assim como outras tendências, apresenta uma organização própria, que se dá em dois aspectos: o objetivo e o modo de desenvolvimento. Em relação ao objetivo, esse ensino pode ser realizado por meio de dois tipos básicos de atividades: conceituação ou redescoberta. Quanto ao modo de desenvolvimento, o ensino por atividades pode ocorrer de forma demonstrativa ou experimental.

Sá (2019) fala sobre a organização em relação aos objetivos, que as atividades podem ser de dois tipos, como visto anteriormente, por conceituação e por redescoberta e possuem os seguintes momentos: **Organização, apresentação, execução, registro, análise e institucionalização**. Esses momentos quanto aos objetivos não se diferem muito, seguem as mesmas recomendações.

Sá (2019) destrincha essas fases das atividades e, como veremos a seguir, apenas a análise e a institucionalização se diferem quando ao tipo, segundo o objetivo da atividade.

No momento da **organização**, tanto quanto para conceituação quanto para redescoberta, Sá (2019) diz que nesse momento devem ser formadas as equipes, no máximo de 4 e mínimo de 2 alunos, a formação em equipes estimula, segunda ele, a troca de ideias, que é fundamental no processo de aprendizagem.

Na organização: “O professor deve dirigir as ações, orientar a formação das equipes sem imposições, demonstrar segurança e que planejou com cuidado a atividade e evitar que os estudantes desperdicem tempo com ações alheias a organização da turma” (SÁ, 2019, p.18).

Seguindo, na **apresentação**, tanto para as atividades para conceituação quanto para a redescoberta, é o momento em que o professor distribui os materiais, incluindo o roteiro, sendo esse impresso ou o professor pode disponibilizar no quadro, dependendo das condições da escola e do tipo de atividade.

O momento da **execução** é onde os alunos manipulam os materiais, fazem experimentações, realizam medidas, cálculos. É o momento em que as equipes realizam os procedimentos estabelecidos na atividade. Cabe ao professor, nesse momento, supervisionar o desenvolvimento das ações dos alunos, auxiliar, tirar dúvidas. Sá (2019) recomenda que quando um questionamento ou dúvida for sobre os procedimentos ou sobre a confecção dos materiais, o professor deve imediatamente orientar a turma a fim de a atividade prossiga de forma clara para os alunos.

Na atividade, o professor pedirá aos alunos que registrem as informações obtidas durante a execução, esse é o momento do **registro**, em que cada equipe registrará as informações da execução num espaço destinado no roteiro. Nessa fase o professor continua supervisionando o desenvolvimento, auxiliando os alunos, dirimindo eventuais dúvidas que podem ocorrer durante esse processo (SÁ, 2019).

Com base nas recomendações de Sá (2019), as etapas de conceituação e redescoberta seguem as mesmas orientações até o momento do registro das atividades. Após o registro, a análise se diferencia ligeiramente, dependendo do objetivo (conceituação ou redescoberta). Sá (2019) aponta que, durante a análise, independentemente do objetivo

> Espera-se que cada equipe analise as informações que foram registradas e percebam as características do objeto matemático que desejar conceituar ou definir entre as informações registradas. Este momento é crucial para o bom andamento da atividade devido, ser o momento quando os alunos deverão ter o primeiro acesso à informação desejada pelo professor (SÁ, 2019, p. 20).

O professor continua nessa fase auxiliando os alunos, sanando as dúvidas, formulando questões para que percebam relações válidas. O que difere quanto ao objetivo é que para a conceituação, segundo o autor, “caso não consiga fazer a equipe perceber o desejado deve deixar para o momento da institucionalização” (SÁ, 2019. p. 20).

Já para a redescoberta, segundo o autor, nesse momento, os resultados devem ser concluídos já com uma elaboração de uma conclusão por parte da equipe.

A fase final da atividade é a Institucionalização. Nesta etapa, Sá (2019) propõe abordagens distintas para cada tipo de objetivo. Por exemplo, no caso do objetivo de “conceituação”, a institucionalização consiste no momento em que o professor apresenta o conceito ou definição planejada, com base nas observações registradas pelas equipes no quadro. Com a apresentação desse conceito, a fase de institucionalização é concluída, finalizando a atividade como um todo. Sá (2019, p. 21) recomenda que, após essa fase, seja aplicado um conjunto de questões relacionadas ao conhecimento trabalhado na atividade

A **institucionalização**, última fase para o tipo redescoberta, quanto ao objetivo, Sá (2019, p. 35) diz que” é o momento em que será produzida a conclusão oficial da turma a partir das conclusões que cada equipe elaborou no momento da análise”. Aqui cada equipe vai ao quadro não registrar somente as observações durante a atividade, mas as conclusões de cada uma acerca da atividade. Ao final o professor faz suas considerações e valida e/ou reforça essa conclusão.

1.2. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A ideia de “resolver problemas” pressupõe encontrar uma solução ou resposta. Sá (2021, p. 6) questiona: “O que é resolução de problemas?”, “Qual a relação entre problema, exercício e questão?” e “Como aplicar a resolução de problemas em sala de aula?”.

Segundo o autor, um “problema” se manifesta quando não se sabe como chegar à solução. Já um "exercício" é definido pelo conhecimento de um “procedimento que leva à solução e se pratica para ganhar segurança na sua execução” (SÁ, 2021, p. 13).

Sá (2021) ainda explica que problema está:

> associada a uma situação que uma pessoa ou um grupo de pessoas se sentem incomodados e buscam encontrar uma maneia de superar a situação estabelecida e não conhecem como alcançar o resultado desejado. Desse modo, uma dada questão poderá ser um problema para uma pessoa ou grupo de pessoas e não ser um problema para as pessoas que não se sentem incomodados com a situação ou não desejem encontrar uma solução para a mesma (SÀ, 2021, p. 13).

Na minha experiência como professor, identifico que as dificuldades dos alunos em resolver problemas são complexas e multifacetadas, envolvendo aspectos cognitivos, emocionais e pedagógicos. Observo que a dificuldade em interpretar o problema, muitas vezes, impede a formulação de regras e raciocínios lógicos necessários para iniciar a resolução. A ansiedade e o medo de errar também são fatores importantes, bloqueando a concentração e paralisando os alunos diante do desafio.

Identificamos em Gil (2008) que “problema” é entendido como uma questão difícil de explicar ou resolver, além do mais:

> Uma acepção bastante corrente identifica problema com questão que dá margem a hesitação ou perplexidade, por difícil de explicar ou resolver. Outra acepção identifica problema com algo que provoca desequilíbrio, mal-estar, sofrimento ou constrangimento às pessoas. Contudo, na acepção científica, problema é qualquer questão não solvida e que é objeto de discussão, em qualquer domínio do conhecimento (GIL, 2008, p. 33).

Afinal, o que significa a expressão “Resolução de Problemas?” A Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018) opta por "Resolver e Elaborar Problemas" em vez de simplesmente “Resolver Problemas”. Essa escolha não é aleatória: ela visa ampliar e aprofundar o significado atribuído à resolução de problemas, indicando que:

> a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada (BRASIL, 2018, p. 536).

O documento ainda destaca que o uso de tecnologias possibilita aos estudantes caminhos variados e facilitadoras de aprendizagens que estimulam a raciocinar logicamente, elaborar e experimentar hipóteses, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações.

Das cinco competências específicas da Matemática para o Ensino médio destacamos as de número 3 e 4. Veja o quadro a seguir sobre as Habilidades de suas respectivas competências:

Quadro 1- Habilidades que os estudantes do Ensino Médio devem apresentar

UNIDADES TEMÁTICAS	COMPETÊNCIAS	HABILIDADES
Álgebra e Geometria	Competência 3: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente	(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria
		(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
Álgebra	Competência 4: Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

		(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
		(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática. (EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base nos dados obtidos em pesquisas por amostras estatística, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

Fonte: Brasil, 2018, p. 536

Dentre as habilidades, destacam-se a EM13MAT306 e a EM13MAT308, que se referem ao estudo das funções trigonométricas seno e cosseno. Já as habilidades EM13MAT403, EM13MAT404, EM13MAT405 e EM13MAT406 complementam atividades específicas desenvolvidas durante a resolução de problemas

No PCNEM (2006) coloca uma situação real de Física para explicar o que é resolução de problemas:

> na solução de um dado problema em que é apenas solicitado o cálculo da distância percorrida por um corpo com desaceleração constante, e de um outro em que se solicita a análise das conseqüências de altas velocidades de veículos. Embora nessas duas situações a solução do problema exija o mesmo instrumental matemático, a própria estratégia para a resolução de problemas é também diferente. Enquanto na primeira trata-se de associar os elementos do enunciado a uma equação matemática, **já na segunda são necessários a identificação da situação-problema, o levantamento de hipóteses, a escolha de caminhos para a solução, além da análise dos resultados, principalmente no que diz respeito à sua coerência com o que o aluno conhece da realidade** (BRASIL, 2006, p. 85 grifo meu).

A resolução de problemas é fundamental no ensino da Matemática, conforme destacado neste documento: "o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios" (p. 112). Essa abordagem estimula o desenvolvimento do raciocínio e da capacidade de aplicar o conhecimento de forma prática.

Em “A Arte de Resolver Problemas”, Polya (1995) argumenta que a experiência de superar desafios por meio do próprio esforço intelectual, experimentando a tensão da busca e o triunfo da descoberta, pode despertar o prazer pelo trabalho mental.

No contexto da sala de aula, o professor deve incentivar a curiosidade dos alunos, propondo situações-problema que se conectem com seus conhecimentos prévios. É importante ressaltar que exercícios que envolvam cálculos, determinações e resoluções, embora muitas vezes vistos como meramente repetitivos, são importantes para a consolidação de métodos e propriedades matemáticas, complementando a abordagem da resolução de problemas

De acordo com Onuchic (1999), o ensino de resolução de problemas em matemática começou a passar por reformas mais estruturadas nas décadas de 1960 e 1970, durante o movimento “Matemática Moderna”, impulsionado pelos trabalhos de George Polya. Essas reformas se apoiaram em estruturas lógicas, algébricas, topológicas e de ordem. Essa mudança se fez necessária devido ao cenário da época no Brasil, marcado por altos índices de retenção escolar, formalização precoce de conceitos e uma excessiva preocupação com o treinamento de habilidades e a mecanização de processos, em detrimento da compreensão.

De acordo com Onuchic (1999) a resolução de problemas é:

> a caracterizações passadas como um conjunto de fatos, domínio de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental. Hoje, a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos preciso e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simultânea de vários níveis de atividade (ONUCHIC 1999, p. 203).

No início do século XX, o ensino de matemática era frequentemente baseado na repetição e memorização de informações básicas, como as tabuadas. O modelo pedagógico consistia na transmissão de conhecimento pelo professor, seguido da transcrição, memorização e reprodução pelo aluno. Embora as atividades em sala de aula pudessem indicar compreensão superficial do conteúdo, poucos alunos demonstravam a capacidade de pensar criticamente e resolver problemas de maneiras diversas. Surpreendentemente, essa dinâmica encontra paralelo no contexto educacional do século XXI.

Alinhando-nos com Onuchic (1999), defendemos que o ensino e a aprendizagem da matemática por meio da resolução de problemas estimulam os alunos a estabelecer conexões entre a matemática e outros contextos, extrapolando a mera manipulação de números.

> o aluno é capaz de relacionar uma determinada ideia matemática a um grande número ou uma variedade de contextos; o aluno consegue relacionar um dado problema a um grande número de ideias matemáticas implícitas nele; o aluno consegue construir relações entre as várias ideias matemáticas contidas num problema (ONUCHIC, 1999, p. 208).

Em nossa pesquisa, investigamos a abordagem da trigonometria em livros didáticos, com foco na distribuição de exercícios e problemas. No subtópico 3.3, dedicado à análise de livros de matemática do 2º ano do Ensino Médio, notamos uma escassez de exercícios resolvidos na seção sobre funções trigonométricas. Em seguida, os livros propunham exercícios similares, que poderiam ser resolvidos aplicando as estratégias demonstradas nos exemplos. Essa observação foi feita nos livros de Paiva (2010) e Longen (2016).

Quanto à distinção entre exercícios e problemas, seguimos a perspectiva de Sá (2021), que argumenta que a classificação depende da experiência do estudante: se a questão apresenta dificuldades e exige raciocínio, assemelha-se a um problema; se a solução é encontrada com facilidade, assume as características de um exercício. E para garantir isso é:

> necessário avaliar o material trabalhado em sala antes da proposição do exame. Se todas as questões propostas forem similares as questões trabalhadas em sala há grande chance das mesmas já terem se tornado exercícios para os alunos. Do contrário há grande chance das questões serem problemas para os estudantes avaliados (SÁ, 2021, p. 15).

Neste cenário, buscamos articular situações-problema envolvendo funções trigonométricas com aplicações em Física, com o objetivo de evitar a abordagem exclusiva centrada no cálculo algébrico de identidades e equações. Ao priorizar aspectos como a análise de gráficos, medições de distâncias inacessíveis e fenômenos periódicos, proporcionamos um ensino mais significativo e contextualizado.

Essa proposta alinha-se às melhores práticas da educação interdisciplinar, que integra conhecimentos de diferentes áreas para enriquecer a aprendizagem e tornar os conteúdos mais relevantes para os estudantes. Essa abordagem está em consonância com pesquisas que indicam impacto positivo do uso de tecnologias interativas (por exemplo, simulações GeoGebra) na compreensão das transformações trigonométricas.

1.3. O USO DO GEOGEBRA

O ensino de matemática tem evoluído significativamente nas últimas décadas, impulsionado pelo progresso das tecnologias educacionais. Ferramentas digitais como softwares interativos, plataformas online, aplicativos educativos e ambientes virtuais de aprendizagem expandiram as oportunidades de ensinar e aprender matemática de maneira mais dinâmica, visual e personalizada.

A utilização dessas tecnologias em sala de aula visa transformar a maneira como os alunos, individualmente e em grupo, interagem com os conteúdos curriculares, especialmente nas disciplinas exatas. O objetivo é apresentar aplicações práticas no contexto do aluno, demonstrando, por meio dessas ferramentas, como a matemática se manifesta e pode ser aplicada em seu cotidiano. Adicionalmente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2018) propõe que:

> [...] os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas. (BRASIL, 2018, p. 528)

A BNCC (2018) reforça a importância de assegurar aos jovens a capacidade de se adaptarem a uma sociedade em contínua evolução. Isso implica prepará-los para profissões que ainda não surgiram, para o uso de tecnologias futuras e para a resolução de problemas que desconhecemos. A BNCC prevê que a computação e as tecnologias digitais serão elementos fundamentais, de forma direta ou indireta, nas profissões do futuro.

A presente pesquisa sobre Funções Trigonométricas foi motivada pela dificuldade frequentemente observada na abordagem didática desse tema por muitos professores, bem como pela sua relativa negligência nos currículos escolares. O grande desafio dos educadores reside, inegavelmente, no desenvolvimento e/ou na utilização de metodologias ativas e ferramentas inovadoras que maximizem o ensino e a aprendizagem dos alunos.

Considerando que jovens e adolescentes contemporâneos dedicam uma parcela significativa de seu tempo aos dispositivos móveis, questionamos como integrar Recursos Educacionais Digitais (RED)[1], de forma a aproveitar essa conectividade em benefício do aprendizado da matemática. Essa indagação nos levou a optar pela utilização do aplicativo GeoGebra como ferramenta de apoio ao ensino das funções seno e cosseno.

O aplicativo *GeoGebra* pode ser baixado gratuitamente disponível em: www.geogebra.org , considerado de fácil manuseio e pode ser acessado através de qualquer aparelho eletrônico como celulares, tablets e notebooks desde que estes possuam sistema operacionais como *Android*, *IOS* e *Windows Phone*.

O *GeoGebra software* reúne Geometria, Álgebra e Cálculo Diferencial e Integral (ensino superior). O diferencial deste programa é que ele possui um sistema de Geometria Dinâmica que permite que o usuário realize construções de gráficos em 2D e 3D e insira equações e coordenadas, que podem estar diretamente interligadas, fazendo modificações quando necessário.

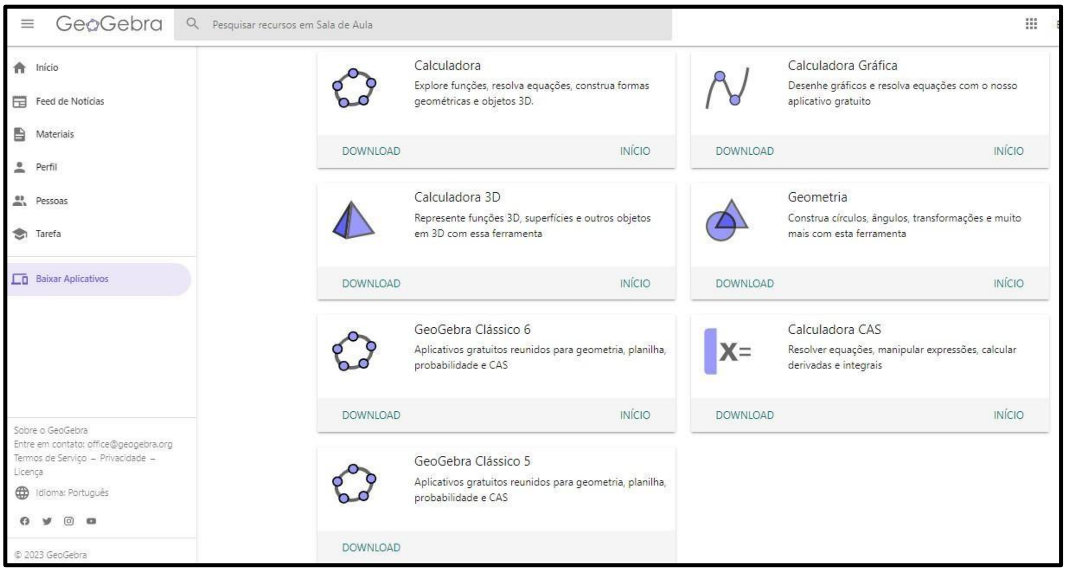
Ao acessar o site www.geogebra.org no seu navegador de buscas, vá na opção “Baixar Aplicativos”. Ao fazer isso, encontrará sete aplicativos dos quais dois

[1] Brasil (2023): “Refere-se ao acesso de programas, aplicativos e conteúdos digitais usados na instituição escolar, que incluem por exemplo, material de aprendizado digital, programas específicos para o ensino de certas disciplinas, assim como software e aplicativos que facilitam a gestão educacional”.

apresentam a reunião dos demais aplicativos que são: GeoGebra Clássico 5 e o GeoGebra Clássico 6, que são utilizados em computadores.

O site também permite criar um perfil de usuário de forma opcional quando o programa for aberto. Caso seja criado, você poderá encontrar projetos feitos por outros usuários de atividades gratuitas, simulações, exercícios, aulas e jogos para matemática e ciência. Também, poderá construir seus próprios materiais didáticos e compartilhar com amigos.

Figura 1 - Interface do site GeoGebra



Fonte: GeoGebra (2023)

Da mesma forma acontece na Google Play Store quando pesquisadas os aplicativos do GeoGebra pelo celular. Nesse caso aparecerá seis aplicativos que são: Calculadora Gráfica GeoGebra, Suíte GeoGebra Calculadora, GeoGebra Geometria, Calculadora Gráfica GeoGebra 3D, GeoGebra Scientific Calculator e GeoGebra CAS Calculator.

Dentre esses App, o que será utilizado nas nossas atividades é a Calculadora Gráfica GeoGebra, pois este permite a construção de gráficos de funções e equações; permite que encontremos pontos especiais de funções como raízes, máximos e mínimos; que salvemos e compartilhemos os resultados; permite a plotagem de curvas polares e paramétricas; permite que controlemos transformações dos gráficos através do controle deslizante. Ou seja, esse app permitirá a construção dos gráficos das funções seno e cosseno facilitando a visualização do comportamento de cada parâmetro do tipo $f(x) = a + b.Trigo(cx + d)$.

Por ser um software de matemática dinâmica livre, o GeoGebra permite construir diversos objetos geométricos, como pontos, vetores, segmentos, retas, secções cônicas, gráficos que representa funções e curvas parametrizadas. Outras vantagens é que podemos trabalhar utilizando variáveis vinculadas a números, vetores e pontos.

Além disso, podemos construir funções desde as mais simples até a determinação de derivadas e integrais, além de oferecer um conjunto de comandos já prontos relacionado com análise matemática, GEOmetria analítica, álGEBRA, álGEBRA analítica, entre outros.

Entretanto, comparando a forma convencional de construções geométricas e a auxiliada pelo computador, destacamos a diferença:

I. Estática e única- depois de feito um desenho, o mesmo não pode ser modificado para análise de algumas propriedades;
II. Múltipla- com um único desenho é possível explorar as propriedades através de alterações que são realizadas através do computador sem modificar as propriedades geométricas.

Por essa principal característica de um único desenho se transformar em várias outras opções sem perder suas propriedades geométricas é que o Geogebra foi considerado um software de Geometria Dinâmica.

Quando utilizado em sala de aula, alguns autores que realizaram experimentação com o GeoGebra obtiveram resultados significativos na aprendizagem dos estudantes em relação à Matemática.

Nascimento (2019), de acordo com as aplicações das atividades no GeoGebra, ele destaca que:

> Assim, nessa perspectiva, se o desenvolvimento dessa atividade ocorresse de forma tradicional, ou seja, utilizando lousa e giz, demandaria muito tempo na construção de cada gráfico de cada função, o que impossibilitaria que os estudantes visualizassem, interpretassem e analisassem os respectivos gráficos. Portanto, devem ser levadas em conta as vantagens da agilidade e do dinamismo que o uso do *software* proporciona. (NASCIMENTO, 2019, p. 80)

Nascimento (2019) ressalta que ao verificar as potencialidades e promover a participação dos estudantes no estudo da trigonometria utilizando o geogebra:

> Percebeu-se que aumentou a interação entre estudantes e professor, uma vez que, na elaboração dos gráficos das funções, ficou garantida a visualização de forma interativa, o que possibilitou que os estudantes criassem hipóteses, explorassem e propusessem alternativas, em um trabalho coletivo que favoreceu a discussão e interatividade professor-estudante. (NASCIMENTO, 2019, p. 92)

Frizzarini e Cargnin (2019) trabalharam operações com arcos utilizando como apoio o GeoGebra com estudantes de 2º ano de um curso técnico em informática. Durante a aplicação da atividade em sala de aula, os autores descrevem que o GeoGebra permitiu aos estudantes acompanhar sob duas perspectivas:

> algébrica/numérica e gráfica, os elementos abstratos envolvidos, graças às funcionalidades do Geogebra, que mostra, na janela de álgebra, as representações algébricas/numéricas dos objetos, ao mesmo tempo em que proporciona uma "visualização" desses elementos, [...] favorece o tratamento tanto no registro algébrico (que pode ser observado no texto escrito ao lado da figura), quanto no registro gráfico, ao mesmo tempo em que permite "visualizar" a conversão entre as representações. Em sala de aula, muitos estudantes iam arrastando os pontos do triângulo original para "testar" a validade da identidade. Ao fazer isto, os estudantes estavam se defrontando com as atividades cognitivas de tratamento e conversão [...] (FRIZZARINI; CARGNIN, 2019, p. 8-9)

Meneghelli e Possamai (2019) apresentam em suas pesquisas sobre a resolução de problemas de funções seno e cosseno, que os recursos tecnológicos trazem para o centro da aprendizagem a visualização das propriedades, enfatizando a experimentação, invertendo a ordem da forma tradicional de ensino, o que permite trabalhar primeiro a investigação e, depois, a teoria. E destacam que o GeoGebra: "permitir aos seus usuários a realização de manipulações em suas construções, preservando as características iniciais, visando uma melhor exploração e visualização das propriedades do objeto que se deseja estudar" (MENEGHELLI; POSSAMAI, 2019, p. 4).

Em sua Tese de Doutorado, Oliveira (2020) explica que o GeoGebra vem rompendo o estereótipo da matemática estática, pois segundo ela:

> o estudante entra em contato com a matemática dinâmica por intermédio de construções e manipulações, compreendendo, assim, o conhecimento matemático de forma diferenciada. O formato visual de exploração e manipulação aguça a curiosidade e espírito de pesquisador do aluno na busca por investigar as construções e passos realizados no software, proporcionando uma aprendizagem baseada em questionamentos e explorações. Salientamos que o GeoGebra é um programa de fácil manuseio e autoexplicativo, o que permite uma maior acessibilidade ao software. (OLIVEIRA, 2020, p. 158)

Assim, com os relatos desses autores em suas experimentações, nota-se a facilidade e a contribuição do uso da ferramenta GeoGebra que ajudam na melhora da aprendizagem da Matemática. Não só ela, mas metodologias que usam as TDIC's de modo eficaz tiram o estudante do lugar de receptor passivo. Ele passa a ter em suas mãos as ferramentas e participa ativamente da construção do próprio conhecimento.

O professor passa a ser um motivador e um facilitador do acesso ao saber, um mediador do processo de aprendizagem. A tarefa de pesquisar, buscar, fazer e compartilhar informações obtidas para compor o conteúdo curricular é extremamente facilitada e agilizada por meios das tecnologias digitais. Assim, cabe a ele dedicar seus esforços prioritariamente a:

1. Apresentar questões que instiguem a curiosidade pelo tema tratado;
2. Conduzir os processos de reflexão;
3. Apoiar as práticas educacionais;
4. Avaliar se o conhecimento foi assimilado satisfatoriamente.

Os avanços tecnológicos sempre tiveram um lugar de destaque na sociedade e, por isso, é fundamental que estes cheguem ao espaço educacional, proporcionando transformações e melhorias no processo de ensino e aprendizagem. Equipamentos como computador, tablet, smartphones e calculadoras são uns dos principais recursos tecnológicos para utilizar nas práticas pedagógicas. Uma diversidade de materiais que o professor tem à sua disposição, integrando-os em abordagens de ensino que valorizam suas atividades para o aluno.

Viseu e Rocha (2018) explicam que as tecnologias não substituem a atividade realizada com papel e lápis pela atividade que realiza com apoio da tecnologia, mas que se faz necessário construir articulações com essas atividades, sem esquecer do cálculo mental. E para isso, destaca-se o papel do professor de estar comprometido como o processo de ensino e aprendizagem.

Para Meneghelli e Possamai (2019, p. 3), o professor deve ser conhecedor das:

> reais capacidades, potencialidades e limitações do recurso tecnológico que deseja utilizar em sua prática pedagógica, para que o mesmo venha a contribuir de forma positiva para a aprendizagem, além de transformar o estudante em sujeito ativo na construção do seu conhecimento.

Na dissertação de Silva, T. (2018) sobre a sequência didática utilizando applet no GeoGebra, afirma que no modelo tradicional o professor é o participante ativo da sala de aula, transmitindo seus conhecimentos sem instigar os alunos a refletir ou ter uma visão crítica dos conteúdos. E para que o educador não fique preso apenas a ser um transmissor de conhecimento, ele precisa ser estimulador da curiosidade do aluno por conhecer, questionar e buscar a informação mais relevante, fundamentada pelo recurso tecnológico.

2. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nesta seção, apresentamos o conjunto de atividades que compõem a nossa SD voltada ao ensino das funções trigonométricas seno e cosseno, destinada a estudantes do 2º ano do Ensino Médio. A elaboração das atividades foi fundamentada nas Tendências da Educação Matemática, em especial no Ensino por Atividades Experimentais, na Resolução de Problemas e no uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs).

A SD é composta por um total de 9 (nove) atividades, nas quais foram construídos 11 (onze) aplicativos utilizando o software GeoGebra. Cada atividade envolve o preenchimento de quadros com base nas informações observadas nos aplicativos, seguido de questionamentos que os estudantes devem responder a partir dos dados registrados.

As atividades 1, 2, 4, 6 e 8 têm como objetivo principal a descoberta de relações matemáticas, promovendo o caráter investigativo. Já as atividades 3, 5, 7 e 9 visam à conceitualização, buscando determinar, definir e compreender os conceitos envolvidos.

Recomenda-se que o professor oriente os estudantes no processo de transferência dos dados dos aplicativos para os quadros, uma vez que os experimentos realizados no GeoGebra exigem atenção aos detalhes e o seguimento cuidadoso dos procedimentos descritos em cada atividade

2.1. ORIENTAÇÕES GERAIS AO PROFESSOR

Prezado(a)s colegas de profissão - professores e professoras que ensinam matemática.

- Os aplicativos desenvolvidos no GeoGebra foram adaptados para uso em duas plataformas: computadores, no caso de escolas que disponham de laboratório de informática, e celulares, para situações em que esses recursos não estejam disponíveis.

- Recomendamos que, antes da aplicação das atividades, os professores apresentem aos estudantes o funcionamento básico do GeoGebra, por meio de vídeos, apostilas ou demonstrações práticas diretamente no software. É importante informar aos estudantes que, ao utilizarem o celular, os aplicativos podem ser visualizados em telas menores.
- Destacamos ainda que, considerando possíveis dificuldades de manipulação, os aplicativos oferecem duas formas de interação: por meio do "controle deslizante" ou pela inserção direta de valores na "caixa de entrada". Dessa forma, os estudantes poderão explorar os recursos sem prejudicar a visualização ou o formato das construções geométricas.
- Ressaltamos que os aplicativos funcionam com mais agilidade quando acessados com conexão à internet, bastando clicar nos links para utilizá-los diretamente, sem a necessidade de ter o GeoGebra instalado no dispositivo. No entanto, também é possível utilizar os aplicativos offline, o que exigirá um trabalho prévio de organização e disponibilização dos arquivos por parte do professor.

Porém, recomendamos que faça no computador, caso queira utilizar essa forma offline.

Procedimentos

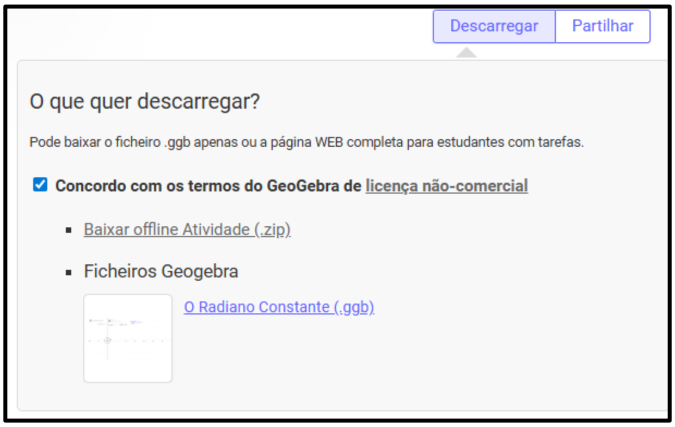
1. Baixe o GeoGebra no site https://www.geogebra.org/download Classic (5 ou 6) e instale no seu computador.
2. Acesse o link de cada aplicativo das Atividades. Clique nos três pontinhos e selecione a opção "Detalhes".

Figura 2 – Tela no aplicativo

Fonte: Acervo do autor, 2025

3. Depois clique em **"Descarregar**", selecione a caixa **"Concordo"** e clique no nome da atividade no formato (.ggb). Salve numa pasta do seu computador.

Figura – Descarregando o Aplicativo



Fonte: Acervo do autor, 2025

Repita este processo para todos os 11 aplicativos. Em seguida, abra o GeoGebra no seu computador, clique em "Abrir" e selecione o arquivo local onde os aplicativos estão armazenados.

- Recomendamos, também, que algumas atividades sejam adaptadas, principalmente aquelas mais extensas, de modo a equilibrar o tempo disponível em cada aula. Isso facilita o trabalho do professor durante a aplicação das atividades e permite a seleção daquelas mais adequadas aos objetivos de aprendizagem.
- O docente pode organizar o tempo de forma estratégica para concluir cada atividade, considerando que, no Ensino Médio, as cinco aulas semanais de Matemática geralmente são distribuídas em blocos de 2 + 2 + 1. Para alcançar os objetivos propostos, adaptar ou reorganizar a sequência das atividades pode contribuir significativamente para o planejamento, já que algumas demandam mais tempo do que outras.

Quadro 2 – Esquema das atividades da SD

ATIVIDADE	OBJETIVO	MATERIAL	TEMPO
1- Relação entre Arco e Raio	Descobrir uma relação entre cada arco escolhido e para cada valor do raio alterado.	Folha com Quadro pra ser preenchido, APP GeoGebra, Lápis, borracha	1 hora/aula (50 minutos)
2- O radiano	Descobrir como a medida do arco varia proporcionalmente em função do raio da circunferência.	Folha com Quadro pra ser preenchido, APP GeoGebra, Lápis, borracha	1 hora/aula (50 minutos)
3- O ciclo trigonométrico	Determinar os valores de seno e cosseno para ângulos $0° \leq \beta \leq 360°$	Quadro para ser preenchida, lápis ou caneta e aplicativo Geogebra	2 horas/aulas (90 minutos)
4- Redução ao 1º quadrante	Descobrir uma relação entre o seno e o cosseno de um arco x do 2°, do 3º ou do 4º quadrante e, o seno e o cosseno do arco correspondente do 1° quadrante	Folha com quadro a ser preenchida, lápis, borracha, APP GeoGebra	1 hora/aula (50 minutos)
5- O giro inteligente: explorando ângulos e coordenadas	Definir a função de Euler a partir da análise do movimento circular de um corredor em uma pista.	Desenho de uma pista circular graduada; lápis, borracha, régua ou barbante, calculadora e App GeoGebra	2 horas/aulas (90 minutos)
6- Oscilações no plano: a curva do seno	Descobrir como os ângulos distribuídos no círculo determinam o padrão oscilatório da função seno.	Esquema da tarefa, lápis, borracha, régua, círculos trigonométricos de raio unitário e plano cartesiano, APP GeoGebra.	2 horas/aulas (90 minutos)
7- Altura em Ação: manipulando a onda da roda gigante	Investigar a relação entre os parâmetros da função e o comportamento do movimento circular simulado da roda gigante	Folha contendo as atividades, lápis, borracha, aplicativo GeoGebra	2 horas/aulas (90 minutos)
8- Sobe e desce do círculo ao gráfico: função cosseno	Descobrir como a posição horizontal dos pontos no ciclo trigonométrico (eixo x) constrói a curva da função cosseno $f(x) = cos\,(x)$	esquema da tarefa, lápis, borracha, régua círculos trigonométricos de raio unitário e plano cartesiano, APP GeoGebra	2 horas/aulas (90 minutos)
9- Cosseno Musical: criando sons no gráfico	Explorar de que forma a amplitude, deslocamento vertical, frequência e fase alteram a curva da função cosseno.	Folha contendo as atividades, lápis, borracha, aplicativo Geogebra	2 horas/aulas (90 minutos)

Fonte: elaborado pelo autor (2025)

Após a realização de cada atividade da sequência didática, os estudantes deverão responder a uma lista de questões chamada de **“Questões de fixação propostas”** que retoma os principais conceitos explorados em cada etapa. Esse momento tem como finalidade consolidar o aprendizado, promover a reflexão sobre as relações descobertas e identificar possíveis dificuldades. Assim, o professor poderá avaliar o progresso dos alunos e ajustar o ensino conforme as necessidades observadas.

2.2. Atividade 1

ATIVIDADE 1: RELAÇÃO ENTRE ARCO E RAIO

APLICATIVO 1 : https://www.geogebra.org/m/xkgfmabt

OBJETIVO: Descobrir uma relação entre cada arco escolhido e para cada valor do raio alterado.

MATERIAIS: Folha com Quadro pra ser preenchido, APP GeoGebra, Lápis, borracha, caneta.

PROCEDIMENTO:

- Primeiro: abra o aplicativo 1.
- Segundo: Para alterar os valores dos ângulos basta mexer no controle deslizante **“ang1”** ou digitar na caixa de entrada “**Ângulo**”.
- Terceiro: Para cada ângulo dado determine:
  - A medida do Arco para 5 valores do Raio;
  - A razão entre a medida do Arco e a medida de cada Raio utilizado;
  - Com as informações obtidas preencha o quadro da atividade.

Quadro 1 - Preencha os espaços utilizando o aplicativo 1.

ÂNGULO	Raio 1	$\frac{\widehat{AB}}{R_1}$	Raio 2	$\frac{\widehat{AB}}{R_2}$	Raio 3	$\frac{\widehat{AB}}{R_3}$	Raio 4	$\frac{\widehat{AB}}{R_4}$	Raio 5	$\frac{\widehat{AB}}{R_5}$
30										
45										
60										
90										
120										
135										
150										

1) O comprimento de um arco depende do raio da circunferência em que está? Justifique.

___

___

2) A medida angular de um arco depende do raio em que está? Justifique.

___

___

1) A que conclusão você chegou?

___

___

___

Questões de fixação propostas

1. Estabeleça, em grau, a medida dos arcos de:

a) $\frac{5\pi}{4}$ rad **b)** $\frac{7\pi}{6}$ rad **c)** $\frac{\pi}{2}$ rad

2. Determine, em radiano, a medida dos arcos de:

a) 30° **c)** 120° **e)** 210°

b) 60° **d)** 150° **f)** 240°

3. Determine, em grau e em radiano, a medida do arco que representa $\frac{2}{5}$ da circunferência.

4. O ponteiro das horas de um relógio tem 7 cm de comprimento.

a) Quantos graus esse ponteiro percorre das 13 h às 17 h? Qual é essa medida em radiano?

b) Quantos centímetros sua extremidade percorre das 13 h às 17 h?

5. Um pêndulo oscila e forma, entre suas posições extremas, um ângulo de 70°. Sabendo que esse pêndulo tem 25 cm de comprimento, calcule o comprimento aproximado do arco que ele descreve.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS AO PROFESSOR (ATIVIDADE 1)

Nesta primeira Atividade, os estudantes podem enfrentar dificuldaldes, uma vez que pode ser que seja a primeira vez que eles estejam participando de uma atividade experimental no Geogebra, que exigirá deles a descoberta de um padrão no preenchimento do quadro.

Seguindo os passos do procedimento, espera-se que os estudantes percebam que quanto maior o raio da circunferência, maior o comprimento do arco, pois a medida de um arco não corresponde ao comprimento desse arco. Além disso, espera-se que eles possam observar que a medida angular do arco depende apenas do comprimento do arco. Os estudantes poderão concluir que para uma medida do comprimento do arco ao mudar o valor do raio a razão $\frac{\widehat{AB}}{R}$ será sempre constante. Caso eles não consigam chegar nessa coclusão ou estejam com dúvidas, o professor deverá mediá-los, esclarecendo as dúvidas e orientar no desenvolvimento da escrita.

Nessa atividade os estudantes não terão dificuldades em mexer no aplicativo e nem em observar as alterações feitas nos comandos. Talvez apresentam dificuldades nas conclusões de cada questão.

2.3. Atividade 2

ATIVIDADE 2: O RADIANO

APP2: **https://www.geogebra.org/m/bz797mmv**

OBJETIVO: Descobrir como a medida do arco varia proporcionalmente em função do raio da circunferência.

MATERIAIS: Folha com Quadro pra ser preenchido, APP GeoGebra, Lápis, borracha

PROCEDIMENTOS:

- Passo 1: No aplicativo 2, mude o **controle deslizante "R"**, um por um, até 5. Em seguida Mova o controle "**Arrasta-me**" até o final.
- Passo 2: Observe o comportamento de cada circunferência e determine:
  - O arco correspondente para cada valor do Raio.
  - A medida do arco em graus de cada pedaço de Raio.

1) Preencha o quadro a seguir de acordo com as observações do APP 2
   OBS: Considera-se Raio em cm (centímetro)

Raio	Medida em graus de cada arco							Medida do arco de uma volta completa em cm
R_1								
R_2								
R_3								
R_4								
R_5								

a) O que você observou?

____

____

b) Que conclusão você chega sobre o que é radiano?

____

____

c) Qual o comprimento em Graus da circunferência em uma volta completa?

___

___

d) Qual o comprimento da circunferência para R=1 cm ? use π = 3,14

___

___

e) Compare os resultados das questões c) e d) e responda: O que você observou?

___

___

Questões de fixação propostas

1 Calcule a medida, em radiano, de um arco de 10 cm contido em uma circunferência com 2,5 cm de raio.

2 Um ponto P da superfície terrestre está localizado a $\frac{\pi}{7}$ rad de latitude norte. Considerando que o raio da Terra mede 6.370 km, o menor arco que une o ponto P à linha do equador tem comprimento igual a:

a) 750π km **b)** 910π km **c)** 450π km **d)** 623π km **e)** 597π km

(*Nota*: Latitude de um ponto da superfície terrestre é a medida do menor arco de circunferência que liga esse ponto à linha do equador.)

3 (UFMA) No relógio da torre de uma igreja, o ponteiro maior mede 2 m.
Em quanto tempo a ponta móvel desse ponteiro percorre 5π metros?

a) 1 hora e 15 minutos
b) 1 hora e meia
c) 1 hora
d) meia hora
e) 45 minutos

4 Determine a medida, em radiano, equivalente a:
a) 30° **b)** 120° **c)** 225° **d)** 300° **e)** 240° **f)** 330°

5 Determine a medida, em grau, equivalente a:

a) $\frac{\pi}{4}$ rad **b)** $\frac{3\pi}{2}$ rad **c)** $\frac{7\pi}{6}$ rad **d)** $\frac{2\pi}{5}$ rad **e)** $\frac{5\pi}{3}$ rad

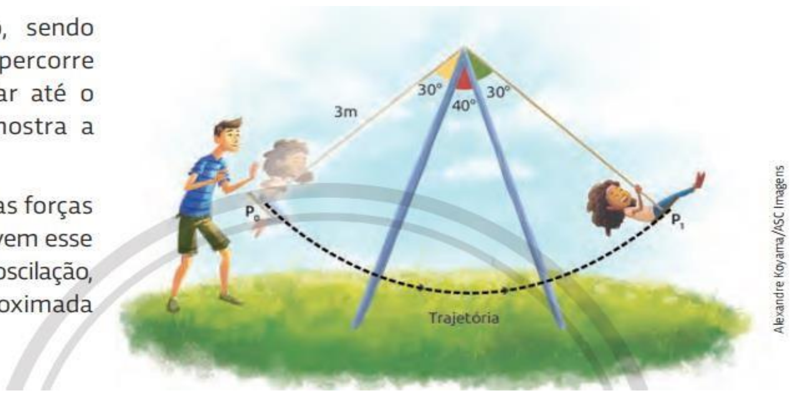
6 Uma correia faz girar duas polias de raios 4 cm e 12 cm.

Quando a polia maior gira 240°, a menor gira:

a) $\frac{7\pi}{4}$ rad **b)** $\frac{7\pi}{6}$ rad **c)** $\frac{4\pi}{3}$ rad **d)** 4π rad **e)** 6π rad

Desafio Um balanço, sendo solto de um ponto P_0, percorre uma trajetória pendular até o ponto P_1, conforme mostra a imagem ao lado.

Desprezando o atrito e as forças de resistência que envolvem esse movimento na primeira oscilação, calcule a distância aproximada percorrida de P_0 a P_1.

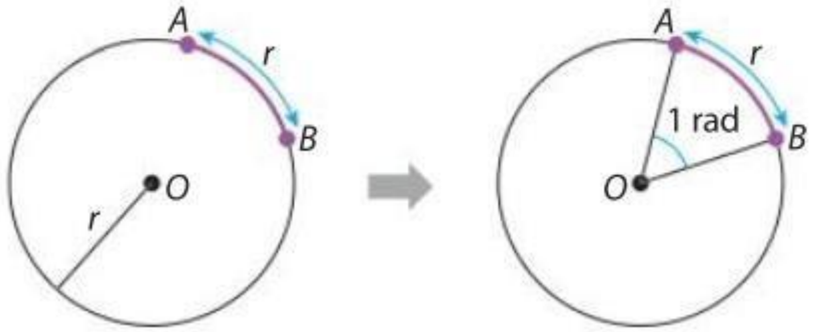


INTERVENÇÃO FORMALIZANTE (ATIVIDADE 2)

Definição: A medida angular de um arco é 1 radiano (1 rad) quando seu comprimento é igual ao raio da circunferência que o contém.

Observe a circunferência de raio r representada na figura 1. Como o comprimento do arco $\widehat{AB}$ é r, sua medida angular é 1 radiano. Indicamos: med($\widehat{AB}$)= 1 rad.

Figura 1 – O radiano



Relação entre grau e radiano

Uma circunferência mede 360° ou 2π rad. Assim, um ângulo raso, que determina uma semicircunferência, corresponde a um arco que mede 180° ou π rad.

A tabela 1 fornece a relação entre as medidas, em grau e em radiano, de alguns ângulos.

Tabela 1 – Valores de Grau e Radiano

Grau	0	45	90	135	180	270	360
Radiano	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS PARA O PROFESSOR (ATIVIDADE 2)

Nesta atividade, recomendamos que o professor conduza os estudantes com atenção especial ao conceito de radiano, considerando que pode haver certa dificuldade na compreensão de sua definição formal — ou seja, que um radiano é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao do raio da circunferência na qual está contido.

Apesar dessa possível dificuldade conceitual, observamos que, com o auxílio do Aplicativo, os estudantes tendem a perceber com mais facilidade que em uma circunferência completa cabem aproximadamente 6 raios inteiros mais uma fração de raio (cerca de 0,28). Eles também conseguirão identificar corretamente que:

- Cada arco de 1 radiano equivale a aproximadamente 57,32°;
- A soma dos ângulos centrais de uma circunferência completa é 360°, o que poderá ser associado ao valor de 2π radianos.

Essa percepção prática é facilitada se os estudantes já tiverem domínio prévio sobre o comprimento da circunferência ($C = 2\pi r$) e souberem trabalhar com medidas de ângulos em graus.

No entanto, a transição do pensamento em graus para radianos pode gerar confusão, especialmente para aqueles que ainda não compreendem o radiano como uma unidade de medida baseada em proporção e comprimento, e não como uma medida arbitrária como o grau. Para amenizar essa dificuldade, sugerimos as seguintes estratégias:

- Utilize representações visuais dinâmicas, como o controle deslizante do GeoGebra, para que os alunos observem como o arco vai se formando com base no raio;
- Construa analogias simples, como comparar o radiano com uma fita métrica enrolada na borda da circunferência.

É essencial que o professor reserve tempo adequado para a exploração dos aplicativos e discussão coletiva. A compreensão do radiano vai além da memorização, exigindo experimentação e reflexão. Por isso, o planejamento cuidadoso da aula é indispensável. Essa abordagem favorece a aprendizagem investigativa e significativa.

2.4. Atividade 3

ATIVIDADE 3: O CICLO TRIGONOMÉTRICO

APP 3: **https://www.geogebra.org/m/axagwgca**

OBJETIVO: Determinar os valores de seno e cosseno para ângulos 0° ≤ β ≤ 360°

MATERIAIS: Tabela para ser preenchida, lápis ou caneta e aplicativo Geogebra.

PROCEDIMENTOS:

- Passo 1: Clicar no link do APP 3: **https://www.geogebra.org/m/axagwgca** e abrir o aplicativo no Geogebra.
- Passo 2: Preencher o Quadro 1 e, para isso, deve-se mover o controle deslizante "$\boldsymbol{\beta}$" ou digitar na caixa de entrada **"ângulo$\boldsymbol{\beta}$"** o valor que está apresentado na Tabela 1.
- Passo 3: Em seguida, verificar os valores de Seno$\boldsymbol{\beta}$ e Cosseno $\boldsymbol{\beta}$ e escrever em qual quadrante se encontram os ângulos.

Quadro 1 – Preencher os valores de seno e cosseno

Ângulo em graus	$\boldsymbol{Sen(\beta)}$	$\boldsymbol{Cos(\beta)}$	***Quadrante***
30°			
90°			
120			
150°			
180°			
210º			
225°			
240°			
270°			
300°			
360°			

Fonte: próprio autor (2023)

1. Observando a variação de um arco β na primeira volta da circunferência trigonométrica, responda:

    a) Qual é o valor máximo de $\boldsymbol{Sen(\beta)}$ que um ângulo pode assumir? E o mínimo?

    b) Qual é o valor máximo de $\boldsymbol{Cos(\beta)}$ que um ângulo pode assumir? E o mínimo?

2. Observe os quadrantes do ciclo trigonométrico do aplicativo e responda:

    a) Em quais quadrantes o $sen(\beta)$ é positivo? E em quais é Negativo?

    b) Em quais quadrantes, quando se aumenta o valor de β, o valor de $sen(\beta)$ diminui?

    c) Em quais quadrantes, quando se diminui o valor de β, o valor de $sen(\beta)$ aumenta?

    d) Em quais quadrantes o $cos(\beta)$ é positivo? E em quais é Negativo?

    e) Em quais quadrantes, quando se aumentai o valor de β, o valor de $cos(\beta)$ aumenta?

    f) Em quais quadrantes, quando se diminui o valor de β, o valor de $cos(\beta)$ diminui?

____

____

Após completar a tabela 1 e responder as perguntas, acrescentamos uma situação -problema com o nome **Roda a Roda.** Para esse desafio, utilizem o APP3 e faça comparação do giro com o ciclo trigonométrico.

OBS: considere o giro no sentido anti-horário, como sentido positivo: Tabela 1- Determinar os valores de Seno e Cosseno.

SITUAÇÃO-PROBLEMA

Em um programa que se chama Roda a Roda, existe uma roleta que os participantes giram para saber qual o seu prêmio, conforme a figura. A roleta deve estar posicionada sempre no PERDE TUDO antes do giro de qualquer participante e o giro deve ser sempre no sentido horário.

a) Jairo gira a roleta 2760°. Qual é seu prêmio?

____

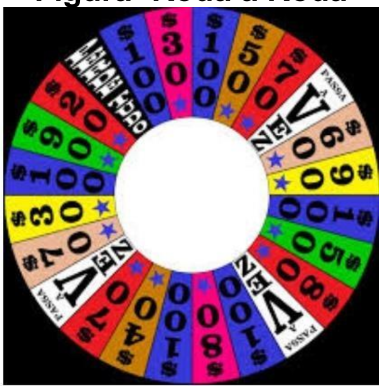
b) Qual o menor ângulo para que o prêmio de Juarez seja 100?

____

c) Quais ângulos fazem com que Josué perca a vez ou perca tudo?

____

Figura- Roda a Roda



Questões de fixação propostas

1. Calcule:

a) sen 390° **b)** sen 4 100° **c)** sen (−820°)

2. Descubra o ângulo **α** do 4º quadrante cujo:

a) $\text{sen } \alpha = -\dfrac{1}{2}$ **b)** $\text{sen } \alpha = +\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. Calcule o valor de cada expressão.

a) $\text{sen } 0° \cdot \text{sen } 135° + \text{sen } 30° \cdot \text{sen } 360°$

b) $\text{sen } \dfrac{\pi}{3} \cdot \text{sen } \dfrac{3\pi}{2} - \text{sen } \dfrac{4\pi}{3} \cdot \text{sen } \dfrac{2\pi}{3}$

15. Calcule o valor de:

a) cos 3990° **c)** cos (−3465°)

b) $\cos \dfrac{35\pi}{3}$ **d)** $\cos \left(-\dfrac{40\pi}{3}\right)$

16. Calcule o valor em cada caso.

a) $\cos \dfrac{\pi}{6} \cdot \cos \dfrac{5\pi}{3} + \cos \dfrac{4\pi}{3} \cdot \cos \dfrac{5\pi}{6}$

b) $\dfrac{\cos 60° - \sqrt{3} \cdot \cos 210°}{\sqrt{3} \cdot \cos 330° - \cos 120°}$

5. Calcule o valor de:

a) $\text{sen } x \cdot \text{sen } \dfrac{\pi}{2} + \text{sen } 2x - \text{sen } 3x$, para $x = \dfrac{\pi}{2}$

b) $\dfrac{\text{sen } 2x + \text{sen } 4x}{\text{sen } x + \text{sen } 3x}$, para $x = \dfrac{\pi}{6}$

6. Determine o sinal de **y** em cada caso.

a) $y = \text{sen } 100° + \text{sen } 170°$

b) $y = \text{sen } \dfrac{7\pi}{5} \cdot \text{sen } \dfrac{19\pi}{12}$

c) $y = \dfrac{\text{sen } 220° + \text{sen } 350°}{\text{sen } 140°}$

Calcule o valor das expressões.

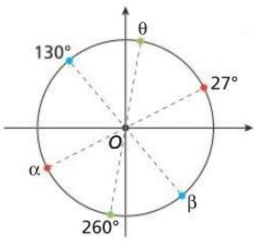
a) $\text{sen } 2\pi + \cos 2\pi + \text{sen } \pi + \cos \pi$

b) $\text{sen } \dfrac{\pi}{2} - \text{sen } \dfrac{3\pi}{2} + \cos \dfrac{\pi}{2} - \cos \dfrac{3\pi}{2}$

c) $\text{sen } \dfrac{2\pi}{3} - \text{sen } \dfrac{11\pi}{6} - \cos \dfrac{5\pi}{3} + \cos \dfrac{5\pi}{6}$

d) $\dfrac{\cos \dfrac{\pi}{2} - \cos \dfrac{4\pi}{3}}{2 \cdot \text{sen } \dfrac{5\pi}{6}}$

Descubra os valores aproximados de sen α, sen β e sen θ, sabendo que os pontos de mesma cor são simétricos em relação à origem *O*. (*Dados*: sen 27° ≃ 0,45; sen 50° ≃ 0,77 e sen 80° ≃ 0,98)



INTERVENÇÕES FORMALIZANTES (ATIVIDADE 3)

Definição: Dizemos que $sen(\beta)$ assume o máximo valor quando for igual a 1 e assume o mínimo valor quando for igual a -1. seno nunca ultrapassará estes valores, pois estamos considerando o raio do ciclo trigonométrico igual a 1.

Definição: seno apresenta sinal positivo quando os valores de β pertencem ao 1º quadrante e 2º quadrante, pois os valores de $sen(\beta)$ aparecem no sentido positivo do eixo y. Quando os valores de $sen\beta$ aparecem no sentido negativo do eixo y, seno apresenta sinal negativo nos quadrantes 3 e 4.

Definição: No intervalo de [0,2π], $sen(\beta)$ cresce nos intervalos [0, $\frac{\pi}{2}$] e [$\frac{3\pi}{2}$,2π] ,1 º e 4º quadrantes. Decrescem nos intervalos [$\frac{\pi}{2}$, π] e [π, $\frac{3\pi}{2}$], 2º e 3º quadrantes.

Definição: Dizemos que $cos(\beta)$ assume o máximo valor quando for igual a 1 e assume o mínimo valor quando for igual a -1. cosseno nunca ultrapassará estes valores, pois estamos considerando o raio do ciclo trigonométrico igual a 1.

Definição: cosseno apresenta sinal positivo quando os valores de β pertencem ao 1º quadrante e 4º quadrante, pois os valores de $cos(\beta)$ aparecem no sentido positivo do eixo y. Quando os valores de $cos(\beta)$ aparecem no sentido negativo do eixo y, seno apresenta sinal negativo nos quadrantes 2 e 3.

Definição: No intervalo de [0,2π], $cos(\beta)$ cresce nos intervalos [π, $\frac{3\pi}{2}$] e [$\frac{3\pi}{2}$, 2π] 3º e 4º quadrantes. Decrescem nos intervalos [0, $\frac{\pi}{2}$] e [$\frac{\pi}{2}$, π], 1º e 2
quadrantes.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS AO PROFESSOR (ATIVIDADE 3)

Recomendamos que, ao aplicar a atividade sobre o ciclo trigonométrico com o uso do GeoGebra, o professor oriente os estudantes passo a passo, favorecendo a compreensão das relações entre os valores das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente.

Avaliamos que, de modo geral, os estudantes conseguirão realizar a atividade com relativa facilidade, especialmente porque o uso do aplicativo GeoGebra favorece a visualização dinâmica dos ângulos e facilita o preenchimento da tabela com os valores de sen(β), cos(β) e tg(β). Esse recurso torna o conteúdo mais acessível e contribui para a compreensão conceitual.

No entanto, algumas dificuldades podem surgir ao longo do processo:

- **Direção do giro no ciclo trigonométrico**: a rotação no ciclo é, por convenção, no sentido anti-horário, e alguns alunos podem se confundir durante a resolução da situação-problema, especialmente se não estiverem acostumados com essa convenção. Uma demonstração prática inicial pode minimizar esse problema.
- **Divisão da circunferência**: na situação-problema, espera-se que os estudantes compreendam a necessidade de dividir a roleta (circunferência) em partes iguais, por exemplo, $\frac{360°}{24} = 15$. Alguns podem ter dificuldade em visualizar isso no ciclo trigonométrico, portanto, recomendamos trabalhar previamente com essa ideia de divisão angular.

Por fim, ressaltamos a importância de dar tempo suficiente para que os estudantes explorem os recursos do aplicativo, observem padrões e discutam coletivamente as descobertas. Essa abordagem investigativa reforça a construção do conhecimento de forma ativa e contextualizada.

2.5. Atividade 4

ATIVIDADE 4: Redução ao 1º quadrante

APP 4: https://www.geogebra.org/m/mx2uqws3

OBJETIVO: Descobrir uma relação entre o seno e o cosseno de um arco x do 2°, do 3º ou do 4º quadrante e, o seno e o cosseno do arco correspondente do 1° quadrante.

MATERIAIS: Folha com Tabela a ser preenchida, lápis, borracha, APP GeoGebra.

PROCEDIMENTOS:

A partir dos valores do seno e cosseno de arcos com extremidades no 1º quadrante do ciclo trigonométrico, podemos calcular os respectivos valores do seno e cosseno de arcos com extremidade em qualquer outro quadrante.

- Passo 1: acesse o APP 4.
- Passo 2: Clique na caixa com o nome "Sen(x)" e "Cos(x)", para aparecer valores dos de seus respectivos quadrantes.
- Passo 3: Mexa o controle deslizante " α" para alterar as posições dos ângulos.

Com as modifciações dos ângulos e suas observações, preencha o quadro a seguir.

Quadro – Redução ao 1° quadrante

REDUÇÃO DO 2° A0 1 º QUADRANTE						
	SENO			COSSENO		
α	$\pi - \alpha$	$sen\alpha$	$sen(\pi - \alpha)$	$\pi - \alpha$	$-cos\alpha$	$cos\ (\pi - \alpha)$
120°						
135°						
150°						
REDUÇÃO DO 3° AO 1 º QUADRANTE						
	SENO			COSSENO		
α	$\pi + \alpha$	$-sen\alpha$	$sen(\pi + \alpha)$	$\pi + \alpha$	$-cos\alpha$	$cos\ (\pi + \alpha)$
210°						
225°						

240°						
REDUÇÃO DO 4º AO 1 QUADRANTE						
	SENO			COSSENO		
α	$2\pi - \alpha$	$-sen\alpha$	$sen(2\pi - \alpha)$	$2\pi - \alpha$	$cos\alpha$	$cos\,(2\pi - \alpha)$
300º						
315°						
330°						

1. A partir do preenchimento das tabelas na redução dos quadrantes 2º, 3º 4º ao 1º quadrante, responda:

   a) Na redução do 2º ao 1° quadrante o que podemos afirmar para os valores de $sen(\pi - \alpha)$ e $sen\alpha$? E os valores de $cos(\pi - \alpha)$ e $-cos\alpha$?

   ___

   ___

   b) Na redução do 3º ao 1º quadrante o que podemos afirmar para os valores de $sen(\pi + \alpha)$ e $-sen\alpha$? E os valores de $cos(\pi + \alpha)$ e $-cos\alpha$?

   ___

   ___

   c) Por que podemos afirmar que $cos(2\pi - \alpha) = cos\alpha$?

   ___

   ___

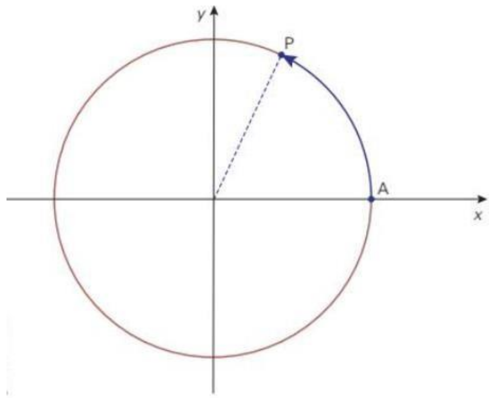
   d) A que conclusão você chega?

   ___

   ___

INTERVENÇÕES FORMALIZANTES (ATIVIDADE 4)

Arcos côngruos

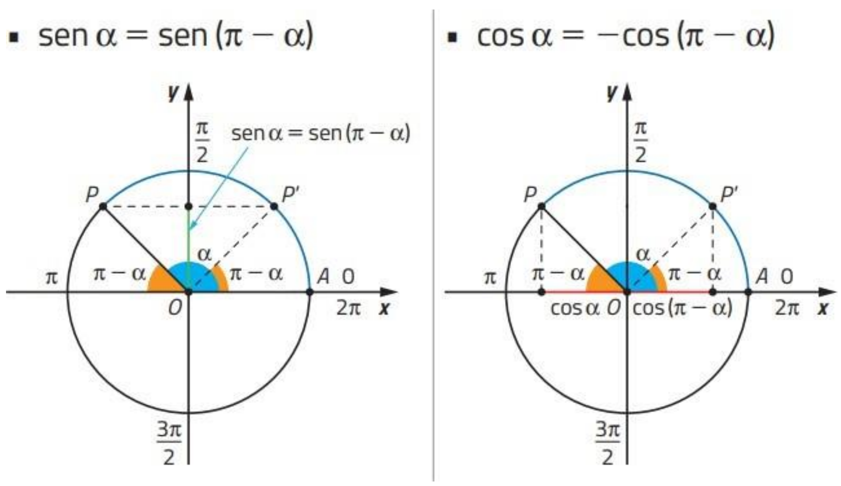


Considere um arco em uma circunferência trigonométrica com origem no ponto A e a outra extremidade no ponto P. pode-se dar um número inteiro de voltas em qualquer um dos sentidos (horário ou anti-horário). Desde inicie no ponto A e finalize no ponto P teremos arcos

Definição: Dizemos que dois ou mais arcos trigonométricos são côngruos ou congruentes entre si caso tenham a mesma extremidade.

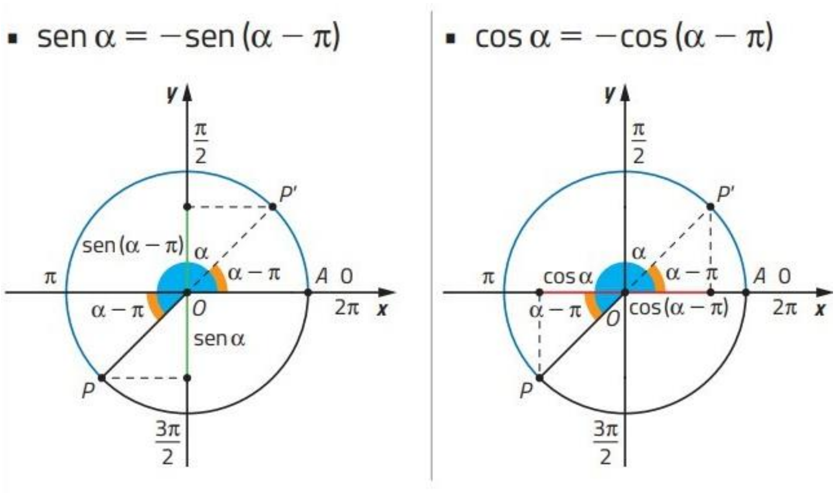
Na redução do 2º para o 1º quadrante

Dado um arco AP de medida angular α, com $\frac{\pi}{2} rad < \alpha < \pi\, rad$, temos assim a seguinte relação:



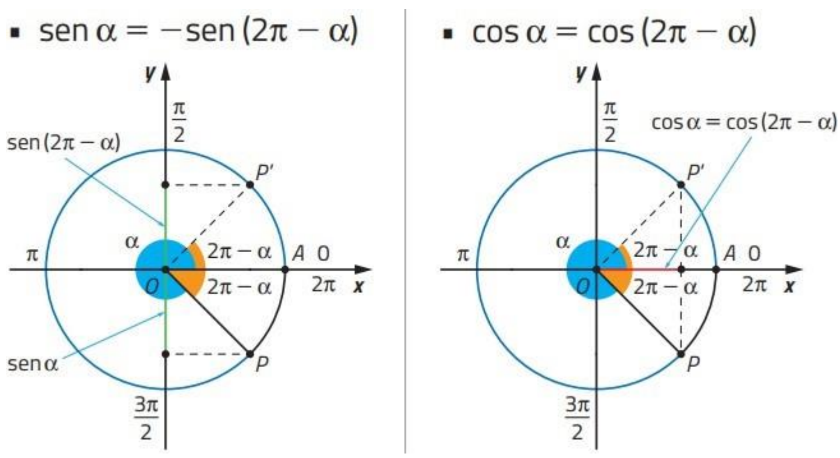
Na redução do 3º para o 1º quadrante

Dado um arco $\widehat{AP}$ de medida angular α, com $\pi\, rad < \alpha < \frac{3\pi}{2}\, rad$, temos assim a seguinte relação:



Na redução do 4º para o 1º quadrante

Dado um arco $\widehat{AP}$ de medida angular α, com $\frac{3\pi}{2}\, rad < \alpha < 2\pi\, rad$, temos assim a seguinte relação:



Questões de fixação propostas

Questão 1- simplifique as expressões

Sendo α uma medida em grau, com $\cos \alpha \neq 0$, simplificar a expressão:

$$E = \frac{\cos(360^\circ - \alpha) - \cos(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)}$$

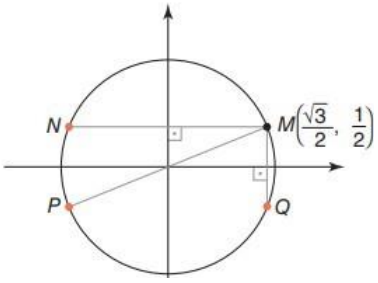
Simplifique a expressão:

$$E = \frac{\cos(180^\circ + x) + \operatorname{sen}(180^\circ + x) + \operatorname{sen}(180^\circ - x)}{\cos(360^\circ - x)},$$

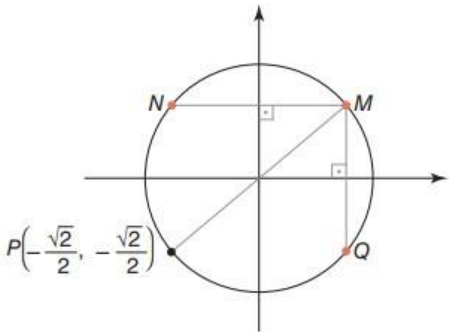
com $\cos x \neq 0$.

Questão 2- Em cada um dos itens a seguir, determine as coordenadas dos pontos assinalados.

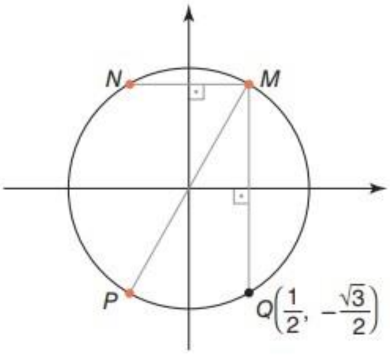
a)



b)

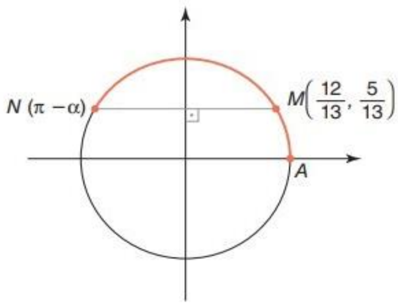


c)



Questão 3 –

Na circunferência trigonométrica abaixo, as coordenadas do ponto M são $\frac{12}{13}$ e $\frac{5}{13}$, e a medida do arco $\widehat{AN}$ na 1ª volta positiva é $\pi - \alpha$.



Calcule:

a) $\operatorname{sen} \alpha$

b) $\cos \alpha$

c) $\cos(\pi + \alpha)$

d) $\operatorname{sen}(-\alpha)$

e) $\cos(2\pi - \alpha)$

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS AO PROFESSOR (ATIVIDADE 4)

Ao aplicar a atividade de redução ao primeiro quadrante utilizando o Aplicativo, recomendamos que o professor oriente os estudantes a explorar cuidadosamente os recursos, incentivando a observação das simetrias e regularidades do ciclo trigonométrico.

De modo geral, os estudantes não devem encontrar grandes dificuldades para completar as tabelas, já que o aplicativo facilita a visualização direta dos valores de seno e cosseno dos ângulos nos diferentes quadrantes. A dinâmica de manipulação do ciclo trigonométrico no GeoGebra permite observar com clareza como os valores dos Senos e Cossenos se comportam à medida que os ângulos são "reduzidos" ao primeiro quadrante.

Com o preenchimento da tabela e a realização das questões reflexivas subsequentes, espera-se que os estudantes consigam identificar e interpretar as seguintes relações:

- $sen(\pi - \alpha) = sen\alpha, cos(\pi - \alpha) = -cos\alpha,$ na redução do 2º ao 1º quadrante;
- $sen(\pi + \alpha) = -sen\alpha, cos(\pi + \alpha) = -cos\alpha$, na redução do 3º ao 1º quadrante;
- $-sen(\pi - \alpha) = sen\alpha, cos(2\pi - \alpha) = cos\alpha$, na redução do 4º ao 1º quadrante

Caso venham ter dificuldade na análise, será no jogo de sinal dos ângulos de $-sen\alpha$. E concluir que $cos(2\pi - \alpha)$ = $cos\alpha$ são iguais pois pertencem ao mesmo eixo horizontal. Para mitigar essa dificuldade, sugerimos que o professor:

- Promova uma **discussão coletiva após o preenchimento das tabelas**, incentivando os alunos a explicarem as relações de sinal com base nas posições dos pontos no ciclo;
- Faça o uso de **cores diferentes ou destaques visuais** para cada quadrante no GeoGebra, facilitando a identificação das transformações e simetrias.

2.6. Atividade 5

ATIVIDADE 5: O giro inteligente: explorando ângulos e coordenadas.

APP 5: https://www.geogebra.org/m/azgt2wfa

OBJETIVOS: Definir a função de Euler a partir da análise do movimento circular de um corredor em uma pista.

MATERIAIS: Desenho de uma pista circular graduada; lápis, borracha, régua ou barbante, calculadora e App GeoGebra.

PROCEDIMENTOS:

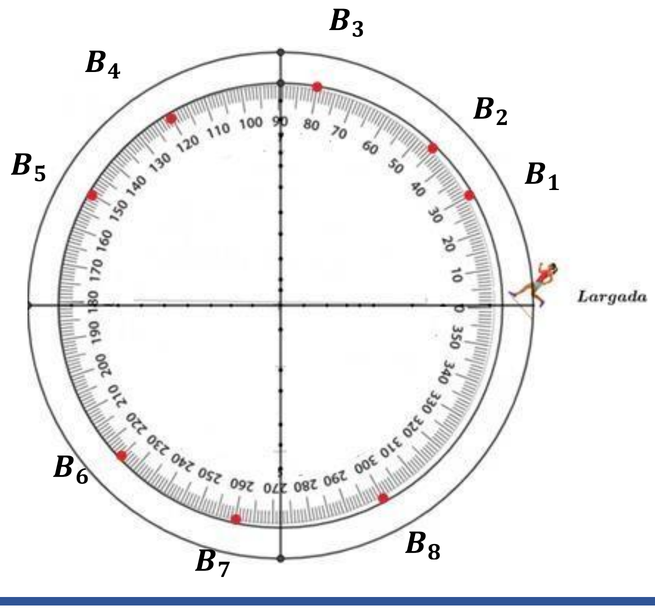
- Passo 1: Acesse o APP 5.
- Passo 2: Leia o texto da situação-problema.
- Passo 3: Para respoder os questionamentos, altere o controle deslizante "β" ou digite na caixa de entrada "ângulo" no APP 5.

Situação- Problema

Correr é um dos exercícios físicos que pode fazer muito bem para o corpo e para a mente. Dentre os benefícios que pode proporcionar são: ajuda na saúde do coração e dos pulmões; aumenta a força e a estabilidade das articulações; reduz o risco de doenças crônicas e contribui na prevenção de sintomas de depressão, ansiedade e estresse.

Suponha que uma atleta esteja treinando em uma pista circular de X metros rasos (Figura 1) em uma das raias. Com um relógio ela cronometrava o seu percurso e, em determinado tempo passava por alguns pontos da pista, distando da largada (ponto A) em alguns metros.

Figura 1 - Pista de atletismo graduada em graus



Vamos considerar que a distância que a atleta percorre, em certos pontos, está associada a um valor numérico real x. A pista está graduada em graus. A partir disso, preencha o quadro a seguir utilizando o APP 5: https://www.geogebra.org/m/azgt2wfa

Encontre o VALOR DE X para cada distância percorrida pela atleta

Quadro 1 – Associar o valor do comprimento a um número real

DISTÂNCIA PERCORRIDA PELA ATLETA EM CERTOS PONTOS	*VALOR DE X Em metros*	*COORDENADAS DE CADA PONTO*
B_1		(,)
B_2		(,)
B_3		(,)
B_4		(,)
B_5		(,)
B_6		(,)
B_7		(,)
B_8		(,)

Responda os questionamentos

1. O valor encontrado X está associado a um único valor do ARCO? Explique.

____

____

2. O que você pode dizer sobre o valor da medida do segmento **BC** quando mudamos o valor do ângulo $\boldsymbol{\beta}$?

____

____

3. A relação criada para obter o valor real X para cada ponto percorrido pela atleta, pode ser caracterizado como uma função? Explique por quê?

____

____

4. Se sua resposta foi sim na pergunta anterior, como você definiria essa função? Lembrando que: Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação de f de A em B (simbolicamente, $f: A \to B$) recebe o nome de aplicação de A em B ou função em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

5. Qual seria o domínio dessa função?

6. Qual a imagem dessa função?

INTERVENÇÕES FORMALIZANTES (ATIVIDADE 5)

Função de Euler e o ciclo trigonométrico

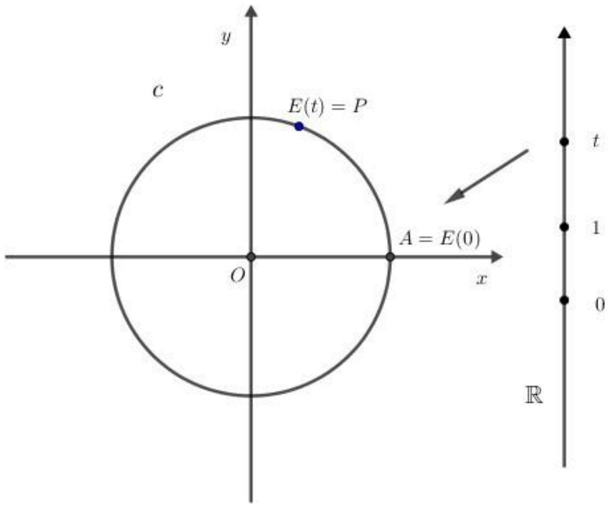
Vamos agora definir uma aplicação E de $\mathbb{R}$ em C, chamada de **função de Euler, e**m referência ao seu criador – o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783)-, que associa a cada número real t um único ponto P da circunferência C, chamado de imagem de t no círculo, do seguinte modo:

$$E: \mathbb{R} \longrightarrow C$$

$$x \longrightarrow E(t) = P(x, y)$$

Intuitivamente essa função E pode ser visualizada imaginando-se C como um carretel onde se enrola a reta ℝ, com E(0)=A(1,0).

Imagine que a reta real é um longo fio, que deverá ser enrolada num carretel. Analogamente pode ser pensado na distância percorrida pela atleta na pista, onde cada ponto é um pedaço X da reta real ℝ.



Assim,

a) *Se* t = 0, *então* $P = A$, *ou seja,* $E(0) = A$;

b) *Se* $t > 0$, *então realizamos a partir de A um percurso de comprimento* t, *no sentido anti-horário, e marcamos P como ponto final do trajeto;*

c) *Se t < 0, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento $|t|$, no sentido horário. O ponto final do trajeto é P.*

Definição: Dizemos que $sen(\beta)$ assume o máximo valor quando for igual a 1 e assume o mínimo valor quando for igual a -1. seno nunca ultrapassará estes valores, pois estamos considerando o raio do ciclo trigonométrico igual a 1.

Definição: seno apresenta sinal positivo quando os valores de β pertencem ao 1º quadrante e 2º quadrante, pois os valores de $sen(\beta)$ aparecem no sentido positivo do eixo y. Quando os valores de $sen\beta$ aparecem no sentido negativo do eixo y, seno apresenta sinal negativo nos quadrantes 3 e 4.

Definição: No intervalo de [0,2π], $sen(\beta)$ cresce nos intervalos [0, $\frac{\pi}{2}$] e [$\frac{3\pi}{2}$, 2π], 1º e 4º quadrantes. Decrescem nos intervalos [$\frac{\pi}{2}$, π] e [π, $\frac{3\pi}{2}$], 2º e 3º quadrantes.

Definição: Dizemos que $cos(\beta)$ assume o máximo valor quando for igual a 1 e assume o mínimo valor quando for igual a -1. cosseno nunca ultrapassará estes valores, pois estamos considerando o raio do ciclo trigonométrico igual a 1.

Definição: cosseno apresenta sinal positivo quando os valores de β pertencem ao 1º quadrante e 4º quadrante, pois os valores de $cos(\beta)$ aparecem no sentido positivo do eixo y. Quando os valores de $cos(\beta)$ aparecem no sentido negativo do eixo y, seno apresenta sinal negativo nos quadrantes 2 e 3.

Definição: No intervalo de [0,2π], $cos(\beta)$ cresce nos intervalos [π, $\frac{3\pi}{2}$] e [$\frac{3\pi}{2}$, 2π], 3º e 4º quadrantes. Decrescem nos intervalos [0, $\frac{\pi}{2}$] e [$\frac{\pi}{2}$, π], 1º e 2º quadrantes.

Questões de fixação propostas

Questão 1: Explorando ângulos com função de Euler simplificada

Lei de formação:

$$E(n) = n - \frac{n}{2}$$

Lei para o ângulo:

$$\theta = E(n).30°$$

Tabela para preenchimento

n	$E(n) = n - \frac{n}{2}$	$\theta = E(n).30°$	$sen(\theta)$	$cos(\theta)$	Quadrante
4					
6					
8					
9					
10					

Questão 2:

A função E(x) associa a cada número real x (em radianos) um **ponto do ciclo trigonométrico**.
Complete a tabela:

x (radianos)	Ponto E(x) no ciclo	Coordenada x (horizontal)	Coordenada y(vertical)
0			
$\frac{\pi}{2}$			
π			
$\frac{3\pi}{2}$			
2π			

Questão 3 – Roda da bicicleta
Uma bicicleta está em movimento, e um ponto de chiclete preso ao pneu percorre uma volta.
Preencha a tabela para os ângulos especiais:

Ângulo percorrido (grau)	Coordenada horizontal	Coordenada vertical	Quantas voltas o chiclete realizou
45°			
360°			
810			
1260°			

RECOMENDAÇÕES DIDÁTICAS AO PROFESSOR (ATIVIDADE 5)

Na atividade proposta, que simula o deslocamento de uma atleta em uma pista circular, utilizando o GeoGebra, o objetivo principal é introduzir e reforçar a compreensão da função de Euler, relacionando o número real x com o ponto B na circunferência, definido pelas coordenadas $(\cos(x), sen(x))$ ao observar o Aplicativo.

De forma geral, avaliamos que os estudantes não terão dificuldades em preencher a tabela com os valores de x e as coordenadas dos pontos B, já que o aplicativo fornece de maneira clara e visual essas informações conforme o movimento da atleta em cada ângulo indicado. A representação dinâmica e a manipulação direta no GeoGebra contribuem para a assimilação inicial do conceito.

As dificuldades mais comuns podem surgir na interpretação conceitual das questões 3, 4, 5 e 6, que exigem que o aluno:

- Retome e compreenda a ideia de função como uma relação entre dois conjuntos, em que a cada número real x corresponde um único ponto B na circunferência;
- Relacione esse ponto ao par ordenado $(cos\ (x), sen(x))$, reconhecendo que essa relação define uma função de variável real com imagem em um ponto do plano;
- Expresse essa associação como uma relação funcional, ou seja, entender que existe uma função que associa a cada valor real x um ponto sobre a circunferência, via os arcos de seno e cosseno.

Para apoiar os estudantes durante essa atividade, sugerimos ao professor:

- Revisar brevemente o conceito de função, com ênfase na ideia de que a cada entrada corresponde uma única saída, usando exemplos simples antes de entrar na representação trigonométrica;
- Mostrar que, no caso da função de Euler, o número real x representa um arco ou ângulo, e a saída é o ponto $(cos\ (x), sen(x))$— ou seja, um ponto na circunferência unitária;
- Utilizar o movimento contínuo da atleta como metáfora concreta para explicar a associação entre o deslocamento angular e a posição no plano;
- Propor discussões em grupo ou atividades complementares que reforcem a escrita da expressão funcional que liga x a $(cos\ (x), sen(x))$.

2.7. Atividade 6

ATIVIDADE 6: Oscilações no plano: a curva do seno.

APP 6: https://www.geogebra.org/m/gg96dstt

OBJETIVO: Descobrir como os ângulos distribuídos no círculo determinam o padrão oscilatório da função seno $f(x) = sen(x)$.

MATERIAIS: esquema da tarefa, lápis, borracha, régua círculos trigonométricos de raio unitário e plano cartesiano, APP GeoGebra.

PROCEDIMENTOS:

- Passo 1: Acesse o APP 6.
- Passo 2: Selecione a caixa com o nome "Seno".
- Passo 3: Movimente o ponto "P" na circunferência e observe o desemho no plano cartesiano.
- Passo 4: Em seguida, no Quadro 1, complete os valores das colunas de $\boldsymbol{y = sen(x)}$ e dos pares ordenados $\boldsymbol{(x, y)}$.
- Passo 5: Após prencher o **Quadro 1**, marquem os valores das coordenadas $\boldsymbol{(x,\ y)}$ (coluna 3) no plano cartesiano e, com o auxílio de uma régua, transportar os pontos do plano cartesiano para o ciclo trigonométrico na **IMAGEM 1.**

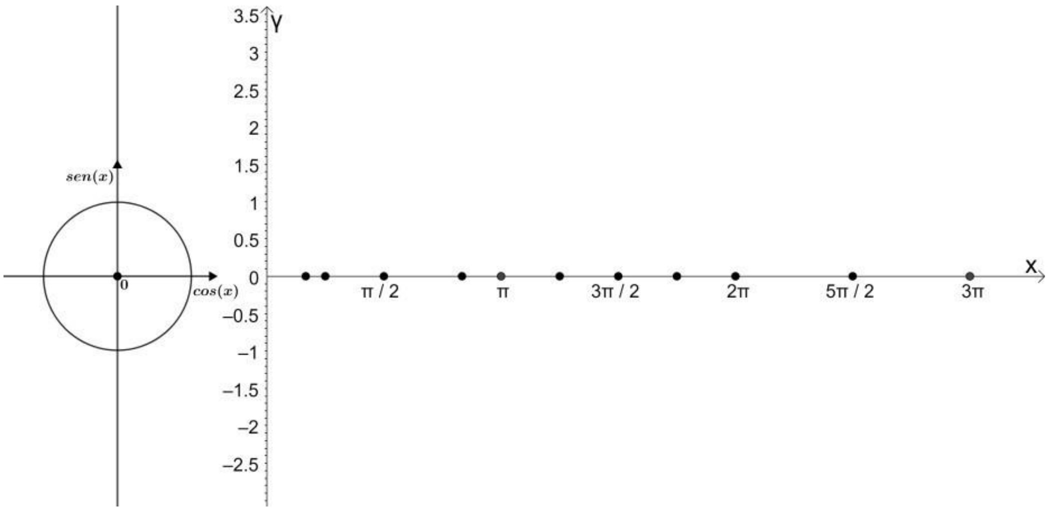
Quadro 1- Pontos no gráfico e no ciclo trigonométrico

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = sen(x)}$	$\boldsymbol{(x, y)}$
0		
$\frac{\pi}{6}$		
$\frac{\pi}{4}$		
$\frac{\pi}{2}$		
$\frac{3\pi}{4}$		
π		
$\frac{5\pi}{6}$		
$\frac{5\pi}{4}$		

ÂNGULOS NOTÁVEIS			
Radiano	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Grau	30°	45°	60º
$sen(x)$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}71$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}87$

$\frac{3\pi}{2}$		
$\frac{7\pi}{4}$		
2π		

IMAGEM 1 - Desenhe o gráfico de seno no plano



Agora responda os seguintes questionamentos:

1. De acordo com os valores encontrado, o gráfico construído se configura como uma função? Justifique.

____

____

2. Se você repetisse o procedimento e encontrasse mais pontos

____

____

3. Ao observar o gráfico e o ciclo trigonométrico, o que eles têm em comum?

____

____

4. Como você definiria o comportamento desse gráfico?

____

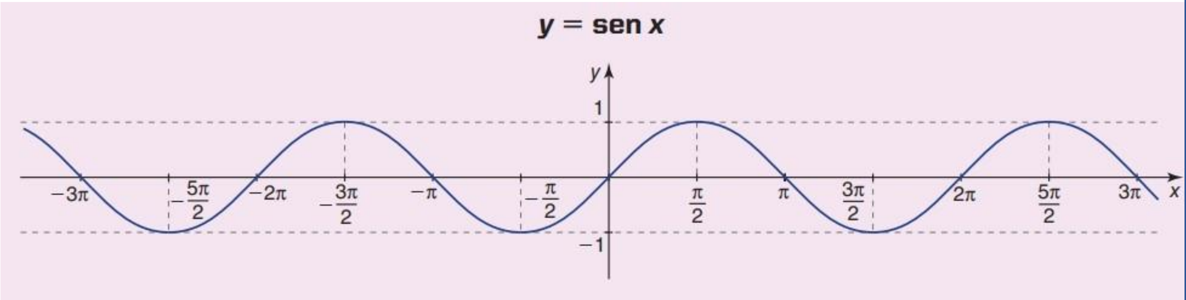
____

INTERVENÇÕES FORMALIZANTES (ATIVIDADE 6)

Podemos associar um número real x qualquer ao seno de um arco que mede x radianos. Para $x = \frac{\pi}{2}$, por exemplo, associamos o número 1, pois $sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, isto é, $(x, y) = (x, sen(x)) = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Definição: Definimos função seno a função f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que a cada número real x associa o seno de um arco de x radianos, ou seja, a cada x associa $sen(x)$.

A representação da função pela lei $f(x) = sen(x)$ é caracterizado como sendo uma curva **senoidal**. O seno de um ângulo (expresso em geral em radianos) é traçada em função de um ângulo θ, descreve uma oscilação repetitiva suave, sendo esta uma onda contínua.



Fonte: Paiva (2010, p.157)

Definição: Período de $f(x) = sen(x)$: A função seno se repete periodicamente num intervalo de $[0,2\pi]$, pois:

$$sen(x) = sen\ (x + 2\pi) = sen\ (x + 4\pi) = \cdots = sen\ (x + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

Propriedade: De modo geral, o período de seno é dado por $sen\ (cx + d)$, com c e d reais com c$\neq$ 0 e $p = \frac{2\pi}{|c|}$

Definição: O domínio D_f (Observando o Eixo X) e o contradomínio CD_f da função seno são iguais a $\mathbb{R}$, ou seja, $D_f = \mathbb{R} = CD_f$. O conjunto imagem de $f(x) = sen(x)$ é o intervalo

de $[-1,1]$, isto é, $-1 \leq sen(x) \leq 1$, no Eixo Y.

RECOMENDAÇÕES DIDÁTICAS AO PROFESSOR (ATIVIDADE 6)

Ao aplicar a atividade sobre a função seno com o uso do GeoGebra, recomendamos que o professor valorize a exploração visual e interativa do gráfico, incentivando os estudantes a observarem como o movimento no ciclo trigonométrico se traduz em uma função no plano cartesiano.

De forma geral, esperamos que os estudantes não encontrem dificuldades em preencher a tabela de valores e construir o gráfico da função, já que o aplicativo mostra de forma dinâmica e clara o comportamento da função seno. Com o apoio das atividades anteriores — especialmente aquelas que abordaram a relação entre graus e radianos, a associação entre arcos e pontos na circunferência, e a construção do ciclo trigonométrico — os alunos devem ser capazes de identificar corretamente os pares ordenados (x, y) e transpor essas informações para o plano cartesiano.

As dificuldades podem surgir, no entanto, durante a interpretação dos questionamentos reflexivos que seguem a construção do gráfico. Os estudantes podem ter dúvidas ao:

- Compreender a função seno como uma função de variável real, onde a cada valor de x (um arco ou ângulo) está associado um único valor de $f(x) = sen(x)$
- Perceber o caráter periódico e oscilatório da função, ou seja, identificar que a curva se repete em intervalos regulares.

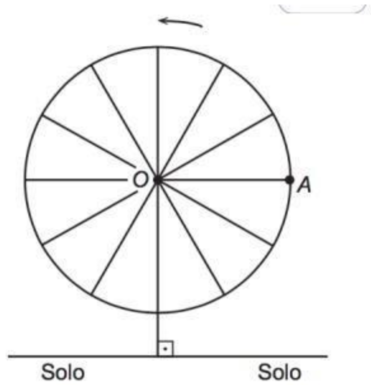
Para lidar com essas dificuldades, sugerimos que o professor:

- Reforce a ideia de função como uma correspondência entre elementos do domínio (valores de x) e da imagem (valores de y);
- Destaque visualmente, no aplicativo, a repetição do padrão do gráfico — por exemplo, mostrando que $sen(x) = sen(x + 2\pi)$
- Estimule os alunos a compararem as formas da curva com o movimento circular do ponto na circunferência, enfatizando que o eixo horizontal representa o arco e o eixo vertical representa a altura do ponto no ciclo.

2.8. Atividade 7

SITUAÇÃO – PROBLEMA

Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:



Disponível em: http://en.wikipedia.org. Acesso em: 22 abr. 2014 (adaptado).

A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto, observe o comportamento do movimento da Roda Gigante construída no aplicativo GeoGebra, quando se altera os parâmetros da função COSSENO do tipo:

$$f(x) = a + b.\ cos(m.\ x + n)$$

Procedimentos: Clique no link APP: https://www.geogebra.org/m/ymfgwjfu . Em seguida selecione as caixas com os nomes "Altura", "Ponto Altura x Tempo", "Função: Altura x Tempo" e "Criar Função. Depois explore o objeto e responda:

1- O que acontece com o gráfico de cor Verde quando modificamos o valor do:

I. Parâmetro a?

____

____

II. Parâmetro b?

____

____

III. Parâmetro m?

____

____

IV. Parâmetro n?

____

____

2- Modifique os parâmetros a,b,m,n de modo que o gráfico de cor verde se aproxime o máximo possível do movimento da roda gigante, de cor vermelha. Depois escreva a expressão que o aplicativo gerou.

ATIVIDADE 7: Altura em Ação: manipulando a onda da roda gigante

APP 7: https://www.geogebra.org/m/v5n4pe98

OBJETIVO: Investigar a relação entre os parâmetros da função e o comportamento do movimento circular simulado da roda gigante.

MATERIAIS: Folha contendo as atividades, lápis, borracha, aplicativo GeoGebra.

PROCEDIMENTOS:

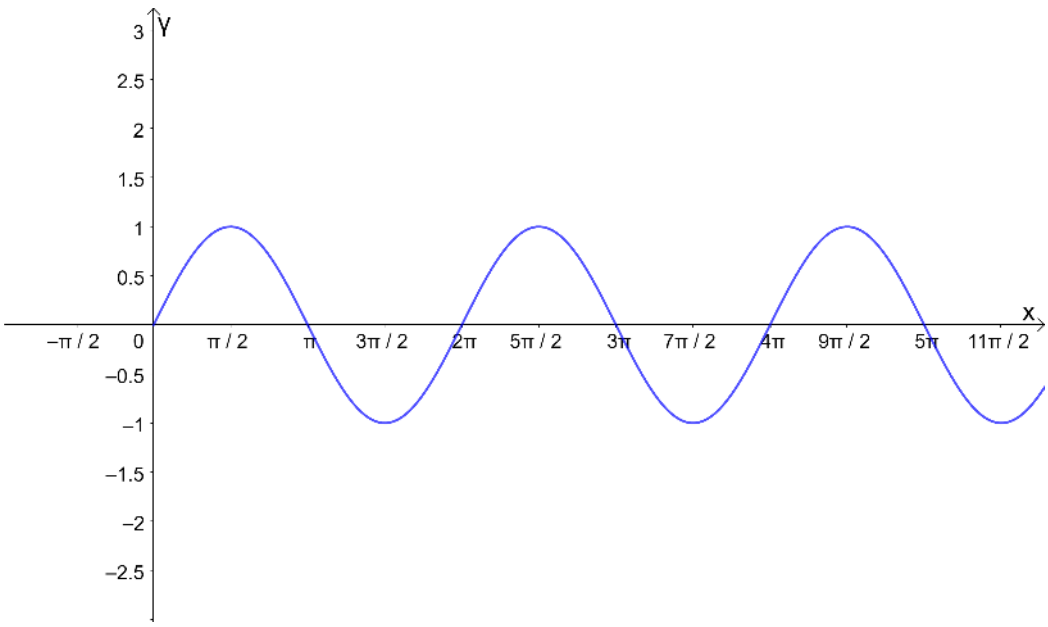
- Passo 1: Primeiro preencha a tabela de cada questão e desenhe o gráfico correspondente a expressão.
- Passo 2: Abra o **APP 7** e mude os valores do controle deslizante que contém os respectivos parâmetros na expressão:

$$f(x) = a + b.sen(c.x + d)$$

- Passo 3: Em seguida observe cada modificação dos gráficos e responda os questionamentos das questões 1,2,3 e 4

1- Soma de uma constante ao valor funcional: $\boldsymbol{f(x) = a + sen(x)}$

x	$y = 3 + sen(x)$	(x, y)
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		



a) Que mudanças você pôde observar no gráfico de $f(x) = 3 + sen(x)$ em relação ao gráfico de $g(x) = sen(x)$?

____

____

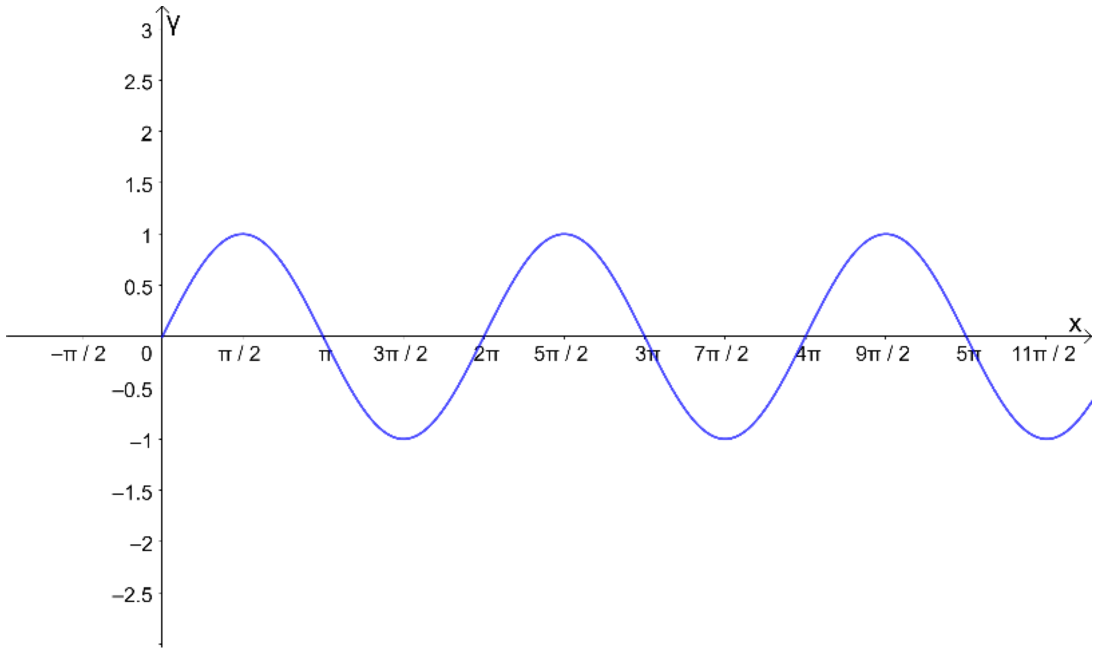
b) Arreste o **parâmetro $\boldsymbol{a}$** para valores positivos (a > 0). Depois arraste-o para valores negativos (a < 0). O que você pôde observar no gráfico da função de seno?

c) Complete o quadro

<table>
<tr><td colspan="3">Função Básica: $g(x) = sen(x)$</td><td colspan="4">Função composta: $\boldsymbol{f(x) = 3 + sen(x)}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">Resultados</td></tr>
<tr><td>Domínio
D_f</td><td>Imagem
Im_f</td><td>Período
P</td><td rowspan="2">$\Longrightarrow$</td><td>Domínio
$\boldsymbol{D_f}$</td><td>Imagem
$\boldsymbol{Im_f}$</td><td>Período
$\boldsymbol{P}$</td></tr>
<tr><td>$\mathbb{R}$</td><td>$[-1,1]$</td><td>2π</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

2- Multiplicação da função por uma constante: $\boldsymbol{f(x) = b.sen(x)}$

x	$y = 3.sen(x)$	(x, y)
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		



a) Que mudanças você pôde observar no gráfico de $f(x) = 3.\, sen(x)$ em relação ao gráfico de $f(x) = sen(x)$?

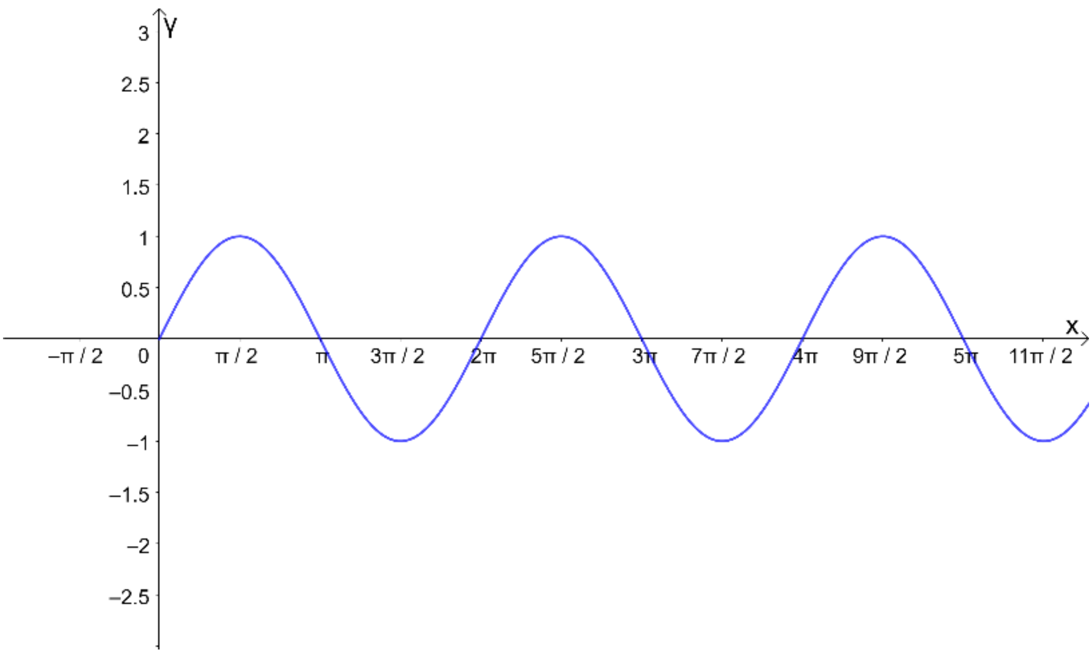
b) Arreste o **parâmetro b** para valores positivos (b> 0). Depois arraste-o para valores negativos (b < 0). O que você pôde observar no gráfico da função de seno?

c) Complete o quadro

<table>
<tr><td colspan="3">Função Básica: $g(x) = sen(x)$</td><td colspan="4">Função composta: $\boldsymbol{f(x) = 3.sen(x)}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">Resultados</td></tr>
<tr><td>Domínio D_f</td><td>Imagem Im_f</td><td>Período P</td><td rowspan="2">$\Longrightarrow$</td><td>Domínio $\boldsymbol{D_f}$</td><td>Imagem $\boldsymbol{Im_f}$</td><td>Período $\boldsymbol{P}$</td></tr>
<tr><td>$\mathbb{R}$</td><td>$[-1,1]$</td><td>2π</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

3- Multiplicação de um argumento por uma constante: $\boldsymbol{f(x) = sen(c.x)}$

x	$y = sen(2.x)$	(x, y)
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		



a) Que mudanças você pôde observar no gráfico de $f(x) = sen(2.x)$ em relação ao gráfico de $f(x) = sen(x)$?

____

____

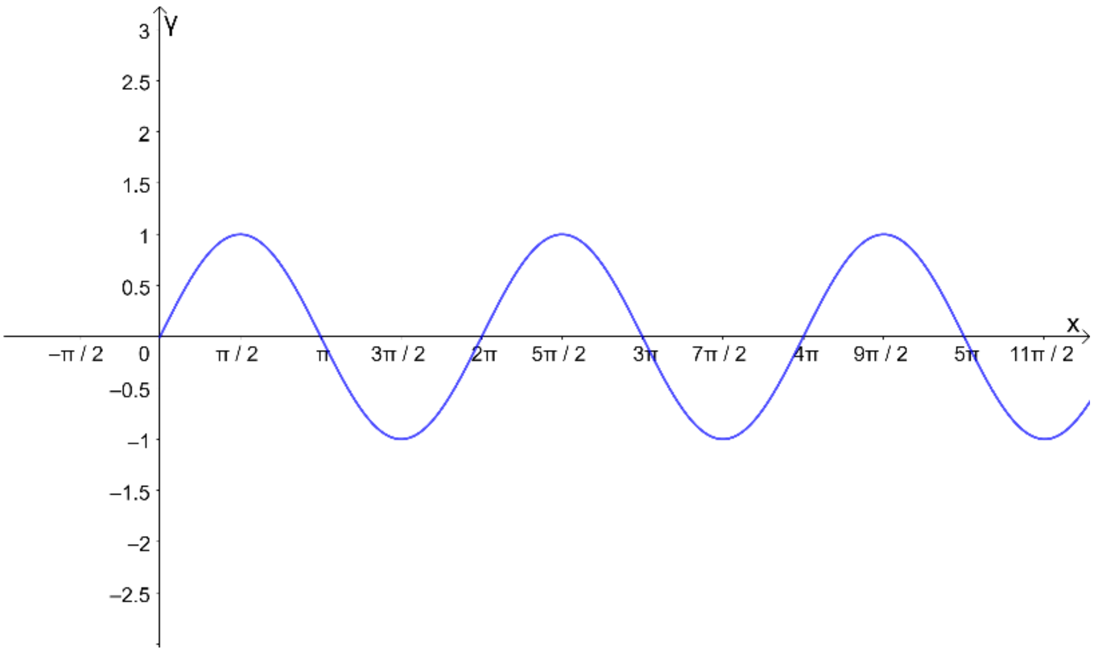
b) Arreste o **parâmetro $\boldsymbol{C}$** para valores positivos (c > 0). Depois arraste-o para valores negativos (c < 0). O que você pôde observar no gráfico da função de seno?

c) Complete o quadro

Função Básica: $g(x) = sen(x)$				Função composta: $\boldsymbol{f(x) = sen(2x)}$		
Resultados						
Domínio D_f	Imagem Im_f	Período P	$\Longrightarrow$	**Domínio** $\boldsymbol{D_f}$	**Imagem** $\boldsymbol{Im_f}$	**Período** $\boldsymbol{P}$
$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	2π				

4- Soma de um argumento por uma constante: $\boldsymbol{f(x) = sen(x+d)}$

x	$y = sen(x+2)$	(x, y)
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		



a) Que mudanças você pôde observar no gráfico de $f(x) = sen(x + 2)$ em relação ao gráfico de $f(x) = sen(x)$?

____

____

b) Arreste o **parâmetro $\boldsymbol{b}$** para valores positivos (d> 0). Depois arraste-o para valores negativos (d < 0). O que você pôde observar no gráfico da função de seno?

____

____

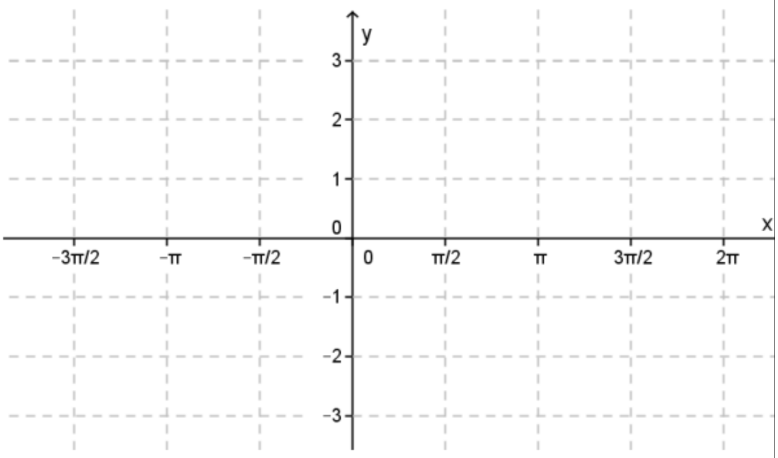
c) Complete o quadro

<table>
<tr><td colspan="3">Função Básica: $g(x) = sen(x)$</td><td colspan="4">Função composta: $\boldsymbol{f(x) = sen(x+2)}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">Resultados</td></tr>
<tr><td>Domínio D_f</td><td>Imagem Im_f</td><td>Período P</td><td rowspan="2">$\Longrightarrow$</td><td>Domínio $\boldsymbol{D_f}$</td><td>Imagem $\boldsymbol{Im_f}$</td><td>Período $\boldsymbol{P}$</td></tr>
<tr><td>$\mathbb{R}$</td><td>$[-1,1]$</td><td>2π</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Questões de fixação propostas

Questão 1: Construa o gráfico da função $f(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

x	$x - \frac{\pi}{4}$	$sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$



Questão 2: Encontre o valor máximo e mínimo das expressões abaixo:

A) $y = 3 - sen(2x)$

B) $y = \frac{3}{2 - sen(3x)}$

Questão 3: (UFRGS-RS) Considere a função real de variável real $f(x) = 3 - 5sen(2x + 4)$. Os valores de máximo, mínimo e o período de $f(x)$ são, respectivamente,

A) $-2, 8, \pi$
B) $8, -2, \pi$
C) $\pi, -2, 8$
D) $\pi, 8, -2$
E) $8, \pi, -2$

Questão 4: A partir das expressões trigonométricas encontrar o domínio, a imagem e o período de cada uma.

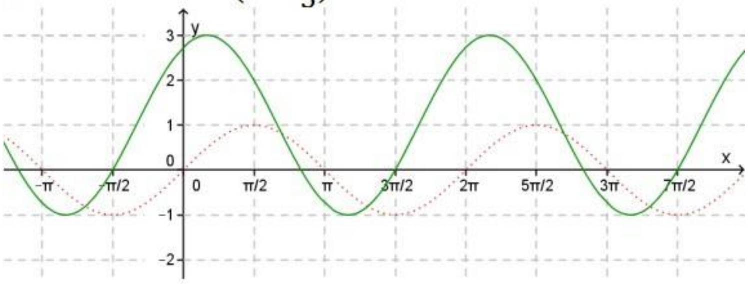
FUNÇÃO	DOMÍNIO	IMAGEM	PERÍODO
$\boldsymbol{f(x) = -3sen(x)}$			
$\boldsymbol{f(x) = sen(2x)}$			
$\boldsymbol{f(x) = sen(x + \frac{\pi}{2})}$			
$\boldsymbol{f(x) = 3 + 2sen(x)}$			

$f(x) = sen(\frac{3\pi}{2} - 4x)$			

Questão 5: A partir do gráfico de cada função trigonométrica quais números dos conjuntos dos Reais representa a Amplitude, o Domínio, o Período e a Imagem.

A)

$$f(x) = 1 + 2sen\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

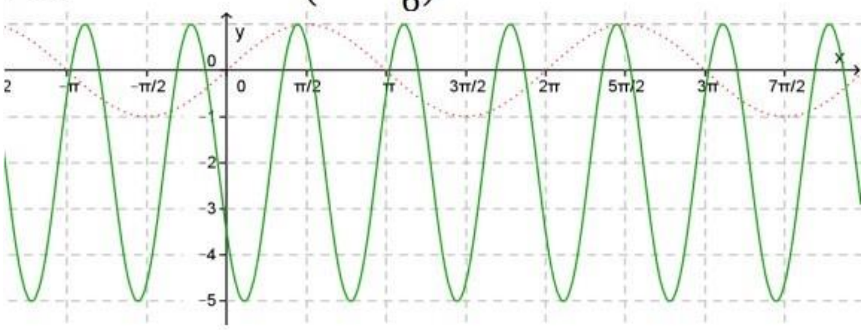


Amplitude: Período:

Domínio: Imagem:

B)

$$f(x) = -2 - 3sen\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$$



Amplitude: Período:

Domínio: Imagem:

RECOMENDAÇÕES DIDÁTICAS AO PROFESSOR (ATIVIDADE 7)

Nesta atividade, propomos uma **situação-problema contextualizada** envolvendo o movimento de uma roda-gigante, modelado pela função do tipo:

$$f(x) = A + B \cdot sen(Cx + D)$$

O objetivo é permitir que os estudantes compreendam, por meio da manipulação no GeoGebra, como os parâmetros A, B, C e D afetam o gráfico da função seno. Essa exploração dinâmica contribui para consolidar o conceito de função periódica com variações e amplia a compreensão do comportamento das funções no plano cartesiano.

Avaliamos que, com a utilização do aplicativo, os estudantes tendem a compreender com relativa facilidade os seguintes efeitos dos parâmetros:

- **B**: controla a amplitude da função. Quando B>0, há dilatação vertical; quando B < 0, ocorre compressão vertical. Além da dilatação/compressão, o gráfico é refletido verticalmente (inversão da concavidade);
- **A**: promove uma translação vertical. Se A>0, o gráfico se desloca para cima; se A<0, para baixo;
- **C**: afeta o período da função. Quanto maior o valor de C, menor será o período (compressão horizontal). Valores menores que 1 dilatam o gráfico horizontalmente;
- **D**: promove uma translação horizontal. Se D>0, o gráfico se desloca para a esquerda; se D<0, para a direita (pela forma $Cx + D$).

Apesar da clareza visual que o GeoGebra oferece, os estudantes **podem enfrentar dificuldades** especialmente em:

- **Diferenciar os efeitos dos parâmetros C e D**, pois ambos afetam o eixo horizontal, mas de formas distintas (compressão/dilatação vs. translação);
- **Associar a manipulação gráfica à interpretação algébrica**, ou seja, entender como a alteração numérica afeta diretamente a equação da função.

Para minimizar essas dificuldades, o professor pode:

- Sugerir aos alunos que **alterem um parâmetro de cada vez**, observando as mudanças no gráfico antes de passarem para o próximo;
- Promover **discussões em grupo**, para que os alunos verbalizem o que observaram e validem suas interpretações em coletivo.
- Estimule a **conexão com contextos físicos**, como o movimento harmônico, rotações, ondas sonoras ou sinais periódicos;

2.9. Atividade 8

ATIVIDADE *8*: Sobe e desce do círculo ao gráfico: função cosseno.

APP 8: https://www.geogebra.org/m/gg96dstt

OBJETIVO: Descobrir como a posição horizontal dos pontos no ciclo trigonométrico (eixo x) constrói a curva da função cosseno $f(x) = cos(x)$.

MATERIAIS: esquema da tarefa, lápis, borracha, régua círculos trigonométricos de raio unitário e plano cartesiano, APP GeoGebra

PROCEDIMENTOS:

- Passo 1: Acesse o APP 8.
- Passo 2: Selecione a caixa com o nome "cosseno".
- Passo 3: Movimente o ponto "P" na circunferência e observe o desemho no plano cartesiano.
- Passo 4: Em seguida, no Quadro 1, complete os valores das colunas de $\boldsymbol{y = cos(x)}$ e dos pares ordenados $\boldsymbol{(x, y)}$.
- Passo 5: Após prencher o **Quadro 1**, marquem os valores das coordenadas $\boldsymbol{(x,\ y)}$ (coluna 3) no plano cartesiano e, com o auxílio de uma régua, transportar os pontos do plano cartesiano para o ciclo trigonométrico na **IMAGEM 1.**

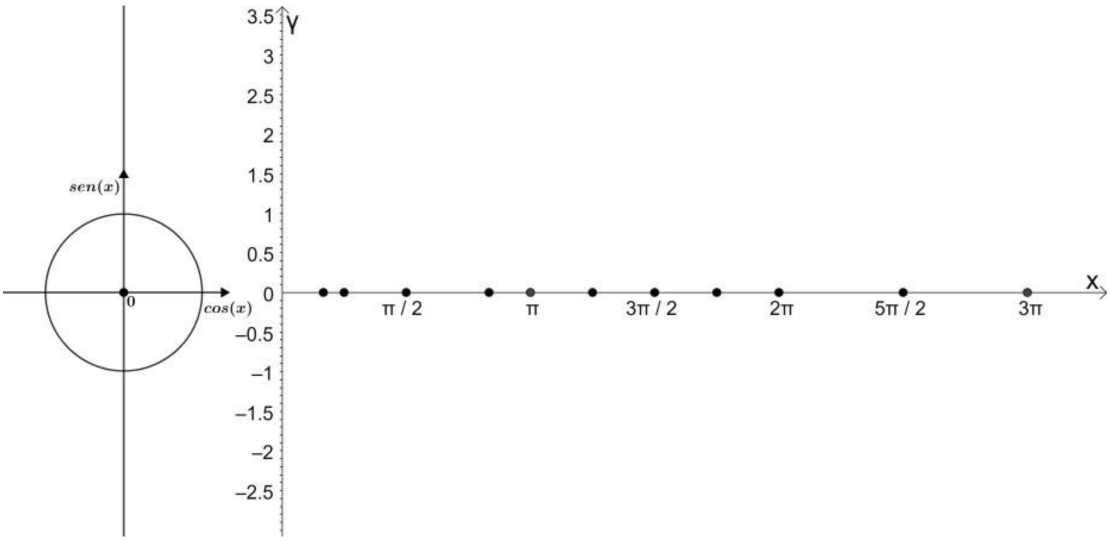
Quadro 1- Pontos no gráfico e no ciclo trigonométrico

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = cos(x)}$	$\boldsymbol{(x, y)}$
0		
$\frac{\pi}{6}$		
$\frac{\pi}{4}$		
$\frac{\pi}{2}$		
$\frac{3\pi}{4}$		
π		
$\frac{5\pi}{6}$		
$\frac{5\pi}{4}$		

ÂNGULOS NOTÁVEIS			
Radiano	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Grau	30°	45°	60º
$cos(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}87$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}71$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$

$\frac{3\pi}{2}$		
$\frac{7\pi}{4}$		
2π		

IMAGEM 1 - Desenhe o gráfico de cosseno no plano



Agora responda os seguintes questionamentos:

1. De acordo com os valores encontrado, o gráfico construído se configura como uma função? Justifique.

____

____

2. Se você repetisse o procedimento e encontrasse mais pontos

____

____

3. Ao observar o gráfico e o ciclo trigonométrico, o que eles têm em comum?

____

____

4. Como você definiria o comportamento desse gráfico?

____

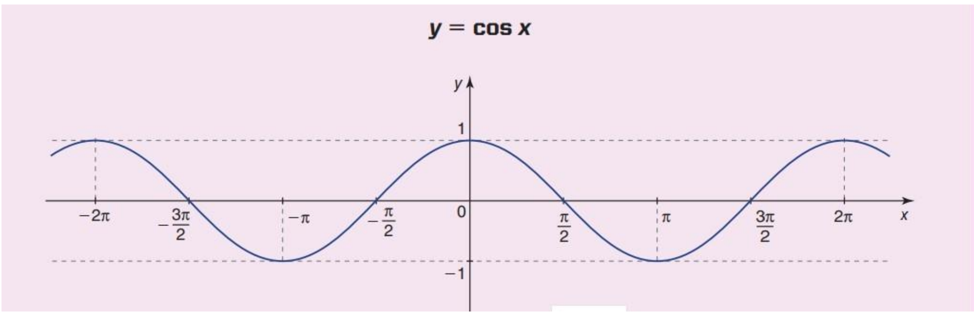
____

INTERVENÇÕES FORMALIZANTES (ATIVIDADE 8)

Podemos associar um número real x qualquer ao seno de um arco que mede x radianos. Para $x = 2\pi$, por exemplo, associamos o número 1, pois $cos(2\pi) = 1$, isto é, $(x, y) = (x, cos(x)) = (2\pi, 1)$

Definição: Definimos função cosseno a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, que a cada número real x associa o cosseno de um arco de x radianos, ou seja, a cada x associa $cos(x)$.

A representação da função $f(x) = cos(x)$ é caracterizado como sendo uma curva **cossenoidal**. O cosseno de um ângulo (expresso em geral em radianos) é traçada em função de um ângulo θ, descreve uma oscilação repetitiva suave, sendo esta uma onda contínua. Observe:



Fonte: Paiva (2010, p.161)

Definição: Período de $f(x) = cos(x)$: A função cosseno se repete periodicamente num intervalo de $[0,2\pi]$, pois:

$$cos(x) = cos(x + 2\pi) = cos(x + 4\pi) = \cdots = cos(x + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

Propriedade: De modo geral, o período de seno é dado por $\cos(cx + d)$, com c e d reais com $c \neq 0$ e $p = \frac{2\pi}{|c|}$

Definição: O domínio D_f (Observando o Eixo X) e o contradomínio CD_f da função cosseno são iguais a $\mathbb{R}$, ou seja, $D_f = \mathbb{R} = CD_f$. O conjunto imagem de $f(x) = cos(x)$ é o intervalo de $[-1,1]$, isto é, $-1 \leq cos(x) \leq 1$, no Eixo Y.

RECOMENDAÇÕES DIDÁTICAS AO PROFESSOR (ATIVIDADE 8)

Esta atividade tem como objetivo explorar a função cosseno, sua representação gráfica e comportamento no plano cartesiano, utilizando o apoio visual e interativo do GeoGebra.

Avaliamos que os estudantes não devem encontrar grandes dificuldades para completar a tabela de valores e construir o gráfico da função, uma vez que o aplicativo demonstra claramente como a função $f(x) = cos\ (x)$f(x) se comporta. Além disso, por já terem realizado a atividade anterior envolvendo a função seno, que possui características semelhantes, é provável que consigam reconhecer padrões e estruturas comuns entre as duas funções.

Com base nas atividades anteriores — especialmente aquelas relacionadas à conversão entre graus e radianos e à relação entre arcos e pontos na circunferência — os alunos devem ser capazes de identificar corretamente os pares ordenados (x, y) e entender que o gráfico representa uma função no plano cartesiano.

2.10. Atividade 9

SITUAÇÃO -PROBLEMA

As ondas sonoras (sons e ruídos, por exemplo) são formadas por vibrações que se propagam em meios materiais, mas não no vácuo. Tais ondas podem ser modeladas por uma função do tipo trigonométrica ou por uma soma de funções desse tipo, com parâmetros associados a características importantes dessa onda, como amplitude e frequência.

Observe um modelo matemático obtido a partir de uma onda sonora construída no aplicativo GeoGebra, que mostra o comportamento do som quando se altera os parâmetros da função $f(x) = A + B.\,cos(C.\,x + D)$.

PROCEDIMENTO: *Clique no link do APP:* https://www.geogebra.org/m/m5adyjuk . Digite na caixa "Tempo do Som" o número (em segundos) para que o som fique tocando. Em seguida, aperte o botão "Tocar". Depois explore o objeto e reflita, respondendo os questionamentos:

1- O que acontece com o som quando modificamos o valor do:

a) Parâmetro A?

____

____

b) Parâmetro B?

____

____

c) Parâmetro C?

____

____

d) Parâmetro D?

____

____

ATIVIDADE *9*: Cosseno Musical: criando sons no gráfico

APP 9: https://www.geogebra.org/m/sxe7zz9b

OBJETIVO: Explorar de que forma a amplitude, deslocamento vertical, frequência e fase alteram a curva da função cosseno.

MATERIAIS: Folha contendo as atividades, lápis, borracha, aplicativo Geogebra.

PROCEDIMENTOS:

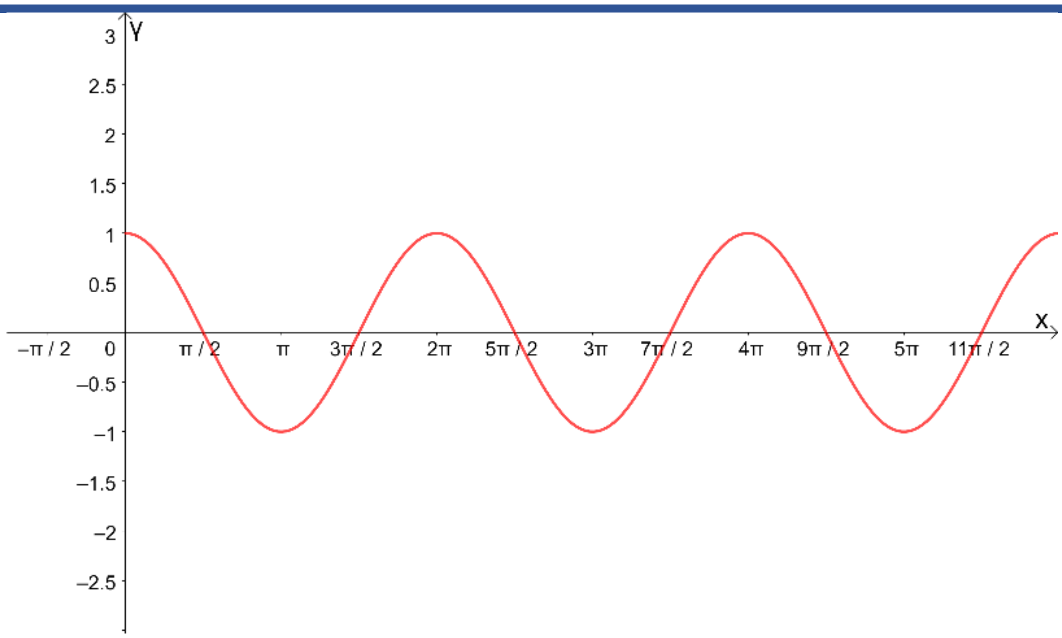
- Passo 1: Primeiro preencha a tabela de cada questão e desenhe o gráfico correspondente a expressão.
- Passo 2: Abra o **APP 9** e mude os valores do controle deslizante que contém os respectivos parâmetros na expressão:

$$\boldsymbol{f(x) = a + b.cos(c.x + d)}$$

- Passo 3: Em seguida observe cada modificação dos gráficos e responda os questionamentos das questões 1,2,3 e 4

1- Soma de uma constante ao valor funcional: $\boldsymbol{f(x) = a + cos\ (x)}$

x	$y = -2 + \cos(x)$	(x, y)
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		



a) Que mudanças você pôde observar no gráfico de $f(x) = -2 + sen(x)$ em relação ao gráfico de $g(x) = \cos(x)$?

____

____

b) Arreste o **parâmetro $\boldsymbol{a}$** para valores positivos ($a > 0$). Depois arraste-o para valores negativos ($a < 0$). O que você pôde observar no gráfico da função de cosseno?

____

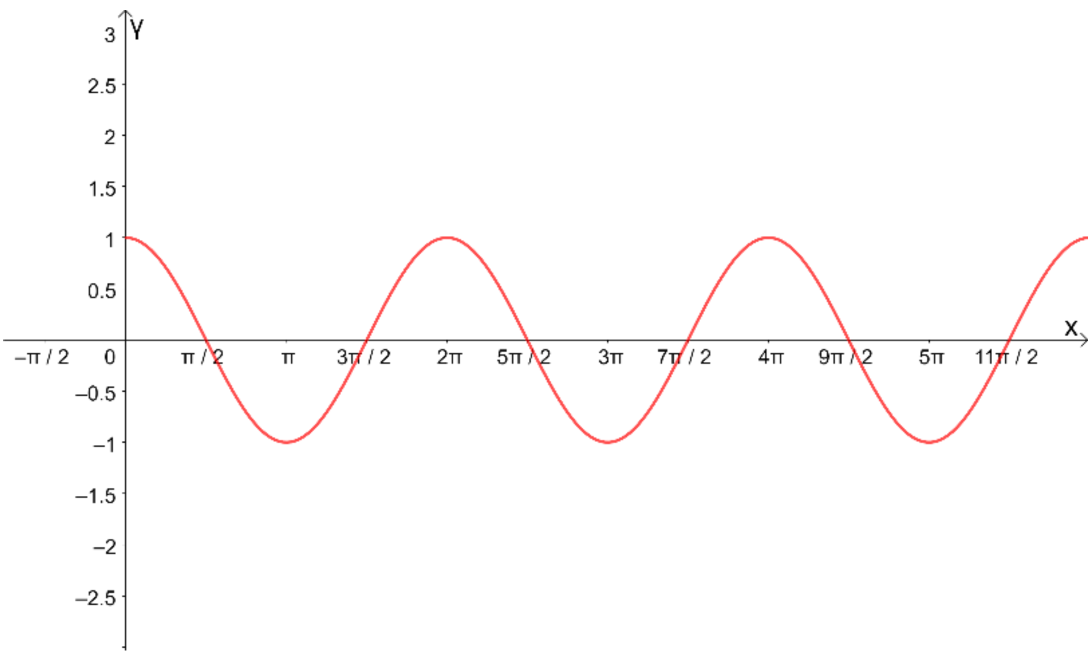
____

c) Complete o quadro

<table>
<tr><td colspan="3">Função Básica: $g(x) = cos(x)$</td><td colspan="4">Função composta: $\boldsymbol{f(x) = -2 + cos(x)}$</td></tr>
<tr><td colspan="7">Resultados</td></tr>
<tr><td>Domínio
D_g</td><td>Imagem
Im_g</td><td>Período
P</td><td rowspan="2">$\Longrightarrow$</td><td>Domínio
$\boldsymbol{D_f}$</td><td>Imagem
$\boldsymbol{Im_f}$</td><td>Período
$\boldsymbol{P}$</td></tr>
<tr><td>$\mathbb{R}$</td><td>$[-1,1]$</td><td>2π</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

2- Multiplicação da função por uma constante: $\boldsymbol{f(x) = b.cos(x)}$

x	$y = -2.cos(x)$	(x, y)
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		



a) Que mudanças você pôde observar no gráfico de $f(x) = -2.cos(x)$ em relação ao gráfico de $g(x) = cos(x)$?

___

___

b) Arreste o **parâmetro b** para valores positivos (b> 0). Depois arraste-o para valores negativos (b < 0). O que você pôde observar no gráfico da função de cosseno?

____

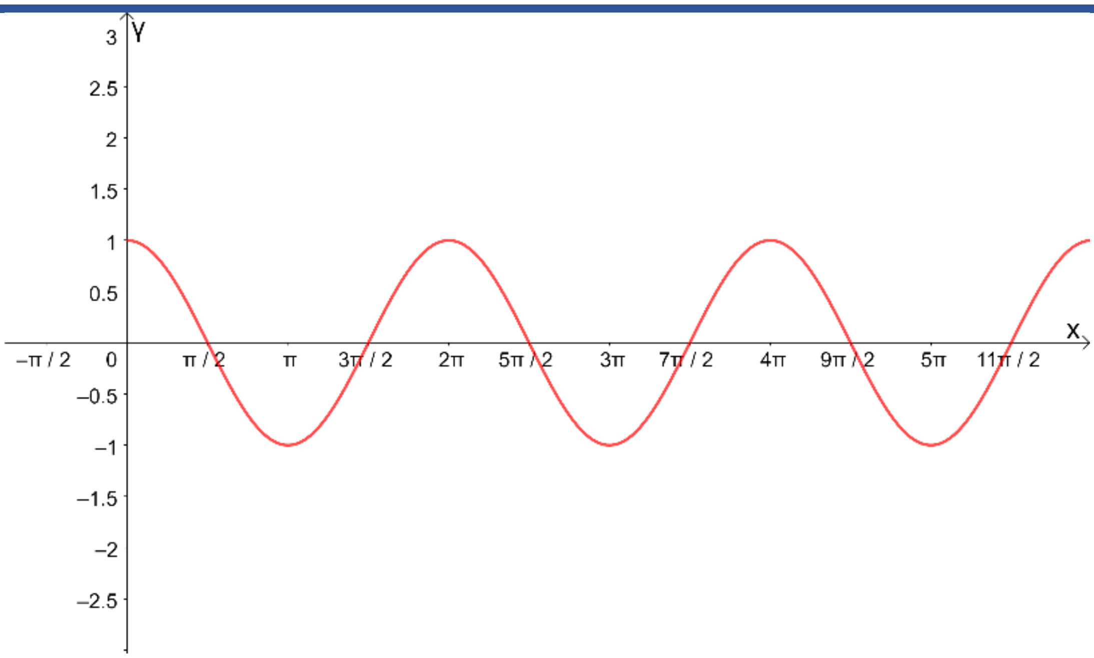
____

c) Complete o quadro

<table>
<tr><td colspan="3">Função Básica: $g(x) = cos(x)$</td><td colspan="4">Função composta: $f(x) = -2.cos(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="7">Resultados</td></tr>
<tr><td>Domínio D_f</td><td>Imagem Im_f</td><td>Período P</td><td rowspan="2">$\Longrightarrow$</td><td>Domínio D_f</td><td>Imagem Im_f</td><td>Período P</td></tr>
<tr><td>$\mathbb{R}$</td><td>$[-1,1]$</td><td>2π</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

3- Multiplicação de um argumento por uma constante: $\boldsymbol{f(x) = cos(c.x)}$

x	$y = cos(3.x)$	(x, y)
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		



d) Que mudanças você pôde observar no gráfico de $f(x) = cos(3.x)$ em relação ao gráfico de $g(x) = cos(x)$?

---

e) Arreste o **parâmetro $\boldsymbol{C}$** para valores positivos (c > 0). Depois arraste-o para valores negativos (c < 0). O que você pôde observar no gráfico da função de seno?

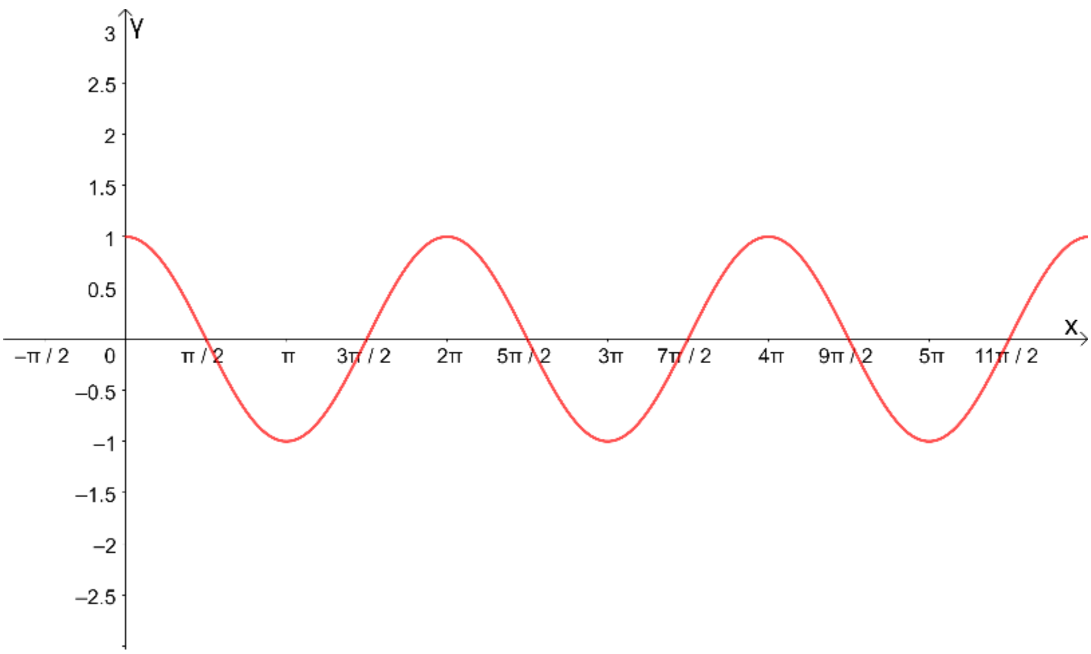
---

f) Complete o quadro

Função Básica: $g(x) = \cos(x)$				Função composta: $\boldsymbol{f(x) = cos(3x)}$		
Resultados						
Domínio D_g	Imagem Im_g	Período P	$\Longrightarrow$	**Domínio** $\boldsymbol{D_f}$	**Imagem** $\boldsymbol{Im_f}$	**Período** $\boldsymbol{P}$
$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	2π				

4- Soma de um argumento por uma constante: $\boldsymbol{f(x) = cos(x + d)}$

x	$y = cos(x - 2)$	(x, y)
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		



d) Que mudanças você pôde observar no gráfico de $f(x) = cos(x - 2)$ em relação ao gráfico de $g(x) = cos(x)$?

____

____

e) Arreste o **parâmetro** $\boldsymbol{b}$ para valores positivos (d> 0). Depois arraste-o para valores negativos (d < 0). O que você pôde observar no gráfico da função de seno?

____

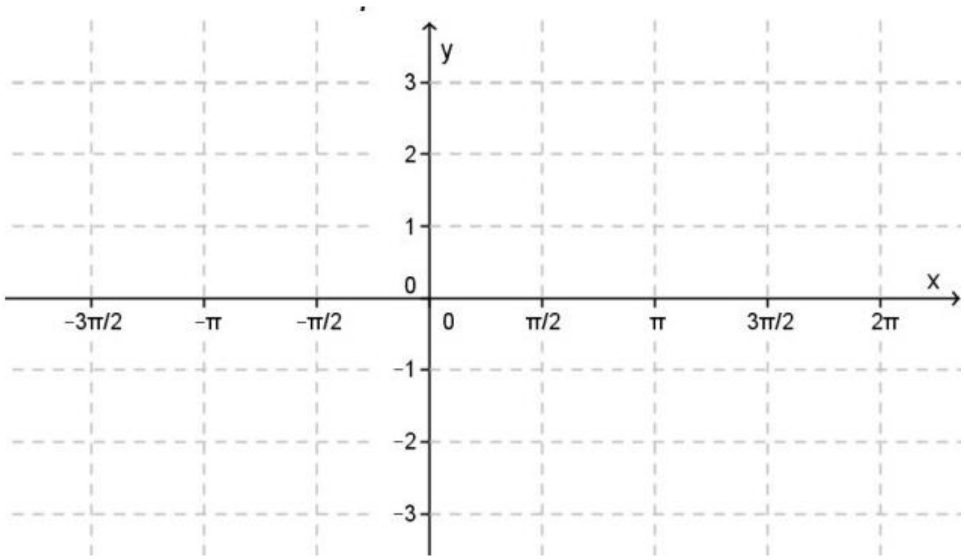
____

f) Complete o quadro

Função Básica: $g(x) = sen(x)$				Função composta: $f(x) \ = cos(\boldsymbol{x} - \mathbf{2})$		
Resultados						
Domínio D_f	Imagem Im_f	Período P	$\Longrightarrow$	**Domínio** $\boldsymbol{D_f}$	**Imagem** $\boldsymbol{Im_f}$	**Período** $\boldsymbol{P}$
$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	2π				

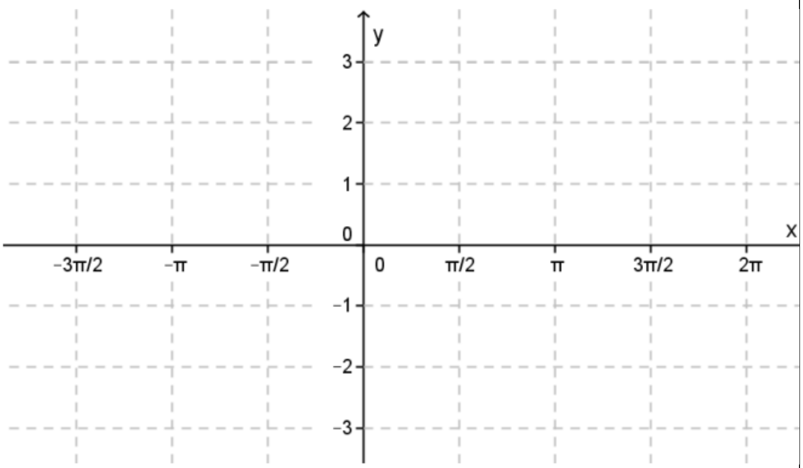
Questões de fixação propostas

Questão 1: Construa o gráfico da função $f(x)1 + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$



Questão 2: Construa o gráfico da função $f(x) = 1 + \cos(x)$

x	$\cos x$	$1 + \cos x$



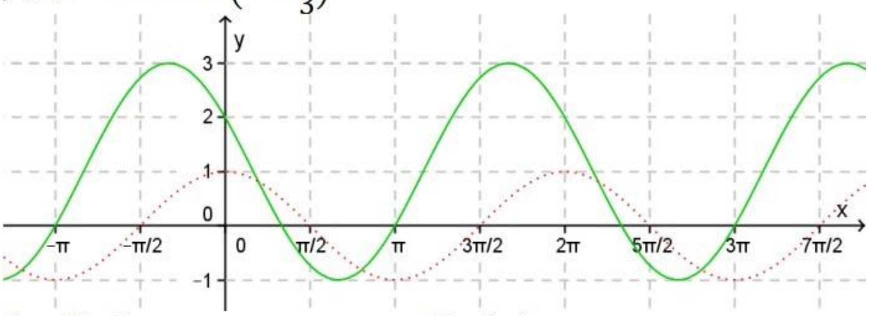
Questão 3: A partir das expressões trigonométricas encontrar o domínio, a imagem e o período de cada uma.

FUNÇÃO	DOMÍNIO	IMAGEM	PERÍODO
$f(x) = -\cos(x)$			
$f(x) = \cos(-3x)$			
$f(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{6})$			
$f(x) = -3 + 2\cos(x)$			
$f(x) = \cos(\frac{3\pi}{2} - 4x)$			

Questão 4: encontre os valores da Amplitude, domínio, imagem e período nos gráficos a seguir.

A)

$f(x) = 1 + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

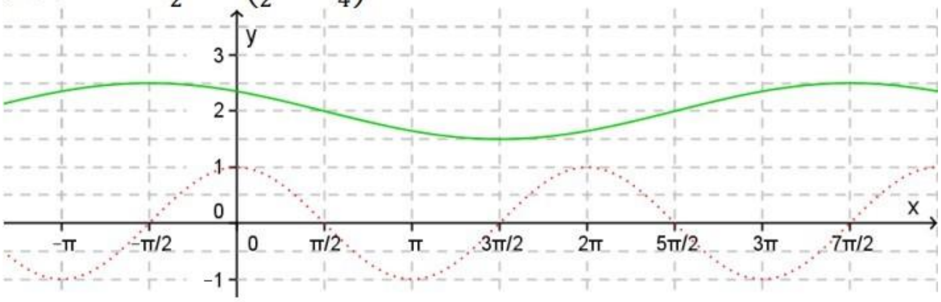


Amplitude: Período:

Domínio: Imagem:

B)

$f(x) = 2 + \frac{1}{2} cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right)$



Amplitude:

Período:

Domínio:

Imagem:

Questão 5: (UFPB) Um objeto desloca-se de tal modo que sua posição x em função do tempo t é dada pela função $x(t) = 4\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$, em que t é dado em segundo e x, em metro. Acerca desse movimento são feitas as seguintes afirmações:

I. No instante $t = 0$, o objeto ocupa a posição $x = 4\ m$
II. O valor máximo que a posição x pode assumir é $5\ m$.
III. O valor mínimo que a posição x pode assumir é $-4\ m$.
IV. O móvel passa pela posição $x = 4$ nos tempos $t = n\pi - \frac{\pi}{4}$, com $n = 1,2,3$.

Estão corretas:
A) I e III
B) II e IV
C) I e II
D) II e III
E) III e IV

RECOMENDAÇÕES DIDÁTICAS AO PROFESSOR (ATIVIDADE 9)

Nesta atividade, propomos uma situação-problema em que os estudantes devem analisar o comportamento de uma onda sonora e, em seguida, relacionar as alterações na tonalidade do som com a expressão matemática

$$f(x) = A + B \cdot cos\,(Cx + D)$$

A utilização do GeoGebra nesta atividade favorece a visualização da função como um modelo de fenômenos reais — neste caso, o som — e permite a manipulação dos parâmetros para que os estudantes compreendam o papel de cada um deles no formato do gráfico e nas características da onda.

Destacamos que a simulação da onda sonora no aplicativo facilita a compreensão da função cosseno como função periódica e modelo de fenômenos oscilatórios. Os estudantes poderão identificar visualmente que:

- A amplitude (constante B) altera a intensidade do som, ampliando (quando B>0) ou comprimindo verticalmente (quando B<) o gráfico.
- A constante A desloca verticalmente o gráfico, simulando variações no volume base: para cima (A>0) ou para baixo (A<).
- A constante C modifica a frequência da onda, influenciando se o som fica mais agudo (frequência maior) ou mais grave (frequência menor), e altera o período da função.
- A constante D altera a fase da função, provocando um deslocamento horizontal do gráfico: para a esquerda (D>0) ou para a direita (D<0), perceptível como um pequeno "bip" que indica mudança de fase.
- O parâmetro de deslocamento ou interrupção do som permite observar pausas ou reinícios do padrão sonoro, simulando variações reais na propagação da onda.

Para superar possíveis dificuldades, sugerimos que o professor:

- Incentive os alunos a comparar diferentes gráficos gerados ao alterar apenas um parâmetro de cada vez.
- Estimule a descrição oral das mudanças percebidas ("o som ficou mais forte", "o gráfico subiu", "a onda se apertou", etc.), conectando linguagem informal com conceitos matemáticos.
- Ofereça tempo adequado para exploração individual e discussão coletiva, valorizando a troca de observações e interpretações.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa sequência didática foi validada por 15 docentes de Matemática, o que nos permitiu confirmar a relevância pedagógica das atividades propostas e sua viabilidade em sala de aula. A validação evidenciou que a abordagem por meio de atividades experimentais, com o uso do GeoGebra, favorece o entendimento conceitual das funções trigonométricas e promove o engajamento dos estudantes em práticas investigativas.

Essa colaboração dos docentes de matemática permitiu, de maneira mais precisa, melhorar a nossa Sequência Didática diante dos desafios enfrentados no cotidiano escolar, com informações valiosas sobre sua experiência profissional, metodologias utilizadas, percepção dos alunos em relação ao conteúdo e as dificuldades recorrentes no ensino da Matemática.

Concluímos, portanto, que a sequência didática cumpre seu papel de aproximar teoria e prática, promovendo uma aprendizagem mais ativa, investigativa e reflexiva. Recomendamos que sua aplicação seja feita com planejamento e mediação atenta do professor, considerando as possíveis dificuldades dos estudantes e estimulando sempre o raciocínio crítico e a construção colaborativa do conhecimento matemático.

O material didático elaborado para o ensino das funções seno e cosseno foi cuidadosamente pensado para apoiar a prática pedagógica com atividades significativas, contextualizadas e integradas ao uso de tecnologias digitais. Ele reúne conceitos, ideias e propostas que favorecem a visualização e a compreensão dos conteúdos, tornando o ensino das funções trigonométricas mais acessível e dinâmico.

Esperamos que este conjunto de atividades contribua de forma efetiva para o planejamento das suas aulas, ampliando as possibilidades de abordagem dos conteúdos e servindo também como referência para outras propostas didáticas. Que este material inspire não apenas novas práticas de ensino, mas também reflexões contínuas sobre os processos de ensino, aprendizagem e avaliação da Matemática.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M., DOUDY, R., MORENO, L., GÓMEZ, P. (Ed.). **Ingeniería didáctica em educación matemática**. 1ª edição, Bogotá, 1995. Disponível em: http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf#page=105 Acessado em 08/10/2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, DF: MEC, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN +)**. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2006.

CORRÊA, Rosana dos Passos. **O Ensino de Funções Trigonométricas por Atividades**. 2016. 390 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2016. Acessado em 11/02/2020. Disponível em: https://ccse.uepa.br/ppged/wpcontent/uploads/dissertacoes/10/rosana_dos%20passos_correa.pdf

FRIZZARINI, Silva Teresinha; CARGNIN, Claudete. ***Educ. Matem. Pesq****., São Paulo, v.21, n.5, pp. 315-325, 2019.*

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e Técnicas de pesquisa Social**. 6 ed. – São Paulo: Atlas, 2008

MENEGHELLI, Juliana; POSSAMAI, Janaína Poffo. ***Educ. Matem. Pesq****., São Paulo, v.21, n.2, 491-512, 2019*

NASCIMENTO, Carlos Pereira do. **O uso do geogebra no ensino das funções trigonométricas no 2° ano do ensino médio IFMT campus cuiabá**. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas. Universidade do Vale do Taquari Univates. Lejado, RS, 2019. 135 f.

OLIVEIRA, Eliane Santana de Souza**. Estudo das funções seno e cosseno por meio de um modelo didático alternativo integrado ao geogebra**. Tese (Doutorado) – Universidade Federal da Bahia. Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências. Salvador, 2020. 322 f.

ONUCHIC, L. De La R. **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONCEPÇÕES E PERSPECTIVAS. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

SÁ. Pedro Franco de. Possibilidades do ensino de Matemática por Atividades. Belém: **SINEPEM**, 2019 Disponível em http://sinepem.sbempara.com.br/file/V7.pdf.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araujo.- 2. Reimpr. – Rio de Janeiro: interciência, 1995.

SÁ, Pedro Franco de. Possibilidades de resolução de problemas em aulas de matemática. II simpósio Nacional Sobre Ensino e Pesquisa de Matemática no contexto da educação, ciência e tecnologia- **SINEPEM**. IFPA campus Belém. Belém, 2021

SÁ, Pedro F. de, MAFRA, José Ricardo Souza; FOSSA, John Andrew. O ensino de matemática por atividades experimentais na educação matemática. **Revista Cocar**. Edição Especial N.14/2022 p.1-20 ISSN: 2237-0315 Dossiê: Tendências de Educação Matemática.

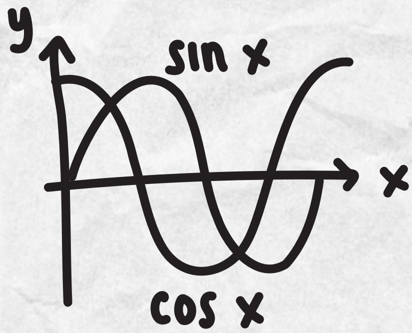
SILVA, Tatiane Ferreira da **Uma sequência didática para o ensino de funções trigonométricas**: uma investigação sobre as contribuições do GeoGebra. Dissertação (Mestre em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Universidade Franciscana. – Santa Maria, 2018

VISEU, Floriano; ROCHA, Helena. **Educ. Matem. Pesq**., São Paulo, v.20, n.2, 113-139, 2018

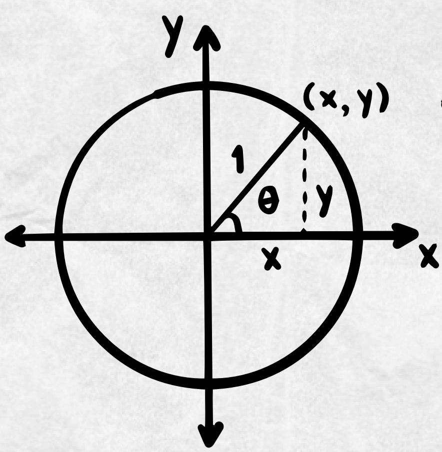
AUTORES

Josué Augusto Gonçalves da Silva – Professor da Educação Básica atuante desde 2022. Possui Graduação em Matemática pela Universidade Federal do Pará (UFPA) (2014-2018). Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática. Graduando em licenciatura de Física pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Mestrando em Ensino de Matemática pela Universidade do Estado do Pará (UEPA).

Pedro Franco de Sá - Possui Graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1988), Mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Pará (1996) e Doutorado em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (2003). Foi o diretor, no período de junho de 2012 a maio de 2016, do Centro de Ciências Sociais e Educação da Universidade do Estado do Pará onde é professor Titular de Educação Matemática do Departamento de Matemática, Estatística e Informática, desde 2013. É docente fundador do Programa de Mestrado em Educação do CCSE- UEPA, docente fundador da REAMEC e docente fundador do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do CCSE-UEPA. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: educação matemática, ensino de matemática por atividades, matemática no ensino fundamental e uso de novas tecnologias em sala de aula, em particular uso didático da calculadora.



Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo 66113-200 Belém-PA



$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

$$\mathrm{Sin}^2 A + \mathrm{Cos}^2 A = 1$$