EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO FRACA COMO CONSEQUÊNCIA DO LEMA DE MAZUR.

AMARAL. M.

1.RESUMO.

A existência de solução fraca para Equações Diferenciais Parciais pode configurar um bom tópico para introduzir o indivíduo no estudo da Análise Funcional, por utilizar de resultados mais básicos e que não demandam um robusto domínio em Teoria das Distribuições e afins. Nessa perspectiva buscamos estudar existência e, quando possível, unicidade de problemas de contorno, como o famoso problema de Dirichlet, a partir, primordialmente, do Lema de Mazur. Nossa metodologia foi aplicada de maneira diferenciada, onde em vez de estudarmos todos os pré-requisitos , que demandariam uma boa quantidade de tempo, fomos direto ao problema e o estudamos diagonalmente, ou seja, dando prioridade àquilo que se fazia mais essencial para seu estudo e preenchendo os "buracos" durante o tempo.

Palavras-Chave: Equações Diferenciais Parciais. Análise Funcional. Aplicações.

2. INTRODUÇÃO.

O objetivo primordial deste artigo é introduzir os estudantes ao mundo da pesquisa acadêmica em Matemática, preparando-o para uma pós-graduação na área, pois exige-se muita maturidade para se realizar uma pesquisa em Matemática Pura e tal maturidade pode ser desenvolvida previamente na graduação, a partir de uma bolsa, por exemplo.

Do ponto de vista da matemática, o objetivo deste artigo é estudar a existência de solução fraca em problemas de contorno, como o famoso Problema de fronteira de Dirichlet, muito utilizado para introduzir-se na pesquisa acadêmica em Matemática, por ser relativamente simples, mas ao mesmo tempo, bastante valoroso para iniciação em pesquisa em Análise, o qual propõe encontrar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, onde:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ \ em\, \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = \varphi, \ \ sobre\, \partial\Omega, \end{cases}, \varphi \in C_C^\infty(\Omega)$$

com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um conjunto de fronteira C^1, com dado φ de fronteira e $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ o conjunto de todas as funções infinitamente diferenciáveis, com suporte compacto em Ω. Costumamos dizer que φ é uma função teste.

3. PRÉ-REQUISITOS.

Mais especificamente, estudaremos a existência de solução fraca para o Problema de Fronteira de Dirichlet, a partir da Teoria de Topologias Fracas e Espaços de Sobolev. Valeu a pena destacar que usaremos fortemente o Lema de Mazur abaixo.

Lema (de Mazur): Seja $K \subset X$, onde X é um Espaço Vetorial Normado e K é convexo, então K é fechado forte se, e somente se, é fechado fraco.

Corolário Se $\varphi: X \to \mathbb{R}$ é convexa e semicontínua inferior na topologia forte, então φ é semicontínua inferior na topologia fraca.

As principais referências utilizadas foram os clássicos livros do Brezis [2] e Evans [3], com alguns retoques no primeiro capítulo do livro do Fanghua Lin [4].

O problema de fronteira de Dirichlet é o famoso problema de contorno, que propõe encontrar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, donde:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & em\ \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = \varphi, & sobre\ \partial\Omega \end{cases}, \varphi \in C_C^\infty(\Omega)$$

Estamos a procura de estabelecer a existência de solução fraca para o problema acima. Mais sobre soluções fracas de equações parciais diferenciais (EDPs) podem ser encontradas em livros clássicos sobre EDPs, por exemplo, (EVANS, 1997) e (GILBARG; TRUDINGER, 2001). Uma solução fraca nem sempre é solução clássica, mas soluções clássicas são automaticamente fracas. O problema de Dirichlet acima pode ser formulado fracamente da seguinte forma:

$$\begin{cases} \int_\Omega < \nabla u, \nabla \varphi > = 0 \\ u - \varphi \in W^{1,0}(\Omega) \end{cases}, \varphi \in C_C^\infty(\Omega)$$

Vale lembrar que o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é o conjunto de todas as funções $L^1(\Omega)$, tais que para todo multi-índice α, donde $|\alpha| \leq k$, a α-ésima derivada fraca existe e pertence à $L^p(\Omega)$, onde o fecho desse conjunto é denotado por $W^{k,p}(\Omega)$.

4. EXISTÊNCIA.

O Cálculo Variacional nos garante que para mostrar a existência de solução fraca para o problema de Dirichlet. Para isso, resolveremos o seguinte problema de minimização:

$$\min\{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \,, v \in W_{\varphi}^{1,p}(\Omega)\}$$

Ou seja, se u minimizar a integral acima, então u é solução fraca para o problema de Dirichlet. Importante ressaltar que o conjunto $W_{\varphi}^{1,p}(\Omega)$ é o espaço convexo fechado das funções $W^{1,p}(\Omega)$ onde $v - \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfaz fracamente o problema de Dirichlet.

A fim de demonstrar isso, defina $F: W^{1,p} \to \mathbb{R}$ onde:

$$F(v) := \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx$$

Admitindo que u minimiza F e definindo para algum $\varphi \in C_C^{\infty}(\Omega)$, $E_{\varphi}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, por:

$$E_{\varphi}(t) := F(u + t\varphi)$$

Então, $t = 0$ minimiza E_{φ} pois:

$$E_{\varphi}(0) = F(u)$$

Daí:

$$E'_{\varphi}(0) = 0$$

Temos então que:

$$E_{\varphi}(t) = \int_{\Omega} |\nabla(u + t\varphi)|^2 dx$$

Da linearidade do gradiente e da integral, resulta que:

$$E_{\varphi}(t) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + 2t \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + t^2 \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 \, dx$$

Logo:

$$E'_{\varphi}(0) = 2 \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \therefore - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = 0$$

Concluímos então, que se u minimiza F, então u é solução fraca do problema de Dirichlet.

Seja I o ínfimo de F, ou seja, a maior das cotas inferiores, assim:

$$I := \inf\{F(w), w \in W_{\varphi}^{1,p}(\Omega)\}$$

Como tal conjunto não é vazio, podemos considerar uma sequência minimizante (u_k), onde:

$$F(u_k) \to I$$

Decorre, daí que:

$$\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C$$

Pela desigualdade de Sobolev:

$$\|u_k - \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla(u_k - \varphi)\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\|u_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + C\left(\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}\right) \leq C' < +\infty$$

Daí, como (u_k) é um sequência limitada em um espaço de Banach e $W_\varphi^{1,2}$ é fechado fraco, pois é fechado forte, então existe uma subsequência $u_{k_j} \in W_\varphi^{1,2}$ fracamente convergente, tal que:

$$u_{k_j} \rightarrow u$$

Ocorre também que F é convexa devido à linearidade do gradiente e da integral. Além disso, F é contínua na topologia forte, logo é semicontínua inferior na topologia fraca. Assim:

$$I \leq F(u) \leq \lim F(u_k) = I$$

Ou seja:

$$F(u) = I \leq F(v), \forall v \in W_\varphi^{1,2}(\Omega)$$

Concluímos então que u minimiza F e sendo assim, é solução fraca para o problema de Dirichlet.

5. UNICIDADE.

Após encontrarmos a existência da solução fraca, nos atemos à sua unicidade, que pode ser facilmente encontrada. Suponha que u e $w \in W_\varphi^{1,p}(\Omega)$ sejam mínimos de F, então da convexidade estrita de F:

$$F\left(\frac{u+w}{2}\right) < \frac{F(u)}{2} + \frac{F(w)}{2}$$

$$F\left(\frac{u+w}{2}\right) < \frac{F_{mín}}{2} + \frac{F_{mín}}{2} = F_{mín}$$

O que nos leva a um absurdo, já que $W_\varphi^{1,p}(\Omega)$ sendo convexo, $v = \frac{u+w}{2} \in W_\varphi^{1,p}(\Omega)$. No entanto, temos $F(v) \geq F_{mín}$ qualquer que seja $v \in W_\varphi^{1,p}(\Omega)$, logo u é o único mínimo de F, então é solução única do problema de Dirichlet.

Finalizamos que existe pelo menos uma outra abordagem clássica para se encontrar soluções fracas para EDPs, a saber: a abordagem que utiliza o lema de Lax-Milgran. Para saber mais sobre esta abordagem, recomendamos a leitura (MELO, 2016), ou a apênde de (EVANS, 1997) ou (BREZIS, 2011).

REFERÊNCIAS

EVANS, Lawrence C. **Partial Differential Equations.** American Mathematical Society, 1997.

GILBARG, David; TRUNDINGER, Neil S. **Elliptic partial differential equations of second order**. Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. SpringerVerlag, Berlin, 2001.

MELO, Maurílio Márcio. **O lema de Lax-Milgram e Aplicações.** XXIII Semana do IME. Goiânia: UFG, 2016.

BREZIS, Haim. ***Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations***. New York: Springer, 2011.