UNIVERSIDADE ESTADUAL DO RIO GRANDE DO SUL

UNIDADE UNIVERSITÁRIA EM GUAÍBA

PROGRAMA DE PÓS - GRADUAÇÃO EM DOCÊNCIA PARA CIÊNCIAS, TECNOLOGIAS, ENGENHARIAS E MATEMÁTICA

FELIPE DE MORAES SERAFINI

PRODUTO EDUCACIONAL PARA A SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA A APRENDIZAGEM DAS HARMÔNICAS UTILIZANDO A SÉRIE DE FOURIER

Guaíba

2025

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)

S482s Serafini, Felipe de Moraes.

Sequência didática para a aprendizagem das harmônicas utilizando a Série de Fourier / Felipe de Moraes Serafini. - Guaíba/RS, 2025.

25 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Éder Julio Kinast.

Produto Educacional (Mestrado Profissional em Docência para Ciências, Tecnologias, Engenharias e Matemática) - Universidade Estadual do Rio Grande do Sul, Unidade Universitária em Guaíba, 2025.

1. Séries de Fourier. 2. Sequência didática. 3. Tecnologias educacionais. 4. Aprendizagem significativa. 5. Ensino de Engenharia. I. Kinast, Éder Julio.

Daniella Vieira Magnus - Bibliotecária - CRB 10/2233

Onda quadrada

A série de Fourier para uma onda quadrada é uma maneira de expressar a função periódica como uma soma infinita de funções senoidais. A denominação “quadrada” é usualmente utilizada para ondas com formato retangular, pois um ajuste de escala pode ser feito para que a onda se pareça quadrada para quem vê o gráfico. Uma das formas de se definir uma onda quadrada é por valores alternados de 1 e 0 em intervalos iguais, tal como ilustrado na Figura 1, abaixo.

Para exemplificar esse resultado, vamos realizar o desenvolvimento em série de Fourier de uma função periódica simples: a conhecida onda quadrada, cujo gráfico é exibido na figura abaixo. Esta função pode representar uma sequência de bits com valores 1 e 0.

Figura 1 – exemplo de onda “quadrada” de período 2π com valores da função de 0 a 1.

Para a onda quadrada periódica acima, com período 2π, temos o seguinte

$$f(x) = \{1, se\ \ 0 \leq x \leq \pi\ 0, se\ \ \pi < x \leq 2\pi$$

O mesmo padrão se repete para todos os períodos subsequentes. Esse é um aspecto importante de uma função periódica: ao analisar o que ocorre em um único período, pode-se prever o comportamento em todos os demais períodos.

O período de repetição da função é representado pelo parâmetro L. A função acima tem período $L = 2\pi$, pois o padrão se repete a cada intervalo de tamanho 2π. Veja o gráfico acima: os valores da função no intervalo $[0;\ 2\pi]$ são iguais aos valores função no intervalo $[2\pi;\ 4\pi]$, e isto se repete indefinidamente.

Para ilustrar como podemos representar esta onda quadrada em função de senos e cossenos, sem nos preocuparmos neste momento em como chegar nestes resultados, definimos uma série de coeficientes utilizados na Série de Fourier.

Define-se o coeficiente a_0 como a média da função no período. Visto que a função acima alterna igualmente entre os valores 0 e 1, tem-se que $a_0 = \frac{1}{2}$.

Os demais coeficientes da Série de Fourier são:

- $a_n = 0,\ para\ todo\ n\ par$
- $a_n = \frac{2}{n\pi},\ para\ todo\ n\ ímpar$
- $b_n = 0$

Na próxima aula será visto porque estes coeficientes têm estes valores. Note que os valores de a_n depende do n ser par ou ímpar. Quando n for par, $a_n = 0$, quando n for ímpar $a_n = \frac{2}{n\pi}$. Isto será importante na hora de escrever a expressão final da Série de Fourier.

Agora, utilizamos os coeficientes acima na expressão da Série de Fourier, que é dada por

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \left(\frac{2nx}{L}\right) + b_n \cdot cos\ cos\ \left(\frac{2nx}{L}\right)\right]$$

Como $b_n = 0$, os termos com a função cosseno são eliminados. Inserindo os valores $L = 2\pi$, $a_0 = \frac{1}{2}$ e $a_n = \frac{2}{n\pi}$ (para n ímpar), reescrevemos a expressão acima para

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cdot \left(\frac{2n\pi x}{2\pi}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (nx)$$

O fator constante $\frac{2}{\pi}$ pode "sair" do somatório e pode-se simplificar 2π que está na função seno. Além disso, é importante lembrar que o somatório acima só deve ser escrito com valores ímpares de n, pois conforme dito anteriormente, $a_n = 0$ para valores pares de n.

Escrevendo os termos do somatório para alguns valores de n tem-se:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} sen(x) + \frac{2}{3\pi} sen(3x) + \frac{2}{5\pi} sen(5x) + \frac{2}{7\pi} sen(7x) + \cdots$$

Como somente os valores de ímpares de n NÃO são nulos na expressão acima, é comum redefinir o índice do somatório, substituindo n por $2n - 1$, pois $2n - 1$ sempre resulta em valores ímpares. Assim:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot (nx) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cdot \left((2n-1)x\right)$$

Quanto mais acrescentamos termos da Série de Fourier na função, melhor será a aproximação da série para a função a ser representada. Cada termo é chamado de harmônico. Vejamos os exemplos abaixo:

Figura 2 - com 5 harmônicos

Figura 3 - com 10 harmônicos

Figura 4 - com 15 harmônicos

Os harmônicos são importantes em diversas áreas, como música, eletrônica, acústica e telecomunicações. Por exemplo, na música, os harmônicos determinam o timbre dos instrumentos musicais, enquanto na eletrônica, a presença de harmônicos indesejados pode afetar a qualidade do sinal em sistemas de áudio e comunicação.

Os harmônicos são cruciais na engenharia elétrica devido ao seu impacto na qualidade da energia, eficiência do sistema e segurança dos equipamentos. Eles podem causar distorção de formas de onda, sobreaquecimento de dispositivos, perdas adicionais de energia, ressonância e interferência eletromagnética (EMI), afetando dispositivos sensíveis. A presença de harmônicos também pode comprometer a operação de dispositivos de proteção e medição. Normas regulatórias exigem a limitação de níveis de harmônicos para garantir a operação segura e eficiente dos sistemas, o que pode acarretar custos adicionais para a instalação de filtros harmônicos ou outros dispositivos de correção.

A análise dos harmônicos é frequentemente realizada utilizando a série de Fourier, que permite decompor um sinal periódico em suas componentes harmônicas.

Exemplo 1:

Encontre a Série de Fourier de uma onda quadrada, de período $L = 1$, cuja definição é:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & se -L \le t \le 0 \\ L, & se\ 0 \le t \le L \end{cases}, \quad f(t+2L) = f(t)$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)dt = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} Ldt = [t]_0^L = L$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} L\,cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dx = \int_{0}^{L} cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dx = \frac{L}{n\pi}\left[sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right]_0^L = 0$$

$$a_n = 0 \qquad para\ n = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} L\,sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dx = \int_{0}^{L} sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dx = -\frac{L}{n\pi}\left[cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right]_0^L$$

$$= -\frac{L}{n\pi}[cos(n\pi) - 1] = \frac{L}{n\pi}[1 - cos(n\pi)]$$

$Se\ n$ é $ímpar, então\ b_n = \frac{2L}{n\pi}$ $e\ se\ n\ for\ par, então\ b_n = 0.$ $Assim, b_n\ assume\ a\ seguinte\ forma$:

$$b_n = \begin{cases} \frac{2L}{n\pi} & para\ n\ ímpar \\ 0 & para\ n\ par \end{cases}$$

Portanto, $f(t)$ assume a seguinte forma:

$$f(t) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi}\left[sen\left(\frac{\pi t}{L}\right) + \frac{1}{3}sen\left(\frac{3\pi t}{L}\right) + \frac{1}{5}sen\left(\frac{5\pi t}{L}\right) + \cdots\right]$$

$$f(t) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{sen\left[\frac{(2n+1)\pi t}{L}\right]}{(2n+1)}$$

<u>Exemplo 2:</u>

Seja um sinal de onda triangular, com período $L = 2$, definido analiticamente pelas equações sujeitas às seguintes condições dadas:

$$f(t) = \begin{cases} -t, & -1 < t < 0 \\ t, & 0 \le t < 1 \end{cases}, \quad f(t+2) = f(t)$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)dt = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0} -tdt + \int_{0}^{1} tdt\right] = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)cos\left(\frac{\pi nt}{L}\right)dt = \int_{-1}^{1} f(t)\ cos\ cos\ (n\pi t)\ dt$$

$$= \int_{-1}^{0} -tcos(n\pi t)dt + \int_{0}^{1} tcos(n\pi t)dt = \frac{2}{n^2\pi^2}[cos\ cos\ (n\pi)\ - 1]$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)sen\left(\frac{\pi n t}{L}\right)dt = \int_{-1}^{1} f(t)sen(n\pi t)dt = \int_{-1}^{0} -tsen(n\pi t)dt + \int_{0}^{1} tsen(n\pi t)dt = 0$$

Uma vez que,

$cos(n\pi) = \{1,\ n \text{ é } par\ -1,\ n \text{ é } ímpar$, temos:

$$a_0 = \frac{1}{2},\ \ a_1 = \frac{-4}{\pi^2},\ \ a_2 = 0,\ \ a_3 = \frac{-4}{9\pi^2},\ \ a_4 = 0,\ \ a_5 = \frac{-4}{25\pi^2},\ \ a_6 = 0,\ \ a_7 = \frac{-4}{49\pi^2}$$

E substituindo os valores encontrados de a_0 , a_n e b_n , obtemos a seguinte representação em Série de Fourier para a onda triangular

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} cos\ cos\ (\pi t)\ - \frac{4}{9\pi^2} cos\ cos\ (3\pi t)\ - \frac{4}{25\pi^2} cos\ cos\ (5\pi t)\ - \frac{4}{49\pi^2} cos\ cos\ (7\pi t)\ - \cdots,$$

Ou mais compactamente,

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{cos[(2k-1)\pi t]}{(2k-1)^2}$$

<u>EXPERIMENTAÇÃO – aula prática:</u>

Acesse o link a seguir: https://phet.colorado.edu/sims/html/fourier-making-waves/latest/fourier-making-waves_pt_BR.html

Objetivo de aprendizagem: Ambientar-se com o simulador phet Colorado

Abra a simulação "Fourier: Construindo Ondas", no item "Discreta";
Habilite o áudio para ouvir o som;
Reduza o zoom da escala gráfica clicando no botão "-";
Ao final, para recomeçar, aperte o botão "Reset".

- Observe que inicialmente vemos um único sinal, portando os gráficos "Harmônicos" e "Soma" são idênticos.
- Reduza o zoom ao máximo da escala gráfica em "Soma" clicando no botão "-";
- Altere a forma de onda, que originalmente está na forma senoidal, para a forma de onda quadrada;
    - *Esse comando é realizado na parte lateral direita da tela.*
- Perceba que o resultado final em "Soma" é um gráfico na forma quadrada.
- Percebemos que o número máximo de harmônicos neste simulador são 11 (onze), mas e se pudéssemos acrescentar uma quantidade infinita de harmônicos?
- Para responder essa pergunta podemos clicar e marcar a opção "Harmônicos Infinitos" na parte inferior da tela e observar o que acontece com o gráfico "Soma". O que foi possível observar no gráfico e por quê?
- Analise os valores das amplitudes dos harmônicos localizados em "Amplitude". Foi possível notar algum padrão?
- O sinal se manterá desta maneira até que ponto?
- Qual o motivo dos harmônicos pares serem zeros?

<u>Para refletir e compreender:</u>

- Como a alteração do gráfico “Amplitude” altera o gráfico “Harmônicos” e “Soma”?
- Como esses três gráficos estão relacionados?
- Qual é a diferença entre comprimento de onda e período?

Utilize os controles de zoom horizontal próximos ao gráfico “Harmônicos” para que mais de um período seja exibido no gráfico. Marque a caixa “Ferramenta de Medição - Comprimento de Onda” e use a ferramenta que aparece para medir de pico a pico, de vale a vale e, em seguida, de algum ponto arbitrário na onda até o mesmo ponto arbitrário no ciclo mais distante.

- Isso é consistente com sua definição de comprimento de onda?

Altere as amplitudes para mostrar mais de uma onda senoidal e use o menu suspenso da ferramenta comprimento de onda para comparar os comprimentos de onda de diferentes ondas senoidais.

- Mudar a amplitude de uma onda altera seu comprimento de onda?
- Tente mudar de uma função de **espaço(x)** para uma função de **tempo(t)**. O que muda? O que não muda?
- Explique por que você não pode usar a ferramenta Período no modo “espaço” ou a ferramenta Comprimento de Onda no modo “tempo”.
- Como os períodos dos diferentes harmônicos estão relacionados?

Objetivo de aprendizagem: Ambientar-se com o simulador phet Colorado

Abra a simulação “Fourier: Construindo Ondas”, no item “Discreta”;
Reduza a quantidade de Harmônicos para 1 (um);

Habilite o áudio para ouvir o som;

Reduza o zoom da escala gráfica clicando no botão “-“;

Ao final, para recomeçar, aperte o botão “Reset”.

EXPERIMENTAÇÃO:

- O que acontece quando você passa da exibição de “senos” para “cossenos”?
- Experimente as diferentes opções de Séries no menu “Controles de Gráfico”. Para cada função, tente aumentar e diminuir o número de harmônicos. Que efeito isso tem e por quê?
- O que aconteceria se você tivesse muito mais do que 11 harmônicos? Teste sua previsão marcando a caixa “Mostrar função com número infinito de harmônicos”.
- Explique em palavras por que cada harmônico deve ter a amplitude aproximada que tem para formar uma onda triangular. Por exemplo, por que todos os harmônicos pares são zero? Por que o terceiro harmônico é negativo ou positivo? As amplitudes são diferentes para senos e cossenos? Por quê?
- O que acontece se você tentar fazer uma onda serrilhada (dente de serra) no modo “cossenos”? Por quê?

Conceitos:

O que são Séries de Fourier?

As Séries de Fourier são uma maneira de representar funções periódicas como uma soma infinita de funções seno e cosseno. Essa representação é extremamente útil em várias áreas da matemática e da física, especialmente na análise de sinais e na resolução de equações diferenciais.

Por definição, a Série de Fourier só pode representar funções periódicas com período L. Se L é o período de $f(x)$, então um múltiplo inteiro de L também é um período de L ($2L$, $3L$,…). Assim, o menor valor do período é chamado de período fundamental de $f(x)$. A função constante também é considerada periódica com qualquer período e sem período fundamental.

Uma Série de Fourier é uma série da forma de uma função periódica $f(x)$ com período L, sua representação em termos de Séries de Fourier é dada pela fórmula, como mostrado em (1).

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right) \quad (1)$$

Em que o parâmetro L deve ser $L > 0$, e os valores de $a_{0,}\ a_n\ e\ b_n$ para n = 1, 2, 3,… são os coeficientes. No conjunto de pontos em que a série converge, é definido um valor da função $f(x)$,cujo valor em cada ponto é a soma da série para aquele valor de x. A Série de Fourier de $f(x)$ é dada por (1).

O objetivo da Série de Fourier é representar funções como a soma de uma série. Para isso, é necessário determinar os valores dos coeficientes $a_{0,}\ a_n\ e\ b_n$, que são números que variam de acordo com a função dada, de período $2L$, sendo n = 1, 2, 3,... Esses coeficientes são as amplitudes de cada onda em série.

Onde os coeficientes $a_{0,}\ a_n\ e\ b_n$ são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L \quad f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \quad f(x)cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \quad f(x)sen\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx$$

Propriedades das Séries de Fourier:

Para o estudo da Série de Fourier, é necessário relembrar suas principais características para dar continuidade ao estudo. Segundo Lathi e Ding (2012), a Série de Fourier representa apenas funções periódicas, é uma série trigonométrica de senos e cossenos e essa série deve convergir.

A Série de Fourier possui algumas particularidades. Uma delas é a periodicidade: Uma função $f(x)$ é chamada de periódica, com período $L > 0$, se o domínio de $f(x)$ contém $x + L$ sempre que contiver, e se $f(x + L) = f(x)$ para todo valor de x. Se uma função periódica possui período igual a L, então o período $2L$ também o será, assim como qualquer múltiplo inteiro de L. O menor valor de L válido é o período fundamental de f. Consequentemente, o valor da frequência fundamental é $f = \frac{1}{L}$.

Sobre convergência da série de Fourier.

Supondo que $f(x)$ e $f'(x)$ são funções contínuas no intervalo $-L \leq x \leq L$. Adicionalmente $f(x)$ está definida no intervalo $-L \leq x \leq L$ de forma que seja periódica e com período $2L$. nesse contexto $f(x)$ tem uma série de Fourier dada pela relação:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \quad \left(a_m\, cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m\, sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)$$

E cujos coeficientes são dados por $a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \quad f(x)cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \quad f(x)sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Então a série de Fourier converge para $f(x)$ em todos os pontos onde $f(x)$ é contínua e converge para $\frac{1}{2}[f(x^{+})+f(x^{-})]$ em todos os pontos em que $f(x)$ é descontínua.

> OBSERVAÇÕES:
>
> Deve-se observar que é o valor médio dos limites à direita e à esquerda no ponto de descontinuidade e em pontos em que é contínua esse valor representa o próprio valor de . é usado para denotar o limite de quando pela direita e é usado para denotar o limite de quando pela esquerda.
>
> Essas condições são suficientes para a convergência de uma série de Fourier e essas

Paridade: Se $f(x)$ é uma função par (simétrica em relação ao eixo y), então a série contém apenas termos cosseno. Se $f(x)$ é uma função ímpar (assimétrica em relação ao eixo y), então a série contém apenas termos seno. Desta maneira, nota-se que os valores dos coeficientes são $a_{-n}=a_n$, $b_{-n}=b_n$ e $b_0=0$.

Linearidade: As Séries de Fourier são lineares, ou seja, a soma de duas funções periódicas é a soma das suas Séries de Fourier individuais.

Para calcular os coeficientes da Série de Fourier para uma função periódica dada, é possível seguir as seguintes etapas:

Para determinar o período da função é necessário identificar o período L da função periódica dada. Isso é crucial para determinar as frequências das componentes senoidais na Série de Fourier.

É necessário calcular os coeficientes. O coeficiente médio a_0 da função $f(t)$ é calculado usando a seguinte equação:

$$a_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(t)dt$$

Para $n\geq 1$, os coeficientes a_n e b_n são calculados usando as seguintes fórmulas:

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(t)cos\left(\frac{2\pi nt}{L}\right)dt$$
$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(t)sen\left(\frac{2\pi nt}{L}\right)dt$$

Estes coeficientes representam as amplitudes das componentes senoidais de frequência n/L na Série de Fourier de $f(t)$.

Com os coeficientes calculados, a Série de Fourier para a função $f(t)$ é dada por:

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)+b_n sen\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\right)$$

Essas etapas são fundamentais para calcular os coeficientes da Série de Fourier e representar uma função periódica como uma soma de senos e cossenos.

Outra maneira de representar a série trigonométrica de Fourier é $m \geq 0$, chamada também de forma harmônica.

Demonstração:

Para mostrar que o coeficiente b_n da série de Fourier de uma função par é sempre zero, Lembrando que para uma função ser par ela deve ser $f(t) = f(-t)$.

Recordando a definição do coeficiente b_n na Série de Fourier, temos:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \quad f(t)sen\left(\frac{2\pi nt}{L}\right)dt$$

Para simplificar a notação, considere que T seja o período da função. Agora, devido à periodicidade da função, podemos integrar sobre qualquer intervalo de comprimento L. Vamos escolher o intervalo periódico $-\frac{L}{2} \; a \; \frac{L}{2}$:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \quad f(t)sen\left(\frac{2\pi nt}{L}\right)dt$$

Utilizando a propriedade de paridade da função $f(t)$ e sabendo que $f(t)$ é uma função par, temos então $f(-t) = f(t)$. Analisando a parte do integrando da equação de b_n:

- $f(t) \text{ é } par$
- $sen\left(\frac{2\pi nt}{L}\right) \text{ é } uma\ função\ ímpar, pois\ sen(-x) = -sen(x)$

O produto de uma função par com uma função ímpar é uma função ímpar. Portanto, $f(t)sen\left(\frac{2\pi nt}{L}\right) \text{ é } uma\ função\ ímpar.$

A integral de uma função ímpar sobre um intervalo periódico em torno de zero é sempre zero, como mostra abaixo:

$$\int_{-a}^{a} \quad g(t)dt = 0 \qquad se\ g(t) \text{ é } ímpar$$

E como temos :

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \quad f(t)sen\left(\frac{2\pi nt}{L}\right)dt = \frac{2}{L}\ .\ 0 = 0$$

Portanto, concluímos que se $f(t)$ é uma função par, então o coeficiente b_n da Série de Fourier será sempre zero.

Demonstrar também, de forma "análoga" que $b_n = 0$ para funções ímpares.

Para demonstrar que o coeficiente b_n é igual a zero em funções ímpares na série de Fourier, vamos analisar a expressão para b_n em uma série de Fourier e utilizar as propriedades de funções ímpares.

A série de Fourier de uma função $f(x)$ periódica de período $2L$ é dada por:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\right)$$

Onde os coeficientes a_n e b_n são dados por:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx$$

Uma função $f(x)$ é dita ímpar se satisfaz a condição $f(-x) = -f(x)$.

Para calcular b_n de uma função ímpar $f(x)$:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx$$

Usando a propriedade de paridade da função ímpar:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(-x) sen\left(\frac{\pi n(-x)}{L}\right) d(-x)$$

Como $f(x)$ é ímpar, então $f(-x) = -f(x)$. E como $sen\left(\frac{n\pi(-x)}{L}\right) = -sen\left(\frac{n\pi(-x)}{L}\right)$.

Substitui-se as relações na integral:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} -f(x)\left(-sen\left(\frac{\pi n x}{L}\right)\right) d(x)$$

Simplificando:

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx$$

Note que a expressão para b_n é idêntica à original, mas devido à propriedade de simetria da função ímpar e a paridade do seno, a integral de uma função ímpar $\left(produto\ de\ f(x) ímpar\ com\ sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right), que\ é\ ímpar\right)$ em um intervalo simétrico $[-L, L]$ resulta em zero, portanto, os coeficientes b_n na série de Fourier de uma função ímpar serão zero.

Exemplo:

Vamos considerar a função dente de serra definida pela função $f(x) = x\ , -1 < x < 1$

Onde $f(x) = f(x+2)$. Essa função tem período fundamental igual a 2.

Para encontrar a série de Fourier de uma função dente de serra definida no intervalo [-1, 1] por $f(x) = x$, é preciso determinar os coeficientes $a_0, a_n\ e\ b_n$. Esta função é periódica com período igual a 2 ($L = 2$). A série de Fourier de uma função periódica $f(x)$ com período T é:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n.cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + b_n.sen\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\right)$$

Os coeficientes são calculados da seguinte maneira:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x).cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x).sen\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx$$

Neste caso, $T = 2$. Portanto, os coeficientes, são:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\,dx$$

Calculando a_0:

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Portanto, $a_0 = 0$

Calculando a_n:

$$a_n = \frac{2}{2}.\int_{-1}^{1} x\,.cos\,cos\,(n\pi x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\,.cos\,cos\,(n\pi x)\,dx$$

Essa integral pode ser resolvida por partes. Seja $u = x\ e\ dv = cos\,cos\,(n\pi x)\,dx$. Então, $du = dx\ e\ v = \frac{sen(n\pi x)}{n\pi}$. Aplicando a integração por partes:

$$\int x\,.cos\,cos\,(n\pi x)\,dx = x\frac{sen(n\pi x)}{n\pi} - \int \frac{sen(n\pi x)}{n\pi}dx$$

Calculando a integral indefinida:

$$\int x\,.cos\,cos\,(n\pi x)\,dx = \frac{x.sen(n\pi x)}{n\pi} + \frac{cos(n\pi x)}{(n\pi)^2} + C$$

Fazendo de -1 a 1:

$$a_n = \left[\frac{x.sen(n\pi x)}{n\pi} + \frac{cos(n\pi x)}{(n\pi)^2}\right]_{-1}^{1}$$

Calcular os limites:

$$\frac{x.sen(n\pi x)}{n\pi}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1.sen(n\pi)}{n\pi} - \frac{(-1).sen(-n\pi)}{n\pi} = 0$$

E

$$\frac{cos(n\pi x)}{(n\pi)^2}|_{-1}^{1} = \frac{cos(n\pi)}{(n\pi)^2} - \frac{cos(-n\pi)}{(n\pi)^2} = 0$$

Então, $a_n = 0$ para todos *n*.

Calculando b_n:

$$b_n = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} x.sen(n\pi x)dx = \int_{-1}^{1} x.sen(n\pi x)dx$$

Essa integral pode ser resolvida por partes. Seja $u = x \; e \; dv = (n\pi x)\,dx$. Então, $du = dx \; e \; v = \frac{cos(n\pi x)}{n\pi}$. Aplicando a integração por partes:

$$\int x\,.(n\pi x)\,dx = -\frac{x.cos(n\pi x)}{n\pi} + \int \frac{cos(n\pi x)}{n\pi}dx$$

Calculando a integral indefinida:

$$\int x\,.(n\pi x)\,dx = -\frac{x.cos\,cos\,(n\pi x)}{n\pi} + \frac{sen(n\pi x)}{(n\pi)^2} + C$$

Avaliando de -1 a 1 e calculando os limites:

$$b_n = \left[\frac{x.cos(n\pi x)}{n\pi} + \frac{sen(n\pi x)}{(n\pi)^2}\right]_{-1}^{1}$$

$$-\frac{x.cos(n\pi x)}{n\pi}|_{-1}^{1} = -\frac{1.cos\,cos\,(n\pi)}{n\pi} + \frac{(-1).cos(-n\pi)}{n\pi} = -\frac{cos\,cos\,(n\pi)}{n\pi} + \frac{cos(n\pi)}{n\pi} = 0$$

E

$$\frac{sen(n\pi x)}{(n\pi)^2}|_{-1}^{1} = \frac{sen(n\pi)}{(n\pi)^2} - \frac{sen(-n\pi)}{(n\pi)^2} = 0$$

Logo, b_n não é zero. Para calcular o b_n , é necessário resolver a integral:

$$b_n = 2\int_{0}^{1} x.sen(n\pi x)dx$$

Como a função é ímpar, é possível integrar de 0 a 1 e multiplicar por 2. Integrando por partes, fica assim:

Essa integral pode ser resolvida por partes. Seja $u = x \; e \; dv = (n\pi x)\,dx$. Então, $du = dx \; e \; v = -\frac{cos(n\pi x)}{n\pi}$. Aplicando a integração por partes:

$$2\int_{0}^{1} x\,.(n\pi x)\,dx = 2\left[-\frac{x.cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_{0}^{1} + 2\int_{0}^{1} \frac{cos(n\pi x)}{n\pi}dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}[x.cos\,cos\,(n\pi x)\,]_{0}^{1} + \frac{2}{n\pi}\int_{0}^{1} cos(n\pi x)dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}[1.cos\,cos\,(n\pi)\; - 0.cos(0)] + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{sen(n\pi x)}{n\pi}\right]_{0}^{1}$$

$$= -\frac{2\,cos\,cos\,(n\pi)}{n\pi} + \frac{2}{(n\pi)^2}[sen(n\pi) - sen(0)]$$

$$= -\frac{2\,cos\,cos\,(n\pi)}{n\pi} + 0$$

Como $\cos\cos(n\pi) = (-1)^n$, temos:

$$b_n = -\frac{2(-1)^n}{n\pi}$$

Assim, a Série de Fourier da função dente de serra é:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n}{n\pi} sen(n\pi x)$$

Portanto, a função dente de serra $f(x) = x \ para - 1 < x < 1$ pode ser representada pela Série de Fourier:

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^n}{n\pi} sen(n\pi x)$$

Retomando o enunciado do exemplo:

Vamos considerar a função dente de serra definida pela função $f(x) = x\,, -1 < x < 1$

Onde $f(x) = f(x+2)$. Essa função tem período fundamental igual a 2.

Conforme aumentamos os harmônicos, veremos a série aproximar-se do formato dente de serra.

Figura 1 - com 5 harmônicos

Figura 2 - com 10 harmônicos

Figura 3 - com 15 harmônicos

Figura 4 - com 30 harmônicos

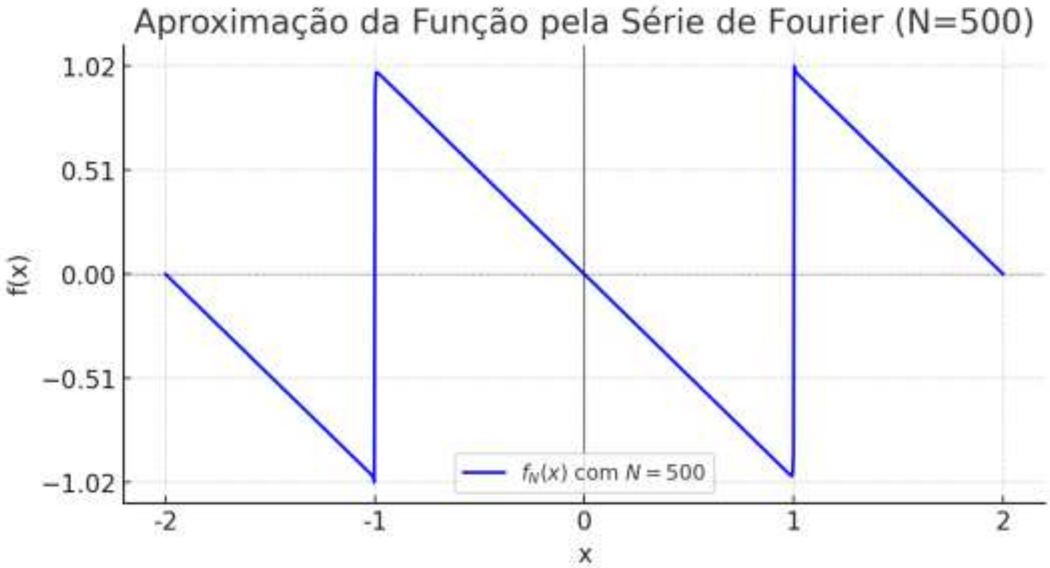

Figura 5 - com 500 harmônicos

Com os coeficientes calculados, podemos escrever a Série de Fourier de $f(x)$ e estudar sua convergência e propriedades.

Agora utilizaremos o simulador para praticar a Série de Fourier na forma de onda dente de serra (ou serrilhada).

Acesse o link a seguir: https://phet.colorado.edu/sims/html/fourier-making-waves/latest/fourier-making-waves_pt_BR.html

- Selecione a forma de onda “serrilhada”;
- Altere a quantidade de harmônicos e veja o que acontece com o gráfico “Soma”;

- Habilite o áudio para ouvir o som;
- Reduza o zoom da escala gráfica clicando no botão “-“.

Atividade desafio phet:

Acesse o link a seguir: https://phet.colorado.edu/sims/html/fourier-making-waves/latest/fourier-making-waves_pt_BR.html

- Quantos e quais harmônicos você precisaria incluir para produzir o seguinte gráfico de “Soma”?