

Produto Educacional

Explorando o Triângulo de Pascal: Ideias, história e Aplicações

Introdução

O presente produto educacional é resultado das pesquisas que culminaram na dissertação *“Triângulo de Pascal: uma abordagem brasileira para a obra de Vladimir Uspenskii”*, desenvolvida no âmbito do PROFMAT da Universidade Federal do Paraná. Seu objetivo é ampliar a viabilidade do estudo de conceitos relevantes da Análise Combinatória.

Esta sequência didática propõe-se a apresentar não apenas elementos conceituais e formas de aplicação, mas também a abordagem proposta por Vladimir Uspenskii, tema central da dissertação. O autor destaca-se em sua obra por oferecer uma sistematização mais natural dessa área do conhecimento matemático, indo além do que se observa em materiais usuais do ensino médio e mesmo em textos acadêmicos, tradicionalmente mais voltados aos conceitos, às aplicações diretas e aos formulários prontos baseados em modelos.

O material organiza-se em duas etapas: na primeira, são compilados os pontos principais da dissertação, úteis para o desenvolvimento sistemático da sequência de aulas proposta na segunda etapa. Esta sequência representa uma das diversas possibilidades de tornar a Análise Combinatória mais acessível aos estudantes, funcionando como uma provocação para maior engajamento por meio de situações comuns ou desafiadoras.

Desse modo, espera-se que este material contribua para a reflexão e a proposição de ideias que aproximem o estudante do fascinante universo da Análise Combinatória.

Módulo 0: Conhecendo a Análise Combinatória e o Princípio Fundamental da Contagem

A Análise Combinatória consiste em um conjunto de técnicas associadas à contagem do número de escolhas possíveis em um conjunto de n elementos. Essas escolhas podem ser classificadas segundo o Princípio Fundamental da Contagem, os arranjos, as permutações e as combinações (ou binomiais), utilizando uma operação denominada fatorial, que permite expressar multiplicações recorrentes de forma simbólica e mais simples.

Apresentaremos os conceitos citados de maneira bastante acessível, utilizando, por exemplo, três canetas de cores diferentes (azul, preta e vermelha) e dois papéis de cores distintas (branco e amarelo).

A seguir, propomos algumas reflexões que ajudarão a associar essas situações cotidianas aos fenômenos de contagem contemplados pela Análise Combinatória.

1. De quantas maneiras posso escrever um bilhete usando uma cor de caneta e um papel entre os disponíveis?

A tabela abaixo mostra todas as possibilidades:

	Papel branco	Papel amarelo
Caneta azul	Opção 1	Opção 4
Caneta preta	Opção 2	Opção 5
Caneta vermelha	Opção 3	Opção 6

Ao todo, temos 6 opções. Para cada escolha de caneta (3 opções), existem duas opções de papel. Assim, o total de possibilidades é dado por $3 \times 2 = 6$.

Esse fenômeno é denominado Princípio Fundamental da Contagem, segundo o qual podemos determinar o número total de possibilidades multiplicando-se as quantidades de opções independentes — neste caso, opções de caneta e opções de papel.

2. Supondo que eu queira organizar as canetas lado a lado em uma embalagem, de quantas maneiras posso fazê-lo?

Ao escolher a caneta azul como a primeira, restam duas canetas para a segunda posição e apenas uma para a terceira. O mesmo ocorre se a primeira escolhida for a preta ou a vermelha.

Logo, a quantidade de maneiras possíveis de organizar as canetas é dada por $3 \times 2 \times 1 = 6$.

Esse tipo de contagem, que considera a troca de posições dos elementos, é chamado de permutação.

Importante:

A multiplicação sucessiva de um número n por seus antecessores até 1 é denominada fatorial de n ou simplesmente $n!$

Ou seja, $3 \times 2 \times 1 = 3!$

3. Desejando escolher 2 das 3 canetas disponíveis — uma para escrever a carta e outra para o envelope —, de quantas maneiras posso fazê-lo?

Para a carta, há 3 opções. Escolhida a cor, restam 2 opções para o envelope. Portanto, o total é $3 \times 2 = 6$.

Ao escolher a caneta azul para a carta e a vermelha para o envelope, temos uma possibilidade. Ao inverter as cores (vermelha para a carta e azul para o envelope), ainda que sejam as mesmas canetas, trata-se de uma escolha diferente.

Esse tipo de contagem é denominado Arranjo Simples, pois a ordem dos elementos altera o resultado.

4. Desejando escolher duas das três canetas para dar de presente a uma pessoa, de quantas maneiras posso fazê-lo?

Neste caso, diferentemente do arranjo, a ordem não interfere no resultado: escolher uma caneta azul e uma vermelha é o mesmo que escolher uma vermelha e uma azul.

Desse modo, vamos dividir o arranjo pelo número de repetições, que consiste justamente na permutação dos elementos do subconjunto a ser escolhido.

Como se trata de uma dupla de canetas, a quantidade de repetições é:

$$P_2 = 2! = 2.1 = 2$$

Módulo 1 – Introdução Histórica

Vladimir Uspenskii, autor em discussão na dissertação de mestrado que dá origem a este produto educacional, foi um físico-matemático russo com relevantes contribuições não apenas para a Matemática, mas também para a Computação. Doutor

em Física e Matemática desde a década de 1960, destacou-se por uma produção ampla e diversificada, com ênfase em Teoria dos Números, Análise Combinatória e Lógica Matemática, sendo também uma das referências no desenvolvimento inicial da Computação na União Soviética

Entre suas publicações, duas se tornaram particularmente conhecidas: *Pascal's Triangle* (1974) e *Mathematical Conversations* (2013). A primeira — “Pascal's Triangle” — é a obra que fundamenta a dissertação e, conseqüentemente, este produto educacional. Nela, Uspenskii apresenta conceitos fundamentais da Análise Combinatória a partir de um problema proposto na 8ª Olimpíada de Matemática de Moscou, realizada em 1945, voltada a estudantes do 9º e 10º ano do ensino russo. Esse problema, aparentemente simples, serve de fio condutor para o desenvolvimento de uma teoria combinatória completa, estruturada sobre ideias de contagem, arranjos, combinações e o Triângulo de Pascal.

Segundo o próprio autor, compreender a essência de um problema matemático significa mais do que alcançar um resultado numérico. Em seu texto, Uspenskii reflete sobre “o que significa resolver um problema”, enfatizando que o verdadeiro sentido de resolução não está no número obtido, mas no caminho lógico e universal que conduz a esse número.

Assim, encontrar a solução é, antes de tudo, descrever um método válido e geral, que permita a qualquer leitor seguir o raciocínio e chegar ao mesmo resultado.

Durante a escolarização, é comum associar problema a uma pergunta que exige um número exato como resposta, obtido por um conjunto fixo de regras. Entretanto, Uspenskii propõe uma ampliação desse entendimento: um problema matemático é também uma oportunidade para descobrir padrões, justificar procedimentos e compreender a estrutura que sustenta o resultado.

Por exemplo, ao perguntar-se:

“De quantas formas é possível formar uma senha de 4 dígitos, permitindo repetição de algarismos?”

O estudante pode realizar o cálculo completo e encontrar o número 6561, mas pode também — e de modo igualmente correto — escrever simplesmente 9^4 , expressão que traduz o raciocínio combinatório subjacente e evidencia o processo de contagem. Para Uspenskii, essa representação simbólica é uma solução válida, pois contém o método e o raciocínio matemático em si.

Essa compreensão amplia a noção tradicional de problema e será essencial para o desenvolvimento dos módulos seguintes, especialmente na introdução do Princípio Fundamental da Contagem, das permutações, arranjos, combinações simples e da estrutura triangular dos coeficientes binomiais que caracterizam o Triângulo de Pascal — ponto central da obra de Uspenskii e base conceitual deste produto educacional.

Módulo 2 – O Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal é um arranjo numérico em forma triangular, constituído por números inteiros dispostos de modo que:

- o primeiro e o último número de cada linha são sempre 1;
- cada número interno é a soma dos dois números imediatamente acima dele na linha anterior.

Essa simples regra é denominada por Vladimir Uspenskii de Operação de Pascal, e consiste em aplicar sucessivamente a soma sobre uma linha inicial de infinitos zeros, na qual apenas um dos termos é igual a 1. A aplicação repetida dessa operação sobre a linha original e suas derivadas gera o chamado Triângulo Aritmético, conhecido historicamente como Triângulo de Pascal ou Triângulo de Tartaglia–Pascal.

Um olhar inicial revela apenas o padrão de somas sucessivas, mas um estudo mais atento mostra que o Triângulo de Pascal guarda profundas relações com a Análise Combinatória, a Teoria dos Números e a expansão binomial, além de propriedades numéricas e simétricas de grande beleza matemática.

Exemplo das primeiras linhas

```

      1
    1 1
  1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
```

Esse processo pode ser repetido indefinidamente, formando infinitas linhas. Em cada uma delas, os valores correspondem aos coeficientes binomiais das potências sucessivas de $(a + b)^n$

Propriedades Fundamentais

1. Simetria

Cada linha do triângulo é simétrica em relação ao eixo central, pois os valores à direita e à esquerda são iguais:

Exemplo: Linha 6 $\rightarrow$ 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

2. Soma das linhas

A soma dos elementos da linha n é igual a 2^n

Exemplo: Linha 4 $\rightarrow$ 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4 .

Essa propriedade está relacionada à ideia combinatória de que um conjunto com n elementos possui 2^n subconjuntos possíveis, correspondendo à soma de todas as combinações simples.

3. Números especiais nas diagonais

As diagonais do triângulo revelam sequências conhecidas:

- 1ª diagonal → todos os termos iguais a 1;
- 2ª diagonal → números naturais (1, 2, 3, 4, ...);
- 3ª diagonal → números triangulares (1, 3, 6, 10, 15, ...);
- 4ª diagonal → números tetraédricos (1, 4, 10, 20, ...).

Essas relações ilustram como o Triângulo de Pascal organiza padrões figurativos e representações geométricas de contagem, ligando aritmética e geometria de forma elegante.

4. Relação de Pascal

Cada termo do triângulo pode ser obtido pela soma de dois termos da linha anterior:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

Essa relação, conhecida como Relação de Pascal, é a base de construção do triângulo. Uspenskii enfatiza que ela traduz o raciocínio combinatório natural de que “a quantidade de subconjuntos de n elementos tomados k a k ” é formada pelos subconjuntos que contêm um determinado elemento e pelos que não o contêm.

5. Relação de Stifel–Pascal

Outra propriedade observada é:

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

Ou seja, a soma de dois termos consecutivos de uma linha corresponde ao termo de mesma posição do segundo na linha seguinte.

Relação com a Análise Combinatória

Os números do Triângulo de Pascal correspondem exatamente aos coeficientes binomiais, que indicam o número de maneiras de escolher k elementos entre n disponíveis:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Assim, cada linha do triângulo representa as combinações possíveis de elementos tomados k a k . Por exemplo, a 5ª linha (1, 5, 10, 10, 5, 1) mostra as quantidades de subconjuntos possíveis quando se escolhe 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 entre 5 elementos de um conjunto.

Relação com o Binômio de Newton

O Triângulo de Pascal fornece os coeficientes da expansão binomial:

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

...

Ou seja

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$$

Essa relação evidencia que o Triângulo de Pascal é tanto um modelo de contagem quanto uma ferramenta algébrica de expansão e simplificação de potências binomiais.

Exploração digital e visual

Simulador GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/en89cmks> (Acesso em 15/09/2025)

O simulador permite explorar diversas propriedades do Triângulo Aritmético: basta selecionar a propriedade desejada para visualizá-la destacada no triângulo e, ao lado, ler uma explicação dinâmica e interativa. Essa ferramenta é um excelente recurso para aulas investigativas, permitindo que os estudantes observem simetrias, diagonais, somas e relações combinatórias em tempo real.

Módulo 3 – Subconjuntos e Combinações

Sempre que se define um subconjunto pela escolha de determinados elementos de um conjunto dado, os elementos não escolhidos formam, por consequência, outro subconjunto. Essa percepção simples e intuitiva é a base de uma abordagem mais natural e conceitual das combinações, proposta e explorada por Vladimir Uspenskii em sua obra *Pascal's Triangle*.

1. A ideia de subconjunto como escolha

Considere o conjunto:

$A = \{\text{lápis, caneta, borracha}\}$

A partir dele, é possível listar todos os subconjuntos possíveis:

- O subconjunto que não contém nenhum elemento é o conjunto vazio: $\emptyset$
- Existem 3 subconjuntos com 1 elemento: $\{\text{caneta}\}$; $\{\text{lápis}\}$; $\{\text{borracha}\}$.
- Existem 3 subconjuntos com 2 elementos: $\{\text{c,l}\}$; $\{\text{c,p}\}$; $\{\text{l,p}\}$
- Existe 1 subconjunto com 3 elementos, que é o próprio conjunto A

2. Observação combinatória

Contando todos os subconjuntos, temos:

$$1 + 3 + 3 + 1 = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3 = 8$$

Essa soma expressa a quantidade total de subconjuntos de um conjunto com três elementos — o que coincide com o número 2^n , conforme o Princípio Fundamental da Contagem aplicado a escolhas “pertence / não pertence”.

Mais interessante, porém, é observar que a distribuição dos subconjuntos por quantidade de elementos (0, 1, 2, 3) corresponde exatamente à 4ª linha do Triângulo de Pascal.

Isso mostra que o Triângulo de Pascal organiza o número de subconjuntos possíveis de um conjunto de n elementos tomados k a k , ou seja, as combinações simples.

3. Combinações e subconjuntos complementares

De acordo com Uspenskii, cada subconjunto escolhido possui um complementar, formado pelos elementos não selecionados. Dessa forma, a quantidade de

subconjuntos formados com k elementos é a mesma quantidade de subconjuntos formados com $n - k$ elementos.

Essa relação é expressa matematicamente por:

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Essa propriedade, chamada de Combinações Complementares, revela a simetria estrutural do Triângulo de Pascal e reforça a ideia de que cada escolha contém em si sua “não escolha”, ou ainda, existe uma correspondência biunívoca entre o subconjunto dos elementos escolhidos e dos não escolhidos. — um raciocínio de grande valor conceitual para a compreensão das combinações.

4. A Relação de Stifel–Pascal

Agora, considere um conjunto de n elementos e fixe um elemento específico desse conjunto. Ao formar subconjuntos, surgem duas situações complementares:

1. Subconjuntos que contêm o elemento fixado;
2. Subconjuntos que não contêm o elemento fixado.

No primeiro caso, resta escolher os demais elementos entre os $n - 1$ restantes, tomando $k - 1$ deles. No segundo, a escolha ocorre entre os mesmos $n - 1$ elementos, mas agora tomando k .

Assim, o número total de subconjuntos possíveis é dado pela soma dessas duas quantidades:

$$C(n, k) = C(n - 1, k - 1) + C(n - 1, k)$$

Essa é a chamada Relação de Stifel–Pascal, uma das mais importantes da Análise Combinatória, pois traduz de maneira elegante o princípio lógico da escolha

sucessiva — e, ao mesmo tempo, é o fundamento da estrutura recursiva do Triângulo de Pascal.

5. Interpretação visual e aritmética

Se representarmos as combinações $C(n, k)$ no Triângulo de Pascal, a Relação de Stifel indica que cada número é a soma dos dois imediatamente acima dele — uma propriedade que garante a auto geração da estrutura. Assim, o triângulo não apenas representa combinações, mas as produz.

Por fim, a noção de subconjuntos conduz à compreensão intuitiva de várias ideias combinatórias:

- a noção de escolha com e sem repetição;
- o paralelismo entre subconjuntos e coeficientes binomiais;
- o entendimento de que toda contagem é uma forma de organização lógica das possibilidades.

Na leitura de Uspenskii, essa interpretação torna a Análise Combinatória menos formal e mais natural, aproximando-a da experiência concreta do estudante, sem perder o rigor matemático.

Módulo 4 – Conexão com Fatoriais

Partindo-se da definição usual de combinação,

$$C_n^k = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

podemos verificar de maneira natural a Relação de Stifel, o que, na leitura de Vladimir Uspenskii, conclui a correspondência entre os termos do Triângulo Aritmético, as

combinações e a definição de fatorial. Em outras palavras, a aplicação sucessiva desta expressão gera cada elemento do triângulo de Pascal.

1. A ideia de construção recursiva

Ao expandirmos o termo C_n^k pela definição de fatorial, temos:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)! \cdot (n-k)!}.$$

Substituindo os termos C_{n-1}^{k-1} e C_n^k na relação de Stifel, por suas respectivas expressões fatoriais, obtém-se:

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{k-1} + C_n^k &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-1-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \cdot \left[\frac{1}{(n-k)} + \frac{1}{k} \right] \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \cdot \left[\frac{k+n-k}{(n-k)k} \right] \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \cdot \left[\frac{n}{(n-k)k} \right] \\ &= \frac{n \cdot (n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)! \cdot k \cdot (n-k)} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k \end{aligned}$$

Essa demonstração revela que a relação recursiva do Triângulo de Pascal nada mais é do que uma consequência algébrica da definição de combinação e do conceito de fatorial, reafirmando a consistência interna entre as três noções

2. Interpretação combinatória

A expressão fatorial surge naturalmente quando se pensa em contar o número de maneiras possíveis de organizar ou escolher elementos de um conjunto. Em uma escolha de n elementos distintos, o número total de ordenações é dado por $n!$. Quando desejamos escolher apenas k desses elementos, desconsiderando a ordem, dividimos pelas repetições causadas pela permutação interna de cada subconjunto $k!$ e pelas repetições causadas pela permutação interna nos subconjuntos dos elementos não escolhidos $(n - k)!$.

Assim, a definição de combinação expressa precisamente o raciocínio que o Triângulo Aritmético traduz de forma visual e estrutural:

- Cada linha representa o número total de combinações possíveis para um conjunto de n elementos;
- Cada coluna representa as escolhas possíveis de k elementos, desconsiderando a ordem;
- E cada número é gerado pela soma dos dois anteriores, conforme a lógica da Relação de Stifel.

Para Uspenskii, o Triângulo Aritmético constitui uma espécie de “modelo universal da combinatória elementar”. Ele observa que a Operação de Pascal, aplicada sucessivamente sobre a linha de infinitos zeros com um único termo igual a 1, produz naturalmente os números fatoriais e os coeficientes binomiais, sem a necessidade de fórmulas prévias.

Em outras palavras, a própria estrutura triangular contém implicitamente a definição de fatorial, pois cada termo é formado a partir da multiplicação e soma ordenada de seus antecessores.

4. Implicações pedagógicas

Essa visão oferece uma importante implicação didática: antes de apresentar a fórmula do fatorial e das combinações, é possível construí-las a partir de situações concretas de contagem e da observação do Triângulo de Pascal.

Dessa forma, o estudante:

- visualiza como os números se organizam no triângulo;
- descobre que cada linha se relaciona a um número natural n ;
- e percebe que as repetições e simetrias do triângulo correspondem a propriedades gerais de combinações.

Ao final, o fatorial aparece não como uma definição imposta, mas como uma necessidade matemática para expressar multiplicações recorrentes de modo abreviado.

5. Conclusão

O Triângulo de Pascal, as combinações e o fatorial constituem um sistema profundamente interligado, em que cada conceito se explica, sustenta e amplia o entendimento dos demais. Como observa Uspenskii, o triângulo aritmético revela, por meio de suas múltiplas propriedades, a essência dos princípios combinatórios. Essa interdependência torna o Triângulo de Pascal um recurso didático especialmente rico para o estudo da Análise Combinatória, pois aproxima o estudante de uma compreensão mais intuitiva e concreta dos resultados matemáticos, favorecendo uma aprendizagem significativa e integrada.

Parte 1 – Orientações ao Professor

Recursos Didáticos

- Apostila teórico-prática com explicações, exemplos e exercícios comentados (baseada na dissertação *Triângulo de Pascal: uma abordagem brasileira para a obra de Vladimir Uspenskii*).
- Ferramentas digitais: simuladores do GeoGebra
- Desafios de raciocínio tipo olimpíada ao final de cada módulo, para consolidação do pensamento combinatório.
- Materiais concretos: cartolina, papel quadriculado, fichas de conjuntos e calculadora científica.

Objetivos Educacionais

- Desenvolver o raciocínio combinatório, a capacidade de resolver problemas e a interpretação de estruturas numéricas.

- Relacionar a história da matemática (Pascal e Uspenskii) com aplicações modernas e contextos de Olimpíadas de Matemática.
- Estimular a aprendizagem investigativa e a descoberta de padrões, conectando teoria, prática e linguagem simbólica.
- Promover a autonomia intelectual e a valorização da matemática como construção lógica e criativa.

Plano de Aula: O Triângulo de Pascal e suas Conexões

Público-alvo: Estudantes do Ensino Médio (2ª ou 3ª série) e início da graduação em Matemática.

Carga horária: 6 a 8 aulas de 50 minutos (um módulo por aula).

Abordagem: Investigativa, dialógica e com mediação conceitual.

Aula 1 – Introdução Histórica e Motivação

Objetivos específicos:

- Apresentar Blaise Pascal e Vladimir Uspenskii no contexto histórico.
- Refletir sobre o que significa “resolver um problema” em matemática, com base na obra *Pascal's Triangle* (1974).

Atividades:

1. Roda de conversa inicial: o que é resolver um problema em matemática?
2. Exposição dialogada: breve panorama sobre Pascal e Uspenskii (origem do triângulo aritmético e ênfase na lógica da contagem).
3. Problema inicial da VIII Olimpíada de Moscou (1945): estudantes tentam resolver em grupos.
4. Discussão coletiva: comparação de caminhos e estratégias.

Recursos: projetor, quadro, material impresso com o problema.

Orientação docente:

Enfatize que, segundo Uspenskii, *resolver um problema é descrever um método coerente de chegar ao número esperado* — não apenas dar o resultado. Valorize a argumentação e as estratégias.

Aula 2 – Construindo o Triângulo de Pascal

Objetivos específicos:

- Construir o triângulo manualmente e compreender sua regularidade.
- Identificar padrões de simetria, soma das linhas e regularidades nas diagonais.

Atividades:

1. Construção até a 8ª linha em grupos (com papel quadriculado ou cartolina).
2. Identificação dos padrões e relações numéricas.
3. Introdução do conceito de Operação de Pascal, como apresentada por Uspenskii (geração do triângulo a partir de uma linha infinita de zeros e um 1 central).

Recursos: papel, lápis, cartolina, régua.

Orientação docente:

Auxilie os estudantes para a percepção de que *o triângulo é gerado por uma regra simples, mas que contém uma estrutura profunda de contagem*.

Aula 3 – Propriedades do Triângulo

Objetivos específicos:

- Explorar propriedades aritméticas e combinatórias.
- Apresentar e demonstrar a Relação de Pascal e a Relação de Stifel–Pascal.

Atividades:

1. Demonstração no quadro:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

2. Verificação de casos particulares e discussão da simetria: $C_n^k = C_n^{n-k}$
3. Uso do simulador GeoGebra: análise visual de diagonais, simetrias e somas.

Recursos: quadro, projetor, computadores/tablets com GeoGebra.

Orientação docente:

Mostre que as relações são recursivas, conceito central da leitura de Uspenskii.

Aula 4 – O Binômio de Newton

Objetivos específicos:

- Relacionar o Triângulo de Pascal à expansão binomial.
- Verificar os coeficientes de cada potência.

Atividades:

1. Expansão de $(a + b)^n$ para pequenos valores de n
2. Conferência dos coeficientes com o triângulo.
3. Exercício-desafio: cálculo rápido de $(m + n)^6$

Recursos: quadro, lista de exercícios, calculadora.

Orientação docente:

Mostre que o triângulo fornece os coeficientes binomiais de forma visual e intuitiva — uma ponte entre combinatória e álgebra.

Aula 5 – Subconjuntos e Combinações

Objetivos específicos:

- Compreender combinações como subconjuntos de um conjunto maior.
- Aplicar a Relação de Stifel–Pascal em contextos concretos.

Atividades:

1. Cada grupo forma subconjuntos do conjunto $A=\{1,2,3\}$
2. Relação entre número de subconjuntos e linha correspondente do triângulo.
3. Generalização:

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

Recursos: fichas de conjuntos, papel, lápis.

Orientação docente:

Mostre que toda combinação representa uma forma de organizar escolhas, e que o triângulo resume essas contagens em estrutura numérica.

Aula 6 – Conexão com o Fatorial

Objetivos específicos:

- Demonstrar que $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Consolidar o raciocínio combinatório.

Atividades:

1. Cálculo manual de pequenas combinações.
2. Conferência com o triângulo construído.
3. Desafio final: cálculo rápido em grupos com raciocínio lógico.

Recursos: lista de exercícios, quadro.

Orientação docente:

Retome Uspenskii: o fatorial não é apenas uma definição simbólica, mas a expressão compacta de uma multiplicação recorrente que o triângulo revela.

Avaliação Formativa

- Participação nas discussões e argumentações.
- Produção dos triângulos e registros no caderno.
- Resolução de desafios e justificativas escritas.
- Pequeno teste final: expansão binomial e problema de subconjuntos.

Parte 2 – Apostila do Estudante

O Triângulo de Pascal e suas Conexões

Aula 1 – História e Motivação

Blaise Pascal (1623–1662):

Matemático e filósofo francês. Seu triângulo organiza os números usados nas combinações e tem aplicações em probabilidade, álgebra e geometria.

Vladimir Uspenskii (1930–2018):

Matemático russo. Em *Pascal's Triangle* (1974), apresentou o triângulo como modelo de raciocínio combinatório, enfatizando o valor de *pensar sobre o processo*, e não apenas obter o resultado.

Reflexão inicial:

O que significa resolver um problema em matemática?

- Procurar um caminho.
- Verificar padrões.
- Justificar cada passo.
- Compreender *por que* o resultado é verdadeiro.

Aula 2 – Construindo o Triângulo de Pascal

Comece com o número 1 no topo.

Cada número abaixo é a soma dos dois que estão acima.

```
      1
     1 1
    1 2 1
   1 3 3 1
  1 4 6 4 1
 1 5 10 10 5 1
```

Atividade:

Construa o triângulo até a 8ª linha.

Observe atentamente os elementos do triângulo e debata com os colegas possíveis padrões observados. Anote suas observações.

Aula 3 – Propriedades do Triângulo

Relação de Pascal:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

Exemplo:

$$C_5^2 = C_4^1 + C_4^2 = 4 + 6 = 10$$

Atividade:

Verifique no triângulo as combinações e a ocorrência da relação de Pascal, como no exemplo anterior.

- C_6^3
- C_7^2

Aula 4 – O Binômio de Newton

O Binômio de Newton mostra como expandir potências de somas:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k \cdot b^{n-k}$$

Exemplo:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Atividade:

Expanda $(m + n)^7$ usando o triângulo.

Aula 5 – Subconjuntos e Combinações

Um conjunto com n elementos possui 2^n subconjuntos.

Exemplo:

Seja o conjunto $A=\{1,2,3\}$ os subconjuntos são:
 $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$. Há 8 subconjuntos, pois $2^3 = 8$

Olhando para esses resultados, o que podemos observar? Como traduzimos esses resultados em combinações, de modo a poder associar com o Triângulo Aritmético?

Atividade:

Liste os subconjuntos de $\{a,b,c,d\}$ e relacione com a 4ª linha do triângulo.

Aula 6 – Conexão com o Fatorial

A fórmula geral para combinações é:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemplo:

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = 15$$

Atividade:

Calcule:

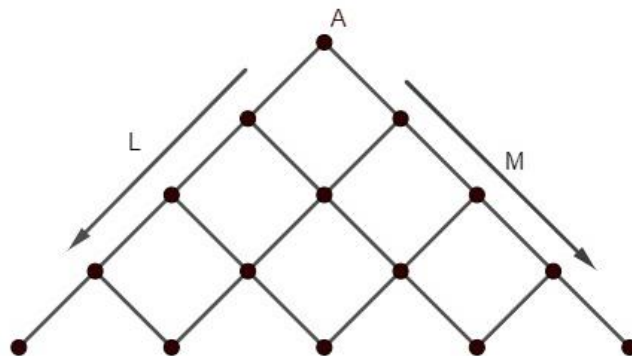
- C_8^3
- $C_7^2 + C_7^3$

Compare com os valores no triângulo.

Desafio Final

Problema adaptado da VIII Olimpíada de Moscou:

Em uma rede de caminhos, um número n de pessoas se divide igualmente a cada bifurcação, conforme a figura abaixo:



Fonte: Dissertação

Quantas pessoas chegam a cada ponto da linha inferior?

Casos:

1. 16 pessoas e 4 linhas
2. 64 pessoas e 6 linhas
3. 2^{10} pessoas e 10 linhas
4. 2^n pessoas e n linhas

Descubra o que acontece com o número de pessoas em cada posição da linha.

Qual relação aparece entre os resultados e o Triângulo de Pascal?

Conclusão:

O desenvolvimento deste produto educacional buscou concretizar, em forma de sequência didática, as reflexões e contribuições apresentadas por Vladimir Uspenskii em sua obra *Pascal's Triangle* (1974), evidenciando que o ensino da Análise Combinatória

pode ser conduzido por meio de situações de descoberta, diálogo e construção de sentido.

Mais do que oferecer fórmulas e algoritmos prontos, a proposta pretende incentivar o caráter investigativo da Matemática, convidando o estudante a observar padrões, formular hipóteses e compreender as relações que estruturam o raciocínio combinatório. O Triângulo de Pascal, nesse contexto, atua como um eixo articulador: visual, histórico e conceitual. Por meio dele, o aluno não apenas compreende o funcionamento das combinações, dos binômios e dos fatoriais, mas também percebe a coerência interna que liga cada conceito ao outro — da contagem elementar às expressões algébricas generalizadas.

Inspirada na leitura de Uspenskii, esta sequência valoriza o pensamento sobre o processo, e não apenas o resultado numérico. Resolver um problema, segundo essa perspectiva, é construir um caminho argumentativo, capaz de revelar as ideias que sustentam o resultado. Essa postura intelectual, essencial na matemática, forma o alicerce do raciocínio científico, crítico e criativo.

Do ponto de vista pedagógico, o percurso de seis módulos permitiu articular teoria e prática, combinando história da matemática, representações visuais e uso de tecnologias (GeoGebra) a estratégias colaborativas e desafios de estilo olímpico, que incentivam o protagonismo do estudante. Cada módulo foi estruturado de forma progressiva, para que o aluno avance do reconhecimento de padrões simples à compreensão formal de relações combinatórias e binomiais.

Por fim, espera-se que este material contribua para fortalecer o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória nas escolas, incentivando professores a explorar abordagens mais abertas, criativas e fundamentadas. O Triângulo de Pascal — em sua simplicidade geométrica e profundidade matemática — segue sendo um

exemplo notável de como a beleza e a lógica da matemática podem emergir do ato de contar, organizar e pensar.

Assim, a proposta aqui apresentada reafirma o ideal de uma educação matemática que una rigor conceitual, significado e encantamento, permitindo que cada estudante descubra, no raciocínio e na linguagem dos números, uma forma de compreender o mundo e de reconhecer a si mesmo como parte do processo de construção do conhecimento.

Referências Bibliográficas

BACHX, C.; POPPE, Luiz M. B.; TAVARES, Raymundo N. O. *Prelúdio à Análise Combinatória*. 1. ed. [S.l.]: Companhia Editora Nacional, 1975.

DYNKIN, Evgeni Borisovich; USPENSKII, Vladimir Andreevich. *Mathematical Conversations: Multicolor Problems, Problems in the Theory of Numbers, and Random Walks*. [S.l.]: Courier Corporation, 2013.

FREIRE, Benedito Tadeu V. *Análise Combinatória*. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2001.

INSTITUTO PASCAL. *Blaise Pascal*. [S.l.: s.n.], 2024. Acesso em: 20 abr. 2024. Disponível em: <https://www.institutopascal.org.br/visao/institucional/blaise-pascal.php>.

LIMA, Elon Lages. *A Matemática do Ensino Médio*. 7. ed. [S.l.]: SBM, 2016. v. 2.

MATEMÁTICA PT. *Triângulo de Pascal*. [S.l.: s.n.], 2024. Consultado em: 22 abr. 2024, às 15h. Disponível em: https://www.matematica.pt/faq/triangulo-pascal.php#google_vignette.

MOÇATO, Douglas Gonçalves. *Estrela de David no triângulo de Pascal*. 2021. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba. Acesso em: 24 abr. 2024. Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/xmlui/handle/1884/71556>.

MORGADO, Augusto César. *Matemática Discreta*. 2. ed. [S.l.]: SBM, 2015.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/> . Acesso em: 18 ago. 2025.