



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PRODUTO EDUCACIONAL

Aprendendo matrizes com Escher

SUSANA WILLEMANN STIMAMIGLIO

JOINVILLE, SC
2025

Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

Programa: MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Nível: MESTRADO PROFISSIONAL

Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.

Linha de Pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias

Título: Aprendendo matrizes com Escher

Autora: Susana Willemann Stimamiglio

Orientadora: Viviane Maria Beuter

Data: 27/08/2025

Produto Educacional: Sequência didática

Nível de ensino: Ensino Médio.

Área de Conhecimento: Matemática

Tema: Matrizes

Resumo:

Este produto educacional é composto por uma sequência didática que tem como principal objetivo auxiliar o ensino de matrizes, operações com matrizes e relacioná-las com as isometrias no plano, no contexto do Ensino Médio, promovendo a contextualização da matemática por meio da arte, com foco nos ladrilhamentos de Escher. Para isso, serão apresentadas duas versões para aplicação deste produto: a primeira, pensada para um *cenário ideal*, em que o professor dispõe de um laboratório de informática ou de notebooks acessíveis a todos os alunos; a segunda, voltada a um *cenário realista*, contempla situações em que o professor tem apenas um projetor em sala de aula, ou mesmo nenhum recurso digital, e trabalha com papel e caneta. Tudo que será necessário para aplicação dessa sequência em sala está disponível nesse documento, com o passo a passo de cada atividade proposta.

Palavras-chave: Matrizes. Escher. Ladrilhamento. GeoGebra. Isometrias.

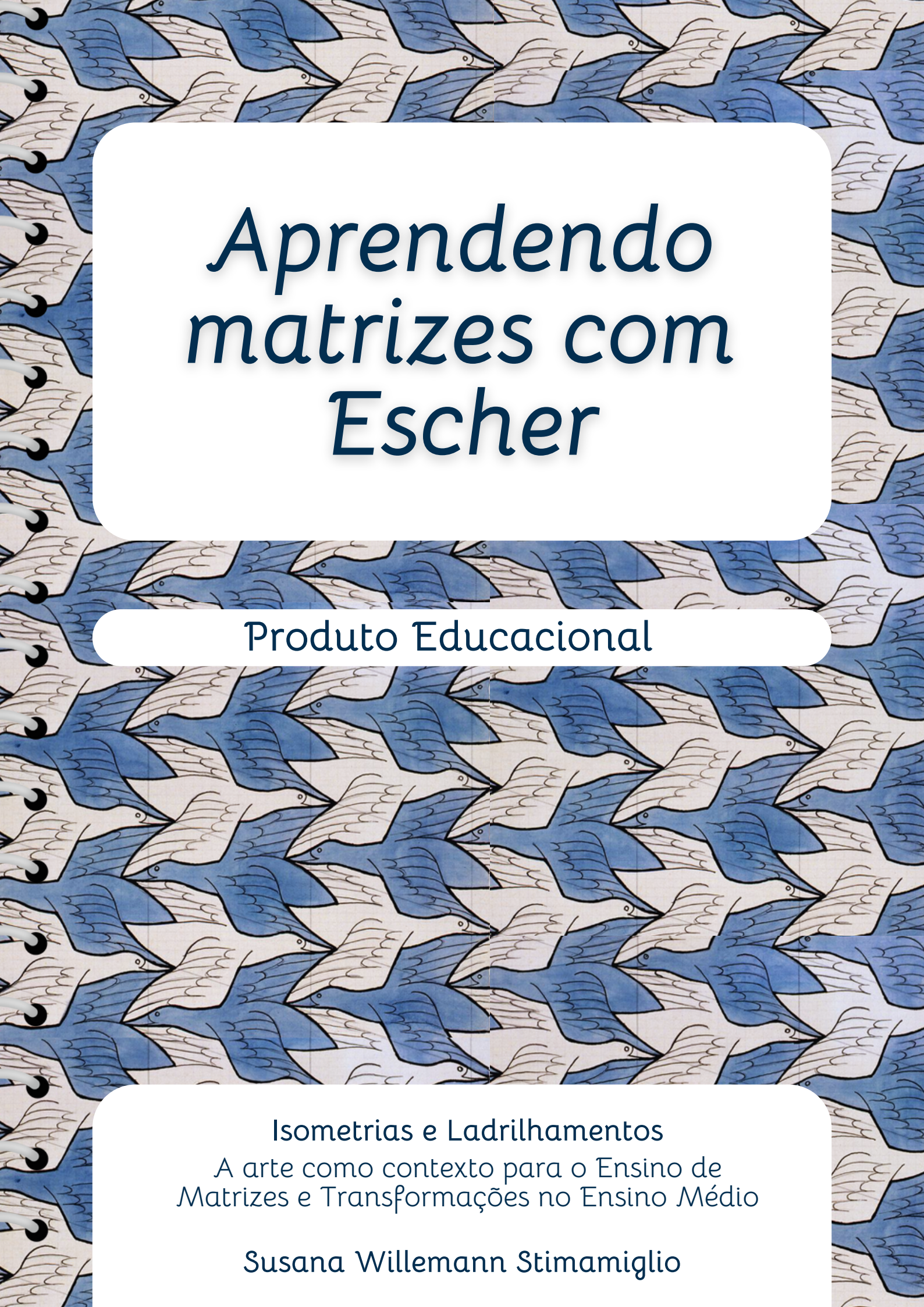
Biblioteca Universitária UDESC: <https://repositorio.udesc.br/home>

Publicação Associada: ISOMETRIAS E LADRILHAMENTOS: A ARTE COMO CONTEXTO PARA O ENSINO DE MATRIZES E TRANSFORMAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

URL: <http://www.udesc.br/cct/profmat>

Arquivo	*Descrição	Formato
14.611 KB	Texto completo	Adobe PDF

Este item está licenciado sob uma [Licença Creative Commons](#)
Atribuição - Não Comercial - CompartilhaIgual CC BY-NC-SA



Aprendendo matrizes com Escher

Produto Educacional

Isometrias e Ladrilhamentos

A arte como contexto para o Ensino de
Matrizes e Transformações no Ensino Médio

Susana Willemann Stimamiglio

Apresentação

Este documento, denominado Produto Educacional, foi elaborado como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC).

Paralelamente a este material, foi desenvolvida uma dissertação que aprofunda e fundamenta teoricamente os temas abordados neste produto. Embora o material aqui apresentado seja autossuficiente para aplicação em sala de aula, recomenda-se, se possível, a leitura complementar da dissertação.

O principal objetivo deste trabalho é auxiliar o ensino de matrizes, operações com matrizes e relacioná-las com as isometrias no plano, no contexto do Ensino Médio, promovendo a contextualização da matemática por meio da arte, com foco nos ladrilhamentos de Escher.

Serão apresentadas duas versões para aplicação deste produto:

- A primeira, pensada para um *cenário ideal*, em que o professor dispõe de um laboratório de informática ou de notebooks acessíveis a todos os alunos;
- A segunda, voltada a um *cenário realista*, contempla situações em que o professor tem apenas um projetor em sala de aula, ou mesmo nenhum recurso digital, e trabalha com papel e caneta.

Dessa forma, busca-se contemplar diferentes realidades escolares, permitindo que o professor adapte ou combine as propostas conforme as condições disponíveis e os objetivos de sua prática pedagógica.

Observa-se que, embora o produto tenha sido pensado para o Ensino Médio, as primeiras atividades também podem ser aplicadas no Ensino Fundamental. Além disso, as atividades sugeridas podem ser realizadas de forma interdisciplinar, integrando conteúdos de matemática e arte.

Habilidades

Identificamos na BNCC alguns objetivos que desejamos alcançar por meio da aplicação deste produto educacional, são elas:

Objetivo Geral

Enfatizar também as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança.

EFO6MA16

Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.

EFO7MA19

Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.

EFO7MA20

Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.

EFO7MA21

Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.

EFO7MA27

Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.

EFO8MA18

Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

EF69AR04

Analisar os elementos constitutivos das artes visuais (ponto, linha, forma, direção, cor, tom, escala, dimensão, espaço, movimento etc.) na apreciação de diferentes produções artísticas.

EF69AR05

Experimentar e analisar diferentes formas de expressão artística (desenho, pintura, colagem, quadrinhos, dobradura, escultura, modelagem, instalação, vídeo, fotografia, performance etc.).

EF69AR06

Desenvolver processos de criação em artes visuais, com base em temas ou interesses artísticos, de modo individual, coletivo e colaborativo, fazendo uso de materiais, instrumentos e recursos convencionais, alternativos e digitais.

EM13MAT105

Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

EM13MAT505

Resolver problemas sobre ladrilhamentos do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados, generalizando padrões observado.

Habilidade presente no Currículo Base de Santa Catarina

Resolver e elaborar problemas envolvendo matrizes e sistemas lineares.

EM13LGG602

Fruir e apreciar esteticamente diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, assim como delas participar, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade.

Sumário

1 Cenário ideal: aplicação do produto por meio do livro no Geogebra;

2 Cenário realista: aplicação do produto com lápis, tesoura e papel;

3 Anexos:

Anexo 1 Contextualização com a arte: quem foi Escher;

Anexo 2 Ladrilhamentos e Isometrias;

Anexo 3 Formas geométricas para criação de figuras com papel, lápis e tesoura;

Anexo 4 Revisão de matrizes e exercícios de revisão;

Anexo 5 Isometrias e matrizes;

Anexo 6 Exercícios de identificação das isometrias;

Anexo 7 Exercícios de isometrias: da geometria para a álgebra;

Anexo 8 A figura no plano cartesiano: Exercícios de isometria: da álgebra para a geometria;

Anexo 9 Tarefa.

4 Gabarito

5 Referências

The background of the entire page is a repeating pattern of stylized blue birds in flight, facing right. The birds are rendered in various shades of blue, creating a sense of movement and depth. They are arranged in a dense, overlapping manner, filling the entire frame.

Aplicação do Produto Educacional

Aplicação do Produto Educacional

Cenário Ideal

Tema: O ensino de matrizes a partir do contexto das obras de Escher

Objetivos:

Contextualizar o ensino de matrizes a partir dos ladrilhamentos de Escher;

Revisar os temas: matrizes e operações com matrizes;

Identificar isometrias a partir de exemplos;

Diferenciar reflexões, translações e rotações no plano.

Conteúdo: Matrizes, operações com matrizes, isometrias e transformações.

Metodologia: Aplicação do produto educacional por meio do Geogebra.

Recursos: Computadores ou notebooks, material para anotações.

Avaliação: Por meio das observações durante a aula e pela tarefa entregue.

Duração: 7 à 8 aulas.

Para a aplicação do produto educacional em um cenário ideal, recomenda-se o uso de computadores ou notebooks, de modo que cada aluno possa realizar a atividade em seu próprio dispositivo individualmente. Caso não haja equipamentos suficientes para todos os estudantes, sugere-se a formação de duplas ou grupos para a realização das tarefas.

Com cada aluno ou grupo em seu computador abrirá o livro no Geogebra: "Aprendendo Matrizes com Escher" pesquisando no site do Geogebra ou direcionando ao link abaixo.

Aprendendo Matrizes com Escher - Livro Geogebra (<https://www.geogebra.org/m/bkbvjdg9>)

Ao abrir o livro o aluno terá todos os passos a seguir para a finalização da atividade, assim o professor pode atuar apenas como intermediador e auxiliar com os itens que forem necessários.

Para chegar no objetivo de utilizar as matrizes para a aplicação das Isometrias, o aluno passará pelos tópicos:

Capítulo 1

- Contextualização com a arte: quem foi Escher;
- Técnicas utilizadas em suas obras.

Capítulo 2

- Ladrilhamentos;
- Isometrias.
- Criação de uma figura pela Técnica da Dentada;
- Criando ladrilhamentos com essa figura;
- Conclusões;

Capítulo 3

- Revisão de operações com matrizes: soma e multiplicação (esse item pode ser pulado caso não tenha necessidade);

Capítulo 4

- Isometrias e matrizes;
- Identificando isometrias a partir de exemplos;
- Isometrias: da álgebra para a geometria;
- Isometrias: da geometria para a álgebra;

Capítulo 5

- Tarefa;
- Desafio.

A seguir, apresentamos os capítulos disponíveis no GeoGebra, acompanhados de sugestões de intervenções pedagógicas que podem ser utilizadas para incentivar os alunos a alcançarem os objetivos propostos.

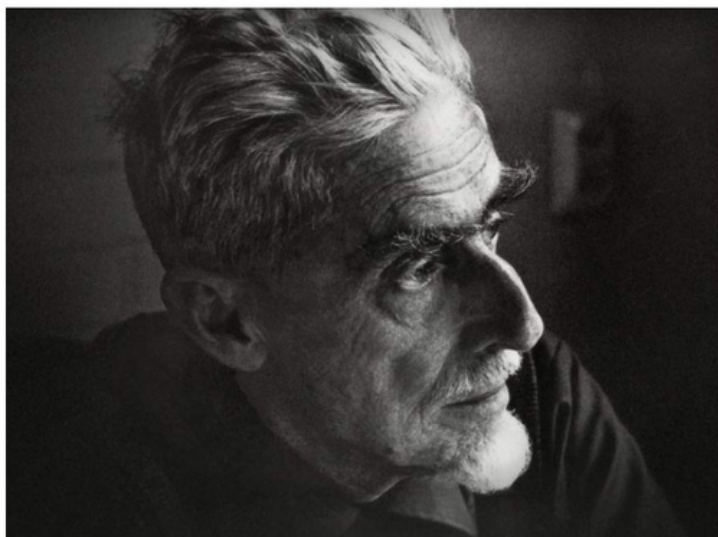
No livro do GeoGebra você encontrará as seguintes atividades:

Capítulo 1 - Conhecendo Escher

Conhecendo Escher

Autor: Susana Willemann

Nesta primeira atividade vamos conhecer melhor quem foi o artista Maurits Cornelis Escher e como suas obras podem ser interessantes quando estamos estudando isometrias, matrizes e transformação linear.



Escher nasceu na Holanda no ano de 1898. Desde pequeno, aprendeu a trabalhar com madeira e sempre foi muito criativo. Estudou na Escola de Arte de Haarlem, onde se formou em 1921. A partir de então, começou uma viagem pela Europa, a qual, pelas paisagens e construções, inspirou muitas de suas obras. Desde o início da sua carreira, o artista utilizou muitos elementos de matemática em suas criações, explorando teorias que, muitas vezes, não tinha conhecimento formal.

Casou-se em 1924, com Jetta Umiker com quem teve três filhos: Georges, Arthur e Jan. Mudou-se em 1935 para a Suíça, logo após para a Bélgica e, por fim, retornou para a Holanda em 1941.

Podemos identificar, ao longo da vida do artista, que suas obras foram marcadas por duas fases. A primeira fase, até 1937, foi marcada pelo uso de perspectiva. Com muito talento Escher se preocupava em expressar o mundo físico, e dessa maneira, seus trabalhos foram influenciados por lugares e culturas que conheceu. (FAINGUELERNT; NUNES, 2015). Notamos, em decorrência das visitas às cidades

No Geogebra sugerimos aos alunos assistirem ao seguinte vídeo:



[M. C. Escher, Artista e Gravador - Vida & Obra | 10](#)

Postado no Canal Arte & Educação
Vídeo em Português que apresenta a vida e as obras de Escher

Tempo de duração - 6 min 44 seg

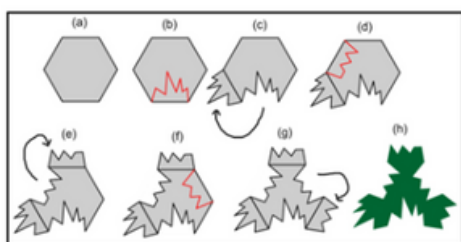
Técnicas utilizadas pelo artista

Autor: Susana Willemann

Escher utilizava algumas técnicas para desenvolver seus trabalhos, criava ladrilhos a partir da técnica da dentada e depois utilizava da Xilografia ou Litografia para criar suas obras.

A Técnica da Dentada

Escher criava os ladrilhos utilizados em suas obras a partir de figuras geométricas, como quadrados, triângulos e hexágonos. Ele escolhia uma figura geométrica e, partir dessa base, criava diferentes ilustrações. Essa técnica é comumente chamada de "Técnica da Dentada", pois ao tomar uma figura geométrica, retira-se um pedaço de um lado para acoplá-lo em outro. Por exemplo, ao tomar um hexágono, como mostra as seguintes figuras, retiramos qualquer pedaço de um dos lados e acoplamos esse pedaço em outro lado. Repetindo essa tarefa mais vezes, criamos uma imagem totalmente diferente da primeira utilizada. Essa imagem criada se encaixa perfeitamente com ela mesma, formando um ladrilhamento sem espaços em branco.



Ao final do primeiro Capítulo é proposto um questionamento aos alunos:

Após a leitura desse texto, você consegue identificar elementos ou padrões em algumas obras de Escher? Você consegue perceber alguma relação entre a matemática e as obras dele?

O objetivo desta atividade é despertar nos alunos o interesse pelo conteúdo por meio de exemplos de obras de Escher, além de levá-los a perceber que a matemática pode estar presente em muitos lugares onde normalmente não a imaginamos.

O professor pode intervir nessa atividade estimulando a curiosidade dos alunos, respondendo perguntas sobre o artista e destacando características que achar conveniente nas obras de Escher.

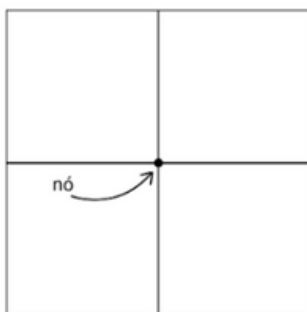
Ladrilhamentos

Autor: [Susana Willemann](#)

Ladrilhamento do plano é o preenchimento completo do plano por meio de figuras geométricas, geralmente polígonos, que se encaixam perfeitamente, sem deixar espaços vazios e sem se sobrepor.

O ladrilhamento é um tipo de padronagem que surge quando cobrimos uma superfície com formas geométricas, que chamamos de ladrilhos, que se repetem e que apresentam algum tipo de simetria. Esse tipo de padrão pode ser observado em pisos, azulejos ou mosaicos.

Nó em um ladrilhamento é o ponto do plano onde se encontram os vértices de três ou mais polígonos.



Ao final dessa atividade, a pergunta proposta aos alunos é a seguinte:

É possível criar ladrilhamentos regulares usando outros polígonos regulares além do quadrado, do triângulo equilátero e do hexágono? Explique sua resposta.

O objetivo dessa pergunta é levar os alunos a refletirem sobre os ângulos envolvidos no processo de ladrilhamento e sobre o modo como os vértices das figuras se encontram.

Isometrias

Autor: Susana Willemann

As isometrias são transformações que não alteram forma e tamanho da figura (ou seja, preservam a distância entre quaisquer dois pontos), apenas sua posição no plano. Isso significa que a figura obtida é sempre congruente à figura original.

Com as isometrias, é possível criar ladrilhamentos no plano, movimentando os ladrilhos para que se encaixem e formem padrões.

Na Figura 9, podemos observar três tipos de isometrias:

Figura 9



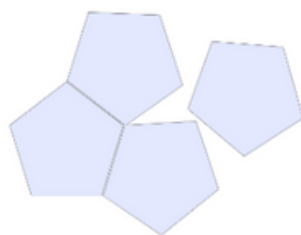
No final do capítulo há uma atividade chamada Conclusões, em que os alunos devem perceber as características necessárias para o ladrilhamento.

Conclusões

Autor: Susana Willemann

Note que nem toda forma geométrica forma um ladrilhamento. Nós criamos apenas as figuras a partir de quadrados, triângulos equiláteros e hexágonos regulares. Já se perguntou o porquê disso?

No "Paint" ou no "Canva", selecione um pentágono, por exemplo, e tente junta-los lado a lado, verá que não será possível fazer o ladrilhamento sem espaços em branco e sem sobreposição.



Fica como sugestão o seguinte vídeo para complementar o assunto:



[Isto é Matemática T05E09 O Estranho Mundo de Escher](#)

Vídeo postado pelo canal Sigma3web no quadro Isto é Matemática.

Vídeo em Português (Portugal) que apresenta os ladrilhamentos e como eles funcionam, com alguns exemplos de Escher.

Tempo de duração - 8 min 10 seg

Capítulo 3 - Revisão de Matrizes

Revisão de Matrizes

Autor: Susana Willemann

Nesta atividade vamos rever os conceitos que envolvem Matrizes e suas operações, como soma, multiplicação por um escalar e multiplicação entre matrizes.

Matrizes

Uma matriz é uma tabela organizada em linhas (horizontais) e colunas (verticais), usada para representar e resolver problemas matemáticos.

Exemplo de uma matriz 2×3 (2 linhas e 3 colunas):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Adição de Matrizes

A adição de duas matrizes é feita elemento a elemento, e só é possível se elas tiverem as mesmas dimensões.

Sejam:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Caso seja necessário retomar o conteúdo de matrizes, disponibilizamos no Capítulo 3 a teoria que consideramos essencial. O professor pode apresentar esse material aos alunos da forma que achar mais adequada, ou simplesmente disponibilizá-lo para leitura e consulta.

Para os exercícios sobre matrizes, foi disponibilizado um conjunto de atividades no GeoGebra. No entanto, considerando que a plataforma não oferece o melhor suporte para a formatação de matrizes, também foi criada uma atividade em formato de jogo no site Kahoot, com o objetivo de tornar o aprendizado mais dinâmico e interativo.

A atividade pode ser acessada pelo link:

<https://create.kahoot.it/details/39c2a5a3-1b83-41c0-9264-ac8c5716adb4>

E realizada com cada aluno em seu computador.

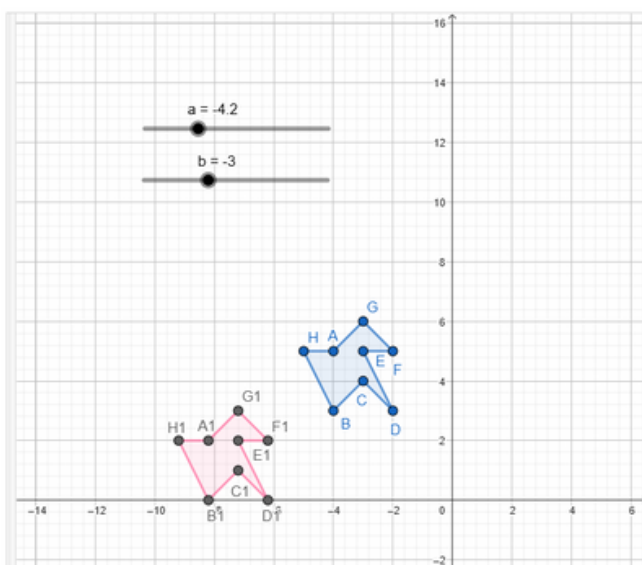


Capítulo 4 - Isometrias no plano

No Capítulo 4 teremos a utilização de representações geométricas no plano com controles deslizantes para ajudar no entendimento das Isometrias.

1) Translação

Translação no plano cartesiano é a transformação em que cada ponto de uma figura é deslocado somando-se um mesmo valor à coordenada x e um mesmo valor à coordenada y . Dessa forma, todos os pontos se movem na mesma direção e na mesma distância.



GeoGebra

Q

Isometrias: da geometria para a álgebra

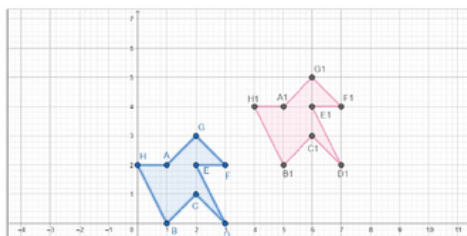
Autor: Susana Wilemann

Nessa atividade, vamos primeiro observar um exemplo.

Exemplo

A partir do esboço no gráfico vamos identificar qual isometria aconteceu do polígono azul para o rosa e tentar escrevê-la algebricamente com a forma geral:

$$f(x) = Ax + B$$



O objetivo nessa atividade é destacar as diferentes representações do mesmo tópico, além de oportunizar ao aluno uma aplicação do conteúdo de matrizes estudado.

O professor pode auxiliar respondendo as dúvidas que surgirem, sem tirar o protagonismo do aluno na atividade. A correção e avaliação pode ser feita a partir do arquivo PDF que o aluno consegue enviar ao professor após a finalização das atividades.

Capítulo 5 - Tarefa

Tarefa

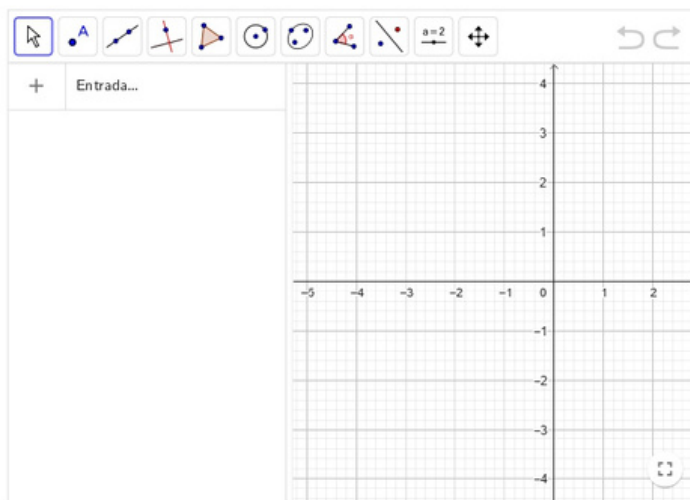
Autor: Susana Willemann

Agora é a sua vez de criar sua própria isometria!

Relembre o que foi feito na Atividade 2, quais isometrias foram necessárias para formar o ladrilhamento? Ou crie qualquer outra que quiser.

Ao escolher sua isometria, faça o esboço no plano e a represente algebricamente por meio da equação matricial.

Para o esboço no plano utilize uma figura similar a criada na Atividade 1, pela Técnica da Dentada, ao colocá-la no plano utilize quantos pontos for necessário.



No Capítulo 5, propõe-se uma tarefa em que os alunos devem criar sua própria transformação, utilizando as isometrias estudadas nos capítulos anteriores.

Pode-se reaproveitar o ladrilho construído no Capítulo 2 ou optar por criar um novo. O plano cartesiano será disponibilizado, e os alunos terão acesso às ferramentas do GeoGebra para desenvolver livremente sua composição.

Essa tarefa foi pensada como uma estratégia para o professor avaliar a aprendizagem dos alunos e identificar possíveis dificuldades. Ela pode ser adaptada conforme as necessidades observadas ao longo da aplicação do produto, servindo também para reforçar conteúdos que tenham gerado dúvidas.

Fica também ao final do capítulo um desafio para os alunos construírem um ladrilhamento com triângulos equiláteros ou hexágonos. Essas construções podem ser apresentadas pelos alunos à classe, como modo de finalizar os tópicos trabalhados.

Aplicação do Produto Educacional

Cenário Realista

Tema: O ensino de matrizes a partir do contexto das obras de Escher

Objetivos:

Contextualizar o ensino de matrizes a partir dos ladrilhamentos de Escher;
Revisar os temas: matrizes e operações com matrizes;
Identificar isometrias a partir de exemplos;
Diferenciar reflexões, translações e rotações no plano.

Conteúdo: Matrizes, operações com matrizes, isometrias e transformações.

Metodologia: Aplicação do produto educacional por meio de projetor e atividades impressas.

Recursos: Projetor, material para anotações e atividades impressas.

Avaliação: Por meio das observações durante a aula e pela tarefa entregue.

Duração: 7 à 8 aulas.

Tanto no cenário ideal quanto no realista, a sequência das atividades é semelhante. Nas próximas páginas deste material, descreveremos as atividades previstas para o cenário realista, acompanhadas dos anexos que poderão ser impressos e utilizados com os alunos, disponíveis ao final do documento.

As atividades serão organizadas conforme os seguintes tópicos:

Atividade 1

- Contextualização com a arte: quem foi Escher;
- Técnicas utilizadas em suas obras.

Atividade 2

- Ladrilhamentos;
- Isometrias;
- Criação de uma figura pela Técnica da Dentada;
- Criando ladrilhamentos com essa figura;
- Conclusões;

Atividade 3

- Revisão de operações com matrizes: soma e multiplicação (esse item pode ser pulado caso não tenha necessidade);

Atividade 4

- Isometrias e matrizes;
- Identificando isometrias a partir de exemplos;
- Isometrias: da geometria para a álgebra;
- Isometrias: da álgebra para a geometria;

Atividade 5

- Tarefa;
- Desafio.

Atividade 1

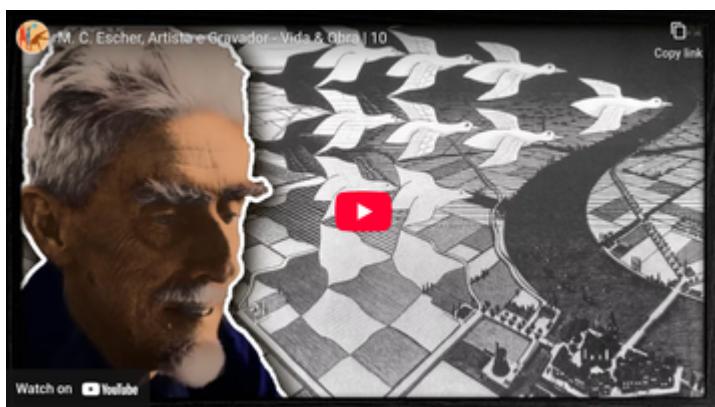
Conhecendo Maurits Cornelis Escher

A primeira atividade dentro do produto é fundamental para a contextualização do assunto e promover o interesse dos alunos pelo conteúdo.

Para introduzir o assunto de ladrilhamentos e isometrias é sugerido a abordar aos alunos a história de Maurits Cornelis Escher, artista holandês que utilizou muito da matemática em suas obras.

No Anexo 1 consta um breve relato da história de Escher que pode ser entregue aos alunos ou trabalhada da maneira que for mais conveniente.

O seguinte vídeo pode auxiliar nessa atividade.



M. C. Escher, Artista e Gravador - Vida & Obra | 10

Postado no Canal Arte & Educação

Vídeo em Português que apresenta a vida e as obras de Escher

Tempo de duração - 6 min 44 seg

Além das informações sobre Escher, no Anexo 1 encontram-se detalhes sobre a técnica da Dentada e as técnicas de Xilogravura e Litografia que o artista utilizava.

O objetivo desta atividade é despertar nos alunos o interesse pelo conteúdo por meio de exemplos de obras de Escher, além de levá-los a perceber que a matemática pode estar presente em muitos lugares onde normalmente não a imaginamos.

Na Atividade 2, será utilizada a Técnica da Dentada, com o objetivo de que os alunos reproduzam, à sua maneira, uma obra semelhante àquela que conheceram, criada por Escher.

Caso se deseje trabalhar apenas com conteúdos de Geometria, por exemplo, com turmas do Ensino Fundamental, a aplicação do produto pode ser realizada até a Atividade 2.

Atividade 2

Ladrilhamentos

Para a sequência das atividades é importante falarmos sobre os conceitos de ladrilhamentos e isometrias, no Anexo 2 temos mais informações que podem ser entregues aos alunos.

Ao final dos tópicos, fica uma pergunta a ser respondida pelos alunos:

É possível criar ladrilhamentos regulares usando outros polígonos regulares além do quadrado, do triângulo equilátero e do hexágono? Explique sua resposta.

O objetivo dessa pergunta é levar os alunos a refletirem sobre os ângulos envolvidos no processo de ladrilhamento e sobre o modo como os vértices das figuras se encontram.

Em seguida à discussão, sugerimos que os alunos assistam a um vídeo explicativo, com o objetivo de aprofundar a compreensão dos conceitos de ladrilhamento e entender melhor o por que utilizamos apenas quadrados, triângulos equiláteros e hexágonos nesse contexto.



[Isto é Matemática T05E09 O Estranho Mundo de Escher](#)

Vídeo postado pelo canal Sigma3web no quadro Isto é Matemática.

Vídeo em Português (Portugal) que apresenta os ladrilhamentos e como eles funcionam, com alguns exemplos de Escher.

Tempo de duração - 8 min 10 seg

Depois da apresentação do vídeo, pode ser utilizado algumas obras de Escher para explicitar o conceito de Isometria, sem a necessidade de aprofundamento ainda.

Destaque que a isometria somente ocorre quando preservamos distâncias, ou seja, a partir de transformações obtemos figuras congruentes a que tínhamos inicialmente.

Veja no Anexo 2 as demais características fundamentais das isometrias.

Agora que o aluno entendeu os conceitos de ladrilhamento, tem uma ideia do que se trata as isometrias e tem o contexto de Escher, vamos propor algumas atividades mais práticas.

Para essa atividade vamos precisar de:

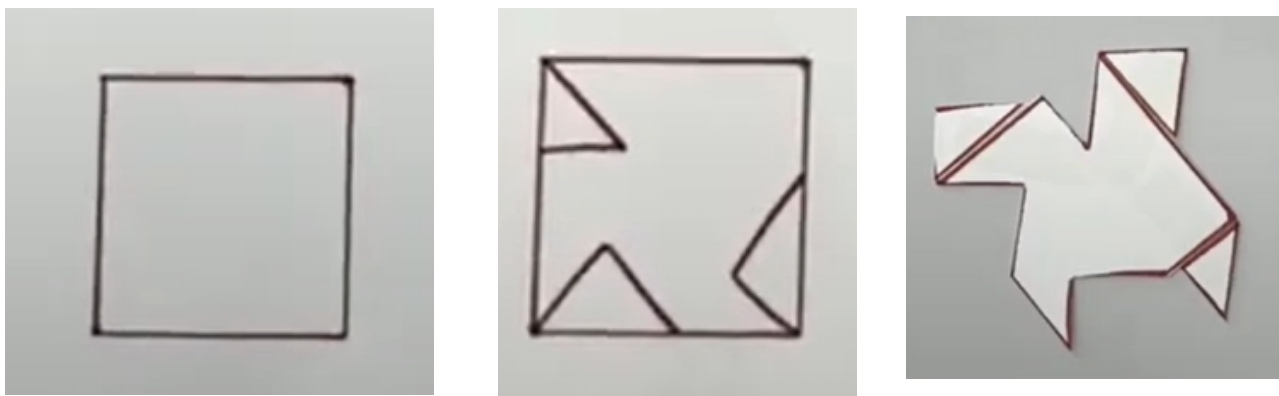
- Tesoura;
- Fita adesiva;
- Folha de papel;
- Canetinha.

Criação de uma figura pela Técnica da Dentada

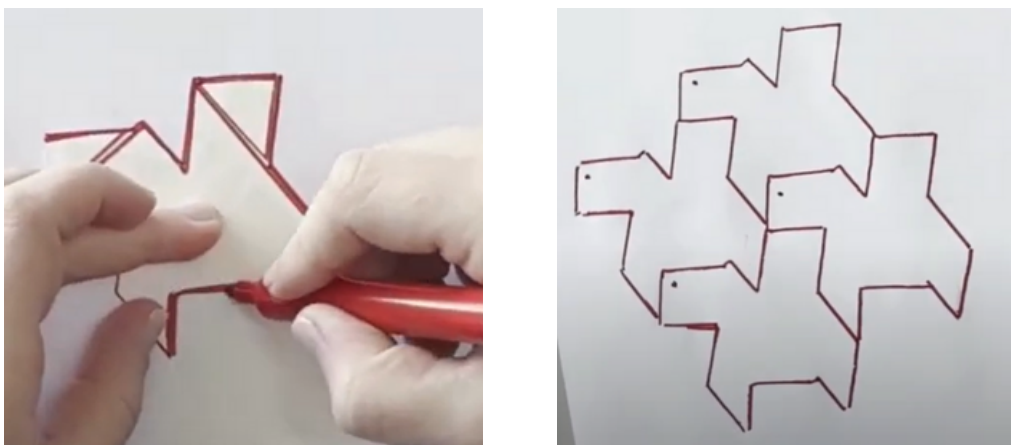
Entregue ao aluno, um quadrado, um triângulo equilátero ou um hexágono regular impresso, de preferência em um papel de gramatura maior. Utilize o Anexo 3 para a impressão. (Caso queira trabalhar com construção de polígonos, é possível também solicitar para o aluno desenhar em uma folha em branco).

Com a ajuda de uma tesoura e uma fita adesiva, o aluno fará o corte de um dos lados do polígono e acoplará em outro lado para criar a figura que desejar (sugere-se que seja feito um rascunho antes).

Podemos observar os passos no seguinte exemplo:



Com o molde desenhado, podemos criar o ladrilhamento desenhando em uma folha lado a lado a figura, cuidando para não sobrepor e sem deixar espaços em branco.



O seguinte vídeo pode auxiliar nestas duas etapas.



[Construindo um ladrilhamento utilizando a Técnica da Dentada](#)

Atividade 3

Revisão de Matrizes

Nesta atividade, faremos uma revisão dos conceitos de matrizes e das operações com matrizes. Caso essa retomada não seja necessária para a turma, a atividade pode ser omitida, seguindo diretamente para a Atividade 4.

Os conceitos podem ser apresentados no quadro, para que os alunos copiem em seus cadernos, ou, alternativamente, pode-se utilizar o Anexo 4, que pode ser impresso e distribuído aos alunos.

Na revisão, abordaremos brevemente:

- o que é uma matriz;
- adição de matrizes;
- multiplicação por escalar;
- multiplicação de matrizes;
- transposta de uma matriz e
- matrizes ortogonais.

Para os exercícios sobre matrizes, foi disponibilizado o material para impressão no Anexo 4. No entanto, foi criada uma atividade em formato de jogo no site Kahoot, com o objetivo de tornar o aprendizado mais dinâmico e interativo.

A atividade pode ser acessada pelo link:

<https://create.kahoot.it/details/39c2a5a3-1b83-41c0-9264-ac8c5716adb4>

E realizada com cada aluno em seu computador ou Chromebook.



Atividade 4

Isometrias no Plano

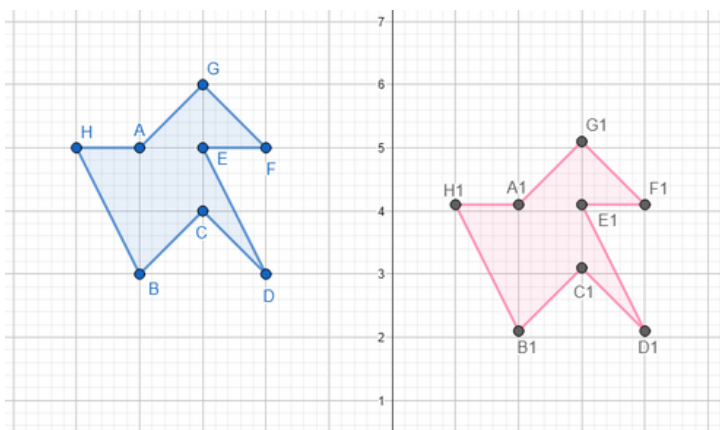
1 Identificando isometrias a partir de exemplos;

Caso seja possível o uso de um projetor ou lousa digital, o professor pode abrir o Capítulo 3 no livro do Geogebra e mostrar a partir dos controles deslizantes o que acontece em cada exemplo.

Ainda, caso não seja possível, ou se preferir, pode-se imprimir o Anexo 6 com os exemplos e trabalhar da mesma maneira.

Caso imprima em preto e branco, utilize os números dos polígonos como referência.

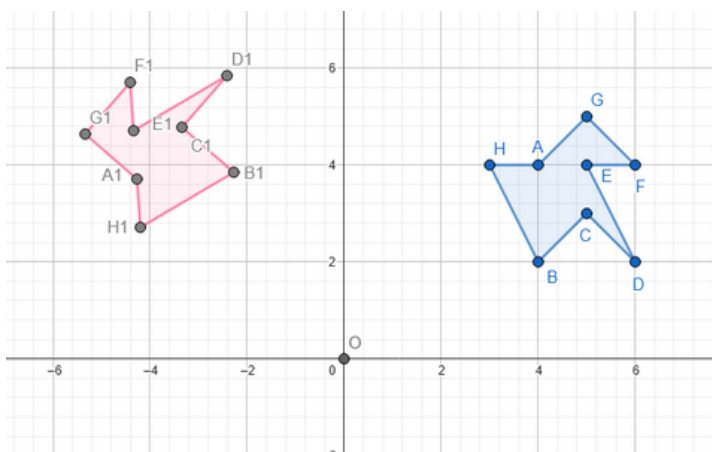
O aluno deve saber identificar se do polígono azul para o rosa está ocorrendo a translação da figura, rotação ou reflexão.



No primeiro exemplo ocorre a translação.

Características que o aluno deve observar:

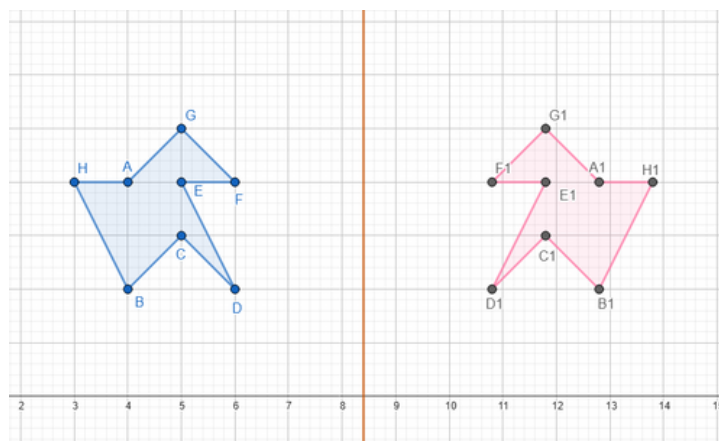
A figura permanece no mesmo sentido, apenas seus pontos foram deslocados de lugar, fazendo a figura transladar.



No segundo exemplo temos a rotação.

Características que o aluno deve observar:

Há um ponto de apoio O que direciona a rotação da figura, que não está mais na mesma posição que inicialmente.



Por fim, no terceiro exemplo obtemos a reflexão.

Características que o aluno deve observar:

A figura não está no mesmo sentido, porém em relação a reta dada ocorre uma reflexão dos pontos.

2 Isometrias: da geometria para a álgebra;

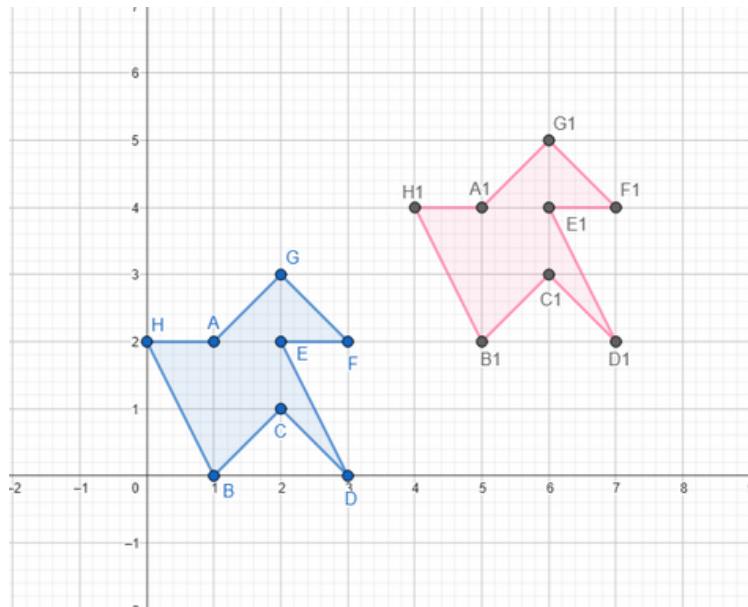
Nessa atividade, vamos primeiro dar um exemplo aos alunos para que eles, em seguida, consigam formar sozinhos as suas conclusões quanto às isometrias.

Tal exemplo está no Anexo 5 e pode ser trabalhado anteriormente à identificação das isometrias.

Exemplo:

a) Identifique qual isometria foi utilizada: translação, rotação ou reflexão;

b) Escreva a equação algébrica da transformação na forma $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$, indicando explicitamente as duas matrizes.



Notamos que trata-se de uma **translação**, nos quais os pontos foram deslocados duas unidades verticalmente e quatro unidades horizontalmente.

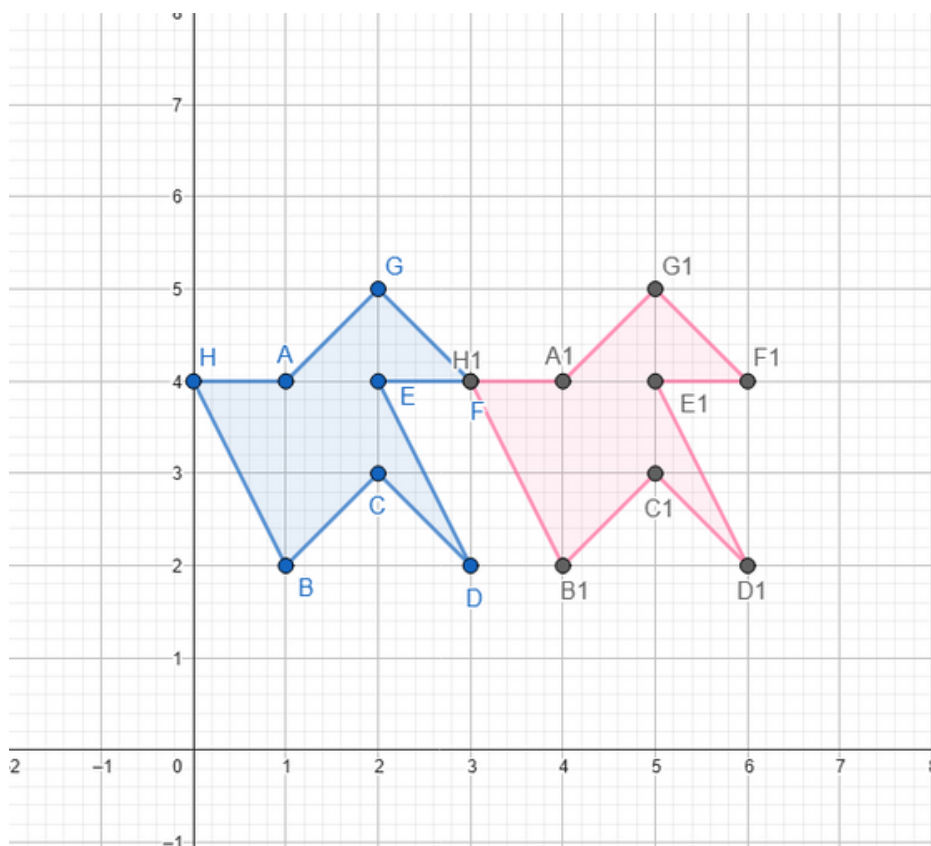
Assim, podemos dizer que os pontos são obtidos com a soma: $(x', y') = (x, y) + (4, 2)$, para qualquer ponto do polígono.

A equação algébrica é dada por:

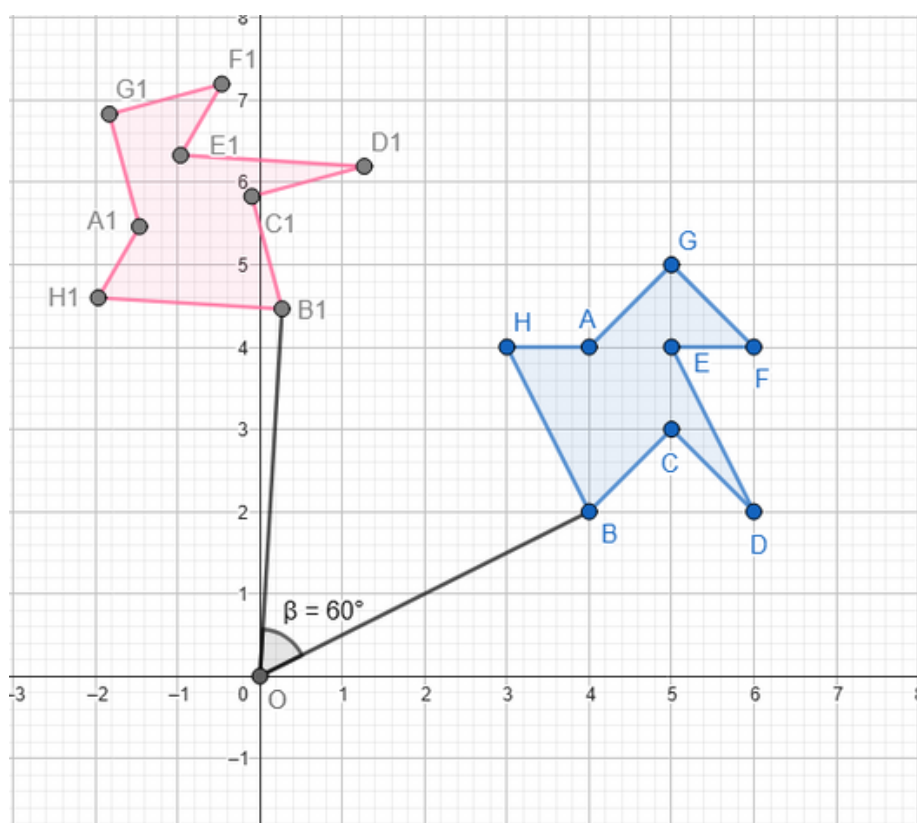
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Exemplos:

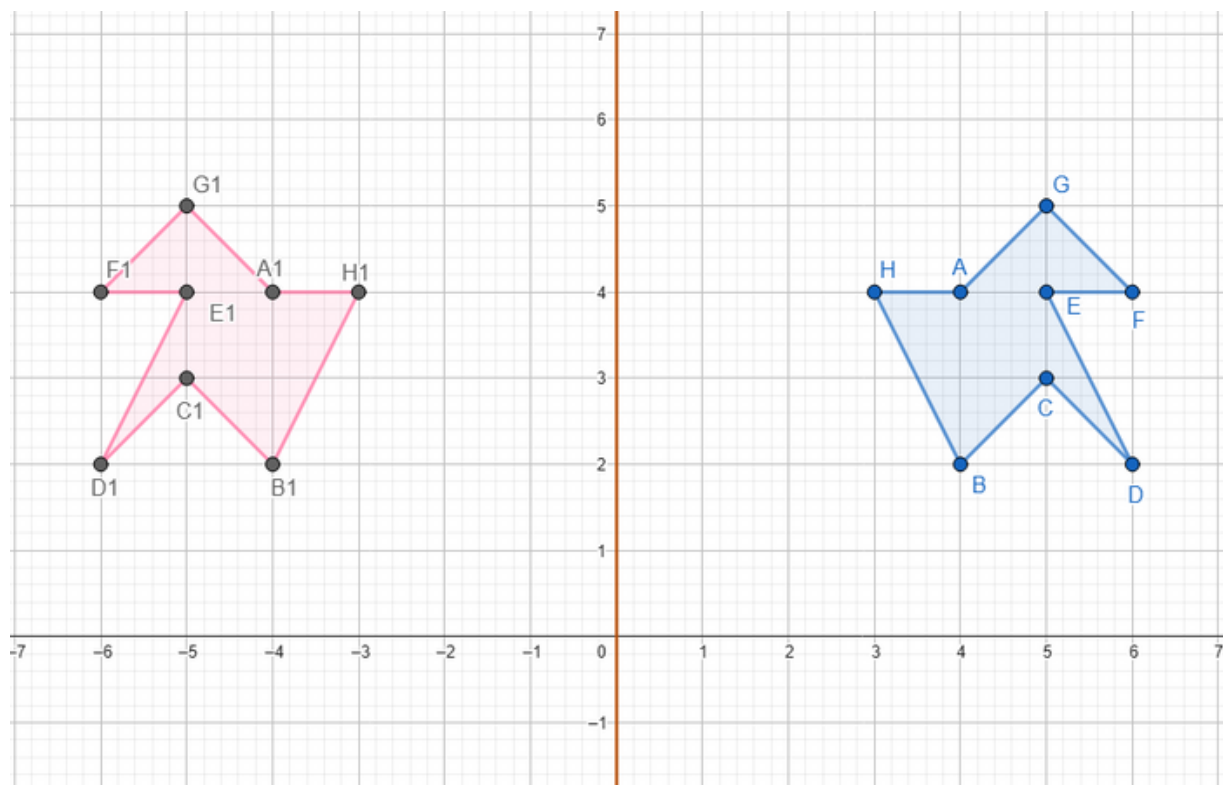
1) Do polígono azul para o rosa, qual isometria foi utilizada? Qual sua equação algébrica?



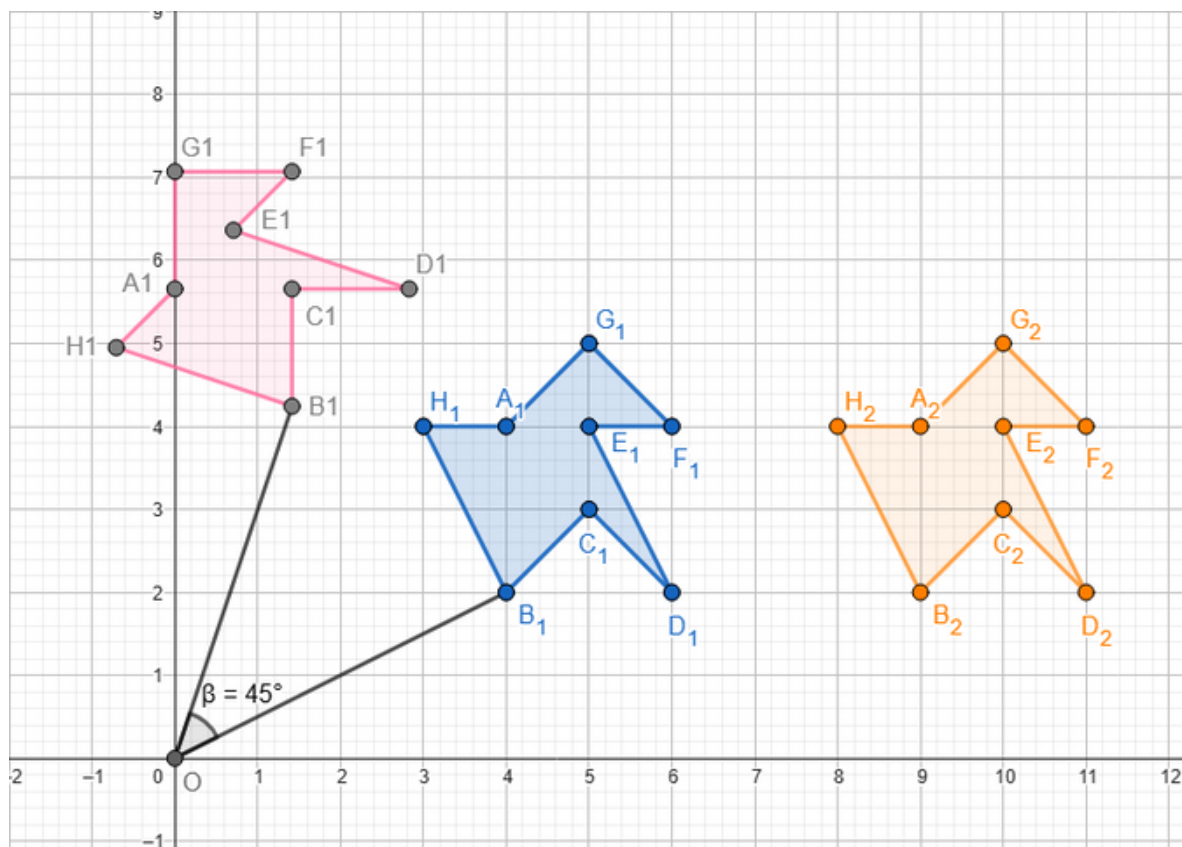
2) Do polígono azul para o rosa, foi feita uma rotação de 60° . Qual sua equação algébrica?



3) Do polígono azul para o rosa, qual isometria foi utilizada? Qual sua equação algébrica? (Note que a reta laranja é o eixo y).



4) Dessa vez utilizamos duas isometrias em sequência para sair do polígono laranja passando pelo azul e indo para o rosa, quais isometrias foram usadas? Como podemos representá-las em uma única equação matricial? (Note que $\beta = 45^\circ$)



3 Isometrias: da álgebra para a geometria;

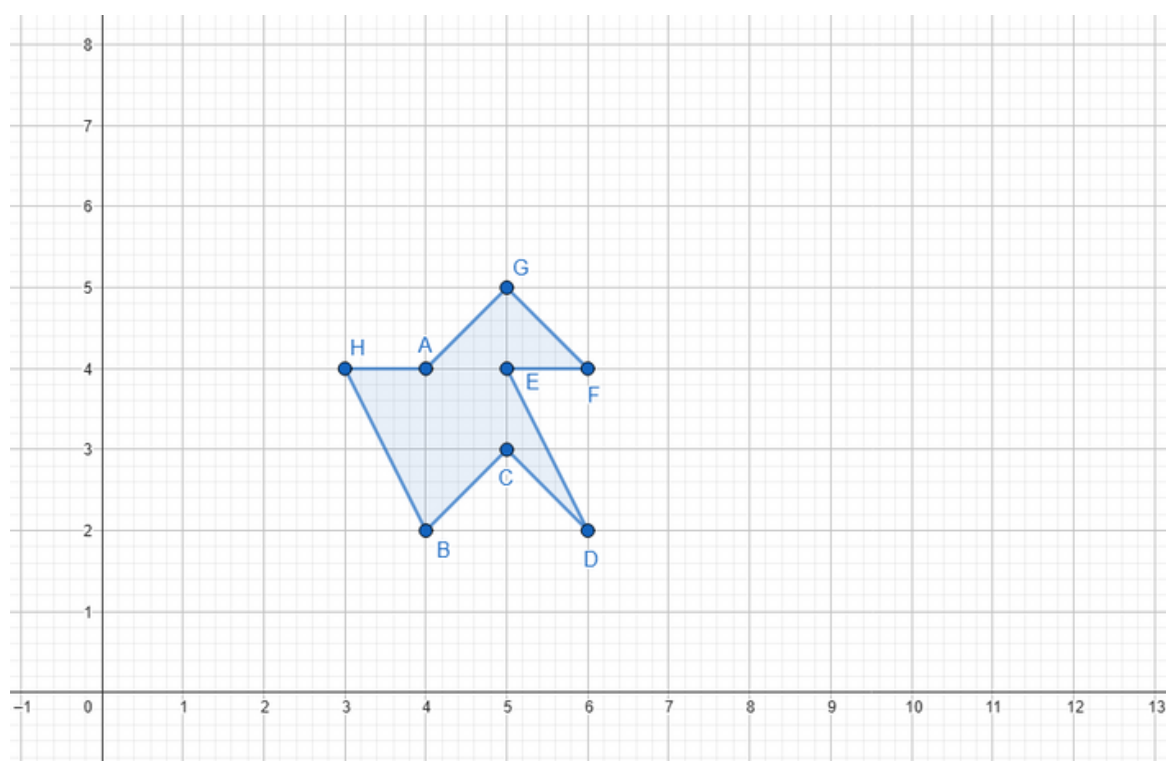
Novamente, vamos resolver um exemplo e depois vamos deixar outras situações para os alunos resolverem.

Exemplo:

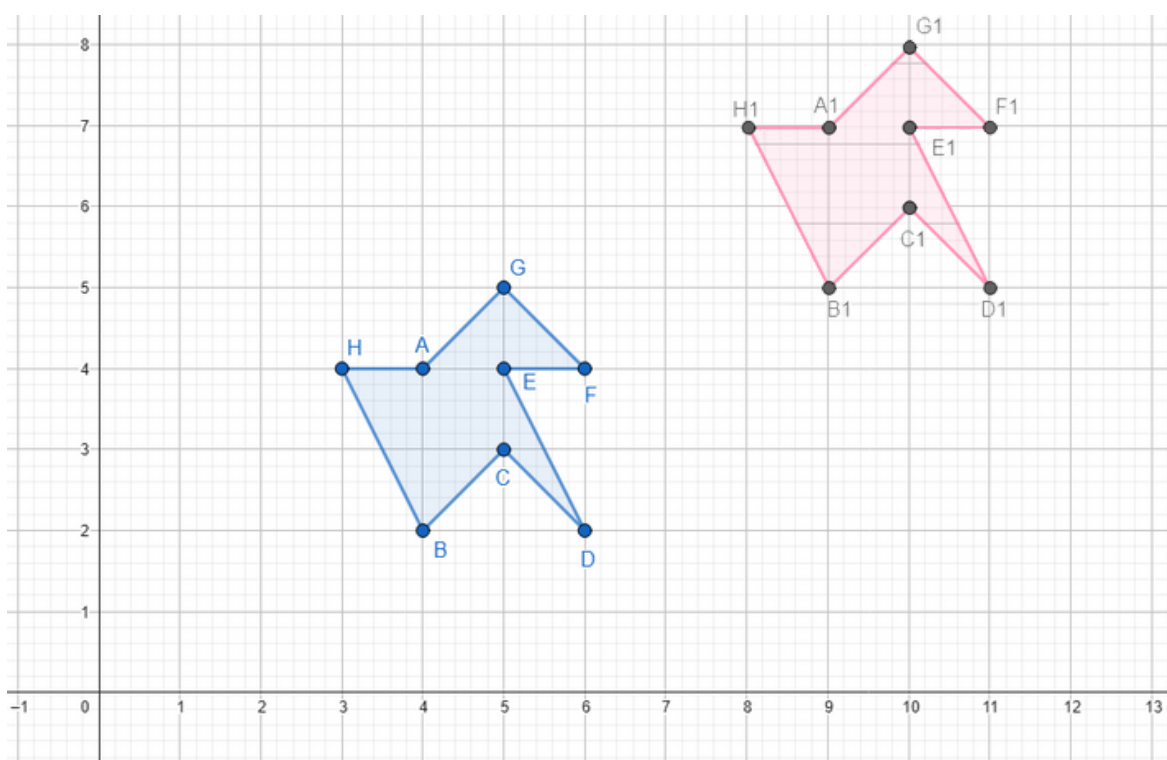
A partir da equação algébrica, vamos fazer o esboço da isometria dada.

A equação é dada por:
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Logo, notamos que trata-se de uma translação, na qual deslocamos 5 unidades na horizontal e 3 unidades na vertical. Dado o plano e a figura abaixo, vamos representar o produto final no mesmo plano.



Portanto, obtemos:



Os próximos exemplos os alunos devem tentar resolver sozinhos:

Exemplos:

Utilize os planos cartesianos do Anexo 8 e os polígonos que estão neles para a resolução dos seguintes exercícios

Identifique em cada equação matricial qual isometria está ocorrendo e represente o polígono resultante da isometria no plano.

1)
$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2)
$$f(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3)
$$f(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} \right)$$

Peça aos alunos para que façam as operações com as matrizes, para chegarem no resultado esperado e exercitem essas operações.

Atividade 5

Tarefa

A Tarefa com o plano cartesiano está disponível no Anexo 9 para impressão.

Agora é a vez do aluno criar sua própria transformação!

A intenção é que o aluno lembre o que foi feito na Atividade 2 e assim escolha alguma isometria que foi necessária para o ladrilhamento já feito.

Ele deve fazer um esboço no plano e a representar algebricamente por meio da equação matricial a isometria escolhida.

A figura criada na Atividade 1 pode ser utilizada nesse momento.

Atividade 6

Desafio

A Atividade 6 é um desafio que pode ser proposto aos alunos: criar um ladrilhamento utilizando triângulos equiláteros ou hexágonos. De fato, quando utilizamos o quadrado como ladrilho, precisamos apenas de translações para criar um padrão, assim com o triângulo ou hexágono conseguimos trabalhar outras isometrias.

Esse ladrilhamento pode ser feito também utilizando a Técnica da Dentada

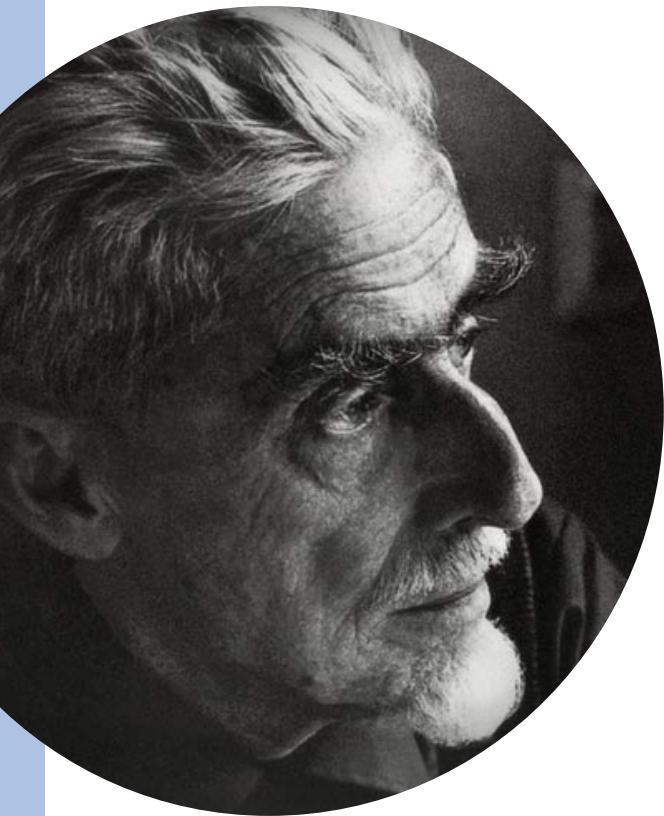
Conclusão

Ao final da aplicação, o aluno deve ser capaz de operar matrizes com facilidade, uma vez que, ao trabalhar com transformações no plano, as operações matriciais funcionam como ferramentas para alcançar os resultados esperados.

É importante observar o desempenho dos alunos durante as atividades, a fim de avaliá-los adequadamente e realizar ajustes no planejamento, caso necessário. Se os exemplos e exercícios propostos se mostrarem muito simples para a turma, é possível ampliar o nível de complexidade, elaborando desafios mais avançados.

Como sugestão, podem ser exploradas reflexões em relação a retas quaisquer e a composição de isometrias, como a combinação de reflexões com translações.

Desejo boa sorte e espero que este material tenha contribuído para facilitar o seu planejamento e enriquecer sua prática docente!



Maurits Cornelis Escher

17 de junho
de 1898 ➤ 27 de março
de 1972

Escher nasceu na Holanda no ano de 1898. Desde pequeno, aprendeu a trabalhar com madeira e sempre foi muito criativo. Estudou na Escola de Arte de Haarlem, onde se formou em 1921. A partir de então, iniciou uma viagem pela Europa, a qual chegou na Itália e ali permaneceu até 1935. As paisagens e construções desse país inspiraram muitas de suas obras. (TJABBES, 2010).

Fonte: M. C. Galeria de obras.
Disponível em:
<https://mcescher.com/about/>.
Acesso em: 28 jul. 2025.

Desde o início da sua carreira, o artista utilizou muitos elementos de matemática em suas criações, explorando teorias que, muitas vezes, não tinha conhecimento formal.

Casou-se em 1924, com Jetta Umiker com quem teve três filhos: Georges, Arthur e Jan. Mudou-se em 1935 para a Suíça, logo após para a Bélgica e, por fim, retornou para a Holanda em 1941.

Podemos identificar, ao longo da vida do artista, que suas obras foram marcadas por duas fases. A primeira fase, até 1937, foi marcada pelo uso de perspectiva. Com muito talento Escher se preocupava em expressar o mundo físico, e dessa maneira, seus trabalhos foram influenciados por lugares e culturas que conheceu. (FAINGUELERNT; NUNES, 2015). Notamos, em decorrência das visitas às cidades italianas e espanholas, a inclusão em seus trabalhos dos diversos ângulos, paisagens e elementos da natureza diferentes, antagônico ao que conhecia das planícies da Holanda.

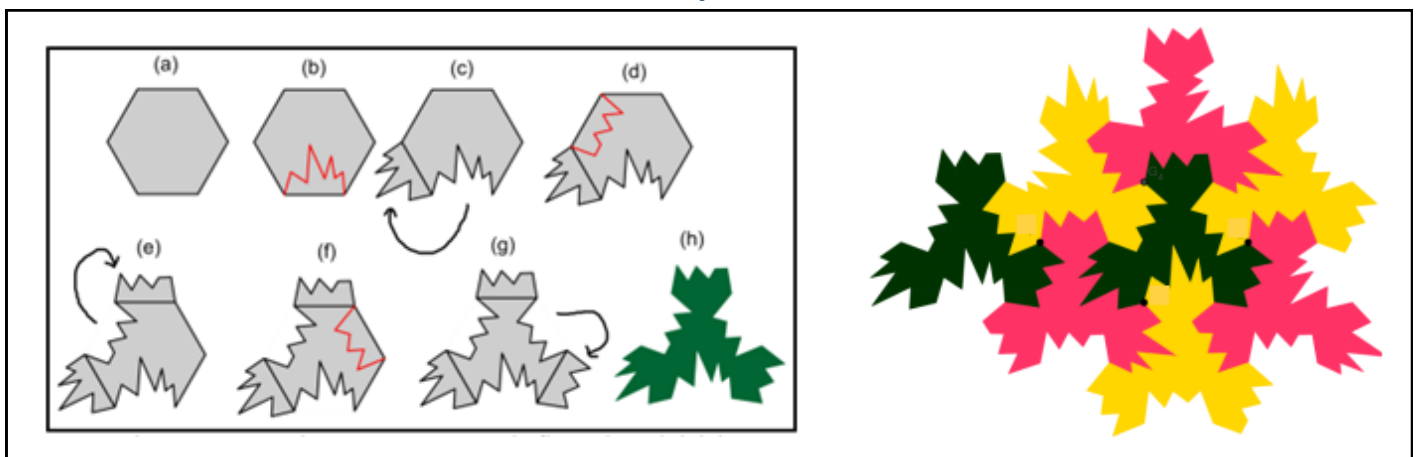
Já na segunda fase, Escher mudou seu estilo, “usando a imaginação e a visão detalhista, afastando-se do mundo físico e buscando uma certa regularidade”, e assim “produziu composições utilizando várias geometrias.” (FAINGUELERNT; NUNES, 2015, p.29).

Escher diferenciava seus trabalhos feitos de ladrilhamento dos já criados por não utilizar apenas formas geométricas simples, mas sim imagens realísticas. Sendo as mais utilizadas eram figuras de animais, principalmente lagartos, peixes e pássaros.

A Técnica da Dentada

Escher criava os ladrilhos utilizados em suas obras a partir de figuras geométricas, como quadrados, triângulos e hexágonos. Ele escolhia uma figura geométrica e, partir dessa base, criava diferentes ilustrações. Essa técnica é comumente chamada de "Técnica da Dentada", pois ao tomar uma figura geométrica, retira-se um pedaço de um lado para acoplá-lo em outro. Por exemplo, ao tomar um hexágono, como mostra na Figura 1, retiramos qualquer pedaço de um dos lados e acoplamos esse pedaço em outro lado. Repetindo essa tarefa mais vezes, criamos uma imagem totalmente diferente da primeira utilizada. Essa imagem criada se encaixa perfeitamente com ela mesma, formando um ladrilhamento sem espaços em branco.

Figura 1



Fonte: Alves (2014)

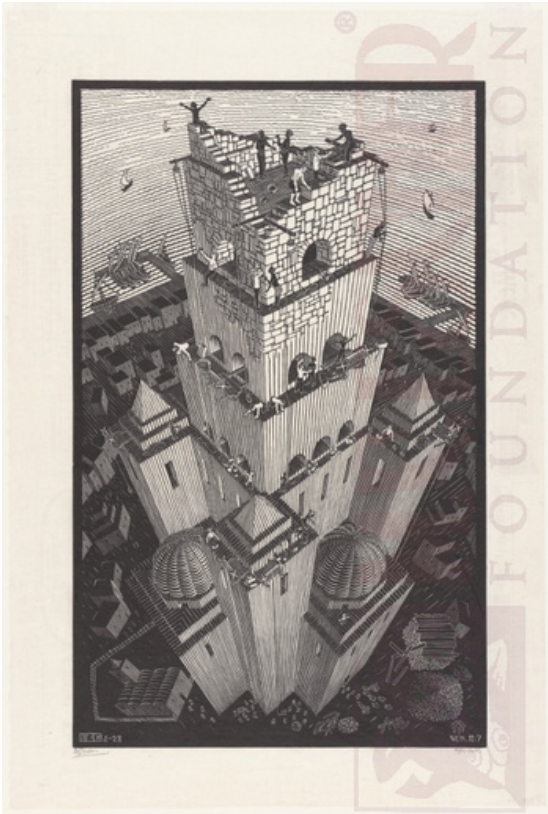
Com isso, depois de construir a sua figura base para os seus ladrilhamentos, Escher produzia suas obras. Em sua visão, o ladrilhamento era uma maneira de expressar a sua fascinação pela eternidade e pelo infinito de diferentes maneiras.

Além disso, o artista explorou temas como infinitude, limites, metamorfose, transformações, e utilizava-se desses elementos dependendo das sensações que desejava transmitir. Frequentemente, Escher brincava em misturar o real e o imaginário.

Apresentamos, a seguir na Figura 2, alguns exemplos de obras feitas pelo artista, que estão disponíveis no Acervo Digital do Instituto M.C. Escher.

Acesso pelo site: <https://mcescher.com/gallery/>

Figura 2



Torre de Babel (1928)



Répteis (1943)



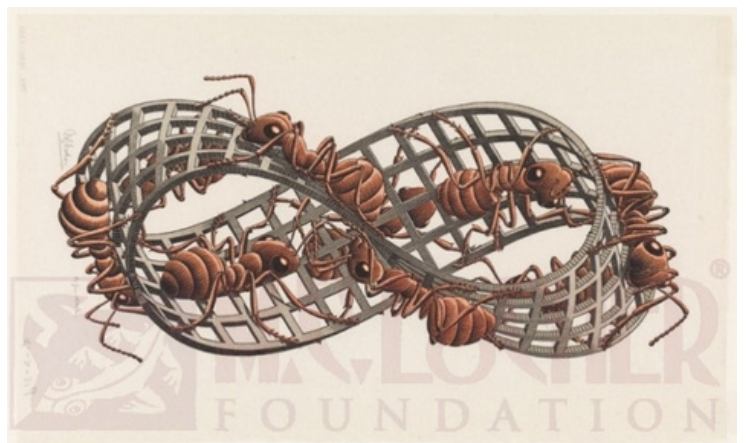
Cada vez menor (1958)



Libertação (1955)



Vínculo de União (1956)



Fita de Mobius II (1963)

Escher é uma grande inspiração para nos mostrar que podemos criar muito mais do que apenas aquilo que os nossos olhos veem. O mundo das ideias e da imaginação pode ser muito maior que o ambiente que temos a nossa volta. Parte dessa imaginação e esse raciocínio pode ser utilizado para estimular o entendimento de conceitos matemáticos mais abstratos, principalmente a álgebra que não é palpável.

Xilografia e Litografia

Além da grandiosidade de Escher em suas ideias e na sua dedicação em criar novos mundos a partir de suas obras, o artista surpreende pela técnica que utilizava para suas criações. Todas as suas composições não eram apenas pinturas, mas sim produzidas a partir de xilografias e litografias.

Xilografias (ou xilogravuras) são feitas mediante o corte de um desenho num bloco de madeira. Trata-se de uma forma de impressão em relevo: uma goiva é usada para esculpir um bloco de madeira, formando sulcos e produzindo uma imagem no primeiro plano. A tinta é aplicada a essas partes e, em seguida, uma folha de papel é pressionada sobre o bloco de madeira com a tinta. (TJABBES, 2010)

Como curiosidade, vale mencionar que a técnica da xilogravura também está presente na literatura de cordel, expressão popular tradicional do nordeste brasileiro. Um dos representantes dessa arte é José Francisco Borges, cujas obras retratam o cotidiano, o cangaço, a religiosidade, os folguedos e personagens imaginários.

Figura 3



Fonte: Site O Progresso.
Disponível em :
<https://www.progresso.com.br/cultura/exposicao-celebra-obra-do-mestre-do-cordel-e-da-xilogravura-j-borges/440266/>
Acesso em 12 ago. 2025

Já na litografia, faz-se um desenho sobre uma pedra plana especialmente tratada. Dessa forma, trata-se de uma forma de impressão plana: a tinta é aplicada sobre a pedra lisa, e o papel é, em seguida, colocado por cima. Todas as cópias de uma série são idênticas: embora a cor possa variar, a imagem ou a representação é sempre a mesma. (TJABBES, 2010)

Para finalizar seus trabalhos, Escher utilizava, além das ferramentas e a firmeza de sua mão, lentes de aumento, muitas vezes com um aumento de 12 vezes para chegar no mínimos detalhes que desejava.

Observamos, na Figura 4, exemplos de impressões de Xilografia e Litografia, respectivamente.

Figura 4



Fonte: Galeria de Arte Livia Doblas
Disponível em: <https://encurtador.com.br/Qbtm3>
Acesso em: 28 jul. 2025.



Fonte: Blog Leilões BR.
Disponível em:
<https://blog.leiloesbr.com.br/litogravura-xilogravura-tecnicas/>
Acesso em: 28 jul. 2025.

Após a leitura desse texto, você consegue identificar elementos ou padrões em algumas obras de Escher? Você consegue perceber alguma relação entre a matemática e as obras dele?

Referências

ALVES, Carlos Marcelo Ferreira. O estudo da simetria através da arte de Maurits Cornelis Escher. 2014. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2014.

ESCHER, M. C. Galeria de obras. 2025. Disponível em: <https://mcescher.com/> Acesso em: 31 jan. 2025.

FAINGUELERNT, Estela K.; NUNES, Katia R. A. Fazendo arte com a matemática. 2. ed. Porto Alegre: Penso, 2015. E-book. Disponível em: <https://app.minhabiblioteca.com.br/reader/books/9788584290338>. Acesso em: 06 jun. 2025. ISBN 9788584290338.

SEBRAE. A xilogravura e cordel: a arte de J. Borges. CRAB – Centro Sebrae de Referência do Artesanato Brasileiro, 10 out. 2023. Disponível em: crab.sebrae.com.br/a-arte-de-j-borges/. Acesso em: 12 ago. 2025.

TJABBES, Pieter. O mundo mágico de Escher. Art Unlimited, 2010.

Ladrilhamentos

Ladrilhamento do plano é o preenchimento completo do plano por meio de figuras geométricas, geralmente polígonos, que se encaixam perfeitamente, sem deixar espaços vazios e sem se sobrepor.

O ladrilhamento é um tipo de padronagem que surge quando cobrimos uma superfície com formas geométricas, que chamamos de ladrilhos, que se repetem e que apresentam algum tipo de simetria. Esse tipo de padrão pode ser observado em pisos, azulejos ou mosaicos.

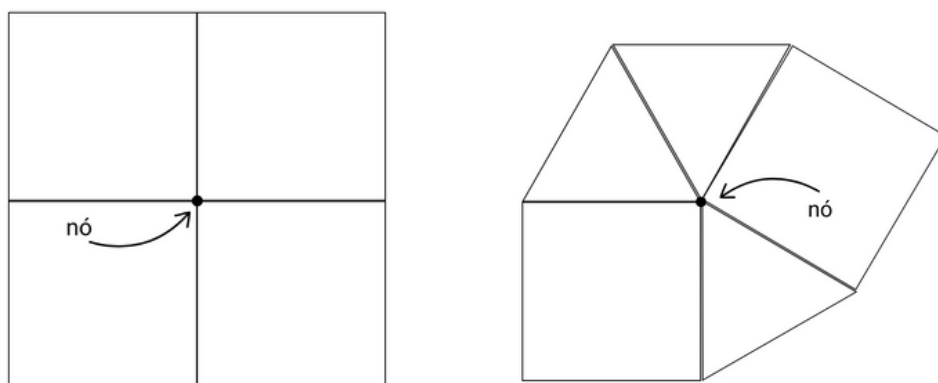
Figura 5



Fonte: Imagens retiradas da Internet

Nó em um ladrilhamento é o ponto do plano onde se encontram os vértices de três ou mais polígonos.

Figura 6



Fonte: Produção da autora (2025)

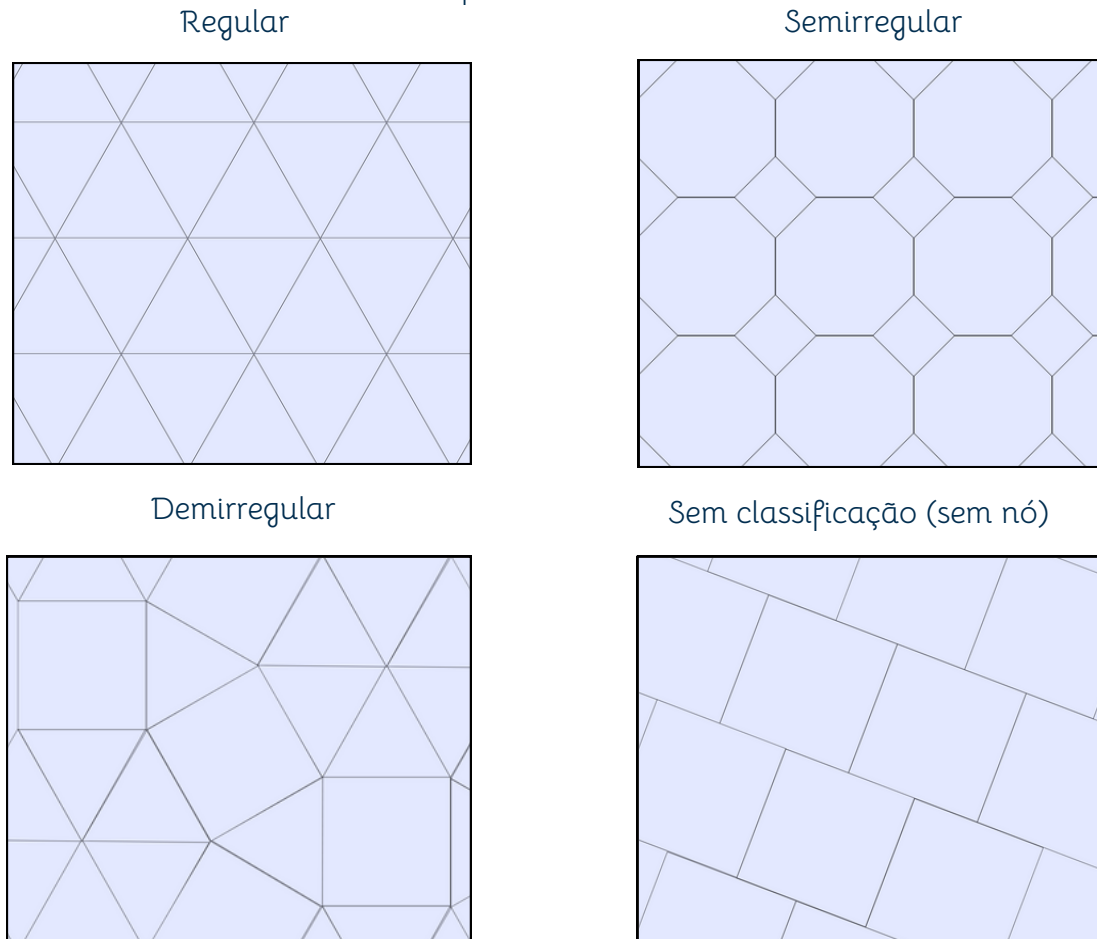
A seguir vamos apresentar as definições de diferentes ladrilhamentos.

Ladrilhamento regular: formado por polígonos regulares todos iguais, de modo que se forma apenas um tipo de nó.

Ladrilhamento semirregular: formado por dois ou mais tipos de polígonos regulares, mantendo apenas uma configuração de nó.

Ladrilhamento demirregular: formado por polígonos regulares em que há mais de um tipo de arranjo de vértices.

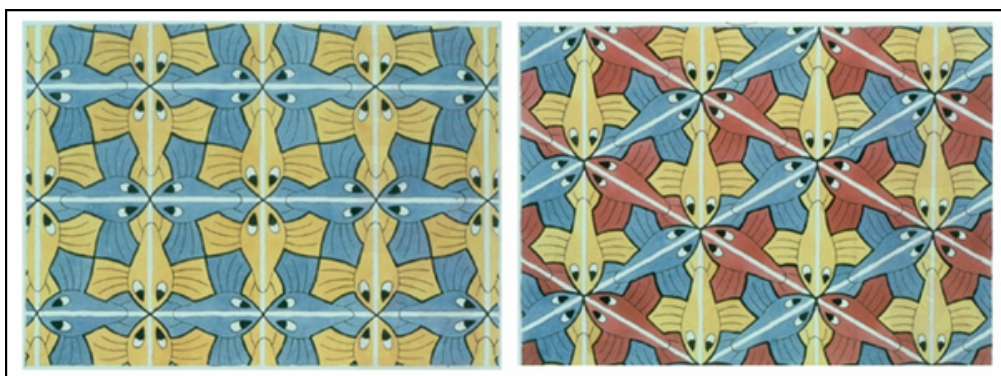
Figura 7
Exemplo de ladrilhamento



Fonte: Produção da autora (2025)

Escher utilizava os ladrilhamentos para criar algumas de suas obras. Veja a Figura 8.

Figura 8



Fonte: M.C. Escher (1964)

Pergunta: É possível criar ladrilhamentos regulares usando outros polígonos regulares além do quadrado, do triângulo equilátero e do hexágono? Explique sua resposta?

Isometrias

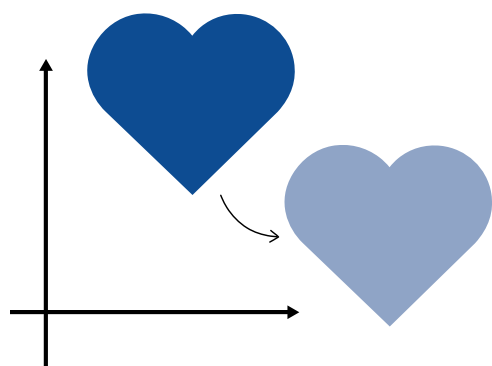
As **isometrias** são transformações que não alteram forma e tamanho da figura (ou seja, preservam a distância entre quaisquer dois pontos), apenas sua posição no plano. Isso significa que a figura obtida é sempre congruente à figura original.

Com as isometrias, é possível criar ladrilhamentos no plano, movimentando os ladrilhos para que se encaixem e formem padrões.

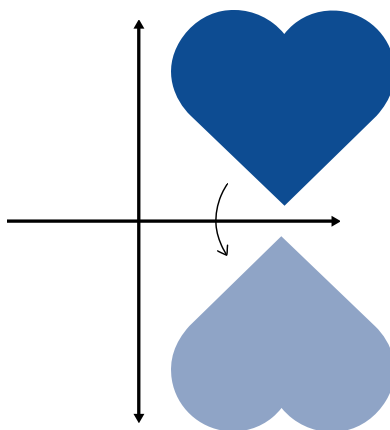
Na Figura 9, podemos observar três tipos de isometrias:

Figura 9

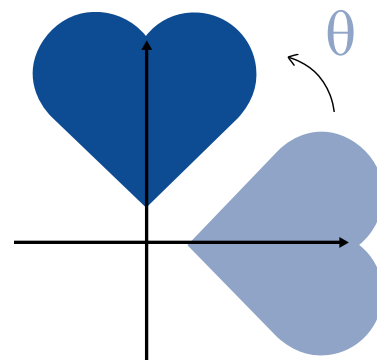
1) Translação



2) Reflexão



3) Rotação



Fonte: Produção da autora (2025)

Também podemos fazer composição delas, por exemplo, primeiro uma rotação e depois uma reflexão ou uma reflexão e em seguida uma translação, essa última é chamada de **reflexão deslizante**.

Podemos observar essas transformações isométricas em algumas criações de Escher.

Figura 10 (a)

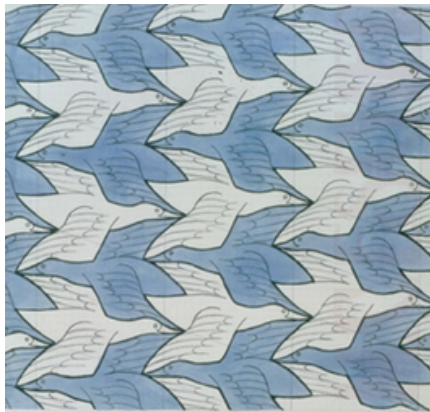


Figura 10 (b)



Fonte: M.C. Escher (1938 - 1942)

Na figura 10 (a), quando comparamos as aves brancas temos translações entre elas. Quando comparamos aves brancas com as azuis, temos reflexões deslizantes.

Na figura 10 (b), vemos translações entre répteis de mesma cor, e rotações entre répteis de cores diferentes.

Figura 11 (a)

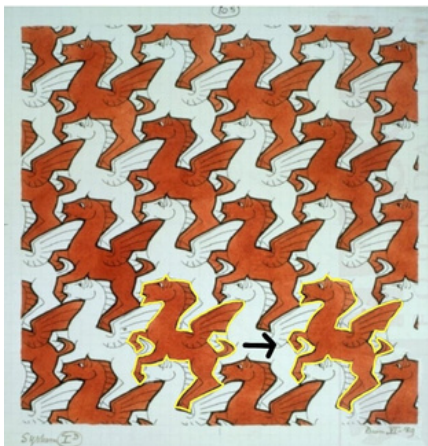
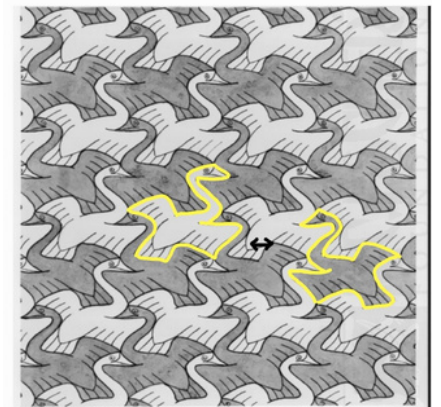


Figura 11 (b)



Figura 11 (c)

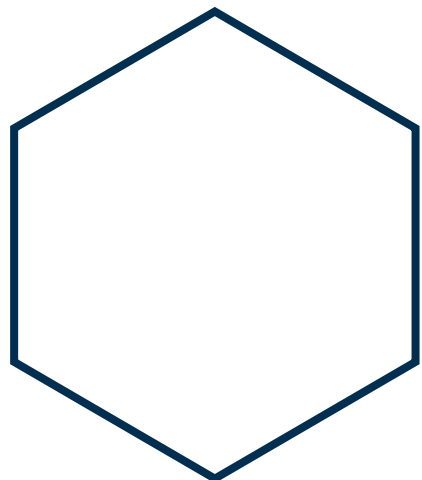
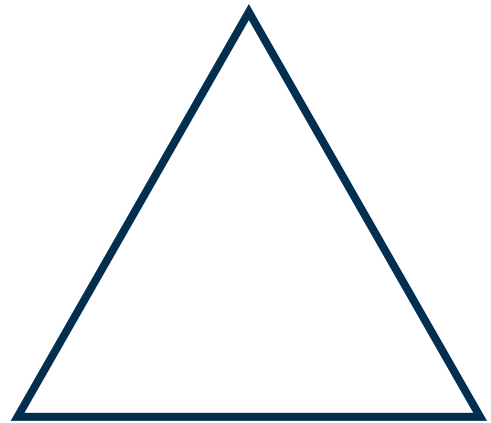
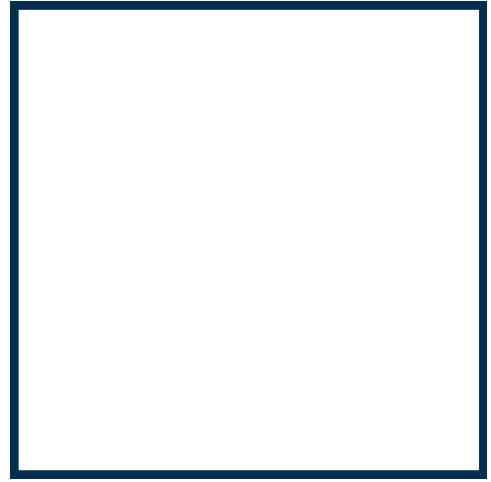


Fonte: Adaptado de M.C. Escher (1959 - 1954 - 1955)

Na figura 11 (a), destacamos a translação que ocorre entre as figuras do pegasus, a mudança das cores apenas evidencia a isometria.

Na figura 11 (b), vemos as rotações com as figuras dos peixes, cada nó é formado por seis peixes que rotacionam em 60° .

Na figura 11 (c) temos a figura do cisne formando o ladrilhamento a partir de reflexões deslizantes.



Revisão de Matrizes

1 O que é uma matriz?

Uma **matriz** é uma tabela organizada em **linhas** (horizontais) e **colunas** (verticais), usada para representar e resolver problemas matemáticos.

Exemplo de uma matriz 2×3 (2 linhas e 3 colunas):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

2 Adição de Matrizes

A adição de duas matrizes é feita **elemento a elemento**, e só é possível se elas tiverem as **mesmas dimensões**.

Sejam:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

A soma $A + B$ é:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

3 Multiplicação de uma matriz por escalar

Multiplicar uma matriz por um número (escalar) significa multiplicar **cada elemento da matriz** por esse número.

Sejam:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad k = 2$$

Então:

$$k \cdot A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

4 Multiplicação de Matrizes

A multiplicação $A \cdot B$ só é possível se o número de **colunas de A** for igual ao número de **linhas de B**. Cada elemento da matriz resultante é obtido multiplicando os elementos da linha correspondente de A pelos elementos da coluna correspondente de B e somando os resultados.

Sejam:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

O produto $A \cdot B$ é:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} (1 \cdot 5 + 2 \cdot 7) & (1 \cdot 6 + 2 \cdot 8) \\ (3 \cdot 5 + 4 \cdot 7) & (3 \cdot 6 + 4 \cdot 8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

5 Matriz Identidade

A matriz identidade é uma matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e todos os outros elementos são 0. Por exemplo a matriz identidade de ordem 3 é:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6 Matriz Transposta

A matriz transposta é uma matriz obtida a partir da troca das linhas de uma matriz pelas suas colunas. Se a matriz original tiver ordem $n \times m$, então a matriz transposta terá ordem $m \times n$. Denotamos a matriz transposta de A por A^T .

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix},$$

sua transposta será a matriz

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

7 Matriz Ortogonal

Uma matriz quadrada A é chamada de ortogonal quando o produto de A pela sua transposta A^T resulta na matriz identidade: $AA^T = A^T A = I$.

Por exemplo:

Seja:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então:

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A^T \cdot A.$$

Exercícios

1. Efetue a soma das matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Multiplique a matriz abaixo pelo escalar $k = -3$:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

3. Verifique se é possível multiplicar as matrizes a seguir. Se sim, calcule $A \cdot B$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

4. Dê as dimensões das seguintes matrizes, em seguida dê qual é a matriz transposta de cada item:

a) $I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

b) $E = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

c) $F = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

5. Verifique se a matriz A é ortogonal:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}.$$

Isometrias e matrizes

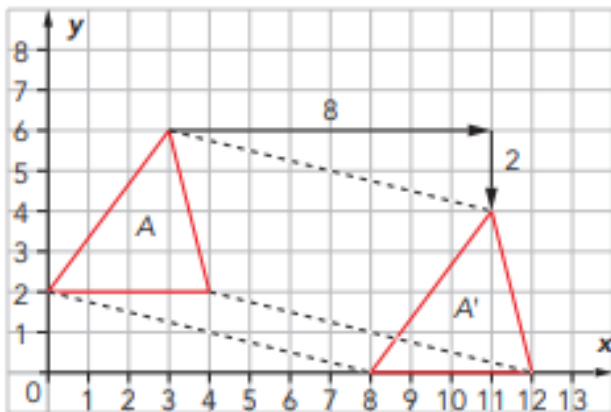
A seguir vamos estudar com mais detalhes as isometrias no plano cartesiano.

1) Translação

Translação no plano cartesiano é a transformação em que cada ponto de uma figura é deslocado somando-se um mesmo valor à coordenada x e um mesmo valor à coordenada y . Dessa forma, todos os pontos se movem na mesma direção e na mesma distância.

Exemplo: Na Figura 8, a translação do triângulo A para o triângulo A' é dada pelo deslocamento de 8 unidades para a esquerda e 2 unidades para baixo.

Figura 8



Observemos o que acontece com os vértices do triângulo A para o triângulo A' :

$$(0,2) \longrightarrow (8,0)$$

$$(3,6) \longrightarrow (11,4)$$

$$(4,2) \longrightarrow (12,0)$$

Fonte: (DANTE, 2020)

Para cada ponto (x,y) adicionamos (-2) na abscissa e 8 na ordenada:

$$(x,y) + (-2,8) \longrightarrow (x-2, y+8).$$

De modo geral, a translação de a unidades na direção horizontal (eixo x) e de b unidades na direção vertical (eixo y) é dada por:

$$(x,y) + (a,b) \longrightarrow (x+a, y+b).$$

Utilizando matrizes:

Para uma translação no plano cartesiano, que leva um ponto $A(x,y)$ a um ponto $A'(x',y')$, com deslocamento de a unidades na direção horizontal e b unidades na direção vertical, temos:

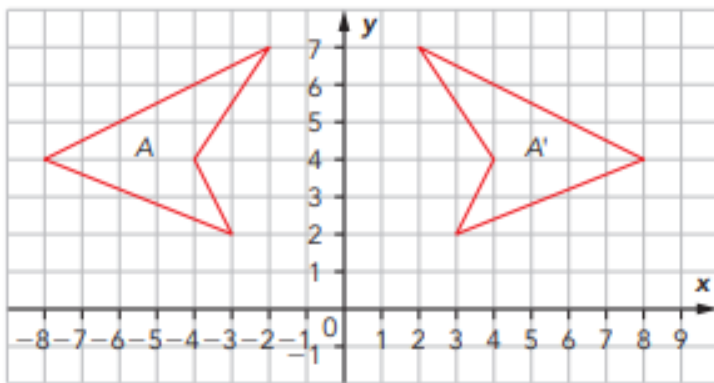
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

2) Reflexão

Reflexão no plano cartesiano é a transformação em que cada ponto de uma figura é associado a outro ponto simétrico em relação a uma reta (eixo de reflexão). Dessa forma, a figura obtida é o “espelho” da figura original em relação a esse eixo.

Exemplo: Na Figura 9, o polígono A' é a reflexão do polígono A em relação ao eixo y .

Figura 9



Fonte: (DANTE, 2020)

Observemos o que acontece com os vértices do polígono A para o polígono A' :

$$(-8, 4) \longrightarrow (8, 4)$$

$$(-2, 7) \longrightarrow (2, 7)$$

$$(-4, 4) \longrightarrow (4, 4)$$

$$(-3, 2) \longrightarrow (3, 2)$$

Para cada ponto (x, y) de A , as ordenadas de A' permanecem iguais às de A , enquanto as abscissas de A' são os opostos das de A :

$$(x, y) \longrightarrow (-x, y).$$

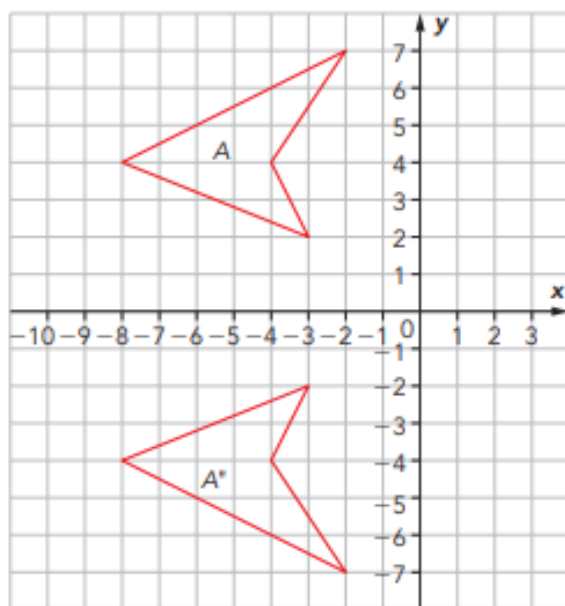
Utilizando matrizes:

Para uma reflexão no plano cartesiano em relação ao eixo y , que leva um ponto $A(x, y)$ a um ponto $A'(x', y')$, temos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo: Na Figura 10, o polígono A' é obtido refletindo o polígono A em relação ao eixo x.

Figura 10



Fonte: (DANTE, 2020)

Observemos o que acontece com os vértices do polígono A para o polígono A':

$$\begin{array}{lcl} (-8, 4) & \longrightarrow & (-8, -4) \\ (-2, 7) & \longrightarrow & (-2, -7) \\ (-4, 4) & \longrightarrow & (-4, -4) \\ (-3, 2) & \longrightarrow & (-3, -2) \end{array}$$

Nesse caso, as abscissas permanecem inalteradas, enquanto as ordenadas trocam de sinal. Em termos gerais:

$$(x, y) \longrightarrow (x, -y).$$

Utilizando matrizes:

Para uma reflexão no plano cartesiano em relação ao eixo x, que leva um ponto A(x,y) a um ponto A'(x',y'), temos:

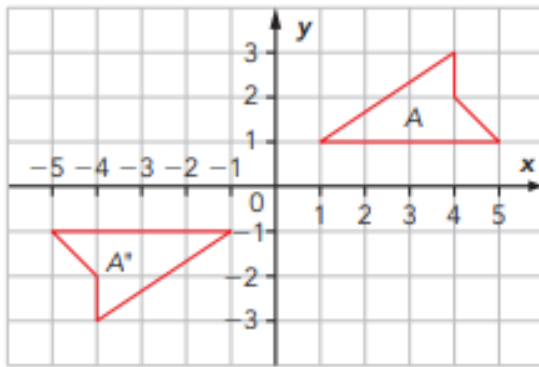
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3) Rotação

Rotação no plano cartesiano é a transformação em que cada ponto de um objeto gira em torno de um ponto fixo por um determinado ângulo e em uma direção (horária ou anti-horária). Dessa forma, a figura mantém o formato e o tamanho, mudando apenas sua orientação.

Exemplo: Na Figura 11, o polígono é obtido pela rotação do polígono em 180° em torno da origem do plano cartesiano.

Figura 11



Fonte: (DANTE, 2020)

Observemos o que acontece com os vértices do polígono A para o polígono A':

$$(1,1) \longrightarrow (-1,-1)$$

$$(5,1) \longrightarrow (-5,-1)$$

$$(4,2) \longrightarrow (-4,-2)$$

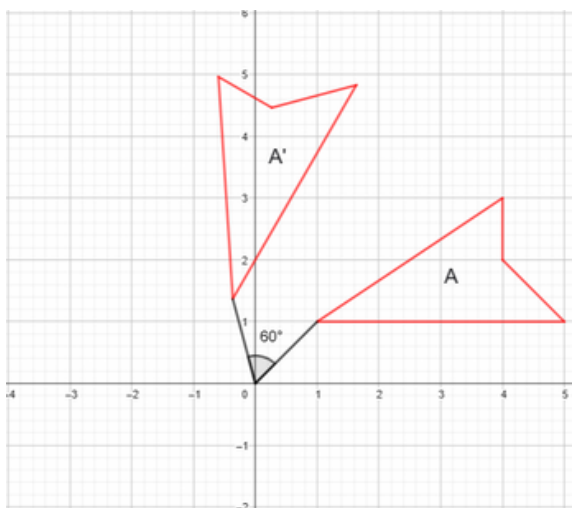
$$(4,3) \longrightarrow (-4,-3)$$

Nesse caso, tanto as abscissas quanto as ordenadas trocam de sinal. De forma geral:

$$(x,y) \longrightarrow (-x,-y).$$

Exemplo: Na Figura 12, o polígono A' é obtido pela rotação do polígono A em 60° em torno da origem do plano cartesiano.

Figura 12



Fonte: Produção da autora (2025)

Observemos o que acontece com os vértices do polígono A para o polígono A':

$$(1,1) \longrightarrow \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$(5,1) \longrightarrow \left(\frac{5-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+5\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$(4,2) \longrightarrow (2-\sqrt{3}, 1+2\sqrt{3})$$

$$(4,3) \longrightarrow \left(\frac{4-3\sqrt{3}}{2}, \frac{3+4\sqrt{3}}{2} \right)$$

De modo geral, a rotação de um ponto em torno da origem no sentido anti-horário por um ângulo θ é dada por:

$$(x,y) \longrightarrow (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

Utilizando matrizes:

Para uma rotação no plano cartesiano, que leva um ponto A(x,y) a um ponto A' (x', y'), em torno da origem no sentido anti-horário por um ângulo θ , temos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Toda isometria no plano pode ser representada como uma função da forma

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(v) = Av + B$$

em que:

- A é uma matriz ortogonal 2 x 2, responsável pela rotação ou reflexão da figura;
- B é uma matriz coluna 2 x 1, responsável por transladar a figura.

De forma explícita, se temos um ponto A (x,y) no plano, seu correspondente A' (x', y') após a isometria é dado por:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

em que a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é ortogonal, ou seja, satisfaz $AA^T = A^T A = I$

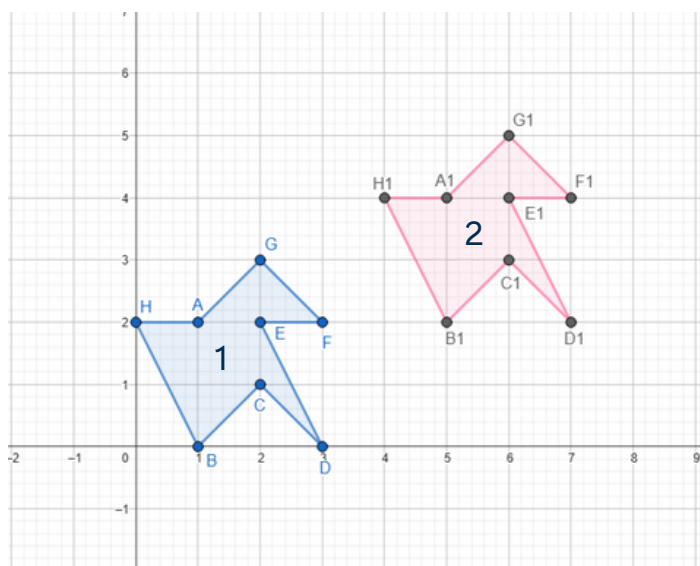
Isso significa que toda isometria pode ser vista como a combinação de uma **rotação ou reflexão** (dada por A) e de uma **translação** (dada por B).

Exemplo:

a) Na figura a seguir, identifique qual isometria foi utilizada para transformar o Polígono 1 no Polígono 2: translação, rotação ou reflexão;

b) Escreva a equação algébrica da transformação na forma $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$,

indicando explicitamente as duas matrizes.



Notamos que trata-se de uma **translação**, nos quais os pontos foram deslocados duas unidades verticalmente e quatro unidades horizontalmente.

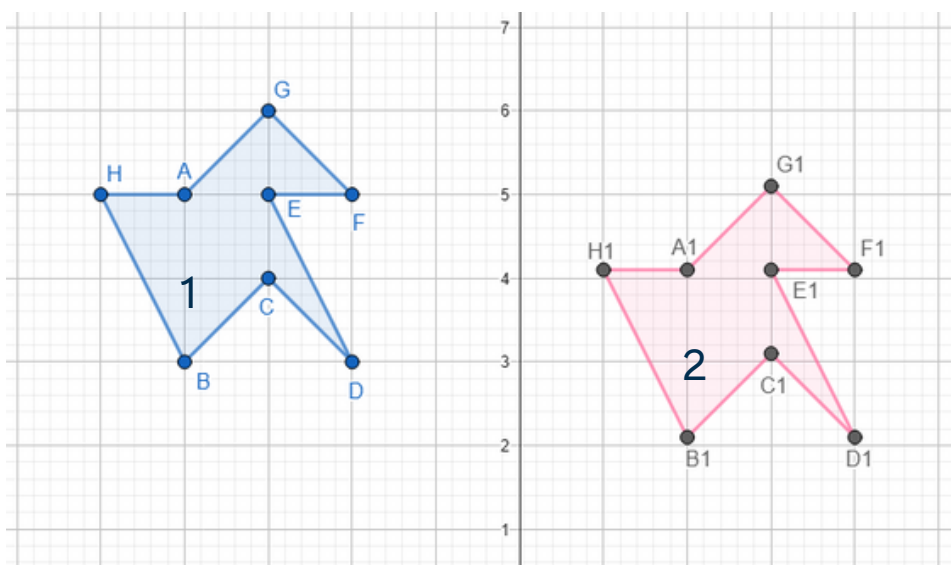
Assim, podemos dizer que os pontos são obtidos com a soma: $(x', y') = (x, y) + (4, 2)$, para qualquer ponto do polígono.

A equação algébrica é dada por:

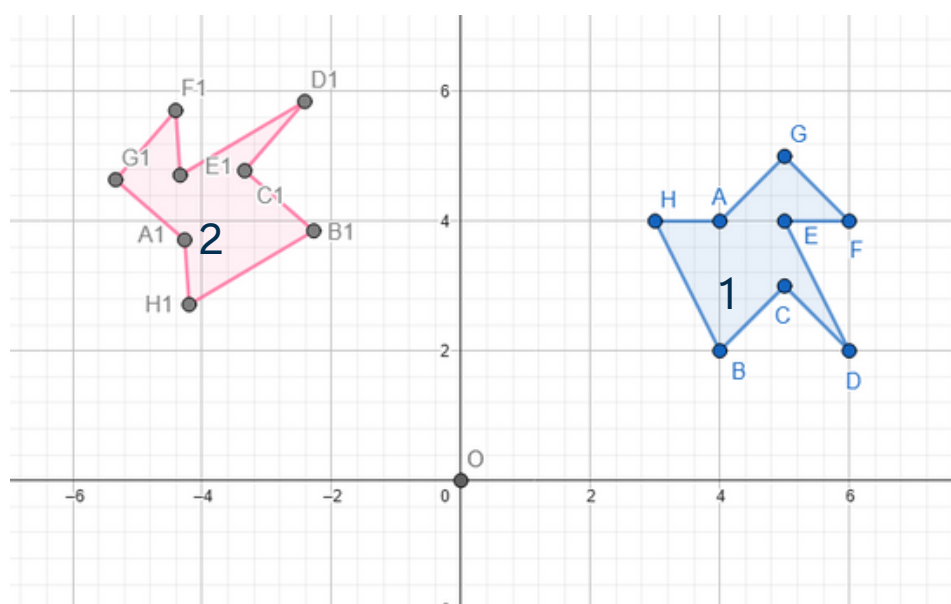
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Em relação ao polígono 1 para o 2 está ocorrendo a translação, rotação ou reflexão da figura? Identifique em cada item a isometria utilizada.

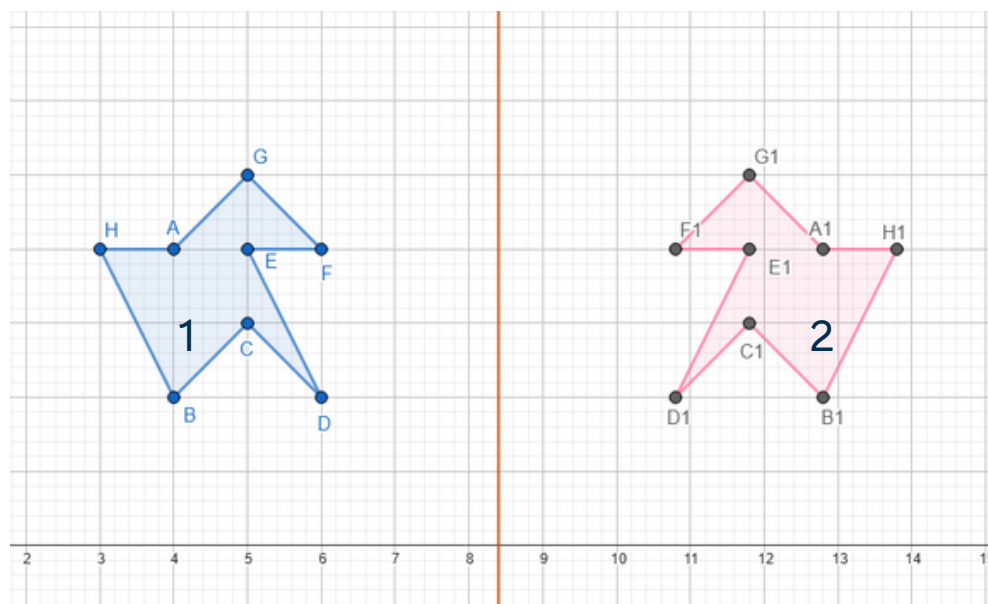
1)



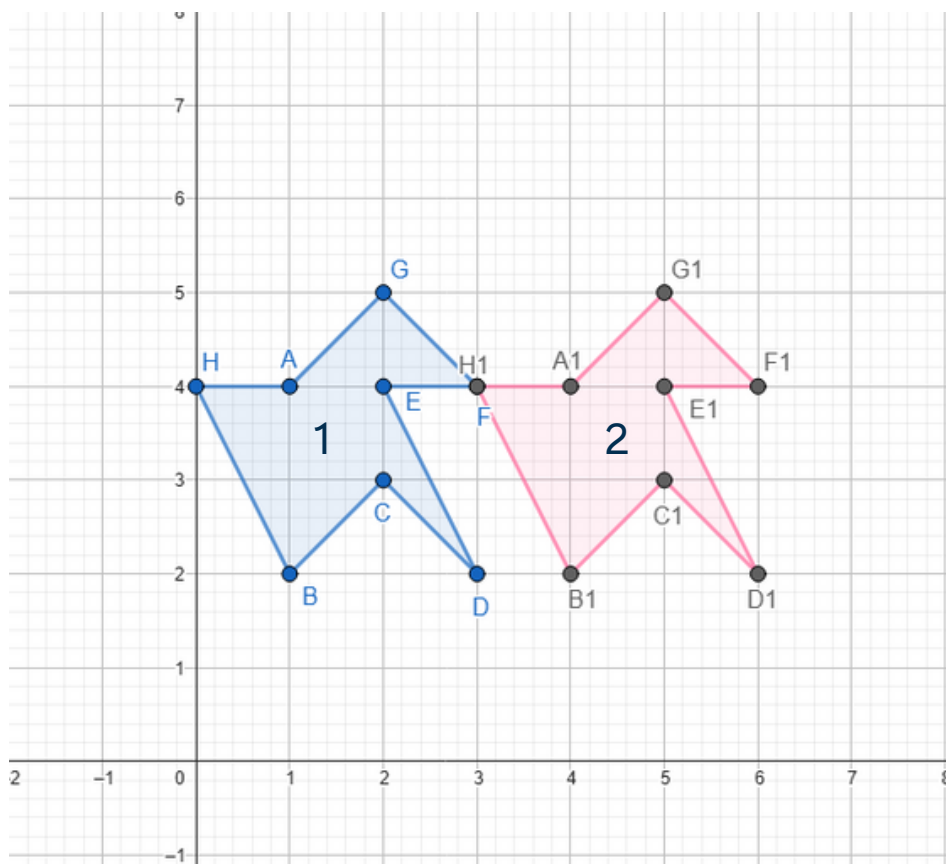
2)



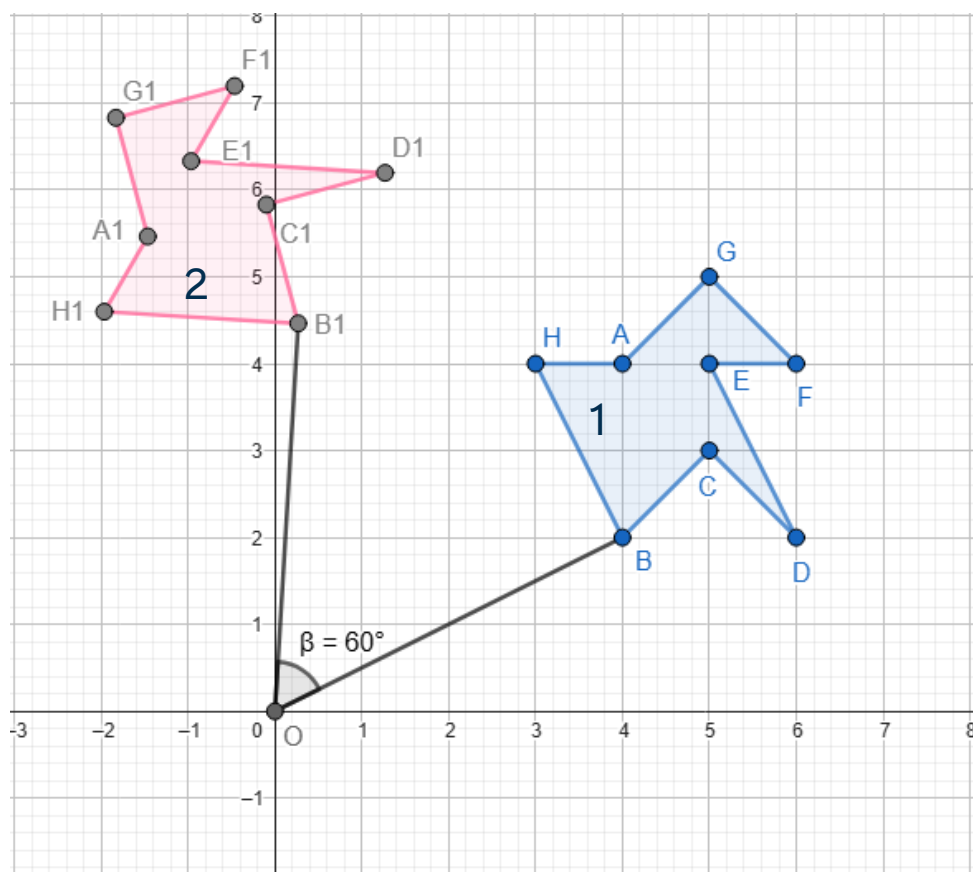
3)



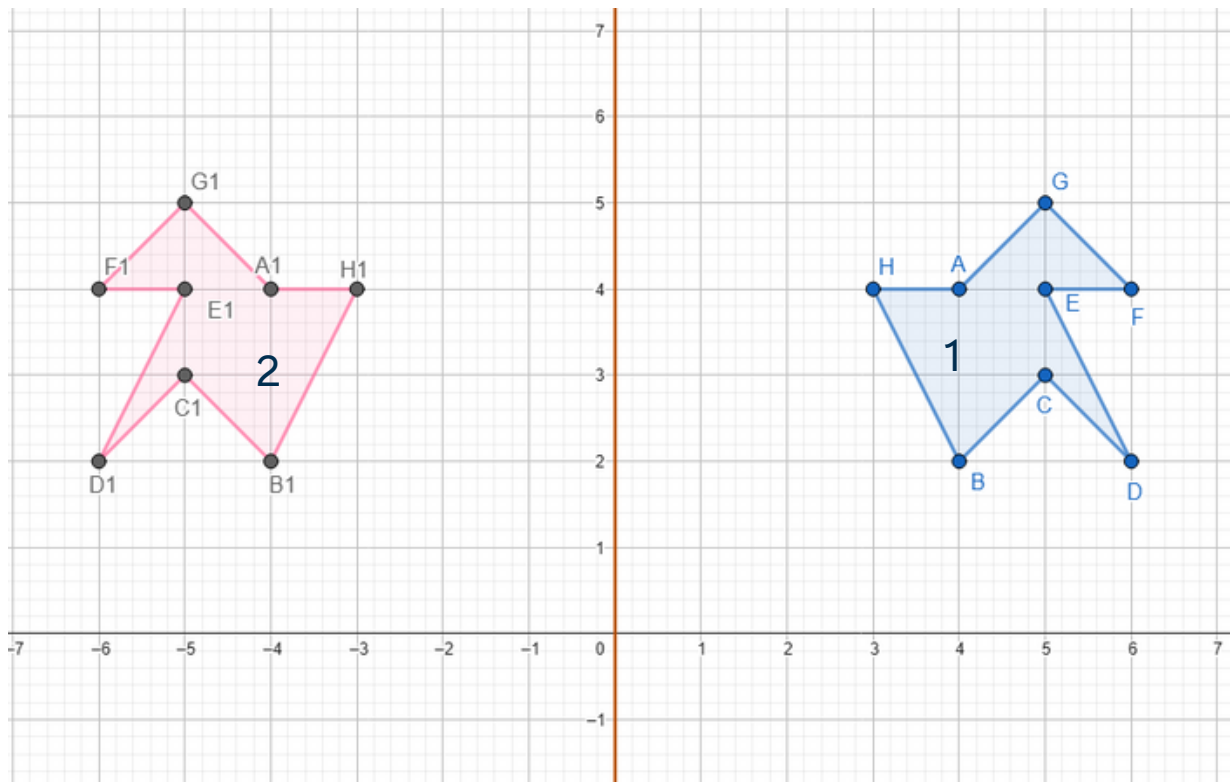
- 1) Do polígono 1 para o 2, qual isometria foi utilizada? Qual sua equação algébrica?



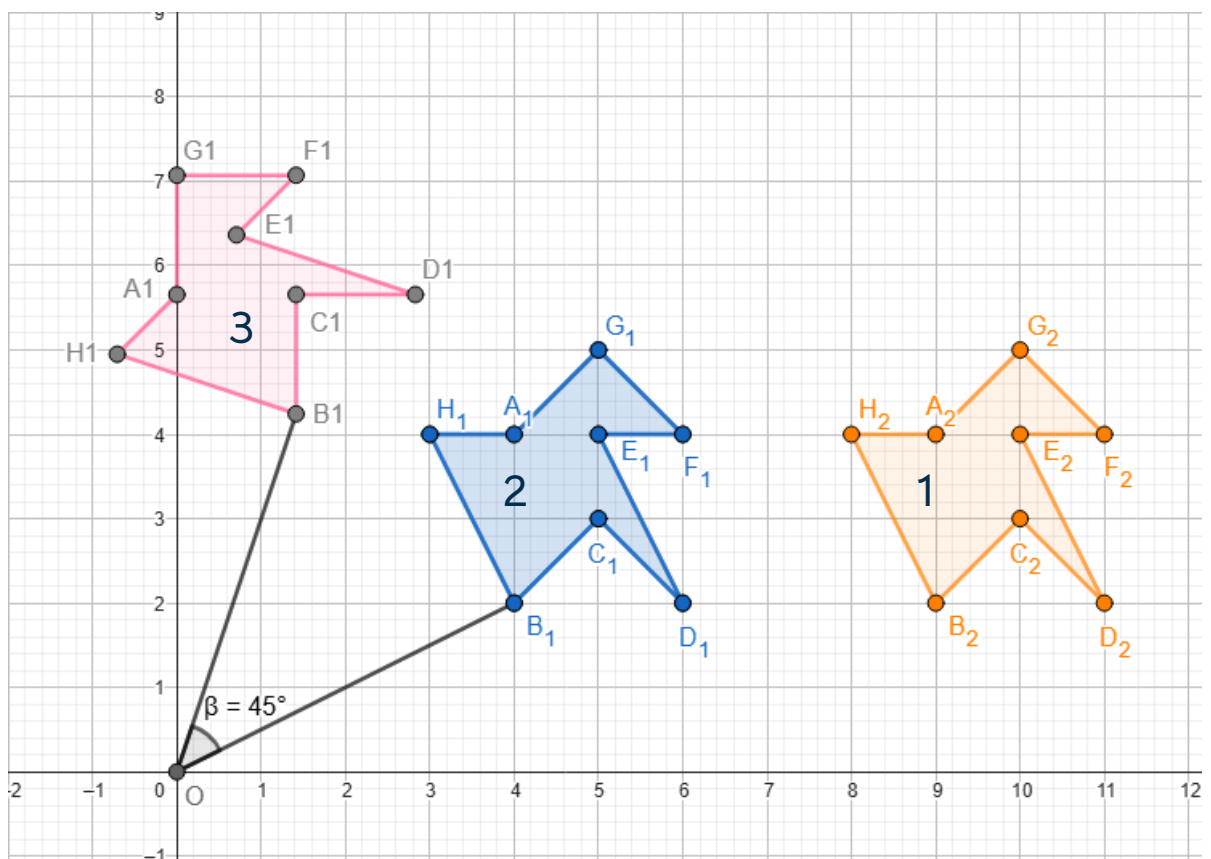
- 2) Do polígono 1 para o 2, foi feita uma rotação de 60° . Qual sua equação algébrica?



- 3) Do polígono 1 para o 2, qual isometria foi utilizada? Qual sua equação algébrica? (Note que a reta ao centro é o eixo y).



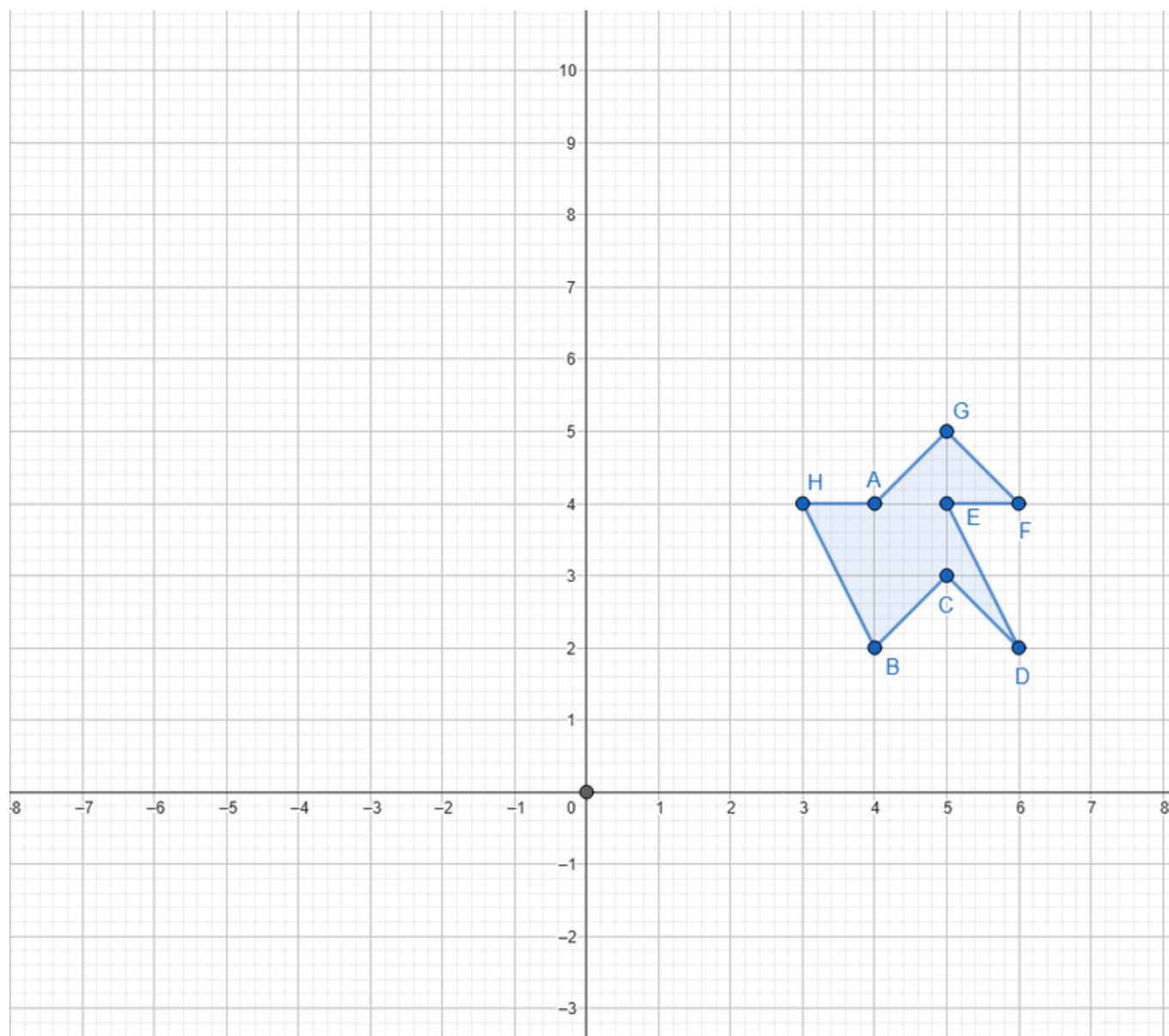
- 4) Dessa vez utilizamos duas isometrias em sequência para sair do polígono 1 passando pelo 2 e indo para o 3, quais isometrias foram usadas? Como podemos representá-las em uma única equação matricial? (Note que $\beta = 45^\circ$)



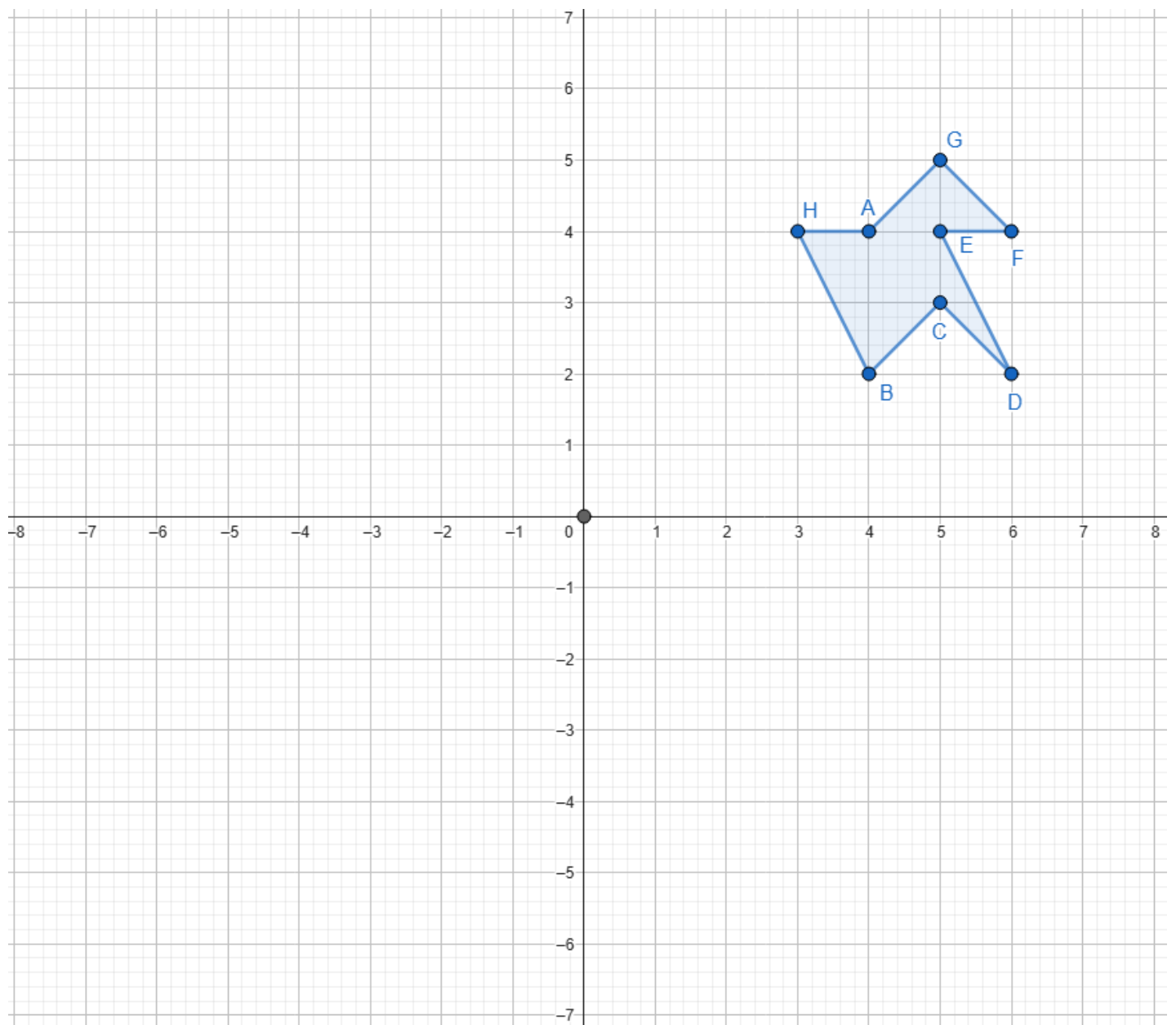
Identifique em cada equação matricial qual isometria está ocorrendo e represente o polígono resultante da isometria no plano.

Efetue as operações com as matrizes para chegar no resultado esperado.

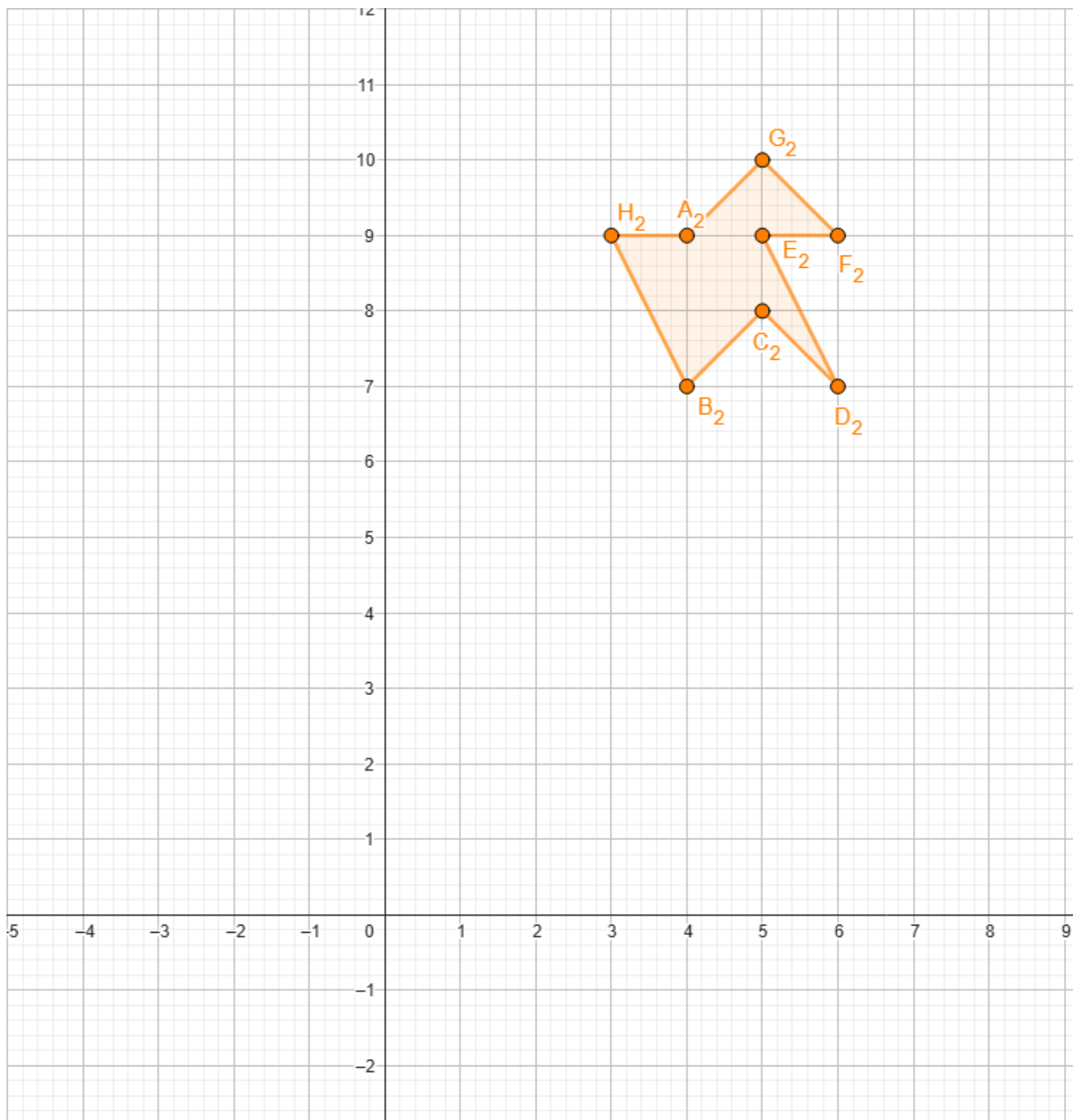
1)
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



$$2) \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



$$3) \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} \right)$$



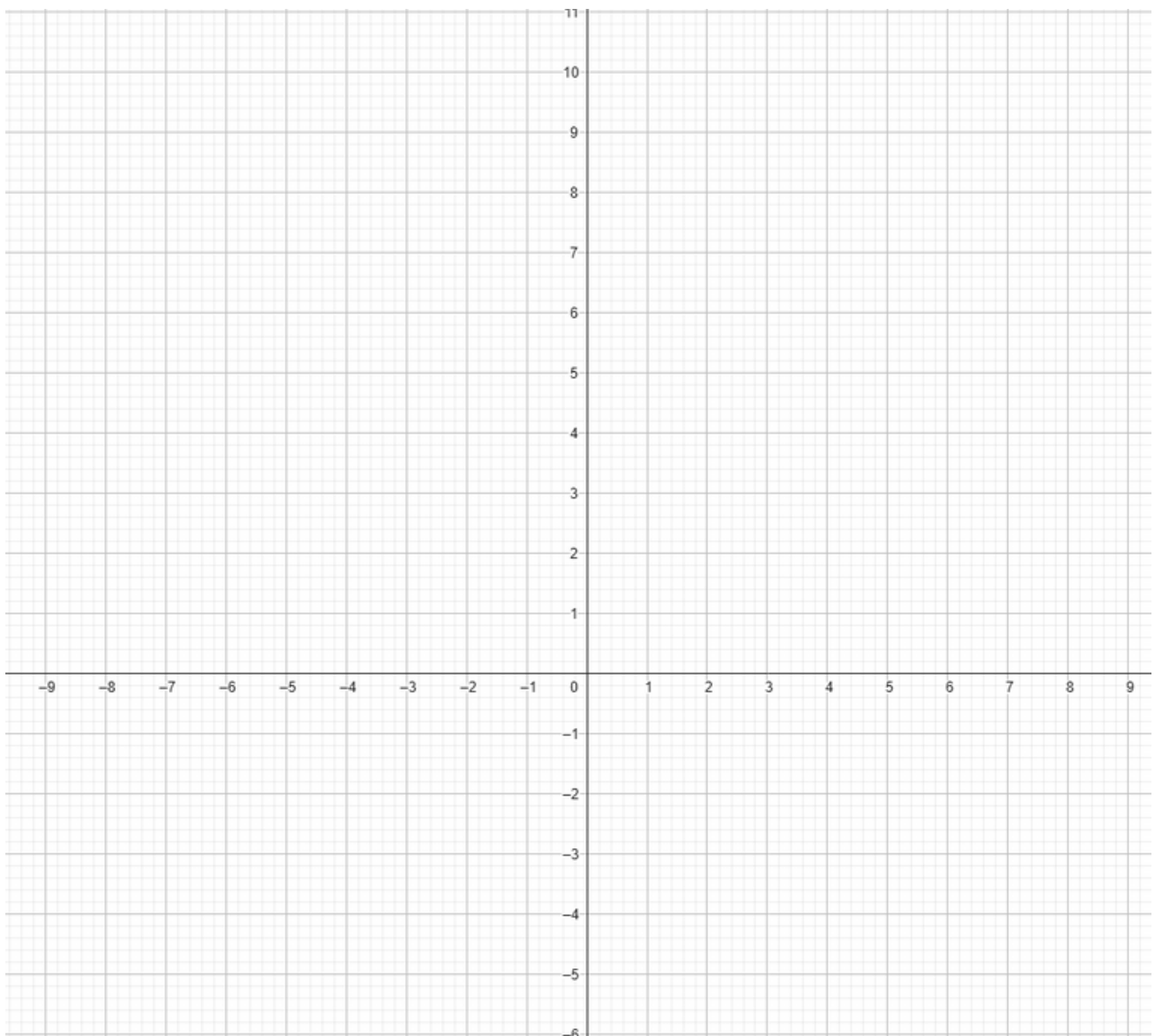
Tarefa!

Agora é a sua vez de criar sua própria isometria!

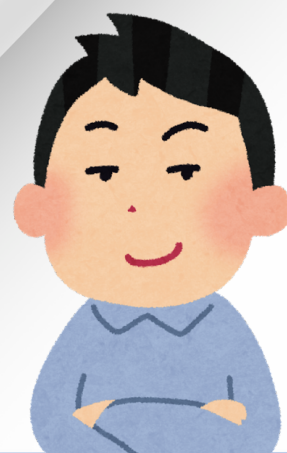
Relembre o que foi feito na Atividade 2, quais isometrias foram necessárias para formar o ladrilhamento? Ou crie qualquer outra que quiser.

Ao escolher sua isometria, faça o esboço no plano e a represente algebricamente por meio da equação matricial.

Para o esboço no plano utilize uma figura similar a criada na Atividade 1, pela Técnica da Dentada. Ao posicioná-la no plano, marque tantos pontos quanto forem necessários.



Somente para
professores!



Atividade 4

2

$$1) \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2) \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

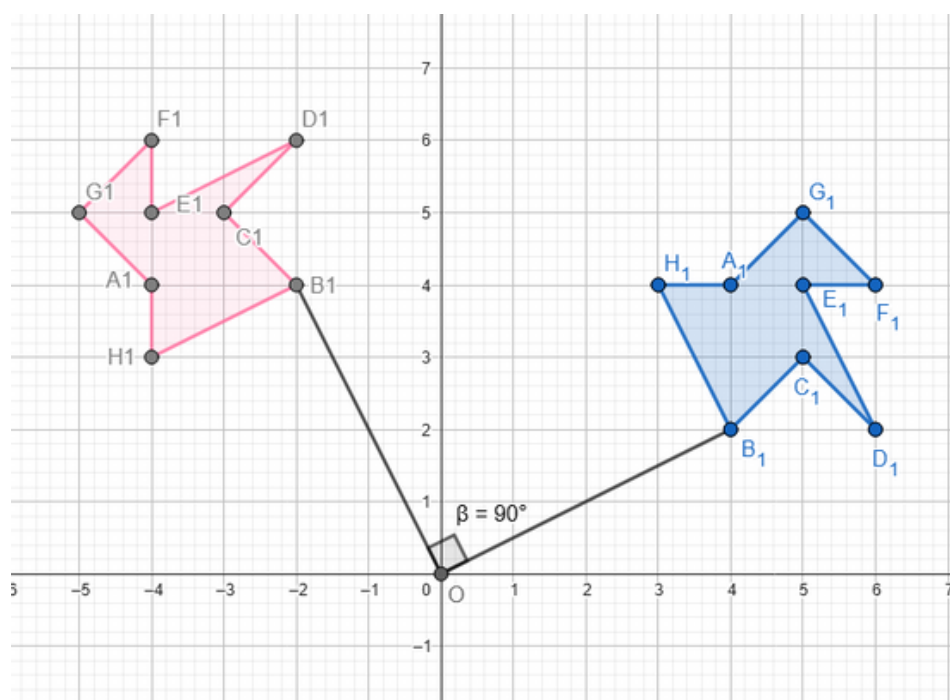
$$3) \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- 4) Supondo que $t(v)$ seja a translação e $r(v)$ a rotação que acontecem na figura, em que $v = (x', y')$, usamos a composição das funções da seguinte forma:

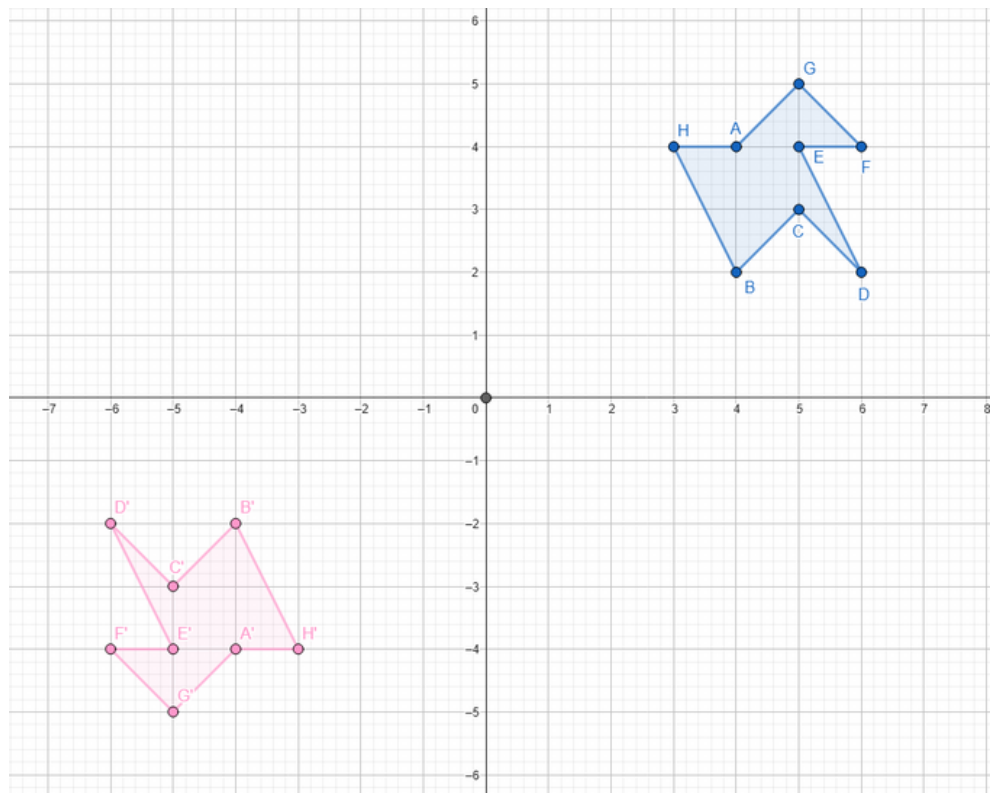
$$f(v) = r(t(v)) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} x-5 \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-5 \\ y \end{bmatrix}$$

3

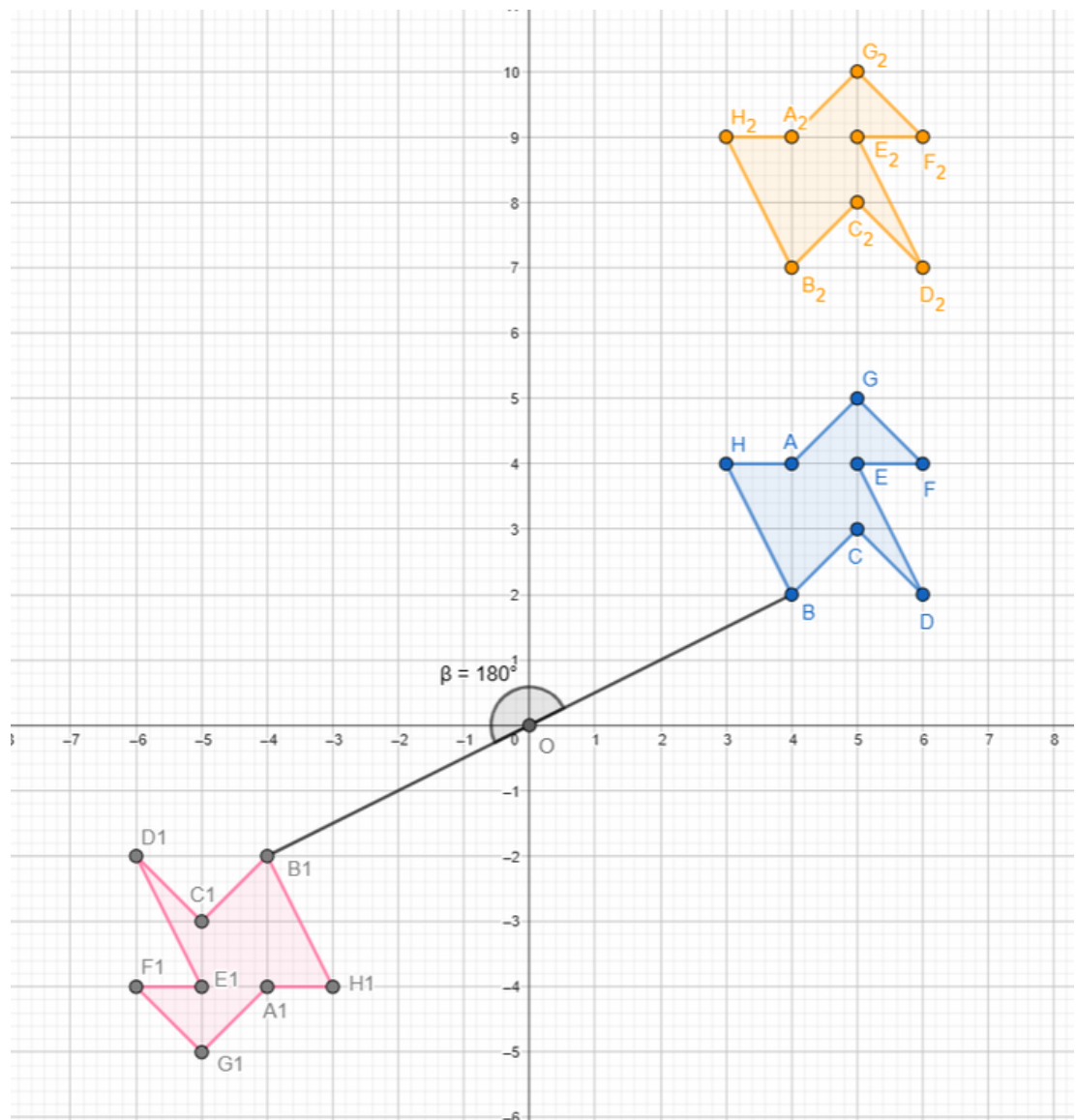
1)



2)



3)



UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA
REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT

ATESTADO DE VERSÃO FINAL

Eu, Viviane Maria Beuter, professora do curso de MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL, declaro que esta é a versão final aprovada pela comissão julgadora do Produto Educacional intitulado: **“Aprendendo matrizes com Escher”** de autoria da acadêmica Susana Willemann Stimamiglio.

Joinville, 22 de outubro de 2025.

Viviane Maria Beuter