

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO RIO
GRANDE DO SUL - CAMPUS CANOAS**

**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT**

PROPOSTA DIDÁTICA:

UTILIZANDO QUESTÕES DA OBMEP PARA O ENSINO DE LÓGICA FORMAL

Marcelo Rodrigo Kasper

Orientador: Dr. Gabriel Goldmeier

Canoas – RS

2025

Resumo

A Base Nacional Curricular Comum (BNCC) aponta o raciocínio lógico como uma competência importante a ser desenvolvida, porém, não explicita o ensino de Lógica (vista aqui como a habilidade que orienta o “bem pensar”) no currículo de Matemática ou nos de outras disciplinas. Com isso em mente, foi construída uma proposta didática que busca tomar as questões de Lógica da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), aquelas que não necessitam do uso de conhecimento matemático específico, como referência para o ensino de Lógica Formal, explorando conceitos através da metodologia de Resolução de Problemas. Tais questões da OBMEP constituem um bom ponto de partida para introduzir o ensino de Lógica, ainda que vários conceitos de Lógica não tenham sido explorados nessas questões, que certamente seriam um acréscimo valioso em edição futuras da Olimpíada.

Palavras-chave: Raciocínio lógico; Ensino de Lógica; Resolução de problemas.

Lista de Figuras

Figura 1 – Questão 18 da II Olimpíada Pernambucana de Raciocínio Lógico (2011)	14
Figura 2 – Resolução da questão 18/2011 (i)	15
Figura 3 - Resolução da questão 18/2011 (ii)	15
Figura 4 - Resolução da questão 18/2011 (iii)	16
Figura 5 - Resolução da questão 18/2011 (iv)	16
Figura 6 – Questão 11 da prova de 2009	19
Figura 7 – Questão 15 da prova de 2023	20
Figura 8 – Questão 20 da prova de 2015	22
Figura 9 – Resolução da questão 20/2015 (i)	22
Figura 10 – Resolução da questão 20/2015 (ii)	23
Figura 11 – Resolução da questão 20/2015 (iii)	23
Figura 12 – Questão 19 da prova de 2013	24
Figura 13 – Questão 14 da prova de 2016	25
Figura 14 – Questão 14 da prova de 2014	28
Figura 15 – Questão 8 da prova de 2007	30
Figura 16 – Questão 14 da prova de 2011	30
Figura 17 – Questão 10 da prova de 2018	31
Figura 18 – Questão 6 da prova de 2022	41
Figura 19 – Questão 19 da prova de 2008	46
Figura 20 – Questão 11 da prova de 2021	47
Figura 21 – Questão 6 da prova de 2016	48
Figura 22 – Questão 19 da prova de 2024	49
Figura 23 – Questão 20 da prova de 2010	50

Lista de Quadros

Quadro 1 - Resolução da questão 18/2011	16
Quadro 2 – Resolução da questão 14/2016	25
Quadro 3 – Resolução da questão 14/2014	28
Quadro 4 – Resolução da questão 19/2008	47

Sumário

Resumo	2
Introdução	5
A Proposta Didática	7
1. Sobre o público-alvo	7
2. Tema.....	7
3. Competências e Habilidades	8
4. Duração	8
5. Objetivos	8
6. Recursos didáticos	9
7. Metodologia a ser aplicada	9
8. Avaliação da aprendizagem	10
9. Observações importantes	10
10. Descrição dos encontros	11
Referências	55

Introdução

A Matemática é, *“por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados”* (BRASIL, 2018, p.265). Por conta disso, é impossível dissociar a Matemática da Lógica, pois, em última análise, qualquer problema matemático é, por definição, um problema lógico. Para além das regras que aprendemos na Aritmética, na Álgebra, na Geometria, etc, o que estrutura tudo em um corpo coerente de conhecimento e de técnicas é a Lógica. Entender, ainda que superficialmente, como as estruturas lógicas se dão é de fundamental importância para que se busque sentido nas construções abstratas da Matemática.

Desde sua terceira edição, no ano de 2007, as provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) trazem pelo menos uma “questão de Lógica”, entre as vinte que compõem as provas da primeira fase, em pelo menos um dos seus níveis¹. Por “questão de Lógica”, descrevemos as questões que não tenham no seu processo de resolução a aplicação de conhecimentos matemáticos específicos. Questões como essas são comuns em provas de concursos públicos das principais bancas do país.

A motivação para abraçar esse tema surgiu com as aplicações das provas da OBMEP, mais precisamente do espanto dos alunos ao perceberem ali escondidas questões que não envolviam nenhum cálculo ou uso de conteúdos aprendidos em aula. Essas questões eram as que, geralmente, os estudantes mais comentavam após o término da prova. Em um burburinho entre os colegas, conversavam sobre qual resposta seria a correta e discutiam sobre as estratégias usadas por cada um, visivelmente intrigados.

O raciocínio lógico é algo que deve ser praticado para ser desenvolvido. Fazer relações, suposições, inferências, chegar a conclusões, é como um músculo que precisa ser exercitado para aquisição de força e resistência. Nesse sentido, o ensino de Lógica pode ser um importante aliado para que esse almejado desenvolvimento do

¹ Os níveis da OBMEP compreendem os diferentes níveis escolares; A saber: 1º nível (6º e 7º anos do Ensino Fundamental), 2º nível (8º e 9º anos do Ensino Fundamental) e 3º nível (1º, 2º e 3º anos do Ensino Médio).

raciocínio ocorra de forma mais eficaz. Sobre a importância da Lógica e a forma de cultivá-la, Steven Pinker (2021, p.32) afirma, em seu livro *Racionalidade*, que:

A lógica é uma realização sublime do conhecimento humano. Ela organiza nosso raciocínio no trato com temas abstratos ou pouco familiares, como as leis do governo e as da ciência; e, quando aplicada ao silício, transforma a matéria inerte em máquinas pensantes. Mas o que a mente humana não instruída maneja não é uma ferramenta de uso genérico, independente de conteúdos, com fórmulas como “[SE P, ENTÃO Q]” é equivalente a NÃO [P E NÃO Q]”, nas quais qualquer P e qualquer Q podem ser inseridos. Ela maneja um conjunto de ferramentas mais especializadas que associa o conteúdo pertinente ao problema às regras da lógica (sem essas regras, as ferramentas não funcionariam). Não é fácil para as pessoas separarem as regras para empregá-las em problemas novos, abstratos ou aparentemente desprovidos de significado. É para isso que serve a educação e outras instituições voltadas para aperfeiçoar a racionalidade.

Em concordância com o autor, o presente trabalho procura estreitar a relação entre os educandos e essa importante ferramenta.

Algo que deve ser abordado é o fato de que esta proposta didática é um estudo teórico de exploração e de proposição. Como não foi aplicada, por mais que possa estar teoricamente bem elaborada, vale ressaltar suas limitações por não se ter dados empíricos que comprovem sua eficácia no engajamento ou no desenvolvimento cognitivo dos alunos. A ausência de dados sobre dificuldades específicas, percentuais de erros ou barreiras práticas, como a escassez de recursos didáticos, dificulta que se aponte melhorias. A idealização de condições possivelmente não encontraria eco em situações reais, como um domínio mínimo de vocabulário dos estudantes para uma interpretação mais aguçada das estruturas lógicas presentes nos enunciados.

A Proposta Didática

A proposta didática produzida procurou extrair ao máximo os conceitos de Lógica Proposicional e de Lógica de Predicados das questões da OBMEP. Procura-se com isso usar as questões da OBMEP como ponto de partida para o ensino-aprendizagem de Lógica. Contudo, algumas inclusões de fora desse material são necessárias para se dar sentido à construção dos conceitos que se busca realizar. Imagina-se que, com o acréscimo de questões a cada nova edição da OBMEP, esse repertório se torne ainda mais rico, possibilitando a criação de propostas cada vez mais robustas, incluindo conceitos ainda não abordados.

Os pontos em comum no planejamento para cada um dos encontros estão elencados a seguir. Os pontos específicos são discutidos separadamente, logo após. Como esta proposta é interdisciplinar, poderia ser trabalhada conjuntamente entre professores da área da Matemática, Língua Portuguesa e/ou Filosofia.

1. Sobre o público-alvo

A proposta didática a seguir foi pensada para aplicação em turmas de Ensino Médio, visto que, em tese, já apresentam boa compreensão em leitura e em conceitos básicos de matemática. Nada impede, no entanto, que adaptações sejam realizadas para que a proposta seja aplicada ainda no Ensino Fundamental. Para alguém interessado em aplicar este plano dentro em breve (meados de 2025), atente para o fato de que turmas que estejam iniciando o Ensino Médio ainda podem apresentar defasagens de aprendizagem em decorrência da pandemia. Essas lacunas educacionais podem ser um complicador para a apreensão dos conceitos que se pretende abordar na proposta, pois, como mencionado anteriormente, a linguagem, a compreensão de mundo e a forma como expressamos nossos pensamentos estão intimamente conectados.

2. Tema

Lógica Proposicional e de Predicados a partir de técnicas de Resolução de Problemas.

3. Competências e Habilidades

A BNCC traz a seguinte competência como algo desejável de ser adquirido no Ensino Fundamental: “2. *Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo*” (BRASIL, 2018, p.267). Porém, não existe menção alguma sobre habilidades ligadas à Lógica, enquanto objeto de conhecimento. A Lógica sequer é citada entre os objetos de conhecimento, tanto no Ensino Fundamental, quanto no Ensino Médio. Outro objeto de conhecimento que não é citado de forma explícita é a Teoria dos Conjuntos, que poderia ser usada para explicar alguns conceitos de Lógica, apesar de ser abordada em livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio.

4. Duração

Dois períodos com (cerca de) 50 minutos para cada encontro/aula. Estão previstos oito encontros ao todo.

5. Objetivos

→ Gerais:

- * Reconhecer conceitos de lógica proposicional e de predicados em situações-problema;

- * Estimular o desenvolvimento de estratégias de resolução para tais problemas.

→ Específicos:

- * Instigar nos alunos o interesse por questões de lógica;

- * Estruturar a resolução de problemas, sugerindo como base as etapas de Polya.

- * Compreender os conceitos de lógica abordados.

- * Conseguir relacionar tais conceitos, buscando um melhor entendimento sobre a linguagem.

6. Recursos didáticos

- * Projetor / Tela interativa (para projetar slides sobre os conteúdos abordados e questões de lógica a serem resolvidas);
- * Material impresso (com as questões que serão resolvidas, para otimização do tempo);
- * Quadro e giz/caneta (para eventual explicação do processo de resolução, bem como a formalização dos conceitos).

7. Metodologia a ser aplicada

A metodologia adotada é a de Resolução de Problemas, com os conceitos sendo construídos a partir de situações-problema em pequenos grupos de trabalho e posterior formalização. A formalização não deve ser entendida como aula expositiva, mas como um momento de sistematizar os conceitos por meio do diálogo durante a própria resolução de problemas, em colaboração com os alunos.

Aparecerá seguidamente na proposta a expressão “pretende-se, com essa pergunta, que os alunos ...”, mas nem sempre as conclusões que esperamos que eles alcancem são um caminho curto e/ou linear. É necessário frisar que os questionamentos servem para conduzir os alunos à resposta, entretanto, ao planejar, é impossível antecipar todas as dúvidas que podem surgir. Perguntas muito abertas podem ser contraproducentes, pois algumas colocações dos alunos acabam direcionando os esforços para longe do que se está debatendo, criando parênteses que nunca são fechados para, por fim, resultar em nada. Isso esfria a discussão e os alunos começam a se desinteressar. Porém, perguntas muito fechadas podem limitar e acabar por não valorizar as respostas dos alunos. As perguntas têm como objetivo dar foco sobre o que eles devem refletir, mas as conclusões devem partir deles. Nas palavras de Polya (1995, p.1):

O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho.

Essa dosimetria do auxílio prestado deve ocorrer tanto na resolução dos problemas, quanto nas discussões acerca dos conceitos que se pretende evidenciar com a formalização.

8. Avaliação da aprendizagem

Procurar-se-á realizar uma avaliação formativa, que acompanhe o processo de cada aluno e de cada grupo de trabalho, levando-se em conta os seguintes critérios:

- * Participação dos alunos nos pequenos grupos durante a realização das atividades de resolução de problemas, fazendo o registro do raciocínio empregado na resolução.
- * Discussão no grande grupo sobre as estratégias adotadas pelos pequenos grupos na resolução dos problemas, expressando de forma clara para os demais colegas a linha de raciocínio utilizada para encontrar determinado resultado.
- * Construção coletiva da formalização dos conceitos, a partir das percepções dos alunos instigadas pelos questionamentos do professor.
- * Produção de questões que abordem conceitos de lógica, avaliando coletivamente a clareza da escrita e a relação entre argumentos válidos.

Serão criados portfólios, nos quais estarão presentes os registros das resoluções das questões dos alunos, suas anotações sobre os conceitos formalizados, a questão produzida por eles, bem como sua autoavaliação e avaliação por seus pares.

Para além da avaliação do aluno, o professor deve ficar atento em avaliar a própria prática pedagógica. Ao constatar que algum assunto deve ser enfatizado, vale lembrar que há outras questões da OBMEP que podem ser trazidas para dentro da proposta didática caso julgue necessário (as questões comentadas podem ser encontradas em anexo a esse trabalho).

9. Observações importantes

As questões da OBMEP abordadas nessa proposta didática foram classificadas em 4 tipos distintos, que auxiliam a estruturar a resolução:

* **Mentira:** apresenta pelo menos uma proposição falsa. A forma mais eficaz de resolução é tomar uma proposição como verdadeira e verificar se isso implica numa contradição.

* **Dedução:** todas as proposições são verdadeiras. Para encontrar a resposta, essas proposições devem ser relacionadas sem que se contradigam.

* **Sequenciamento:** similar às questões de dedução, mas exigem organizar a informação numa determinada ordem (cronológica, posicional, etc).

* **Equivalência:** exige fazer uso de uma equivalência lógica (como a negação de uma proposição) para se encontrar a resposta.

10. Descrição dos encontros

Abaixo, segue o que foi planejado em termos de conteúdo para cada encontro. Seguem, também, dicas de como encaminhar a aula.

Primeiro encontro

Objetivos desse encontro:

* *Compreender o que são (e o que não são) proposições lógicas.*

* *Especular quais são os princípios aristotélicos básicos.*

Utilizar os 10 min iniciais para enfatizar com os alunos que os conhecimentos sobre Lógica, abordados nessa proposta didática, servem como base para uma habilidade que será cada vez mais valorizada: ela ajuda a nos comunicarmos melhor, fazendo com que nossas ideias sejam transmitidas e decodificadas com a mesma intenção de quando as expressamos. Isso fica evidente até na linguagem de programação de softwares, que usa uma lógica própria para “se comunicar” com as máquinas (Lógica Booleana). Segue uma piada clichê que se conta entre programadores:

A esposa dá as seguintes instruções para o marido programador que vai ao supermercado: “Compre 6 ovos. Se tiver batatas, compre 10”. O programador volta

para casa com 10 ovos e a esposa pergunta: “Por que você fez isso?”, ao que ele responde: “Porque tinha batatas”.

A Lógica, como veremos, é uma ferramenta extremamente útil não só para comprar ovos e batatas.

Após essa pequena introdução, separar a turma preferencialmente em trios. Em seguida, apresentar a seguinte atividade aos grupos:

>>> Quais das frases a seguir podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas?

- 1) *O sol nasce no leste.*
- 2) *Alcance o saleiro, por favor.*
- 3) *Que susto!*
- 4) $1 + 1 = 3$
- 5) *Eu estou mentindo.*
- 6) *Jorge não mora no Bairro Centro.*
- 7) *x é um número natural.*
- 8) *Você gosta de pizza?*
- 9) *Bom dia.*

Compartilhar com o grande grupo as conclusões a que os trios chegaram. Espera-se que os alunos tenham classificado as frases da seguinte forma (sim ou não):

- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1) Sim. | 2) Não. | 3) Não. | 4) Sim. | 5) Não. |
| 6) Sim. | 7) Não. | 8) Não. | 9) Não. | |

Questionar os alunos sobre o porquê de terem classificado algumas das frases como “não”. Pretende-se verificar se os alunos chegaram às seguintes conclusões:

- 2) frase imperativa / comando / solicitação.
- 3) frase exclamativa / expressão de emoção.
- 5) frase paradoxal / contradição.
- 7) frase vaga / sentença aberta / informação insuficiente.
- 8) frase interrogativa / pergunta / questionamento.
- 9) frase declarativa sem a presença de verbo / cumprimento / saudação.

Questionar os alunos sobre o que as frases 1, 4 e 6, classificadas como “sim”, possuem em comum. Pretende-se com isso perceber se entenderam se tratar de **frases declarativas que possuam verbo (mesmo a operação matemática pode ser lida como “um mais um é igual a três”, na qual o verbo “ser” está presente), afirmações que se faz sobre algo (mesmo uma declaração negativa, como na frase 6), ou seja, que expressam uma informação sobre um ente específico.**

Se os alunos conseguiram entender essa relação, a formalização do conceito é concluída anotando-se a definição no quadro. Explicar aos alunos que frases como estas são conhecidas na Lógica como “proposições” e que são o principal objeto de estudo da Lógica Proposicional (daí o nome). Este campo da Lógica tem como foco a verificação do valor lógico de afirmações, isto é, da veracidade ou da falsidade destas. Ressalta-se a importância de trazer o conhecimento informal para o formal (o que pode ocorrer em etapas), fazendo uso da terminologia apropriada. O conceito já foi compreendido, só resta chamá-lo pela nomenclatura correta.

Imagina-se que esta primeira atividade leve cerca de 50 min, entre discussões nos pequenos grupos, grande grupo e formalização coletiva.

Em seguida, será entregue aos trios uma cópia (bem como exposta no projetor/tela) a seguinte questão, a qual os alunos terão cerca de 20 min para resolverem:

>>> Resolução:

1ª dica:

Figura 2 – Resolução da questão 18/2011 (i)

		Nome			Cabelo		
		Bete	Elza	Sara	loura	ruiva	morena
País	Alemanha				✓	X	X
	França				X		
	Espanha				X		
Cabelo	loura						
	ruiva						
	morena						

Fonte: autor.

2ª dica:

Figura 3 - Resolução da questão 18/2011 (ii)

		Nome			Cabelo		
		Bete	Elza	Sara	loura	ruiva	morena
País	Alemanha				✓	X	X
	França				X		
	Espanha				X		
Cabelo	loura	X					
	ruiva	X					
	morena	✓	X	X			

Fonte: autor.

3ª dica:

Figura 4 - Resolução da questão 18/2011 (iii)

		Nome			Cabelo		
		Bete	Elza	Sara	loura	ruiva	morena
País	Alemanha				✓	X	X
	França		X		X	X	
	Espanha				X		
Cabelo	loura	X					
	ruiva	X	X				
	morena	✓	X	X			

Fonte: autor.

A partir disso, é possível deduzir a seguinte conclusão:

Figura 5 - Resolução da questão 18/2011 (iv)

		Nome			Cabelo		
		Bete	Elza	Sara	loura	ruiva	morena
País	Alemanha	X	✓	X	✓	X	X
	França	✓	X	X	X	X	✓
	Espanha	X	X	✓	X	✓	X
Cabelo	loura	X	✓	X			
	ruiva	X	X	✓			
	morena	✓	X	X			

Fonte: autor.

Ou seja:

Quadro 1 - Resolução da questão 18/2011

Nome	Cabelo	País
Bete	Morena	França
Elza	Loura	Alemanha
Sara	Ruiva	Espanha

Fonte: autor.

Portanto, a única alternativa possível é a “E”.

Certos aspectos da resolução devem ser enfatizados através dos seguintes questionamentos:

** Qual foi a estratégia utilizada pelo grupo para completar a tabela com “V”s e com “X”s?*

Pretende-se com essa pergunta constatar se os alunos perceberam que colocar mais de um “V” numa mesma linha ou coluna de um dos quadrantes levaria a uma contradição nas informações, pois cada elemento de um grupo de informações está associado a um único elemento de outro grupo, numa relação biunívoca.

** Podemos colocar ambos os símbolos (“V” e “X”) dentro de um mesmo quadradinho?*

Pretende-se verificar se os alunos chegaram à conclusão de que uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Explicar a eles que esse é justamente um dos princípios básicos da Lógica e já havia sido definido há muito pelo filósofo grego Aristóteles (“princípio da não-contradição”). Portanto, cada um dos quadradinhos deve ter ou um “V” ou um “X”, não podendo haver um meio termo entre os dois.

** Haveria a necessidade de se utilizar um terceiro símbolo além de “V” ou de “X” na montagem desta tabela?*

Pretende-se notar se os alunos entenderam que não faria sentido atribuir um terceiro valor lógico diferente de “verdadeiro” ou “falso” a cada uma das proposições. Explicar a eles que outro dos princípios básicos da Lógica, definido por Aristóteles, é o “princípio do terceiro excluído”, que fala justamente de não haver uma terceira possibilidade de valorar uma proposição. Portanto, os quadradinhos devem ser preenchidos somente ou com “V” ou com “X”, não fazendo sentido a inclusão de “Y”, que se sabe lá o que representaria.

Terminada as reflexões acerca desse problema, anotar no quadro sobre os conceitos dos dois princípios aristotélicos básicos apresentados. Entre as reflexões e o registro deve-se levar cerca de 15 min. Encerrar o encontro (5 min finais) pedindo que eles reflitam sobre as seguintes expressões que encontramos na nossa língua:

>>> Leia e reflita sobre as expressões idiomáticas abaixo:

“Acordo é acordo.”

“Uma coisa é uma coisa, outra coisa é outra coisa.”

“Guerra é guerra.”

“O que é, é.”

Nessas expressões, qual o objetivo que se pretende alcançar ao anunciar que algo é igual a si mesmo?

O questionamento acima pretende fazer os alunos refletirem sobre o princípio aristotélico da identidade, como veremos no início do segundo encontro.

Avaliação desse encontro: *Será avaliada a participação dos alunos na resolução das atividades e na elaboração dos conceitos. O registro deve ser adicionado ao portfólio individual de cada aluno.*

Segundo encontro

Objetivos desse encontro:

- * Especular quais são os princípios aristotélicos básicos.*
- * Organizar uma estrutura em etapas para a resolução de questões.*

Inicia-se o segundo encontro questionando a turma sobre quais conclusões eles chegaram sobre as expressões idiomáticas que se pediu para que refletissem. É possível que os alunos tenham chegado a uma ou mais dessas conclusões (ou a outras, ainda):

** Deixar claro que algo deve ser respeitado independentemente das circunstâncias.*

- * Estabelecer uma relação que não pode ser contestada.*
- * Enfatizar que a essência de algo não se altera.*
- * Não especular sobre algo para além daquilo que esse algo é de fato.*

Explicar a eles que na Lógica esse tipo de proposição é o que chamamos de “tautologia” e que elas são sempre verdadeiras. Para além de falar uma obviedade, podemos ressaltar aspectos culturais da linguagem com elas. Além disso, a ideia de que uma coisa é sempre igual a si mesma é nada mais do que o terceiro dos três

princípios básicos estabelecidos por Aristóteles (“princípio da identidade”). Vale a pena lembrar os outros dois princípios com a turma, vistos no encontro anterior.

Essa parte inicial do encontro deve levar cerca de 15 min.

Após essa análise sobre a aula anterior, fazer que atentem para o fato de que nem todas as questões de Lógica apresentam um mecanismo como o da grade da questão trabalhada no primeiro encontro, que permite uma fácil organização e cruzamento das informações do enunciado. Nosso material de estudo serão questões que fogem disso. Questões como as da OBMEP. Questioná-los se recordam de questões desse tipo nas provas da OBMEP. Caso sim, será ótimo que já tenham se dado conta desse tipo de questão se destacando em meio as demais nas provas da Olimpíada. Caso não, as duas questões a seguir ajudarão a recordar.

Novamente em trios, os alunos se reunirão para resolver as questões. É importante pedir para que anotem o raciocínio utilizado na resolução, para que compartilhem posteriormente com os demais grupos. Os alunos terão cerca de 30 min para tal. Nesse meio tempo, o professor deve circular entre os grupos, reorientando sua resolução com novos questionamentos à medida que os trios cheguem a resultados errôneos ou que travem na organização da informação. As questões seguem com uma possibilidade de se chegar ao resultado, mas isso não deve ser compartilhado com os alunos. Note que as questões selecionadas são do tipo “Sequenciamento” e “Dedução”, respectivamente. Na fonte da figura, segue o ano da publicação na OBMEP.

Figura 6 – Questão 11 da prova de 2009

11. Arnaldo, Beto, Celina e Dalila formam dois casais. Os quatro têm idades diferentes. Arnaldo é mais velho que Celina e mais novo que Dalila. O esposo de Celina é a pessoa mais velha. É correto afirmar que:



- A) Arnaldo é mais velho que Beto e sua esposa é Dalila.
- B) Arnaldo é mais velho que sua esposa Dalila.
- C) Celina é a mais nova de todos e seu marido é Beto.
- D) Dalila é mais velha que Celina e seu marido é Beto.
- E) Celina é mais velha que seu marido Arnaldo.

Fonte: OBMEP, 2009.

>>> Uma possível solução:

Como o esposo de Celina é o mais velho de todos, este não pode ser Arnaldo, pois ele é mais novo que Dalila. Logo, Beto e Celina são um casal, bem como Arnaldo e Dalila também são. Por conta de Arnaldo ser mais velho que Celina, temos que a ordem crescente das idades é: Celina, Arnaldo, Dalila e Beto. Dentre as alternativas, a única que respeita a formação dos casais e a ordem correta das idades é a alternativa C.

Figura 7 – Questão 15 da prova de 2023

- 15.** Ana, Cláudia, Joaquim, Pedro e Fabiana se esconderam durante uma brincadeira. Nessa brincadeira,
- havia exatamente duas crianças na casa da árvore;
 - Pedro, que nasceu em São Paulo, se escondeu junto com Fabiana;
 - uma menina se escondeu sozinha;
 - Ana não estava sozinha em seu esconderijo;
 - O menino pernambucano estava na casa da árvore.
- Quem estava na casa da árvore?
- (A) Pedro e Fabiana.
 (B) Joaquim e Cláudia.
 (C) Ana e Joaquim.
 (D) Pedro e Ana.
 (E) Cláudia e Fabiana.

Fonte: OBMEP, 2023.

>>> Uma possível solução:

Segundo a última dica, o menino que se escondeu na casa da árvore é pernambucano. Logo, Pedro e Fabiana que se esconderam juntos, não foram para a casa da árvore, pois Pedro é paulista (segunda dica). Sabe-se ainda que uma das meninas se escondeu sozinha (terceira dica), mas esta não foi Ana (quarta dica). Logo, Joaquim é o menino pernambucano que, junto de Ana, se escondeu na casa da árvore. Portanto, a alternativa correta é a alternativa C.

Ao fim do tempo estipulado, os grupos anunciarão as alternativas que marcaram. Os trios serão convidados a compartilhar seus resultados no grande grupo. Após os alunos apresentarem a forma como organizaram o raciocínio para chegar ao

resultado (cerca de 20 min) serão levantados alguns questionamentos sobre o *modus operandi* de cada grupo. Segue-se abaixo as perguntas que lhe serão direcionadas:

- * *O grupo se organizou para iniciarem a resolução de que forma?*
- * *Qual(ais) estratégia(s) foi(foram) adotada(s) e por quê?*
- * *A estratégia escolhida se mostrou eficaz?*
- * *Após chegarem a um resultado, foi feita uma revisão para encontrar algum possível erro?*
- * *Em que “etapas” seu grupo dividiria cada passo dado na resolução?*

Anotar no quadro as respostas que os grupos deram para cada pergunta, trazendo para o debate junto ao grande grupo se as etapas de resolução adotadas pelos outros grupos são eficazes ou precisam ser repensadas. Procurar estabelecer paralelos entre as etapas definidas pelos grupos que responderam corretamente os problemas propostos. Uma vez que essa análise inicial foi feita com o grande grupo, questioná-los sobre qual seria uma organização de resolução eficaz entre as que os grupos citaram em suas respostas.

Após, com projetor ou tela interativa, apresentar o seguinte resumo das etapas sugeridas por George Polya:

Etapas para Resolução de Problemas (George Polya):

- * Compreensão do problema: *ler com atenção; verificar se os dados são suficientes, redundantes ou contraditórios; destacar as informações mais relevantes.*
- * Criação de uma estratégia: *criar uma ou mais estratégias, discutindo qual a melhor em caso de haver mais de uma; comparar com problemas similares já conhecidos.*
- * Execução da estratégia: *chegar, através da estratégia escolhida, a uma das alternativas de resposta.*
- * Revisão final: *verificar se não houve algum furo no raciocínio ou se informações relevantes foram deixadas de lado; refletir sobre a coerência do resultado encontrado.*

Comparar com a turma as etapas de resolução construídas por eles com as sugeridas por Polya. Elas possuem semelhanças? Se complementam? Há ideias entre as etapas sugeridas por Polya que não foram pensadas? Quais entre as etapas de Polya eles consideram acréscimos úteis a sua forma de organizar a resolução?

Pedir que os alunos tomem notas das conclusões que o grande grupo chegou. Essa reflexão sobre as etapas de resolução deve levar cerca de 30 min.

Agora que já estarão com um olhar mais atento sobre como organizar as etapas de resolução, é interessante trazer um novo problema (outro de “Sequenciamento”), o qual, possivelmente, será visto sob uma nova perspectiva de como elaborá-lo. Este problema será dado em uma folha impressa e ficará como um desafio para ser resolvido em casa.

Figura 8 – Questão 20 da prova de 2015

20. Daniel e mais quatro amigos, todos nascidos em estados diferentes, reuniram-se em torno de uma mesa redonda. O paranaense sentou-se tendo como vizinhos o goiano e o mineiro. Edson sentou-se tendo como vizinhos Carlos e o sergipano. O goiano sentou-se tendo como vizinhos Edson e Adão. Bruno sentou-se tendo como vizinhos o tocantinense e o mineiro. Quem é o mineiro?

A) Adão
B) Bruno
C) Carlos
D) Daniel
E) Edson

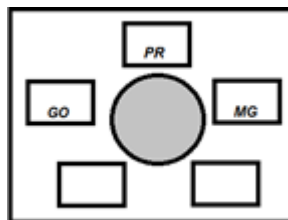


Fonte: OBMEP, 2015.

>>> Uma possível solução:

Começamos marcando no desenho as posições conforme a primeira dica.

Figura 9 – Resolução da questão 20/2015 (i)

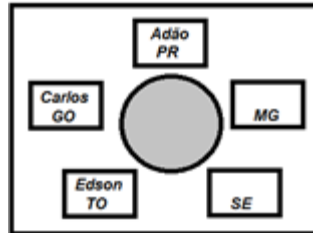


Fonte: autor.

Conforme a terceira dica, o goiano tem como vizinhos Edson e Adão, porém, Edson não pode ser o paranaense, pois se fosse, a segunda dica, que diz que Edson tem como vizinhos Carlos e o sergipano, seria inválida.

Logo, o sergipano está entre Edson e o mineiro, Edson é o tocaninense e Carlos é o goiano, pois é vizinho de Edson.

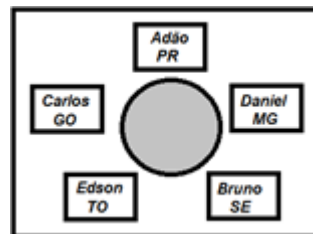
Figura 10 – Resolução da questão 20/2015 (ii)



Fonte: autor.

Como a última dica diz que Bruno está entre o tocaninense e o mineiro, então, Bruno é sergipano e o mineiro é Daniel.

Figura 11 – Resolução da questão 20/2015 (iii)



Fonte: autor.

Portanto, alternativa D.

Agradecer a presença dos participantes e solicitar que se dediquem a encontrar a solução do desafio.

Avaliação desse encontro: *Será avaliada a participação dos alunos na resolução das atividades e na elaboração dos conceitos. O registro deve ser adicionado ao portfólio individual de cada aluno.*

Terceiro encontro

Objetivos desse encontro:

- * *Identificar diferentes tipos de questões.*
- * *Comparar as estratégias utilizadas na resolução de cada tipo.*

Dar os primeiros 10 min de aula para que os alunos troquem ideias sobre a resolução do problema deixado como desafio no final do encontro anterior. Após, divididos em trios novamente, pedir que anunciem a alternativa de resposta que marcaram. Depois, convidar alguns dos alunos para explicar no quadro qual foi sua estratégia. Questionar se as etapas de resolução de elaboradas pela turma foram úteis para que chegassem ao resultado. Isso deve ocupar cerca de 15 min de aula.

Após o compartilhamento da questão que ficou como desafio, será entregue aos alunos, bem como exposto no projetor/tela, as questões que seguem abaixo. Os trios terão cerca de 30 min para pensarem a resolução destas questões. Insistir com eles na utilização das etapas de resolução definidas por eles.

Figura 12 – Questão 19 da prova de 2013



19. Durante a aula, dois celulares tocaram ao mesmo tempo. A professora logo perguntou aos alunos: "De quem são os celulares que tocaram?" Guto disse: "O meu não tocou", Carlos disse: "O meu tocou" e Bernardo disse: "O de Guto não tocou". Sabe-se que um dos meninos disse a verdade e os outros dois mentiram. Qual das seguintes afirmativas é verdadeira?

A) O celular de Carlos tocou e o de Guto não tocou.
 B) Bernardo mentiu.
 C) Os celulares de Guto e Carlos não tocaram.
 D) Carlos mentiu.
 E) Guto falou a verdade.

Fonte: OBMEP, 2013.

>>> Uma possível solução:

Como um dos garotos falou a verdade e os outros dois mentiram, podemos fazer algumas suposições:

* Se Guto e Carlos mentiram, então Bernardo disse a verdade, mas as declarações de Guto e de Bernardo entrariam em contradição.

* Se Carlos e Bernardo mentiram, então Guto disse a verdade, mas novamente, as declarações de Guto e de Bernardo seriam contraditórias.

* Se Guto e Bernardo mentiram, então Carlos disse a verdade. De fato, essa é a única suposição que parece fazer com que as afirmações não se contradigam.

Portanto, a única alternativa que está de acordo é a alternativa B.

Figura 13 – Questão 14 da prova de 2016

14. Em uma brincadeira, a mãe de João e Maria combinou que cada um deles daria uma única resposta correta a três perguntas que ela faria.

Ela perguntou:

- Que dia da semana é hoje?
- Hoje é quinta, disse João.
- É sexta, respondeu Maria.

Depois perguntou:

- Que dia da semana será amanhã?
- Segunda, falou João.
- Amanhã será domingo, disse Maria.

Finalmente ela perguntou:

- Que dia da semana foi ontem?
- Terça, respondeu João.
- Quarta, disse Maria.



Em que dia da semana a brincadeira aconteceu?

- A) Segunda-feira
- B) Terça-feira
- C) Quarta-feira
- D) Quinta-feira
- E) Sexta-feira

Fonte: OBMEP, 2016.

>>> Uma possível solução:

Quadro 2 – Resolução da questão 14/2016

	1ª) Hoje é?	2ª) Amanhã será?	3ª) Ontem foi?
João	Quinta	Segunda	Terça
Maria	Sexta	Domingo	Quarta

Fonte: autor.

Se João disse a verdade na primeira pergunta, significa que Maria ou disse a verdade sobre o dia seguinte (falso, pois Domingo) ou sobre o dia anterior (verdadeiro, pois quarta).

Se João disse a verdade na segunda pergunta, significa que Maria teria mentido ao responder as 3 perguntas, o que não pode acontecer segundo a regra criada pela mãe das crianças.

Se João disse a verdade na terceira pergunta, significa que Maria teria, novamente, mentido ao responder as 3 perguntas, o que não pode acontecer.

Logo, conclui-se que João falou a verdade ao responder a primeira pergunta, sendo o dia em que ocorreu essa brincadeira uma quinta-feira. Portanto, alternativa D.

Ao fim do tempo estipulado, os grupos anunciarão as alternativas que marcaram. Os trios serão convidados a compartilhar seus resultados no grande grupo. Após os alunos apresentarem a forma como organizaram o raciocínio para chegar ao resultado (cerca de 20 min) serão levantados alguns questionamentos sobre o tipo de questão que resolveram. Segue-se abaixo as perguntas que lhe serão direcionadas:

** O que vocês enxergam de similar entre as questões que foram trabalhadas na aula de hoje?*

Pretende-se com essa pergunta perceber se que os alunos identificaram que em ambas as questões temos que lidar com afirmações que são mentiras, as quais se tomam por proposições falsas. De fato, as questões usadas aqui foram classificadas como sendo do tipo “Mentira”.

** As questões trabalhadas nas aulas anteriores, incluindo a questão da tabela do primeiro encontro, possuíam essa característica? O que isso acaba fazendo na forma como compreendemos a questão?*

Pretende-se fazê-los perceber que nas questões das aulas anteriores todas as proposições são tomadas como verdadeiras, o que não ocorre nas questões do tipo “Mentira”.

** O que diferencia a forma de resolver cada um desses tipos de questão?*

Pretende-se que os alunos compreendam que, enquanto nas questões do tipo “Sequenciamento” ou de “Dedução” o que buscamos é a forma ideal de organizar e relacionar as informações para que possamos tirar nossas conclusões, nas questões do tipo “Mentira” a melhor estratégia é supor que uma das afirmações é verdadeira e então ver como isso se relaciona com as demais informações. Se alguma outra proposição acabar sendo contradita por conta dessa suposição, é porque estamos no caminho errado.

** Vocês recordam da frase “Eu estou mentindo.”, utilizada no primeiro encontro? Por que mesmo ela não é considerada uma proposição?*

Os alunos podem utilizar as anotações em seus portfólios para consultarem, caso não recordem. A frase citada contradiz ela mesma, ou seja, um paradoxo. Podemos estabelecer uma relação entre esta frase e as questões do tipo “Mentira”.

** Você concorda que ao os paradoxos podem ser úteis para verificarmos a falsidade de certas proposições?*

Pretende-se notar com essa pergunta se os alunos, ao suporem verdadeira certa proposição, enxergaram no paradoxo uma forma de mostrar que a suposição estava errada. Explicar à turma que na matemática é comum o uso de um recurso chamado “redução ao absurdo”, usado, por exemplo, para provar que o número $\sqrt{2}$ (raiz quadrada de dois) é um número irracional. A redução ao absurdo usa essa mesma tática de supor que uma proposição (condicional) é verdadeira e constatar que se chegou a um paradoxo, tornando a proposição, que se supôs verdadeira, falsa; logo, a negação dessa proposição é verdadeira.

Esse momento de reflexão sobre as questões deve ocupar os 20 min finais da aula. É importante formalizar os conceitos trabalhados anotando as conclusões no quadro: diferenciação entre tipos de questões (Sequenciamento e Dedução de Mentira), a tática para resolver questões de cada tipo, a utilização dos paradoxos para verificação de determinadas proposições.

Para registrar melhor esses conceitos, é interessante trazer um novo problema (Também de “Mentira”? Isso poderá ser questionado em aula), o qual será dado em uma folha impressa nos 5 min finais do encontro e ficará como um desafio para ser resolvido em casa. Lembrá-los de utilizar as etapas de resolução de definidas pela turma em aula.

Figura 14 – Questão 14 da prova de 2014

14. Cinco meninas não estão totalmente de acordo sobre a data da prova de Matemática.

- Andrea diz que será em agosto, dia 16, segunda-feira;
- Daniela diz que será em agosto, dia 16, terça-feira;
- Fernanda diz que será em setembro, dia 17, terça-feira;
- Patrícia diz que será em agosto, dia 17, segunda-feira;
- Tatiane diz que será em setembro, dia 17, segunda-feira.

Somente uma está certa, e as outras acertaram pelo menos uma das informações: o mês, o dia do mês ou o dia da semana. Quem está certa?

- A) Andrea
- B) Daniela
- C) Fernanda
- D) Patrícia
- E) Tatiane

Fonte: OBMEP, 2014.

>>> Uma possível solução:

Essa questão poderia ser classificada no tipo “Mentira”, pois sabemos que somente uma das afirmações é totalmente verdadeira. Começaremos organizando as informações dadas:

Quadro 3 – Resolução da questão 14/2014

Menina	Data (dia, mês, dia da semana)
Andrea	16 de agosto, segunda
Daniela	16 de agosto, terça
Fernanda	17 de setembro, terça
Patrícia	17 de agosto, segunda
Tatiane	17 de setembro, segunda

Fonte: autor.

Lembrando que somente uma tem as 3 informações sobre a data correta e as demais acertaram pelo menos um dos itens dessa informação, podemos supor que:

* Se Andrea está correta sobre a data, então Fernanda teria errado todas as informações, o que não pode acontecer.

** Se Fernanda está correta sobre a data, então Andrea teria errado todas as informações, o que não pode acontecer.*

** Se Daniela está correta sobre a data, então Tatiane teria errado todas as informações, o que não pode acontecer.*

** Se Tatiane está correta sobre a data, então Daniela teria errado todas as informações, o que não pode acontecer.*

** Se Patrícia está correta sobre a data, então as demais acertaram pelo menos uma das informações.*

Portanto, alternativa D.

Agradecer a presença dos participantes e solicitar que se dediquem a encontrar a solução do desafio.

Avaliação desse encontro: *Será avaliada a participação dos alunos na resolução das atividades (verificar se estão fazendo uso das etapas de resolução construídas pela turma) e na elaboração dos conceitos. O registro deve ser adicionado ao portfólio individual de cada aluno.*

Quarto encontro

Objetivo desse encontro:

** Resolver diferentes tipos de questão, utilizando uma estrutura de resolução.*

Os encontros 4 e 5 funcionam como se fossem um único encontro, pois a análise sobre as questões não caberia num espaço de tempo tão limitado.

Iniciará sendo dado os primeiros 10 min de aula para que os alunos troquem ideias sobre a resolução do problema deixado como desafio no final do encontro anterior. Após, divididos em trios novamente, pedir que anunciem a alternativa de resposta que marcaram. Depois, convidar alguns dos alunos para explicar no quadro qual foi sua estratégia. Isso deve ocupar cerca de 20 min de aula. Durante essa resolução, questionar a turma se este é um problema do tipo “Mentira”. Espera-se que os alunos apontem que, apesar das meninas da questão não estarem necessariamente mentindo, as informações que elas dispõem não são confiáveis e, portanto, a forma de resolução é a mesma de questões do tipo “Mentira”. Pode-se abrir uma pequena reflexão sobre a distinção entre mentira e falsidade.

Em seguida, as questões abaixo serão trazidas para que os alunos procurem resolver. Aos trios se disponibilizará cópia impressa das questões, bem como no projetor/tela. Os grupos terão cerca de 40 min realizar essa tarefa.

Figura 15 – Questão 8 da prova de 2007

8. A mãe de César deu a ele as seguintes instruções para fazer um bolo:

- se colocar ovos, não coloque creme.
- se colocar leite, não coloque laranja.
- se não colocar creme, não coloque leite.

Seguindo essas instruções, César pode fazer um bolo com

- A) ovos e leite, mas sem creme.
- B) creme, laranja e leite, mas sem ovos.
- C) ovos e creme, mas sem laranja.
- D) ovos e laranja, mas sem leite e sem creme.
- E) leite e laranja, mas sem creme.



Fonte: OBMEP, 2007.

>>> Uma possível solução:

A primeira instrução, elimina a alternativa C. A segunda instrução, elimina as alternativas B e E. A terceira instrução, elimina a alternativa A, pois se o bolo não tem creme, não deve ter leite. Portanto, alternativa D.

Figura 16 – Questão 14 da prova de 2011

14. Tia Geralda sabe que um de seus sobrinhos Ana, Bruno, Cecília, Daniela ou Eduardo comeu todos os biscoitos. Ela também sabe que o culpado sempre mente e que os inocentes sempre dizem a verdade.



- Bruno diz: "O culpado é Eduardo ou Daniela."
- Eduardo diz: "O culpado é uma menina."
- Por fim, Daniela diz: "Se Bruno é culpado então Cecília é inocente."

Quem comeu os biscoitos?

- A) Ana
- B) Bruno
- C) Cecília
- D) Daniela
- E) Eduardo

Fonte: OBMEP, 2011.

>>> Uma possível solução:

Como não temos declarações de Ana e de Cecília, podemos presumir que não sejam culpadas, pois não disseram nenhuma mentira, embora também não tenham dito nenhuma verdade. As declarações dos outros 3 sobrinhos de dona Geralda apontam para algum entre eles. É notório que Daniela diz a verdade, pois só pode haver um culpado. Note que ela não afirma que Bruno é o culpado, mas, no caso de ter sido ele, obviamente não poderia ter sido Cecília. Por ter dito algo que é verdade, Daniela é inocente. Sendo assim, ou o culpado é Bruno ou é Eduardo. Se Bruno estivesse mentindo, ele seria o culpado, e Eduardo estaria dizendo a verdade, porém, isso seria uma contradição, pois Eduardo aponta como culpada uma das meninas. Logo, quem está mentindo é Eduardo (de fato, Bruno teria apontado corretamente o culpado) e foi ele quem comeu os biscoitos. Alternativa E.

Figura 17 – Questão 10 da prova de 2018



20. Vovó Vera quis saber qual de suas cinco netinhas tinha feito um desenho na parede de sua sala. As netinhas fizeram as seguintes declarações:

- Emília: Não fui eu.
- Luísa: Quem desenhou foi a Marília ou a Rafaela.
- Marília: Não foi a Rafaela nem a Vitória.
- Rafaela: Não foi a Luísa.
- Vitória: Luísa não está dizendo a verdade.

Se apenas uma das netinhas mentiu, quem fez o desenho?

A) Emília
B) Luísa
C) Marília
D) Rafaela
E) Vitória

Fonte: OBMEP, 2018.

>>> Uma possível solução:

Como somente uma mentiu, faremos algumas suposições:

* Se Emília tivesse desenhado, ela teria mentido, porém, algumas das afirmações das demais netas também seriam mentira, como a de Luísa ou a de Vitória. Logo, não foi Emília quem desenhou.

* Se Luísa tivesse desenhado, ela teria mentido, porém, isso faria com que Rafaela também estivesse mentindo. Portanto, não foi Luísa quem desenhou. De fato, se

Luísa diz a verdade, sabemos que quem mentiu foi Vitória, que afirmou que Luísa não disse a verdade. Isso faz com que as afirmações de Marília e Rafaela sejam verdadeiras.

Assim, temos que Marília ou Rafaela fizeram o desenho (pela afirmação de Luísa) e que não foi Rafaela quem fez (pela afirmação de Marília), portanto, quem fez o desenho só pode ter sido Marília. Alternativa C.

Ao fim do tempo estipulado, os grupos anunciarão as alternativas que marcaram. Os trios serão convidados a compartilhar seus resultados no grande grupo. Após os alunos apresentarem a forma como organizaram o raciocínio para chegar ao resultado (cerca de 30 min) será solicitado que, como atividade de casa, pensem sobre as instruções e alternativas de respostas dadas na primeira questão desse encontro, bem como nas declarações dadas pelos personagens da segunda e terceira questões. Como as proposições aparecem nessas questões?

Avaliação desse encontro: *Será avaliada a participação dos alunos na resolução das atividades (verificar se estão fazendo uso das etapas de resolução construídas pela turma). O registro deve ser adicionado ao portfólio individual de cada aluno.*

Quinto encontro

Objetivos desse encontro:

- * Compreender o que são proposições compostas.*
- * Identificar os conectivos lógicos que unem diferentes proposições compostas.*
- * Verificar corretamente a veracidade (ou falsidade) em proposições compostas.*

O quinto encontro iniciará com os alunos falando as impressões que tiveram sobre as questões do encontro anterior. Caso tenham tido alguma percepção que possa ser aproveitada como questionamento posterior, faça uso disso, trazendo as construções dos próprios alunos para dentro da formalização do conceito. Porém, isso pode não acontecer, pois é bem abstrato para os estudantes pensar sobre esse assunto. Assim, segue uma lista de questionamentos que podem ser usados para que

eles reflitam com mais profundidade sobre o que viram nos problemas. Acredita-se que os questionamentos e a formalização dos conceitos devam levar cerca de 60 min.

** Algumas das proposições negam uma possibilidade ou descartam uma situação?*

Pretende-se perceber se os alunos conseguem apontar corretamente alguma das instruções na primeira questão, como “Se não colocar creme, não coloque leite”, ou a declaração de Rafaela, “Não foi a Luísa”, na terceira questão.

** Se a proposição “Luísa está dizendo a verdade.” é verdadeira, então, que proposição, “derivada” dessa, poderíamos afirmar ser falsa?*

Imagina-se que os alunos dirão que uma proposição obviamente falsa que deriva desta seja “Luísa não está dizendo a verdade.”. Pretende-se com isso fazer com que percebam que a negação de uma proposição verdadeira é sempre falsa, como uma decorrência do princípio da não-contradição. Se, segundo esse princípio, uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo, temos, também que uma proposição e sua negação devem ter necessariamente (pelo princípio do terceiro excluído) valores lógicos opostos, não podendo ambas serem verdadeiras ao mesmo tempo.

** Caso a declaração “Não fui eu.” seja verdadeira, qual seria sua negação?*

A negação de tal proposição seria “Fui eu.”, que por óbvio é falsa. Com isso, espera-se que os alunos se atentem para o fato de que a negação de uma proposição negativa é sempre uma proposição afirmativa. Para fins de didática comparativa, seria interessante fazer uso da teoria dos conjuntos. Dado um conjunto não-nulo A , formado por todos os elementos que possuem a propriedade p , todos os elementos que não estejam em A estarão no complementar de A (A'), ou seja, os elementos que não possuem a propriedade p (“não- p ”) pertencem a A' . Se um elemento não pertence a A' , então temos que ele não é um elemento “não- p ”, o que significa que ele possui tal propriedade e necessariamente pertence a A . (Utilize diagramas de Venn para facilitar a visualização).

** Alguma das partes de um dos problemas apresentava mais de uma opção possível? Você chegou a pensar que “ou isso ou aquilo acontece”?*

Espera-se que os alunos apontem para as declarações “O culpado é Eduardo ou Daniela” e “Quem desenhou foi a Marília ou a Rafaela.”.

** Nessas declarações, você percebeu que podem ser “quebradas” em mais de uma proposição? Saberá indicar quais tomando uma como exemplo?*

Pretende-se verificar se os alunos notarão que, por exemplo, “Quem desenhou foi a Marília ou a Rafaela” poderia ser reescrita como sendo “quem desenhou foi a Marília ou quem desenhou foi a Rafaela”, em que temos a proposição “quem desenhou foi a Marília” e “quem desenhou foi a Rafaela”, ditas simples, unidas pelo conectivo “ou”. Explicar para os alunos que na Lógica, sempre que duas ou mais proposições simples se conectam, temos uma proposição composta. Existem outras formas de conectar proposições, mas aqui vemos um exemplo de disjunção, que faz uso do conectivo “ou”.

** Para a declaração “O culpado é Eduardo ou Daniela” ser considerada verdadeira, é necessário que ambas as proposições (“O culpado é Eduardo” / “A culpada é Daniela”) sejam verdadeiras?*

Pretende-se notar se os alunos concluirão que basta que um dos dois (Eduardo ou Daniela) seja culpado para que toda a declaração faça sentido e, portanto, seja considerada verdadeira.

** A declaração seria verdadeira se ambos fossem culpados?*

Pretende-se perceber se os alunos notaram que para a questão em si, não faria sentido ambos serem culpados, pois é dito que Tia Geralda sabe que somente um deles comeu os biscoitos.

** Se houvesse a possibilidade de ter mais de um culpado, a declaração seria verdadeira se ambos o fossem?*

Caso algum dos alunos disser que sim, peça para ele explicar a ideia. Ao lidarmos com disjunções podemos nos deparar com dois tipos distintos. Caso isso não ocorra, para facilitar a compreensão desses dois tipos, traga os questionamentos a seguir.

** Considere a seguinte condição para se participar de um jogo entre as pessoas do grupo X, formado por quem gosta de balas, e as pessoas do grupo Y, formado por quem gosta de bombons: “Só pode participar do jogo quem gosta de bala ou de bombom”. As pessoas que gostam de ambos os doces poderiam participar desse jogo?*

Pretende-se constatar se os alunos se convencerão de que, tanto as pessoas que gostam somente de um dos doces, quanto as que gostam de ambos os doces (e portanto, fazem parte de ambos os grupos) estariam aptas a participar desse jogo, ou seja, se for verdade que um indivíduo goste de balas e de bombons, faz sentido que ele participe do jogo. Explicar aos alunos que temos aqui um exemplo do que chamamos de disjunção inclusiva, na qual se admite a proposição composta como verdadeira se pelo menos uma das proposições simples que a compõem é verdadeira, incluindo o caso em que ambas são. Fazendo analogia com a Teoria dos Conjuntos, pode-se dizer que dados dois conjuntos não-nulos A (formado pelos elementos que possuem a propriedade p) e B (formado pelos elementos que possuem a propriedade q), temos que os elementos que possuem a propriedade p ou a propriedade q pertencem ao conjunto $A \cup B$, incluindo os elementos que possuam p e q simultaneamente.

** Caso a condição para participar do jogo fosse: “Só pode participar do jogo quem gosta ou de bala ou de bombom”. As pessoas que gostam de ambos os doces poderiam participar desse jogo?*

Pretende-se verificar se os alunos perceberão que nesse caso só se admite uma das possibilidades, não fazendo sentido a participação no jogo para quem gosta de ambos os doces. Explicar aos alunos que nesta situação temos o que chamamos de disjunção exclusiva, na qual se admite a proposição composta como verdadeira se somente uma das proposições simples que a compõem for verdadeira, excluindo o caso em que ambas são. Fazendo analogia com a Teoria dos Conjuntos, pode-se dizer que dados dois conjuntos não-nulos A (formado pelos elementos que possuem a propriedade p) e B (formado pelos elementos que possuem a propriedade q), temos que os elementos que possuam ou somente a propriedade p ou somente a propriedade q, pertencerão ou ao conjunto $A - B$ (no qual estão os elementos que pertencem a A, mas não pertencem a B) ou ao conjunto $B - A$ (no qual estão os elementos que pertencem a B, mas não pertencem a A).

Na linguagem natural, o conectivo “ou” costuma ser ambíguo, podendo representar tanto uma disjunção inclusiva quanto exclusiva. No geral, a repetição do conectivo “ou” (ou isso ou aquilo acontece) costuma indicar uma disjunção exclusiva. Entretanto, o que determina com clareza o tipo de disjunção é o contexto do enunciado. Nos *exemplos encontrados nas questões* (“O culpado é Eduardo ou Daniela” e “Quem desenhou foi a Marília ou a Rafaela”), apesar de ser usado somente um “ou” nas declarações, elas são interpretadas como disjunções exclusivas, pois deixam claro que só há um culpado em ter comido os biscoitos de tia Geralda e em ter desenhado na parede da vovó Vera. Nesse sentido, é bom estar atento ao se deparar com o conectivo “ou”.

** Em algum dos problemas teve uma parte em que duas ou mais condições precisavam acontecer juntas? Você chegou a pensar que a declaração só poderia ser verdadeira “se isso e aquilo acontecesse”?*

Pretende-se verificar se os alunos notaram que há nas questões trabalhadas um exemplo disso numa das declarações da terceira questão: “Não foi a Rafaela nem a Vitória.”.

** Você percebeu que a declaração “Não foi a Rafaela nem a Vitória.” pode ser “quebrada” em mais de uma proposição? Saberá indicar quais?*

Pretende-se constatar se os alunos notaram que a declaração como um todo é formada por duas proposições, portanto, é uma proposição composta. Essa declaração poderia ser reescrita como sendo “Não foi a Rafaela e não foi a Vitória.”. Explicar para os alunos que temos aqui um exemplo de conjunção, que faz uso do conectivo “e” (mesmo que esse “e” apareça nas entrelinhas na forma da contração “nem”).

** O que aconteceria se somente uma dessas proposições fosse verdadeira?*

Pretende-se perceber se os alunos compreenderam que se somente uma das proposições simples fosse verdadeira a proposição composta formada por elas seria falsa. Para que uma proposição composta por conjunção seja verdadeira, é necessário que ambas as proposições simples que a compõem também o sejam. Fazendo analogia a Teoria dos Conjuntos, pode-se dizer que dados dois conjuntos não-nulos A (formado pelos elementos que possuam a propriedade p) e B (formado

pelos elementos que possuam a propriedade q), temos que os elementos, que simultaneamente possuem as propriedades p e q , pertencem ao conjunto $A \cap B$.

** Em algum dos problemas vocês identificaram uma parte que dependia de outra, sugerindo uma consequência? Você chegou a pensar “se isso acontece, aquilo também deve acontecer”?*

Pretende-se verificar se os alunos identificaram as construções que envolvem condicional. Essa ideia aparece na declaração de Daniela (“Se Bruno é culpado, então Cecília é inocente”), na segunda questão, bem como nas instruções do bolo (“Se colocar ovos, não coloque creme”), na primeira questão.

** Na declaração “Se Bruno é culpado, então Cecília é inocente.” vocês perceberam que podemos “quebrá-la” em mais de uma proposição?*

Pretende-se constatar se os alunos concluíram que a declaração de Daniela é uma proposição composta formada pelas proposições simples “Bruno é culpado” e “Cecília é inocente”. Explicar para os alunos que este é um exemplo de condicional, que faz uso do conectivo “se/então”.

** Na resolução da segunda questão faz sentido concluir que se é verdade que Bruno é o culpado, então é verdade que Cecília é inocente, pois o enunciado aponta que somente uma das crianças é culpada por comer os biscoitos. Porém, se admitíssemos que pode haver mais de um culpado, isso não excluiria Cecília como suspeita. Que relação devemos ter entre a primeira proposição (“se”) e a segunda proposição (“então”) para reconhecermos a composta como verdadeira?*

Possivelmente os alunos apresentarão dificuldade em avaliar essa pergunta. Nesse caso, apresentar os questionamentos que se seguem.

** Estamos no Rio Grande do Sul que é um dos estados da República Federativa do Brasil. Reflita: É correto afirmar que “se uma pessoa nasce no RS, então ela é brasileira”?*

Dada a obviedade, os alunos concordarão facilmente com essa ideia. Pretende-se fazer com que notem que ambas as proposições são verdadeiras, o que torna a composta verdadeira também.

* É correto afirmar que “se uma pessoa nasce no RS, então ela não é brasileira”?

Os alunos facilmente discordarão do que foi posto, uma vez que não faz sentido. Pretende-se fazer que notem que se a primeira proposição (“se”) for verdadeira e a segunda (“então”) for falsa, teremos uma composta falsa.

* Faz sentido afirmar que “se uma pessoa não nasce no RS, então ela é brasileira”?

Pretende-se fazê-los perceber que essa possibilidade existe. Para ser brasileira, bastaria que tal pessoa tivesse nascido em algum outro estado federativo do Brasil. Espera-se que notem que se a primeira proposição (“se”) for falsa e a segunda (“então”) for verdadeira, teremos uma composta verdadeira.

* Faz sentido afirmar que “se uma pessoa não nasce no RS, então ela não é brasileira”?

Novamente, pretende-se fazê-los perceber que essa possibilidade existe. Para não ser brasileira, bastaria que tal pessoa não tivesse nascido em algum dos estados federativos do Brasil, incluindo o RS. Ora, se uma pessoa não nasce no RS, é possível que ela não seja brasileira também, afinal há outros países para se nascer, ou mesmo num navio em águas internacionais. Espera-se que notem que se a primeira (“se”) e a segunda (“então”) proposições forem falsas, teremos uma composta verdadeira.

Ao relacionarmos com a Teoria dos Conjuntos, podemos dizer que dados dois conjuntos não-nulos A (formado pelos elementos que possuem a propriedade p) e B (formado pelos elementos que cumprem a condição q), com $A \neq B$ e ainda com A sendo subconjunto de B ($A \subset B$), temos que os elementos que possuem a propriedade p , necessariamente possuem a propriedade q . Temos também que se um elemento não possui a propriedade p , ele pode possuir a propriedade q ou não. Isso se deve ao complementar de A possuir interseção tanto com o conjunto B quanto com o complementar de B . Entretanto, um elemento que possui a propriedade p e não possui a propriedade q , não faria sentido, pois contradiz $A \subset B$.

O interessante das condicionais é que elas não afirmam que uma coisa vai acontecer, mas no caso de acontecerem, uma consequência desse acontecimento

sucede. Assim, só teremos que uma proposição com este conectivo será falsa se a proposição antecedente for verdadeira e implicar numa proposição consequente falsa.

Após esses conceitos serem processados e formalizados anotando-os no quadro (o que são proposições compostas, quais os principais conectivos, em que situações as proposições compostas são tidas como verdadeiras ou falsas – o ensino da tabela verdade como recurso para organização do raciocínio é opcional, mas caberia nesse ponto), serão distribuídas cópias impressas das seguintes questões para os alunos trabalharem em trios, como de praxe. Os alunos terão cerca de 20 min para resolverem as questões.

(MPE-RJ/FGV/2019) Considere as proposições a seguir:

- I. 30% de 120 = 36 e 25% de 140 = 36.*
- II. 30% de 120 = 36 ou 25% de 140 = 36.*
- III. Se 25% de 140 = 36, então 30% de 120 = 36.*

É correto concluir que:

- a) apenas a proposição I é verdadeira.*
- b) apenas a proposição II é verdadeira.*
- c) apenas as proposições II e III são verdadeiras.*
- d) todas são verdadeiras.*
- e) nenhuma é verdadeira.*

>>> Uma possível solução:

Todas as proposições são compostas.

** Na proposição I, temos que 30% de 120 é igual a 36 (V) e 25% de 140 é igual a 36 (F, pois o valor resulta em 35). Isso faz com que a proposição I seja falsa, pois, para ser verdadeira, ambas proposições deveriam ser verdadeiras.*

** Na proposição II, temos que 30% de 120 é igual a 36 (V) ou 25% de 140 é igual a 36 (F). Isso faz com que a proposição II seja verdadeira, pois basta que uma das proposições que a compõem seja verdadeira.*

** Na proposição III, temos que se 25% de 140 é igual a 36 (F), então 30% de 120 é igual a 36 (V). Isso faz com que a proposição III seja verdadeira, pois uma condicional só é falsa se o antecedente verdadeiro implicar num consequente falso.*

Portanto, alternativa C.

Tome as premissas abaixo como verdadeiras:

Premissa 1: Ana é ansiosa ou Bruna é bipolar.

Premissa 2: Se Carla for calma, então Bruna não será bipolar.

Premissa 3: Carla é calma e Daniela é determinada.

Conclusão: Portanto, Ana é ansiosa.

Sobre a conclusão, podemos afirmar que:

a) é válida.

b) não é válida.

>>> Uma possível solução:

Como as premissas são verdadeiras, a premissa 3 afirma que Carla é calma e, portanto, segundo a premissa 2, Bruna não é bipolar. Como a premissa 1 afirma que Ana é ansiosa ou Bruna é bipolar, e sabemos que Bruna não é bipolar, então Carla é ansiosa. Sendo assim, a conclusão é válida. Alternativa A.

Ao fim do tempo estipulado, os grupos anunciarão as alternativas que marcaram. Os trios serão convidados a compartilhar seus resultados no grande grupo. Após os alunos apresentarem a forma como organizaram o raciocínio para chegar ao resultado (cerca de 15 min) será encerrado o encontro.

Avaliação desse encontro: *Será avaliada a participação dos alunos na resolução das atividades (verificar se estão fazendo uso das etapas de resolução construídas pela turma) e na elaboração dos conceitos (pedir que fiquem atentos ao registrarem os conceitos que foram formalizados nesse encontro sobre os conectivos). O registro deve ser adicionado ao portfólio individual de cada aluno.*

Sexto encontro

Objetivos desse encontro:

- * Identificar os quantificadores lógicos nas proposições categóricas.*
- * Elaborar relações de negação de proposições categóricas.*

O sexto encontro será iniciado com as percepções dos alunos acerca da segunda questão trabalhada no encontro anterior. A estrutura que é apresentada na questão é conhecida como “silogismo”, que apresenta proposições, denominadas

“premissas”, que se tomam por verdadeiras para que se chegue a uma nova proposição, chamada “conclusão”.

Os silogismos são a base do pensamento lógico-dedutivo que teve início em Aristóteles, na busca pela validade do discurso. Questões do tipo “Dedução” seguem uma linha similar. Nelas, temos proposições que tomamos como verdadeiras (premissas) e, a partir destas, usamos de inferência para chegarmos às conclusões. Obviamente que, se as premissas forem falsas, chegaríamos a uma conclusão errônea. Ainda assim, mesmo com premissas verdadeiras podemos não chegar a uma conclusão satisfatória ou deduzirmos algo totalmente descabido. Explicar rapidamente sobre a validade do argumento, como visto no capítulo 2.

Diferente de uma proposição que se diz “verdadeira” ou “falsa”, um silogismo aponta para um argumento que se diz “válido” ou “inválido”, embora haja outras formas de argumentar que não seja por meio de silogismos.

Apresentar para a turma as seguintes premissas:

Premissa 1: “Todas as proparoxítonas devem ser acentuadas.”

Premissa 2: “A palavra ‘lógica’ é uma proparoxítona.”

Questioná-los: “Qual a conclusão que podemos chegar a partir destas duas premissas?”

Ao que se espera que respondam que a conclusão que chegamos é: “A palavra ‘lógica’ deve ser acentuada.”.

Depois dessa reflexão inicial sobre silogismos, que deve levar cerca de 20 min, será apresentada a questão logo abaixo. Os trios terão 20 min para resolvê-la.

Figura 18 – Questão 6 da prova de 2022

- 6.** Admita que sejam válidas ambas as seguintes sentenças:
- Pinóquio sempre mente;
 - Pinóquio diz: “Todos os meus chapéus são verdes”.
- Podemos concluir dessas duas sentenças que:
- (A) Pinóquio tem pelo menos um chapéu.
 - (B) Pinóquio tem apenas um chapéu verde.
 - (C) Pinóquio não tem chapéus.
 - (D) Pinóquio tem pelo menos um chapéu verde.
 - (E) Pinóquio não tem chapéus verdes.

>>> Uma possível solução:

Como Pinóquio sempre mente, a proposição dita por ele é falsa. Logo, a negação dessa proposição deve ser verdadeira. Para que se tenha a negação de uma proposição universal afirmativa, deve-se usar uma proposição particular negativa. Assim, existe pelo menos um chapéu de Pinóquio que não é verde, portanto, é correto afirmar que Pinóquio possui pelo menos um chapéu. Então, a alternativa correta é a alternativa A.

É possível que os alunos fiquem com certa dificuldade ao responder essa questão. É compreensível, pois trata-se de uma questão que lida com proposição universal, e pode ser contraintuitivo fazer a negação desse tipo de proposição. Caso sinta que a turma está muito perdida, fazer uma pequena pausa na resolução desse problema para levantar alguns questionamentos que podem ajudá-los a refletir sobre a resposta.

** Com base na proposição: “Todos os patos possuem penugem branca.”. O que poderia ser feito para mostrar que essa afirmação é falsa?*

Espera-se que os alunos, depois de algumas possíveis respostas desconstruídas (como apontar que a negação dessa afirmação seria dizer que “nenhum pato possui penugem branca”, o que é falso, pois existem patos com penugem branca), consigam compreender que basta mostrar que existe um único pato que não possua penugem branca para provar que tal afirmação é falsa (pode-se dizer que se usa o mesmo princípio da “falseabilidade” ou da “refutabilidade” proposto por Karl Popper para resolver o problema da indução na filosofia da ciência). A partir dessa constatação, deixar que voltem ao problema dos chapéus de Pinóquio.

Assim que o tempo estipulado acabar, pedir que os trios que tenham chegado ao resultado correto, compartilhem com o restante da turma qual foi seu raciocínio para a resolução (cerca de 10 min). Após, trazer alguns questionamentos que façam os alunos refletirem sobre a questão:

** O que o silogismo das proparoxítonas e a questão apresentada possuem em comum?*

Pretende-se fazer os alunos perceberem que em ambas situações temos uma proposição que usa a palavra “todos(as)”.

** O que a questão entregue como desafio no final do 3º encontro e a questão apresentada possuem em comum? (Apresentar a questão 14 da OBMEP de 2014 no projetor / tela)*

Pretende-se verificar se os alunos notaram que ambas usam a expressão “pelo menos um(a)”.

** Qual a relação entre a questão do Pinóquio e o questionamento sobre a penugem dos patos? Como foi resolvida cada questão?*

Pretende-se constatar se os alunos notaram que, assim como o questionamento dos patos, para negar uma proposição do tipo “Todos são”, devemos usar uma proposição do tipo “algum não é”, “existe um que não é” ou “pelo menos um não é”. Explicar para eles que essas expressões “todos” e “pelo menos um não” são o que chamamos de quantificadores lógicos. O quantificador “todos” é dito universal afirmativo, enquanto o quantificador “pelo menos um não” é dito particular negativo.

** Inicialmente, seu grupo pensou em usar como negação para a questão do Pinóquio que “nenhum dos chapéus é verde”?*

Provavelmente, muitos alunos dirão que sim, especialmente antes de se levantar o questionamento sobre os patos. Contudo, após a reflexão sobre a pergunta dos patos, é possível que tenha se tornado simples de resolver a questão do Pinóquio por analogia.

** Como “todos” é um quantificador universal afirmativo, o que seria um quantificador universal negativo?*

Espera-se que os alunos entendam que a expressão “nenhum” cumpra esse papel.

** Se Pinóquio tivesse dito que “Nenhum dos meus chapéus é vermelho”, saberíamos que se trata de uma mentira, pois ele sempre mente. A negação dessa proposição, portanto, seria verdadeira. Como seria a negação dessa declaração de Pinóquio?*

Pretende-se fazer com que os alunos suponham, em analogia com a pergunta dos patos, que bastaria que um único chapéu de Pinóquio fosse vermelho para negar tal afirmação. Logo, a negação da proposição seria “Pelo menos um dos meus chapéus é vermelho”. Vale ressaltar que esta negação faria uso de um quantificador particular afirmativo.

Explicar aos alunos que proposições que usem quantificadores lógicos (“todos”, “nenhum”, “algum”, “existe” etc) são chamadas de proposições categóricas e são o foco da lógica de predicados. Essas proposições são amplamente utilizadas na Matemática em definições e para a argumentação em demonstrações. Anotar no quadro a formalização desses conceitos, como os tipos de proposições categóricas (universal, particular, afirmativa e negativa) e como negá-las. Vale a pena aqui diferenciar a negação de uma proposição simples de uma proposição categórica. A reflexão sobre os questionamentos e sua formalização deve levar cerca de 25 minutos.

Após essa formalização acerca das proposições categóricas, trazer as questões abaixo que abordam esse assunto, como forma de os alunos reforçarem o que viram até então. Estima-se que para a resolução das questões e o compartilhamento das ideias com o grande grupo leve em torno de 15 minutos.

(Instituto AOCP 2016 - adaptada) Qual a negação da frase “Nenhum homem é alto?”?

- a) “Nenhum homem é baixo”.
- b) “Não existe homem alto”.
- c) “Todo homem é alto”.
- d) “Existe homem alto”.
- e) “Qualquer homem é baixo”.

>>> Uma possível solução:

A proposição dada é universal negativa e, portanto, sua negação é uma particular positiva. Logo, a negação é que pelo menos um homem que seja alto exista. Alternativa D.

(Vunesp, 2018) Considere falsa a afirmação (I) e verdadeira a afirmação (II).

I. Todos os alunos estudam.

II. Alguns professores estudam.

Sendo assim, é correto concluir que:

a) os alunos que estudam são professores.

b) qualquer professor que estuda é aluno.

c) existe aluno que não estuda.

d) todos os professores estudam.

e) qualquer aluno estuda.

>>> Uma possível solução:

Como a afirmação (I) é falsa, sua negação é verdadeira. Então, há algum aluno que estuda (ou mesmo mais de um, mas não a totalidade dos alunos, pois isto tornaria a afirmação (I) verdadeira). Logo existem, também, alunos que não estudam, que é justamente a afirmação feita na alternativa C. De fato, as conclusões das alternativas A e B não são válidas, pois nada sugere que há ligação entre ser aluno e ser um professor que estuda. Já as conclusões das alternativas D e E não estão de acordo com as afirmações (I) e (II).

Assim que o tempo estipulado acabar, pedir que os trios compartilhem com o restante da turma qual foi seu raciocínio para a resolução (cerca de 10 min). Com isso, o tempo deste 4º encontro terá acabado.

Agradecer a presença dos participantes e solicitar que não deixem de comparecer ao próximo encontro.

Avaliação desse encontro: *Será avaliada a participação dos alunos na resolução das atividades (verificar se estão fazendo uso das etapas de resolução construídas pela turma) e na elaboração dos conceitos (pedir que fiquem atentos ao registrarem os conceitos que foram formalizados nesse encontro sobre os quantificadores lógicos e proposições categóricas). O registro deve ser adicionado ao portfólio individual de cada aluno.*

Sétimo encontro

Objetivo desse encontro:

** Identificar as questões entre os diferentes tipos e resolvê-las levando-se em conta conectivos (preferencialmente utilizando uma estrutura de resolução).*

Nesse encontro serão trazidas mais algumas questões que sintetizam um pouco do que foi trabalhado ao longo dos encontros anteriores. Os alunos, separados em trios, receberão cópia impressa das questões, que também serão exibidas no projetor/tela. Como de costume o professor passará entre os grupos para tirar possíveis dúvidas, reconduzindo os alunos através de questionamentos rumo ao resultado correto. É importante lembrá-los de coisas que foram vistas e que os auxiliarão na resolução, como as etapas de resolução definidas pela turma em aula, os tipos de questão e sua forma de resolução, se as questões fazem uso de conectivos, etc, bem como anotar o raciocínio de sua resolução. Imagina-se que essa tarefa levará cerca de 50 min.

Figura 19 – Questão 19 da prova de 2008

19. Ari, Bruna e Carlos almoçam juntos todos os dias e cada um deles pede água ou suco.

- Se Ari pede a mesma bebida que Carlos, então Bruna pede água.
- Se Ari pede uma bebida diferente da de Bruna, então Carlos pede suco.
- Se Bruna pede uma bebida diferente da de Carlos, então Ari pede água.
- Apenas um deles sempre pede a mesma bebida.

Quem pede sempre a mesma bebida e que bebida é essa?

- (A) Ari; água
- (B) Bruna; água
- (C) Carlos; suco
- (D) Ari; suco
- (E) Bruna; suco



Fonte: OBMEP, 2008.

>>> Uma possível solução:

Como eles pedem água ou suco, existem 8 possibilidades de como eles fazem seus respectivos pedidos:

Quadro 4 – Resolução da questão 19/2008

	1	2	3	4	5	6	7	8
Ari	Água	Água	Suco	Suco	Água	Água	Suco	Suco
Bruna	Água	Suco	Água	Suco	Água	Suco	Água	Suco
Carlos	Água	Água	Água	Água	Suco	Suco	Suco	Suco

Fonte: autor.

Levando em conta a primeira dica, eliminamos as possibilidades 2 e 8. Com a segunda dica, eliminamos a possibilidade 3. Com a terceira dica, eliminamos as possibilidades 4 e 7. Como as únicas possibilidades válidas são a 1, a 5 e a 6, e pela última dica, um deles pede sempre a mesma bebida, temos que Ari é quem pede sempre água. Portanto, alternativa A.

Figura 20 – Questão 11 da prova de 2021

11. Amélia, Beatriz, Camila e Débora são amigas que combinaram uma brincadeira: a partir de um certo momento cada uma delas passa a falar só verdades ou só mentiras. Depois desse momento,

Amélia disse: "Beatriz diz a verdade";

Beatriz disse: "Camila mente";

Camila disse: "Amélia e Débora, ambas dizem a verdade ou ambas são mentirosas";

Débora disse: "Amélia não fala a verdade".

Quantas das 4 amigas mentem?

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3
- (E) 4



Fonte: OBMEP, 2021.

>>> Uma possível solução:

Uma estratégia interessante é iniciarmos as suposições a partir da declaração de Débora, pois a declaração de Camila é uma proposição composta (disjunção exclusiva), o que pode dificultar a organização das ideias. Assim, se Débora fala a verdade, então Amélia mente, Beatriz mente e Camila diz a verdade. Porém, isso gera uma contradição, pois Amélia e Débora não estão ambas dizendo a verdade ou ambas

mentindo. Por outro lado, se Débora está mentindo, então Amélia diz a verdade, Beatriz diz a verdade e Camila mente. De fato, a afirmação de Camila é falsa, pois novamente temos que Amélia e Débora não estão ambas falando a verdade ou ambas mentindo. Temos então que duas das amigas falam a verdade e duas mentem, portanto, a alternativa correta é a alternativa C.

Figura 21 – Questão 6 da prova de 2016

6. A figura mostra os cartões com as respostas de Ana, Beatriz e Cecília para uma prova de múltipla escolha, com cinco questões e alternativas A, B, C, D e E. Ana acertou quatro questões, Beatriz acertou uma e Cecília acertou três. Qual foi a questão que Ana errou?

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

Ana					
	1	2	3	4	5
A →	☒	☒	☐	☐	☐
B →	☐	☐	☐	☐	☒
C →	☐	☐	☐	☒	☐
D →	☐	☐	☐	☐	☐
E →	☐	☐	☒	☐	☐

Beatriz					
	1	2	3	4	5
A →	☒	☐	☐	☒	☐
B →	☐	☒	☐	☐	☐
C →	☐	☐	☒	☐	☐
D →	☐	☐	☐	☐	☐
E →	☐	☐	☐	☐	☒

Cecília					
	1	2	3	4	5
A →	☒	☐	☒	☒	☐
B →	☐	☒	☐	☐	☒
C →	☐	☐	☐	☐	☐
D →	☐	☐	☐	☐	☐
E →	☐	☐	☐	☐	☐

Fonte: OBMEP, 2016.

>>> Uma possível solução:

Começaremos supondo que a questão 1 esteja errada. Se isso ocorrer, então Ana acertou as outras 4 questões e Beatriz acertou pelo menos uma das demais questões. Porém, nenhuma das demais respostas (questões 2, 3, 4 e 5) coincidem entre as respostas de Ana e Beatriz. Isso indica que a questão 1 está correta. Sendo assim, todas as 3 meninas acertaram a questão 1 e Beatriz errou as questões 2, 3, 4 e 5.

Entre as questões 2, 3, 4 e 5, Ana errou uma e Cecília duas. É fácil perceber que Cecília errou as questões 2 e 4, pois suas respostas coincidem com as de Beatriz (que as errou). Isso indica que Cecília acertou as questões 1, 3 e 5. Destas, a única questão em que as respostas dadas por Ana e Cecília não coincide é a questão 3. Portanto, Ana errou a questão 3 e a alternativa correta é a C.

Figura 22 – Questão 19 da prova de 2024

19. Ana, Bia e Carla visitaram a floricultura de seu bairro. O vendedor separou as 5 flores mostradas na figura e disse que iria presentear cada uma com uma dessas flores.



Carla escutou a seguinte conversa entre Bia e Ana:

— Bia disse: "Oi Ana, eu e Carla sabemos a cor de cada uma das flores que vamos ganhar, mas nem eu nem ela sabemos as quantidades de pétalas das flores que cada uma de nós irá ganhar".

— Ana disse: "Eu sei a quantidade de pétalas da flor que vou ganhar, mas não sei a cor".

A partir dessa conversa, Carla descobriu a flor que Ana vai ganhar. Qual é essa flor?

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


Fonte: OBMEP, 2024.

>>> Uma possível solução:

Como Ana diz saber a quantidade de pétalas da sua flor, mas não a cor, isso significa que ela irá ganhar alguma das flores com 3 pétalas, pois se ela fosse ganhar uma flor com qualquer outra quantidade de pétalas, não restaria dúvidas sobre a cor (as flores de 4, 5 e 6 pétalas possuem cores específicas). Quanto as flores que Bia e Carla receberão, elas sabem as cores que cada uma irá receber, o que limita às seguintes possibilidades: ambas recebem flores amarelas, ambas recebem flores roxas, ou uma recebe uma flor amarela e a outra uma flor roxa. Se ambas recebessem flores amarelas, Carla seria incapaz de definir qual a flor de Ana. O mesmo vale se Carla e

Bia recebessem flores de cores diferentes. A dedução de Carla só é possível se ambas receberem flores roxas, sobrando assim a flor amarela de 3 pétalas para Ana. Logo, a alternativa correta é a alternativa A.

Figura 23 – Questão 20 da prova de 2010

20. Adriano, Bruno, Carlos e Daniel participam de uma brincadeira na qual cada um é um tamanduá ou uma preguiça. Tamanduás sempre dizem a verdade e preguiças sempre mentem.

- Adriano diz: "Bruno é uma preguiça".
- Bruno diz: "Carlos é um tamanduá".
- Carlos diz: "Daniel e Adriano são diferentes tipos de animais".
- Daniel diz: "Adriano é uma preguiça".

Quantos dos quatro amigos são tamanduás?

- A) 0
- B) 1
- C) 2
- D) 3
- E) 4

Fonte: OBMEP, 2010.

>>> Uma possível solução:

Uma estratégia interessante é iniciarmos as suposições a partir da declaração de Daniel, pois a declaração de Carlos é uma proposição composta (disjunção exclusiva... ou Daniel é tamanduá e Adriano é preguiça, ou Daniel é preguiça e Adriano é tamanduá), o que pode dificultar a organização das ideias.

Assim, se Daniel mente (preguiça), então Adriano fala a verdade (tamanduá), Bruno mente (preguiça) e Carlos mente (preguiça). Porém, isso gera uma contradição, pois se Carlos mente, Daniel e Adriano deveriam ser de um mesmo tipo de animais, mas não são (Daniel é preguiça e Adriano tamanduá).

Contudo, se Daniel fala a verdade (tamanduá), então Adriano mente (preguiça), Bruno diz a verdade (tamanduá) e Carlos diz a verdade (tamanduá). Isso faz sentido, visto que Daniel e Adriano devem ser diferentes tipos de animais.

Logo, 3 amigos são tamanduás, e a alternativa correta é a D.

Ao fim do tempo estipulado, os grupos anunciarão as alternativas que marcaram. Os trios serão convidados a compartilhar com o restante da turma a forma como organizaram o raciocínio para chegar aos seus resultados, o que deve levar cerca de 40 min.

Nos 10 min finais, trazer o seguinte questionamento ao grupo:

** Com esse último bloco de questões de lógica, os conceitos que abordamos ao longo dos encontros (sobre como estruturar a resolução de problemas, bem como conhecimentos sobre lógica proposicional e de predicados) foram úteis para que vocês conseguissem resolver com maior desenvoltura esse tipo de questão?*

Pretende-se verificar se os alunos sentiram que houve contribuição efetiva na forma como eles encaram a resolução de problemas como um todo, mas especificamente de questões de Lógica.

** Acreditam que, após essa proposta didática, ficaram mais atentos à forma com a qual expressam suas ideias, fazendo-o de maneira mais clara e aprimorando sua argumentação?*

Pretende-se perceber se, munidos de ferramentas que os façam enxergar a estrutura por trás dos enunciados e para além de fazer uma leitura mais atenta destes, o que foi trabalhado nesses encontros teve como benefício os alunos tornarem-se “leitores de si mesmos”, procurando ler suas próprias produções com olhos mais críticos e, com isso, melhorando sua argumentação.

Justamente para testar essa melhora na forma como eles se expressam e não só na forma como compreendem as perguntas é que será proposta a seguinte atividade para o encontro 8:

>>> Para o próximo encontro, cada trio deverá criar uma questão de lógica, na qual haja alternativas de resposta. Neste encontro, os grupos trocarão entre si suas perguntas (definido por sorteio). Após o tempo para que resolvam, os trios serão chamados para lerem, resolverem e analisarem as questões que receberam dos seus colegas.

Explicar aos alunos que eles podem se basear nos tipos de questões que viram (como as questões de “Mentira”, por exemplo), podem utilizar silogismos, conectivos, quantificadores, enfim, coisas que foram vistas nos encontros. A originalidade será incentivada, evidenciando que não se recomenda apenas fazer uma cópia das questões trabalhadas, alterando alguns elementos. Como exemplo disso, apontar a

segunda e a quinta questões propostas nesse 7º encontro. As questões são muito próximas na ideia, mas houve uma reestruturação para que não fossem idênticas (na verdade, a segunda questão que se baseia na quinta, pois a segunda foi lançada depois).

Na BNCC, várias habilidades são descritas com “resolver e elaborar problemas”. Esta última atividade foi pensada para que os alunos manipulem os conceitos aprendidos de modo a elaborarem eles mesmos um problema de Lógica e demonstrarem de forma prática se lhe compreenderam de fato.

Agradecer a todos os participantes e pedir que se empenhem na criação da questão.

Avaliação desse encontro: *Será avaliada a participação dos alunos na resolução das atividades (verificar se estão fazendo uso das etapas de resolução construídas pela turma). O registro deve ser adicionado ao portfólio individual de cada aluno.*

Oitavo encontro

Objetivos desse encontro:

- * *Analisar junto à turma as questões formuladas pelos grupos, sugerindo melhorias.*
- * *Realizar uma autoavaliação sobre o empenho e sobre o desempenho (ao resolver problemas) nos encontros dessa proposta didática.*

Esse último encontro tende a ser caótico e, em termos de planejamento é o mais simples, pois se apoia no que será trazido pelos alunos. Não se tem um controle sobre os tipos de questões que podem surgir, se estão bem elaboradas, se são fáceis, difíceis, se são cópias óbvias de questões que foram trazidas anteriormente, se baseiam-se nos conceitos de lógica trabalhados em aula, etc.

Os trios se reunirão e, por sorteio, será feita a troca de questões entre eles (enumerar os grupos e sortear papezinhos para saber qual grupo pega a questão de qual, trocando o papel caso um grupo pegue seu próprio número no sorteio). Os grupos terão 30 minutos para responder à questão sorteada. Para além de

encontrarem a resposta correta, eles farão a análise crítica da questão, verificando os seguintes critérios: i) Foi escrita com clareza? ii) Os conceitos de lógica foram abordados? iii) Está num nível muito difícil ou muito fácil? iv) Possui alguma incongruência que não leve ao resultado esperado? v) Há ambiguidade em alguma informação? vi) Cabe alguma alteração no enunciado para facilitar seu entendimento? vii) A pergunta é original ou foi inspirada em alguma questão trabalhada nos encontros?

Os 50 min seguintes da aula serão usados para que cada trio comente a questão que pegou no sorteio (é possível anotá-la em um editor de texto de computador e projetar a imagem para o restante da turma). Se houver muitos trios, podem ser sorteados cinco desses grupos para que as questões sejam trabalhadas junto ao grande grupo. Os comentários que os grupos anotaram serão compartilhados com os demais colegas da turma e será aberta a discussão para que os outros colegas comentem.

Após a análise das questões, os 20 min finais serão utilizados para responder o questionário abaixo, que serve para autoavaliação e avaliação por pares do trabalho realizado nos trios.

Questionário Formativo:

1) *Acredita que você e seu grupo tiveram aprendizagens significativas com esse projeto de resolução de questões de lógica? Se sim, o que você mais achou importante daquilo que aprenderam? Caso não, quais suas sugestões para melhoria desse projeto?*

Com essa pergunta, pretende-se verificar se o aluno conseguiu compreender sobre o que se tratou essa proposta didática. Ao fazê-lo perceber quais foram as aprendizagens que teve, coloca-se o aluno a refletir sobre seu processo de aprendizagem e sobre os conhecimentos que adquiriu (ou não).

2) *Qual foi sua principal dificuldade ao resolver questões de lógica? Você e seus colegas de grupo procuraram seguir as etapas de resolução sugeridas em aula?*

Complemento da pergunta anterior, esta pergunta especula se as etapas de resolução foram consideradas e se isso levou o grupo a alcançar os resultados

corretos. É possível que os alunos percebam e indiquem aqui suas limitações quanto a interpretação textual como fator para a dificuldade.

3) *Quais foram suas contribuições para com o seu grupo durante este projeto? Colaborou oferecendo seu ponto de vista durante a resolução dos problemas? Participou ativamente do planejamento e da execução? Auxiliou na elaboração do registro dos raciocínios de resolução? Que nota você se daria de 0 a 10?*

Como o papel do aluno é de suma importância dentro da metodologia de resolução de problemas, cabe a ele avaliar-se dentro desse processo, tanto quanto ao seu desempenho, quanto ao seu empenho.

4) *E seus colegas de grupo, como contribuíram (fale um pouco sobre cada outro membro do grupo)? O auxílio deles foi importante para que você conseguisse entender melhor os conceitos trabalhados? Que nota de 0 a 10 você atribuiria a cada um deles?*

Abrindo espaço para a avaliação por seus pares, este espaço serve para que o aluno se expresse sobre o empenho de seus colegas, se houve colaboração dos demais na construção do raciocínio durante a resolução das questões.

5) *Como você avalia o problema criado pelo grupo para a tarefa final neste último encontro? Acredita que tenha ficado bom, fazendo uso correto dos conceitos abordados no projeto? Caso não tenha ficado, o que poderia ser melhorado?*

Esta pergunta foi pensada para que o aluno avalie o produto feito por seu grupo, indicando potenciais melhorias que pensa serem importantes de serem consideradas.

Ao final, agradecer o empenho dos alunos ao longo da aplicação dessa proposta didática.

Avaliação desse encontro: *Serão avaliadas as questões produzidas pelos grupos, a participação dos alunos na resolução das atividades e na crítica às questões produzidas, e a autoavaliação que cada aluno fez de si em seu processo de construção do saber nesses encontros. O registro deve ser adicionado ao portfólio individual de cada aluno. Ao finalizar essa proposta, recolher os portfólios e analisar o conjunto de todas as atividades realizadas, junto aos registros do professor sobre a participação individual de cada aluno durante os encontros.*

Referências

Brasil. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.

Pinker, Steven. Racionalidade: o que é, por que parece estar em falta, por que é importante. Rio de Janeiro: Editora Intrínseca, 2021.

Polya, George. A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. Tradução e Adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.