UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PRODUTO EDUCACIONAL

ESPIROLATERAIS: GUIA DE ATIVIDADES EM SALA DE AULA

MATHEUS VINICIUS NUNES

JOINVILLE, SC
2025

Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
Programa: MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
Nível: MESTRADO PROFISSIONAL
Área de Concentração: Matemática na Educação Básica.
Linha de Pesquisa: Matemática na Educação Básica e suas Tecnologias

Título: Espirolaterais: Guia de Atividades em Sala de Aula
Autor: Matheus Vinicius Nunes
Orientador: Dr. Fernando Deeke Sasse
Data: 19/08/2025

Produto Educacional: Caderno de atividades.
Nível de ensino: Ensino Fundamental e Ensino Médio.
Área de Conhecimento: Matemática
Tema:

Resumo:
Resultado de pesquisa qualitativa desenvolvida ao longo do mestrado, este caderno de atividades foi pensado com carinho para apoiar professores do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio que queiram inovar em suas aulas de Matemática. A proposta convida alunos e docentes a explorarem os espirolaterais por meio da programação com Python e do módulo Turtle, tornando o aprendizado mais visual, dinâmico e envolvente. No entanto, o material também contempla atividades desplugadas, ou seja, que podem ser realizadas sem o uso de computadores, utilizando papel milimetrado, régua e transferidor. Assim, todos os estudantes, com ou sem acesso a tecnologia digital, podem participar ativamente das descobertas. As 16 atividades, organizadas por ano escolar e alinhadas à BNCC, abordam temas como ângulos, perímetro, área, progressões, transformações geométricas e funções. Mais do que ensinar conteúdos, o material estimula o raciocínio lógico e o uso de tecnologias. A intenção é que cada atividade inspire novas formas de ensinar e de aprender .
Palavras-chave: Espirolaterais. Python. Módulo Turtle. Matemática. Atividades.

Biblioteca Universitária UDESC: https://repositorio.udesc.br/home

Publicação Associada: Espirolaterais com Python.

URL: http://www.udesc.br/cct/profmat

Arquivo	*Descrição	Formato
7,0 MB	**Texto completo**	**Adobe PDF**

Apresentação

Caro professor(a)

O presente documento é resultado da dissertação intitulada *"O uso do módulo Turtle em sala de aula: uma proposta com espirolaterais"*, desenvolvida no ano de 2025 junto ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, no Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Catarina, sob a orientação do professor Dr. Fernando Deeke Sasse.

O objetivo deste material é oferecer aos professores de Matemática do Ensino Fundamental II e Ensino Médio sugestões de atividades que possam ser trabalhadas em suas aulas, envolvendo o conceito de espirolaterais e conteúdos matemáticos. Essas atividades abordam alguns conteúdos propostos pela BNCC, como, por exemplo, transformações geométricas, mínimo múltiplo comum, área e perímetro de figuras geométricas.

Neste caderno de atividades, primeiramente serão definidos os espirolaterais, juntamente com sua origem, notação e características. Em seguida, serão apresentadas 16 atividades propostas para alunos do 6º ano do Ensino Fundamental II ao 3º ano do Ensino Médio. As atividades propostas seguem o princípio das atividades *unplugged* e *plugged* do pensamento computacional; parte delas será realizada de maneira desplugada, visando ao desenvolvimento das habilidades de construção dos alunos.

Este caderno de atividades foi concebido para ser autossuficiente. No entanto, para o melhor entendimento dos conceitos aqui utilizados, sugerimos que o professor consulte a dissertação (Nunes, 2025).

Matheus Vinicius Nunes.

SUMÁRIO

Os espirolaterais

Este trabalho é composto por atividades que envolvem o conceito de espirolaterais e matemática. Antes das atividades apresentaremos os espirolateral, abordando sua origem, definição, notação e características. Destaca-se que os espirolaterais podem ser figuras fechadas (quando retornam ao ponto de partida) ou abertas (quando não retornam). Um dos principais focos é a exploração da periodicidade dessas figuras, com a identificação de padrões que se repetem após um certo número de iterações, além da construção das formas utilizando a linguagem Python, em conjunto com o módulo Turtle.

Proposto pelo bioquímico Frank C. Odds em 1973 (Odds, 1973) e popularizado por Martin Gardner (Gardner, 1973, 1986), um ciclo de um espirolateral simples é uma figura composta por uma sequência de N segmentos de comprimentos crescentes — L, , 2L, . . . , NL — com um ângulo de rotação θ entre dois segmentos consecutivos, aplicado no sentido horário, a partir do menor segmento, como ilustrado na Figura 1. A ordem do espirolateral é a quantidade de segmentos que compõem um ciclo completo. Assim, um espirolateral de ordem N é construído com base em um conjunto de N regras sequenciais. Na notação original de Odds e Gardner, tal espirolateral é denotado por N_θ.

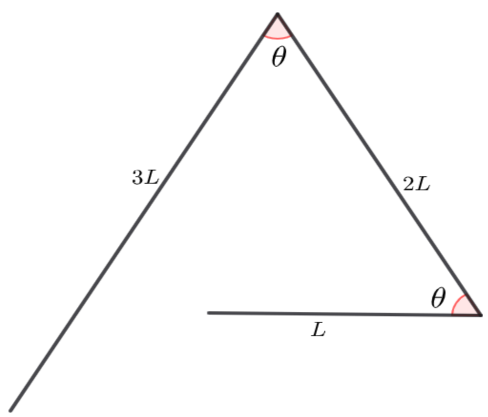


Figura 1 – Espirolateral de Lados L, 2L e 3L e ângulo de rotação.

Nas atividades em Python, descritas a seguir, usaremos em vez de θ, seu complemento $\beta = 180° - \theta$, como mostrado na Figura 2.

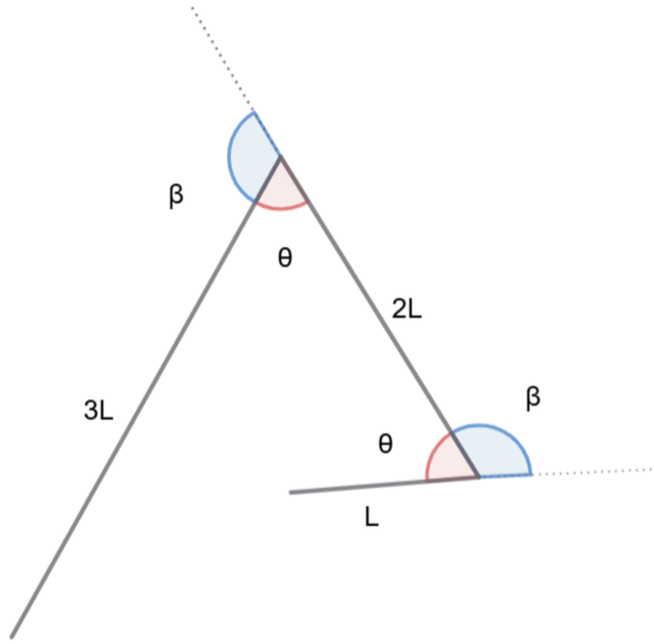


Figura 2 – Espirolateral de lados L,2L e 3L mostrando θ e seu complemento $\beta = 180° - \theta$.

Um espirolateral mais completo pode agora ser definido por meio da repetição do mesmo ciclo por um certo número de vezes. Nos exemplos a seguir, usamos o Python Turtle para gerar alguns espirolaterais, utilizando para isso o ambiente online Python Sandbox, no qual é possível realizar construções com o módulo Turtle diretamente no navegador.

Exemplo 1. Desenhemos, usando Turtle Python, um ciclo do espirolateral 3_{90}. Primeiramente devemos fazer a conversão do ângulo θ, de modo que $\beta = 180° - \theta = 180° - 90° = 90°$ (aqui não faz diferença). Assim, o ciclo do espirolateral que queremos pode ser gerado por meio dos seguintes comandos:

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
# Define o comprimento do primeiro segmento a ser desenhado
x=25
# Define o ângulo theta para as curvas da tartaruga
theta=90
# Calcula o ângulo beta que será usado para girar a tartaruga
beta=180-theta
# Move a tartaruga para frente por x unidades
t.forward(x)
# Vira a tartaruga para a direita pelo ângulo beta
t.right(beta)
# Move a tartaruga para frente por 2 vezes x unidades
t.forward(2 * x)
t.right(beta)
# Move a tartaruga para frente por 3 vezes x unidades
t.forward(3 * x)
t.right(beta)
```

O resultado é mostrado na Figura 3. Nesse exemplo usamos x = 25 (para melhor visualização), como comprimento inicial, mas x pode ter qualquer valor positivo.

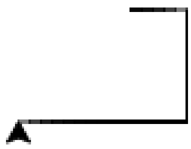


Figura 3 – Um ciclo do espirolateral 3_{90}.

Exemplo 2. Desenhemos, usando Turtle Python, diversos ciclos do espirolateral 3_{90}.

Para completarmos nosso espirolateral e observarmos o seu padrão, podemos utilizar o comando for i in range(k), onde k corresponde ao número de ciclos do espirolateral. Usando k = 4 ciclos temos as seguintes linhas de programação:

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
k = 4
x=25
theta=90
beta=180-theta
for i in range(k):
    t.forward(x)
    t.right(beta)
    t.forward(2*x)
    t.right(beta)
    t.forward(3*x)
    t.right(beta)
```

O resultado é mostrado na Figura 4. É possível verificar que o número mínimo de 4 ciclos é necessário para gerar um polígono fechado.

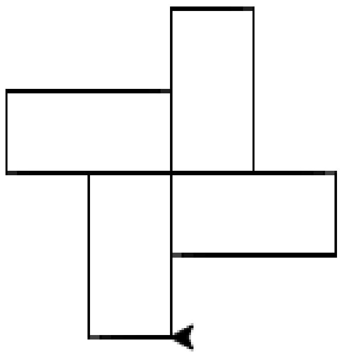


Figura 4 – Quatro ciclos do Espirolateral 3_{90}.

O espirolateral apresentado anteriormente pode ser classificado como um espirolateral de ordem 3, pois cada um dos ciclos possui três deslocamentos.

Exemplo 3. Desenhemos, usando Turtle Python, quatro ciclos do espirolateral 4_{90}.

Construímos o código para o espirolateral de maneira análoga ao exercício anterior:

```
t = turtle.Turtle()
k=4
x=25
theta=90
beta=180-theta
for i in range(k):
    t.forward(x)
    t.right(beta)
    t.forward(2*x)
    t.right(beta)
    t.forward(3*x)
    t.right(beta)
    t.forward(4*x)
    t.right(beta)
```

O resultado é mostrado na Figura 5. É possível verificar que o espirolateral não formará um polígono.

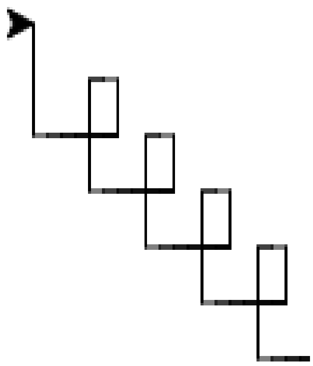


Figura 5 – Quatro ciclos do Espirolateral 4_{90}.

Exemplo 5. Desenhemos, usando Turtle Python, quatro ciclos do espirolateral 8_{90}.

Construímos o código para o espirolateral de maneira análoga ao exercício anterior:

```
t = turtle.Turtle()
k=4
x=25
theta=90
beta=180-theta
for i in range(k):
    t.forward(x)
    t.right(beta)
    t.forward(2*x)
    t.right(beta)
    t.forward(3*x)
    t.right(beta)
    t.forward(4*x)
    t.right(beta)
    t.forward(5*x)
    t.right(beta)
    t.forward(6*x)
    t.right(beta)
    t.forward(7*x)
    t.right(beta)
    t.forward(8*x)
    t.right(beta)
```

O resultado é a figura não poligonal, mostrada na Figura 6.

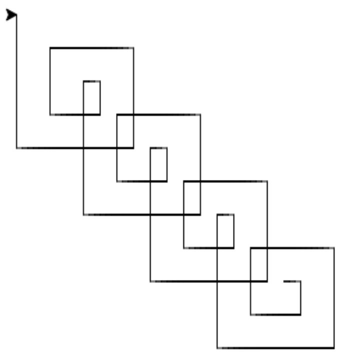


Figura 6 – Quatro ciclos do Espirolateral 8_{90}.

Como observado por Odds, espirolaterais de ordem $4n$, $n = 1, 2, \ldots$, não produzem figuras fechadas, apresentando um padrão que se estende indefinidamente. Já os espirolaterais de ordem $4n - 2$, $n = 1, 2, \ldots$ necessitam de apenas dois ciclos para se fecharem. Para as demais ordens

(exceto as múltiplas de 4), são necessários quatro ciclos para formar uma figura fechada.

Espirolaterais fechados

Na tentativa construir espirolatarais fechados, Krawczyk, (Krawczyk,1999) apresentou a seguinte regra:

Se $\varphi = \theta N k$, *sendo* θ *o ângulo de giro,* N *a ordem do espirolateral e* k *o número de ciclos, então o espirolateral* N_θ *forma um polígono fechado, se:*

(i) φ *for um múltiplo de 360º, distinto de 360º;*

(ii) $k \neq 1$.

De acordo com tal regra, por exemplo, o espirolateral 9_{80} se fechará após dois ciclos, uma vez que $\varphi = 9 \cdot 80° \cdot 1 = 720° = 2 \cdot 360°$, como ilustrado na Figura 7.

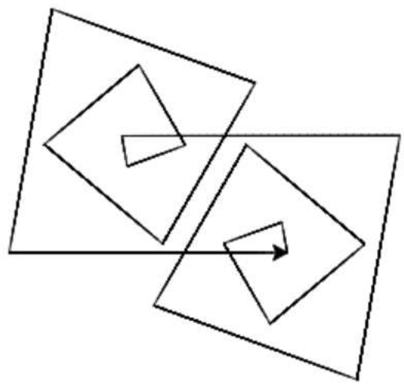


Figura 7 – Dois ciclos do espirolateral 9_{80}.

Podemos nos perguntar sobre a quantidade mínima de ciclos necessários para que um espirolateral seja uma figura fechada. Por exemplo, no caso do espirolateral 3_{120}, temos $\varphi = 3 \cdot 120°\, k = 360°\, k$. Como a regra exige que $k \neq 1$, a quantidade mínima de ciclos para que o espirolateral 3_{120} forme um polígono fechado é de dois ciclos, conforme ilustrado na Figura 8.

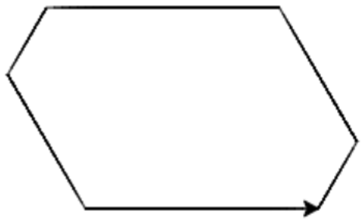
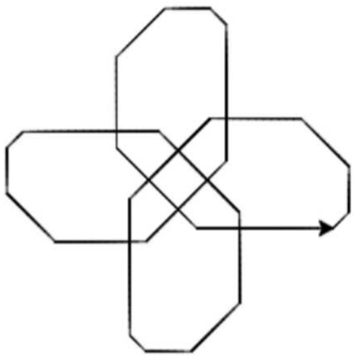


Figura 8 – Dois ciclos do espirolateral 3_{120}.

Similarmente, o espirolateral 6_{135} será uma figura fechada a partir do 4° ciclo, pois φ = 6 · 135° · 4 = 3240° = 9 · 360° (Figura 9).

Figura 9 – Espirolateral 6_{135}, 4 ciclos.



Notemos que a regra de Krawczyk não é sempre válida, pois o espirolateral 8_{90} não corresponde a uma figura fechada apesar, apesar de φ = 8 · 90° = 720° = 2 · 360°. Logo, para θ = 90° usaremos a ideia de Odds e para os demais, usaremos a regra de Krawczyk.

Um contraexemplo para a regra de Krawczyk é dada pelo espirolateral 8_{90}, pois apesar de que φ = 8 · 90° = 720° = 2 · 360°, esse espirolateral não é fechado, como já vimos na Fig. 6.

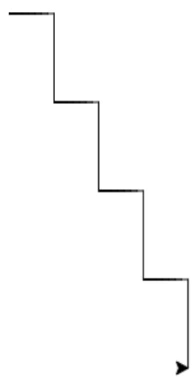
Por outro lado, Odds (Odds, 1973) determinou que, para gerar um espirolateral fechado, é necessário que $\theta = 180\circ/n$, sendo n um divisor natural de 180 . Para testar a regra de Odds, Krawczyk (Krawczyk, 2001) gerou computacionalmente (usando Java) todos os espirolaterais de ângulos $180\circ/2$ a $180\circ/3$, com ordem máxima 10 e máximo de 10 ciclos. Com tais restrições foi possível construir 290 espirolaterais, e destes 133 eram fechados. Ao aplicar sua regra ao experimento anterior, Krawczyk constatou que dos 290 espirolaterais possíveis, 143 respeitavam sua regra e, destes, apenas 10 não eram fechados. Assim, ainda não é possível determinar exatamente quando um espirolateral será uma figura fechada, porém é possível determinar algumas condições que favoreçam o surgimento de espirolaterais fechados (Krawczyk, 2001).

Espirolaterais com giros em diferentes direções

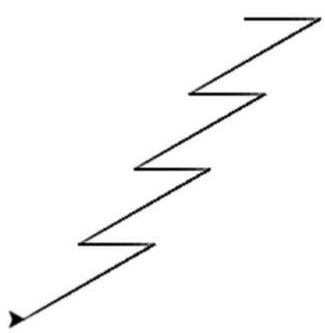
Espirolatareais podem ser construídos usando diferentes direções, mas é necessário que as regras sejam estabelecidas de maneira correta. Para esses espirolaterais que possuem os giros em diferentes direções, definiu a notação ${}^{a}N_{\theta}$, em que apenas o a-nésimo giro é para a esquerda e os demais para a direita. Analogamente, N_{θ}^{a} corresponde a um espirolateral que possui apenas o a-nésimo giro para a direita e os demais para a esquerda.

A seguir, iremos construir alguns espirolaterais que possuem direções distintas para o ângulo de giro:

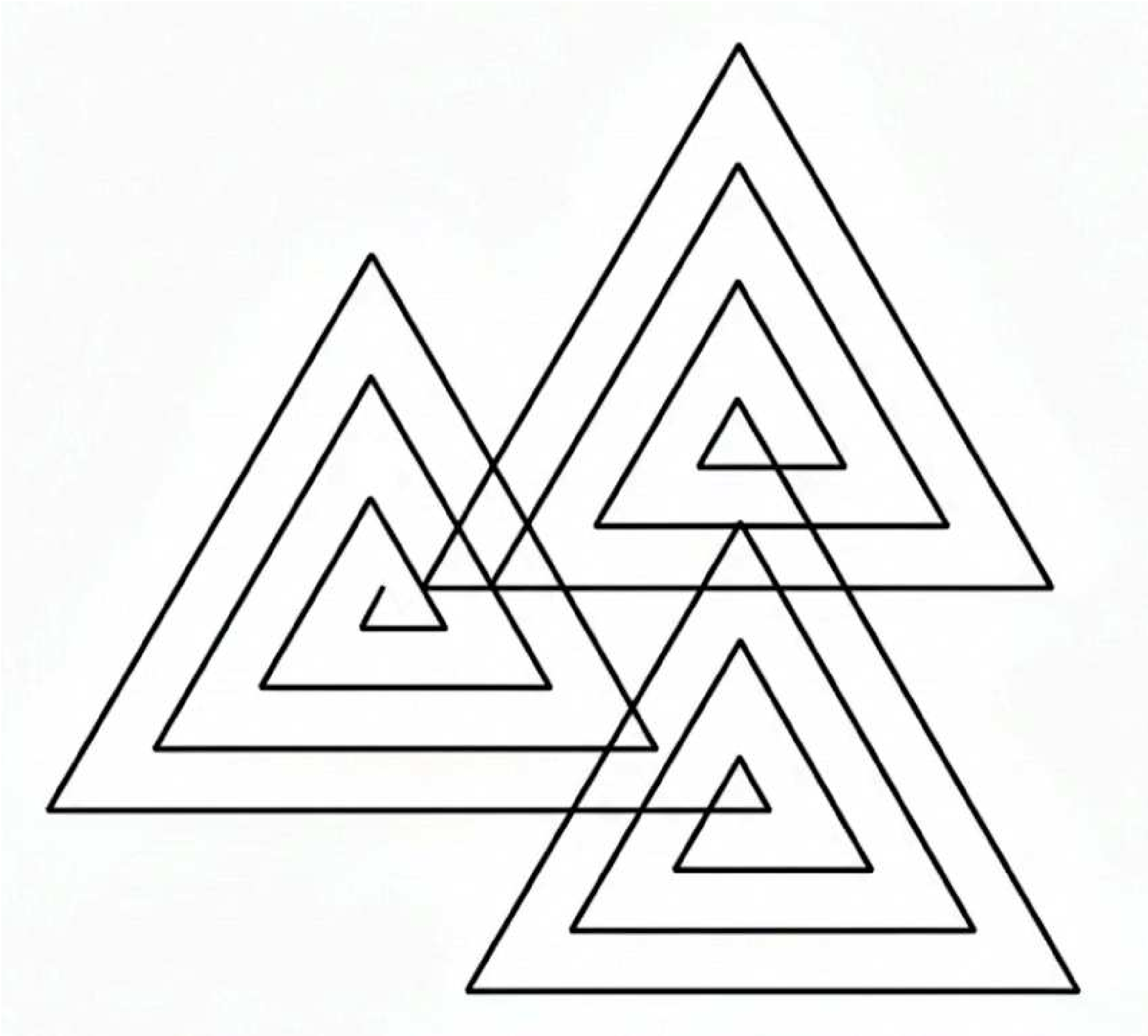
```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
x=10
theta=90
beta=180-theta
k=4
for i in range (k):
  t.forward(x)
  t.right(beta)
  t.forward(2*x)
  t.left(beta)
```



```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
x=10
theta=30
beta=180-theta
k=4
for i in range (k):
  t.forward(x)
  t.right(beta)
  t.forward(2*x)
  t.left(beta)
```



Atividades 6° ano do Ensino Fundamental



As atividades apresentadas neste caderno foram elaboradas para aproximar os estudantes dos conceitos matemáticos por meio da exploração dos espirolaterais. A proposta integra duas abordagens complementares: atividades plugadas utilizando a programação com Python e o módulo Turtle, e atividades desplugadas, realizadas em papel milimetrado, com régua e transferidor. Essa dualidade tem o objetivo de tornar o aprendizado mais acessível e dinâmico, atendendo tanto alunos que dispõem de recursos tecnológicos quanto aqueles que aprendem melhor por meio de atividades práticas e concretas.

É importante destacar que as atividades descritas a seguir são sugestões de modelos que podem servir como ponto de partida para a elaboração de novas propostas pedagógicas, adaptadas às diferentes realidades e necessidades das turmas. Nessa perspectiva, o trabalho manual assume um papel central no processo, pois deve anteceder as atividades computacionais. Essa ordem é fundamental para que os estudantes desenvolvam a percepção espacial, a precisão na medição e a visualização de padrões matemáticos de forma concreta. Ao desenhar figuras, medir ângulos e calcular perímetros e áreas diretamente no papel, o aluno vivencia a matemática como uma prática ativa e investigativa. Além disso, esse contato favorece a compreensão intuitiva dos conceitos, estimula a autonomia e fortalece habilidades essenciais, como a concentração e a organização do raciocínio lógico.

Assim, as atividades aqui propostas não se limitam à aplicação de conteúdos curriculares, mas incentivam a descoberta, a experimentação e a valorização da matemática como uma ciência viva e presente no cotidiano.

6° ano do Ensino Fundamental

ATIVIDADE 1 - Medindo ângulos com espirolaterais: Explorando a geometria na prática

Habilidade da BNCC:

- (EF06MA27) Determinar medidas da abertura de ângulos, por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais.

Objetos de conhecimento:

- Ângulos: noção, usos e medida.

Objetivos da atividade:

- Medir os ângulos dos espirolaterais dados com o auxílio de um transferidor.
- Construir os espirolaterais.

Materiais necessários:

- Lápis
- Régua
- Transferidor

* O professor pode utilizar papel milimetrado, caso esteja disponível, para a realização da atividade.

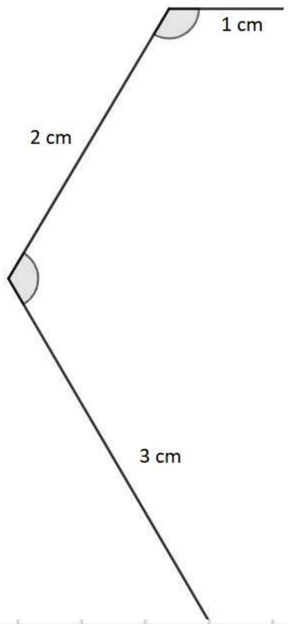
Nome:
Turma:
Data:

1) Analise os espirolaterais abaixo e:

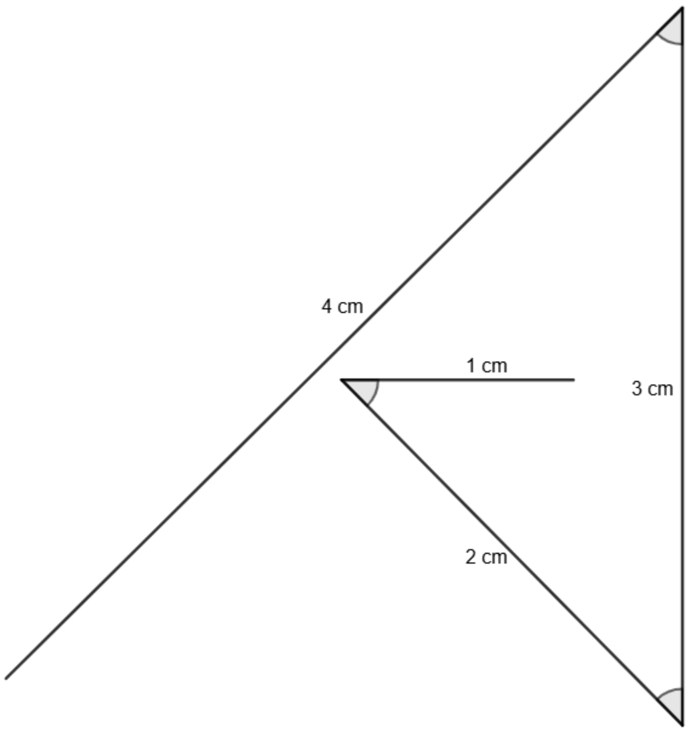
(i) Determine θ usando um transferidor;

(ii) Construa cuidadosamente o espirolateral na área quadriculada indicada, supondo que a medida do lado do quadrado tem dimensão de 1 cm.

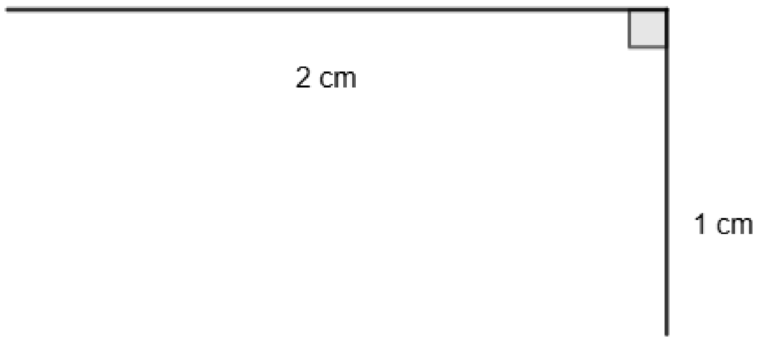
- 3_θ



- 4_θ



- 2_{θ}



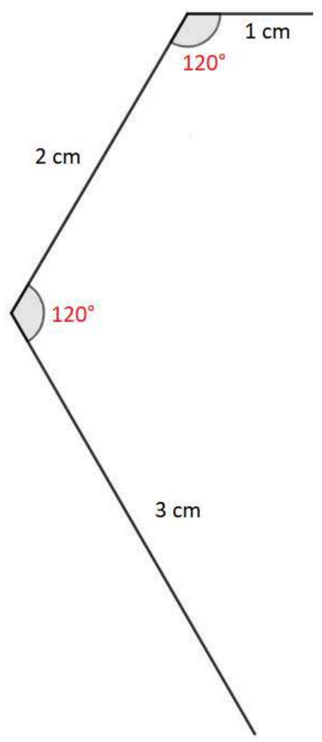
Solução

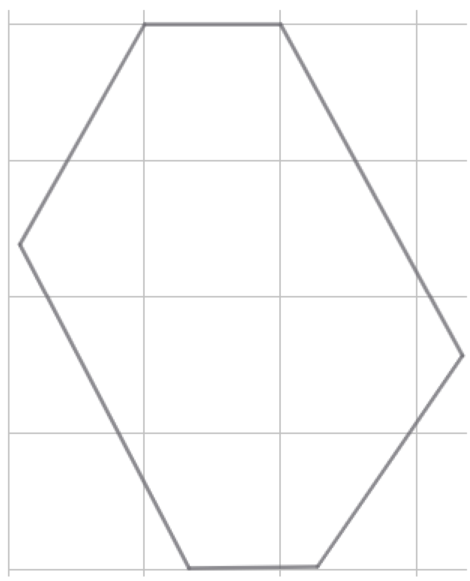
1) Analise os espirolaterais abaixo e:

(i) Determine θ usando um transferidor;

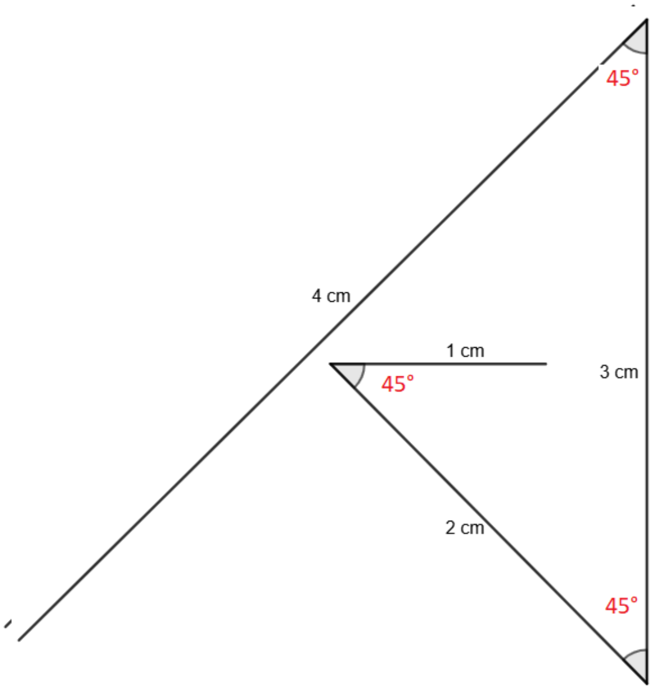
(ii) Construa cuidadosamente o espirolateral na área quadriculada indicada, supondo que a medida do lado do quadrado tem dimensão de 1 cm.

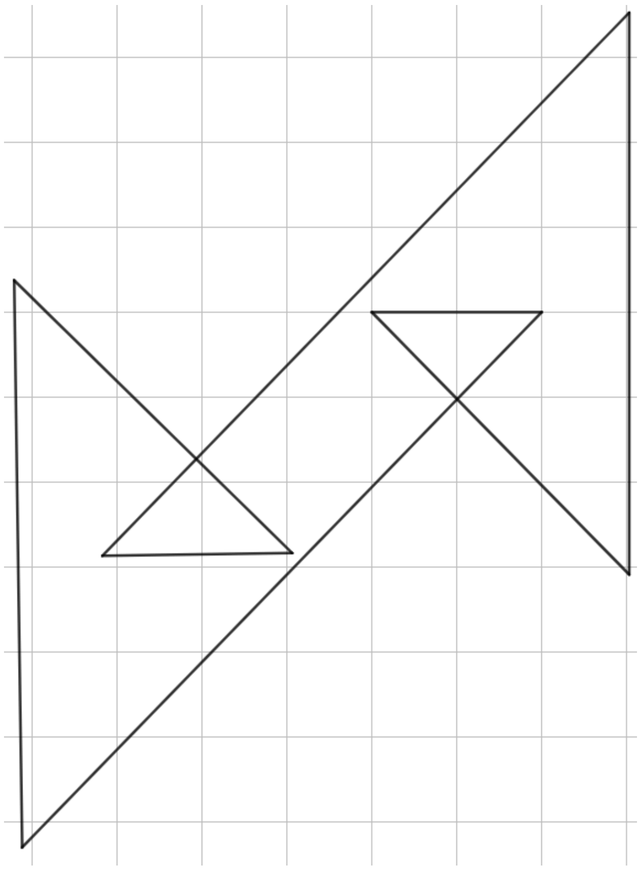
- 3_θ



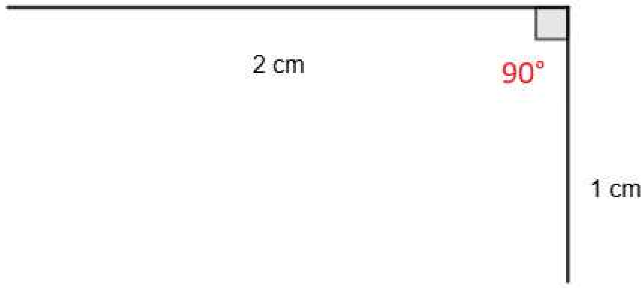


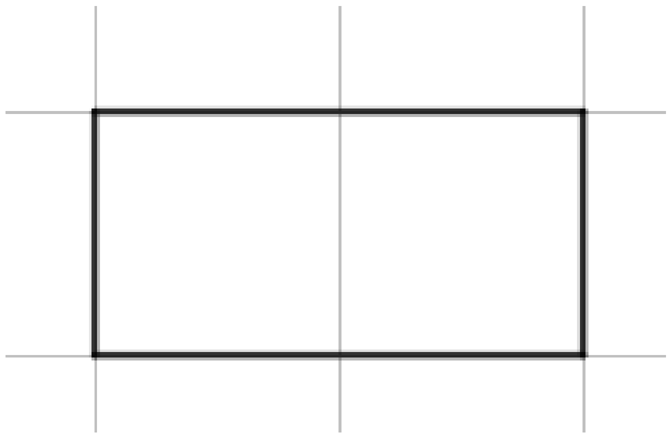
- 4_θ





- 2_{θ}





6° ano do Ensino Fundamental

ATIVIDADE 2 - Espirolaterais em escala: Explorando Perímetros

Habilidade da BNCC:

- (EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.
- (EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

Objetos de conhecimento:

- Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado.
- Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas.

Objetivos da atividade:

- Calcular o perímetro de figuras planas.
- Construir os espirolaterais.

Materiais necessários:

- Lápis
- Régua
- Transferidor

* O professor pode utilizar papel milimetrado, caso esteja disponível, para a realização da atividade.

Nome:	
Turma:	
Data:	

1) Nas malhas quadriculadas abaixo construa os espirolaterais indicados. Use a medida do lado de um quadrado como passo inicial.

a. 2_{90} , 2 ciclos .

b. 2_{60} , 3 ciclos.

c. 2_{45} , 4 ciclos.

2) Nas malhas quadriculadas abaixo construa os espirolaterais indicados. Use a medida dos lados de dois quadrados como passo inicial.

a. 2_{90} , 2 ciclos .

b. 2_{60} , 3 ciclos.

c. 2_{45} , 4 ciclos.

3) Usando as construções anteriores complete a tabela:

Espirolateral	Passo inicial (cm)	Perímetro (cm)
2_{90}, 2 ciclos	1	
2_{90}, 2 ciclos	2	
2_{60}, 3 ciclos	1	
2_{60}, 3 ciclos	2	
2_{45}, 4 ciclos	1	
2_{45}, 4 ciclos	2	

4) Responda:

a) O que mudou do perímetro das figuras quando o comprimento do passo inicial mudou?

____

____

____

b) Qual será o perímetro de cada um dos espirolaterais caso o passo inicial seja 6 cm?

____

____

____

c) Para que o perímetro do espirolateral 2_{45} seja 320 cm qual deverá ser a medida do passo inicial?

____

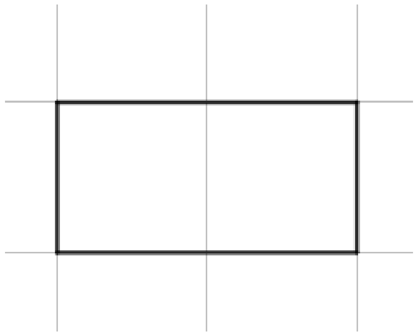
____

____

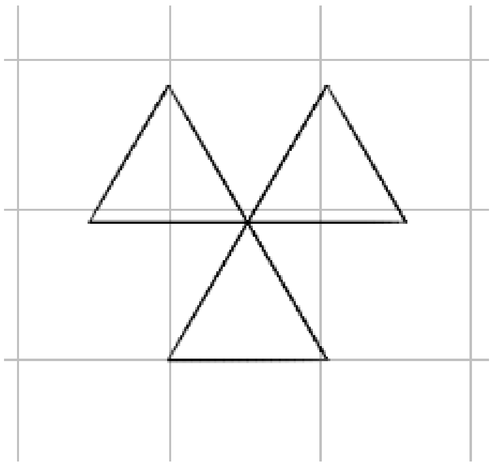
Solução

1) Nas malhas quadriculadas abaixo construa os espirolaterais indicados. Use a medida do lado de um quadrado como passo inicial.

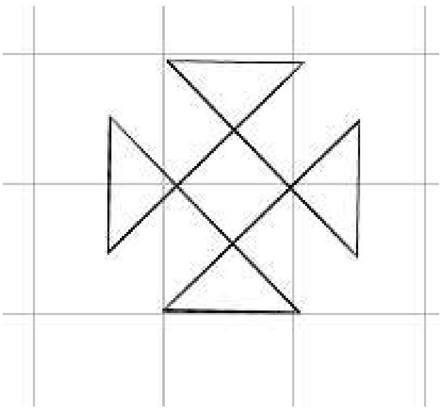
a. 2_{90} , 2 ciclos .



b. 2_{60} , 3 ciclos.

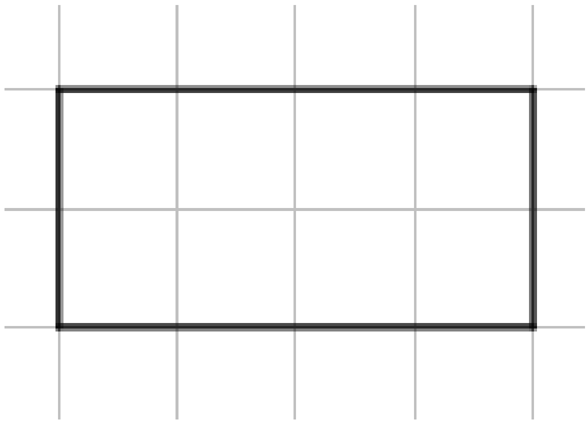


c. 2_{45} , 4 ciclos.

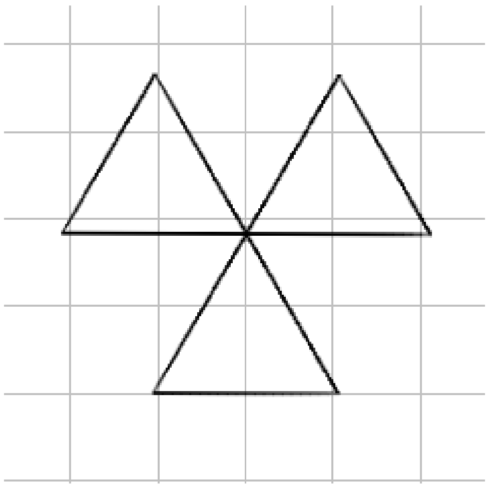


2) Nas malhas quadriculadas abaixo construa os espirolaterais indicados. Use a medida dos lados de dois quadrados como passo inicial.

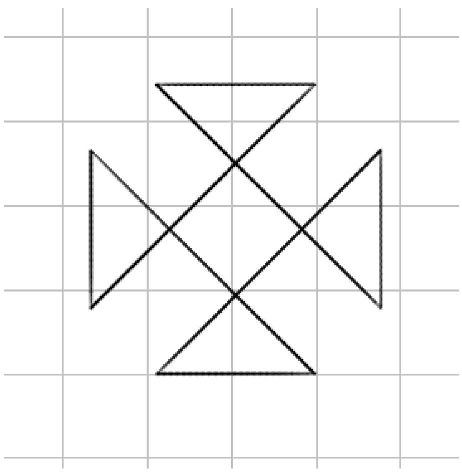
a. 2_{90} , 2 ciclos .



b. 2_{60} , 3 ciclos.



c. 2_{45} , 4 ciclos



3) Complete a tabela:

Espirolateral	Passo inicial (cm)	Perímetro (cm)
$2_{90'}$ 2 ciclos	1	6
$2_{90'}$ 2 ciclos	2	12
$2_{60'}$ 3 ciclos	1	18
$2_{60'}$ 3 ciclos	2	36
$2_{45'}$ 4 ciclos	1	40
$2_{45'}$ 4 ciclos	2	80

4) Responda:

a) O que mudou do perímetro das figuras quando o comprimento do passo inicial mudou?

O valor do perímetro foi multiplicado pelo valor do passo inicial do espirolateral, por exemplo quando o passo inicial unidade do espirolateral 2_{90} era 1 cm o seu perímetro era 6 cm, quando dobrou (2 cm) o perímetro dobrou junto (12 cm).

b) Qual será o perímetro de cada um dos espirolaterais caso o passo inicial seja 6 cm?

seja 6 un?

- 2_{90}: 36 cm
- 2_{60}: 108 cm
- 2_{45}: 240 cm

c) Para que o perímetro do espirolateral 2_{45} seja 320 cm qual deverá ser a medida do passo inicial?

Sabemos que quando o passo inicial do espirolateral 2_{45} é 1 cm, seu perímetro é 40 cm. Note que 320 cm = 8 × 40 cm, assim o passo inicial que queremos é 8 un.

6° ano do Ensino Fundamental

ATIVIDADE 3 - Explorando formas: Espirolaterais e lógica de programação.

Habilidade da BNCC Computação:

- (EF06CO02) Elaborar algoritmos que envolvam instruções sequenciais, de repetição e de seleção usando uma linguagem de programação;
- (EF06CO03) Descrever com precisão a solução de um problema, construindo o programa que implementa a solução descrita

Objetos de conhecimento:

- Linguagem de programação.

Objetivos da atividade:

- Determinar os códigos para a construção dos espirolateral propostos.

Materiais necessários:

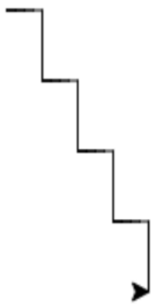
- Navegador online

* O professor pode utilizar papel milimetrado, caso esteja disponível, para a realização da atividade.

Nome:	
Turma:	
Data:	

Observe as linhas de códigos para a construção do espirolateral 2^{1}_{90} , 4 ciclos:

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
x=10
theta=90
beta=180-theta
k=4
for i in range (k):
  t.forward(x)
  t.right(beta)
  t.forward(2*x)
  t.left(beta)
```



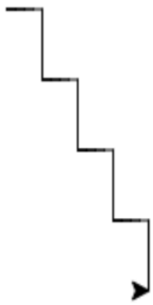
Desenvolva baseado no código acima, códigos para os seguintes espirolaterias:

- 2^{1}_{45} , 4 ciclos.
- 3^{2}_{90} , 4 ciclos.
- $4^{1,3}_{30}$, 2 ciclos.
- ${}^{1,5}5_{15}$, 2 ciclos.

Solução

Observe as linhas de códigos para a construção do espirolateral 2^{1}_{90}, 4 ciclos:

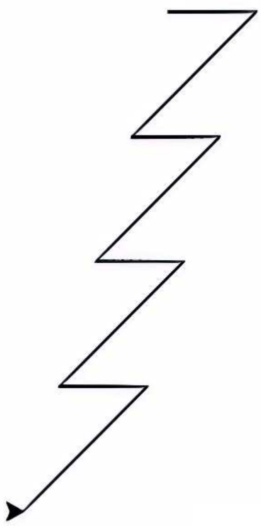
```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
x=10
theta=90
beta=180-theta
k=4
for i in range (k):
  t.forward(x)
  t.right(beta)
  t.forward(2*x)
  t.left(beta)
```



Desenvolva baseado no código acima, códigos para os seguintes espirolaterias:

- 2^{1}_{45}, 4 ciclos.

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
x=10
theta=45
beta=180-theta
k=4
for i in range (k):
  t.forward(x)
  t.right(beta)
  t.forward(2*x)
  t.left(beta)
```

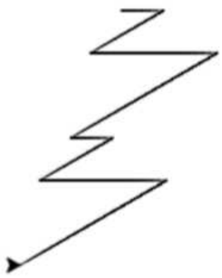


- 3^{2}_{90} , 4 ciclos.

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
x=20
theta=90
beta=180-theta
k=4
for i in range (k):
  t.forward(x)
  t.left(beta)
  t.forward(2*x)
  t.right(beta)
  t.forward(3*x)
  t.left(beta)
```

- $4^{1,3}_{30}$, 2 ciclos.

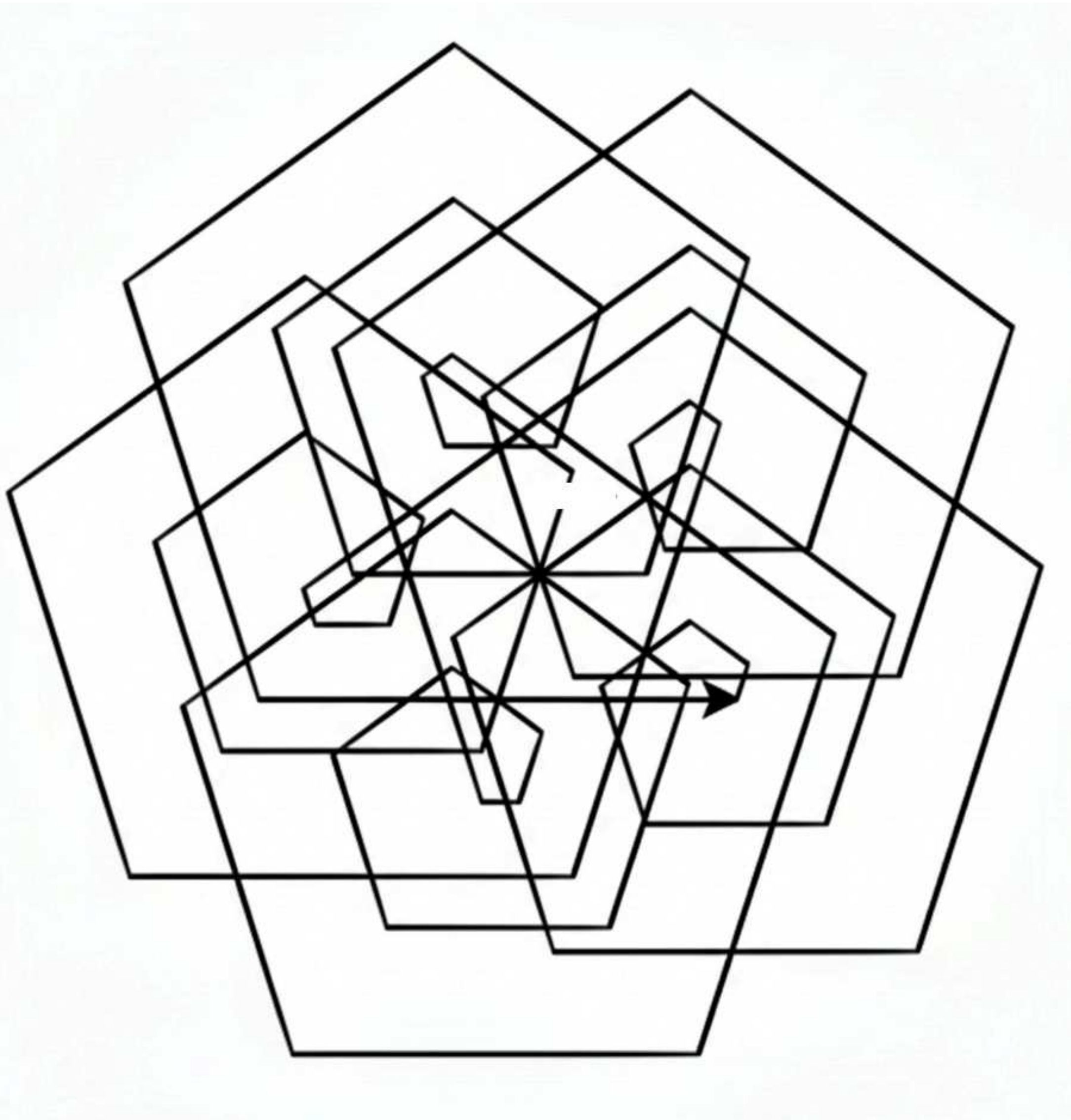
```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
x=10
theta=30
beta=180-theta
k=2
for i in range (k):
  t.forward(x)
  t.right(beta)
  t.forward(2*x)
  t.left(beta)
  t.forward(3*x)
  t.right(beta)
  t.forward(4*x)
  t.left(beta)
```



- ${}^{1,5}5_{15}$, 2 ciclos.

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
x=20
theta=15
beta=180-theta
k=2
for i in range (k):
  t.forward(x)
  t.left(beta)
  t.forward(2*x)
  t.left(beta)
  t.forward(3*x)
  t.right(beta)
  t.forward(4*x)
  t.right(beta)
  t.forward(5*x)
  t.right(beta)
```

Atividades 7º ano do Ensino Fundamental



7° ano do Ensino Fundamental

ATIVIDADE 4 - Espirolaterais e números: Desvendando os múltiplos.

Habilidade da BNCC:

- (EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.

Objetos de conhecimento:

- Múltiplos e divisores de um número natural.

Objetivos da atividade:

- Calcular o mínimo múltiplo comum entre dois números e empregar esse conceito na regra de Krawczyk.

Materiais necessários:

- Lápis
- Transferidor
- Navegador online

* O professor pode utilizar papel milimetrado, caso esteja disponível, para a realização da atividade.

Nome:	
Turma:	
Data:	

1) Dados os espirolaterais abaixo, determine quais satisfazem a regra de Krawczyk:

a) 2_{60}, 3 ciclos.

b) 2_{45}, 4 ciclos.

2) Sabendo que todos os espirolaterais abaixo são polígonos, determine o valor de k para que θ seja um múltiplo de 360°:

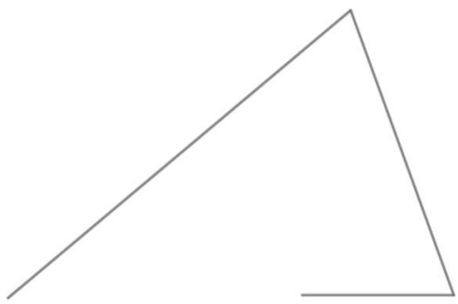
a) 3_{80}, k ciclos.

b) 3_{18}, k ciclos.

c) 4_{20}, k ciclos.

d) 4_{10}, k ciclos.

3) Observe o primeiro ciclo do espirolateral abaixo e determine:



a) Qual é a ordem do espirolateral?

b) Qual é o seu ângulo de rotação (utilize um transferidor)?

c) Qual o número mínimo de ciclos para o espirolateral ser um polígono?

d) Implemente as informações anteriores no Python Sandbox.

Solução

1) Dados os espirolaterais abaixo, determine quais satisfazem a regra de Krawczyk:

Seja N_{θ}, um espirolateral, constituído por um número k de ciclos. A regra de Krawczyk diz que se $\varphi = \theta \cdot N \cdot k$ for um múltiplo de 360° diferente de 360° e $k \neq 1$, então $N\theta$ será fechado.

a) 2_{60}, 3 ciclos.

$\varphi = 60° \times 2 \times 3 = 360°$, logo o espirolateral não satisfaz a regra de Krawczyk.

b) 2_{45}, 4 ciclos.

$\varphi = 45° \times 2 \times 4 = 360°$, logo o espirolateral não satisfaz a regra de Krawczyk.

2) Sabendo que todos os espirolaterais abaixo são polígonos, determine o valor de k para que θ seja um múltiplo de 360°:

a) 3_{80}, k ciclos.

De acordo com a regra, temos que $\varphi = 80° \times 3 \times k = 240°k$. Queremos que φ seja um múltiplo de 360°, assim deveremos determinar o mínimo múltiplo comum entre φ e 360°, logo $mmc(360°, 240°k) = 720°k$. Dividindo 720°k por 240°k, chegamos que k = 3.

b) 3_{18}, k ciclos.

De acordo com a regra, temos que $\varphi = 18° \times 2 \times k = 54°k$. Queremos que φ seja um múltiplo de 360°, assim deveremos determinar o mínimo múltiplo comum entre φ e 360°, logo $mmc(360°, 54°k) = 1080°k$. Dividindo 1080°k por 54°k, chegamos que k = 20.

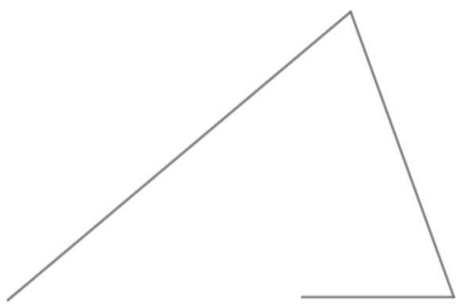
c) 4_{20}, k ciclos.

De acordo com a regra, temos que $\varphi = 20° \times 4 \times k = 80°k$. Queremos que φ seja um múltiplo de 360°, assim deveremos determinar o mínimo múltiplo comum entre φ e 360°, logo $mmc(360°, 80°k) = 720°k$. Dividindo 720°k por 80°k, chegamos que k = 9.

d) 4_{10}, k ciclos.

De acordo com a regra, temos que $\varphi = 10° \times 4 \times k = 40°k$. Queremos que φ seja um múltiplo de 360°, assim deveremos determinar o mímimo múltiplo comum entre φ e 360°, logo $mmc(360°, 40°k) = 360°k$. Dividindo 360°k por 40°k, chegamos que k = 9.

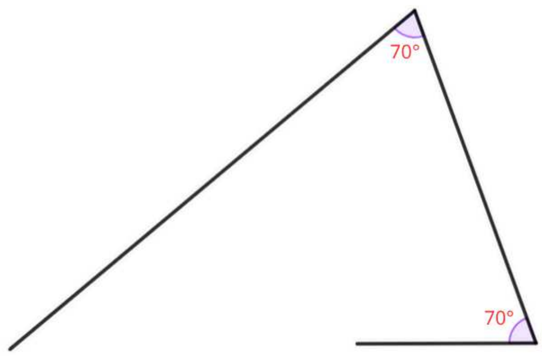
3) Observe o primeiro ciclo do espirolateral abaixo e determine:



a) Qual é a ordem do espirolateral?

A ordem do espirolateral é 3.

b) Qual é o seu ângulo de rotação (use um transferidor)?

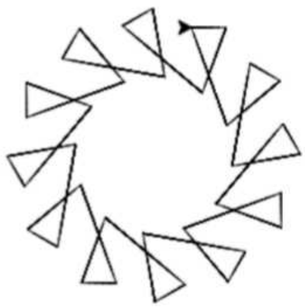


c) Qual o número mínimo de ciclos para o espirolateral ser um polígono?

De acordo com a regra, temos que $\varphi = 70° \times 3 \times k = 210°k$. Queremos que φ seja um múltiplo de 360°, assim deveremos determinar o mínimo múltiplo comum entre φ e 360°, logo $mmc(360°, 210°k) = 2520°k$. Dividindo 2520°k por 210°k, chegamos que k = 12.

d) Implemente as informações anteriores no Python Sandbox.

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
k=12
x=25
theta=70
beta=180-theta
for i in range(k):
  t.forward(x)
  t.right(beta)
  t.forward(2*x)
  t.right(beta)
  t.forward(3*x)
  t.right(beta)
```



7° ano do Ensino Fundamental

ATIVIDADE 5 - Espirolaterais e áreas: Calculando com triângulos e paralelogramos.

Habilidade da BNCC:

- (EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.
- (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.

Objetos de conhecimento:

- Cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros

Objetivos da atividade:

- Calcular a área de figuras planas, decompondo-as em triângulos e paralelogramos.

Materiais necessários:

- Lápis
- Régua
- Transferidor

* O professor pode utilizar papel milimetrado, caso esteja disponível, para a realização da atividade.

Nome:
Turma:
Data:

1) Construa os espirolaterais na malha quadriculada abaixo. Em seguida determine sua área através da decomposição em triângulos e quadriláteros. Use um passo inicial de 1 cm.

a) 1_{90} , 4 ciclos.

b) 3_{90} , 4 ciclos.

2. Construa os espirolaterais abaixo, em seguida determine sua área através da decomposição em triângulos e quadriláteros. Use o passo inicial de 2 cm.

a) 1_{90} , 4 ciclos.

b) 3_{90} , 4 ciclos.

3) Complete a tabela:

Espirolateral	Área com passo inicial de 1 cm	Área com passo inicial de 2 cm
1_{90}, 4 ciclos		
3_{90}, 4 ciclos		

4) Responda:

a) O que aconteceu com as áreas dos espirolaterais ao mudarmos o passo inicial de 1 cm para 2 cm?

____

____

____

b) Se mudássemos o passo inicial para 4 cm qual seria a nova área de cada um dos espirolaterais anteriores?

____

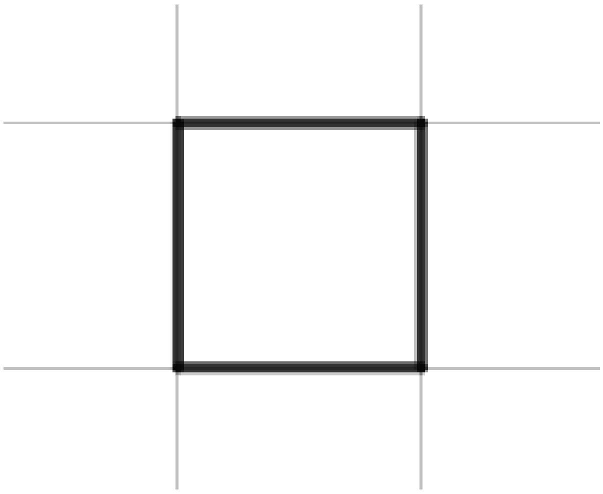
____

____

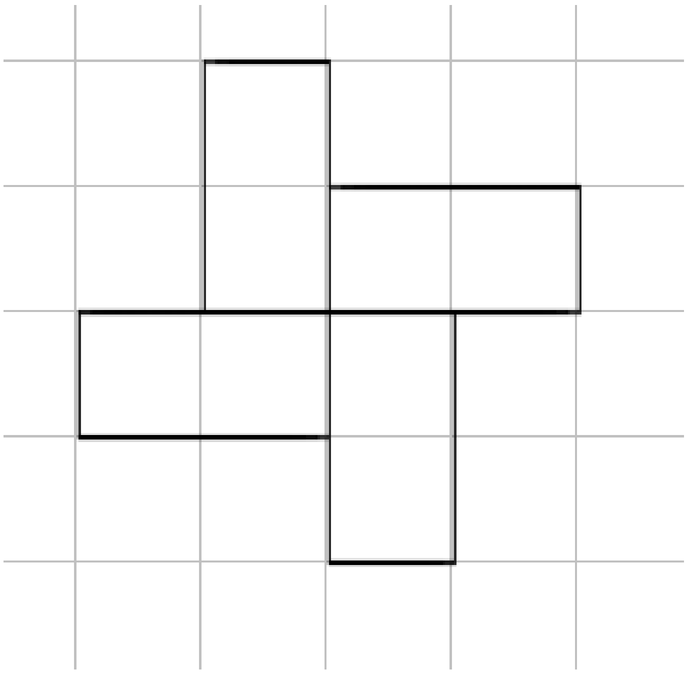
Solução

1) Construa os espirolaterais na malha quadriculada abaixo. Em seguida determine sua área através da decomposição em triângulos e quadriláteros. Use um passo inicial de 1 cm.

a) 1_{90} , 4 ciclos.

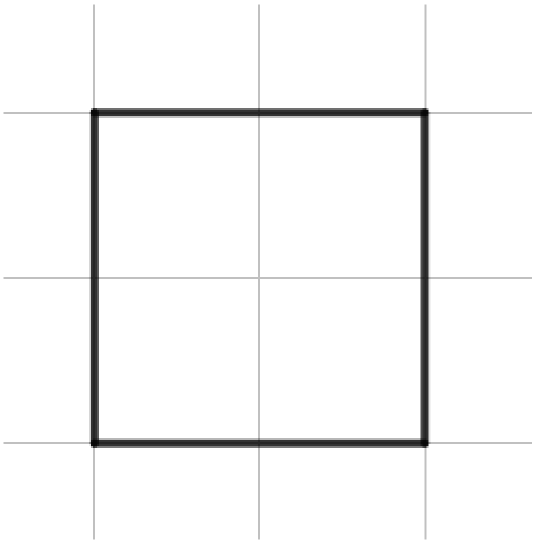


b) 3_{90} , 4 ciclos.

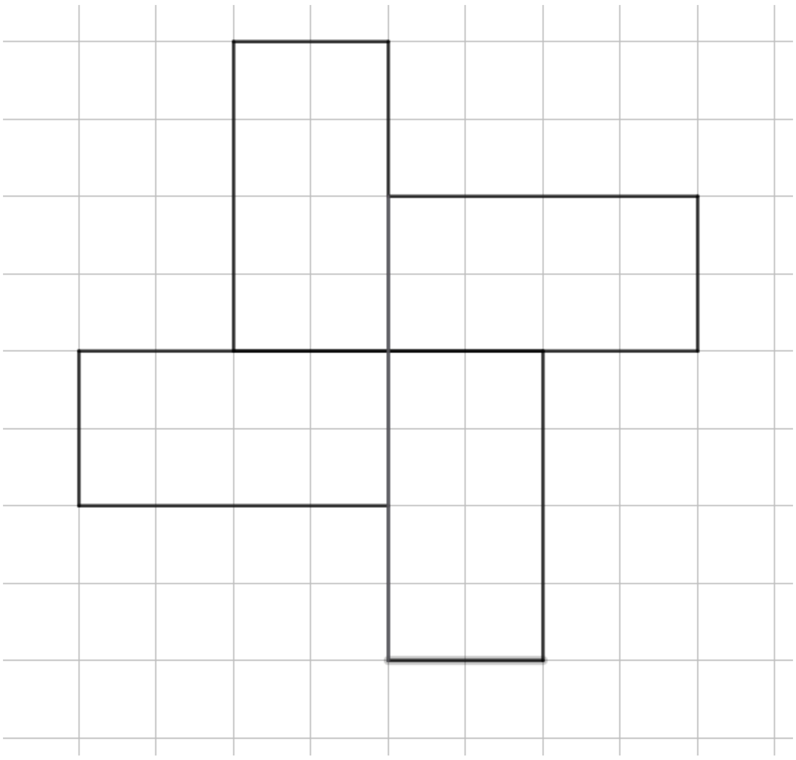


1) Construa os espirolaterais na malha quadriculada abaixo. Em seguida determine sua área através da decomposição em triângulos e quadriláteros. Use um passo inicial de 2 cm.

a) 1_{90} , 4 ciclos.



b) 3_{90} , 4 ciclos.



3) Complete a tabela:

Espirolateral	Área com passo inicial de 1 cm	Área com passo inicial de 2 cm
1_{90}, 4 ciclos	1 cm^2	4 cm^2
3_{90}, 4 ciclos	8 cm^2	32 cm^2

4) Responda:

a) O que aconteceu com as áreas dos espirolaterais ao mudarmos o passo inicial de 1 cm para 2 cm?

Como nossos espirolaterais eram construídos apenas por retângulos, temos que a área do retângulo é dada por base × altura, assim se os comprimentos duplicam a área quadruplica pois será multiplicada pelo "dobro do dobro" ou seja 2^2

b) Se mudássemos o passo inicial para 4 cm qual seria a nova área de cada um dos espirolaterais anteriores?

Como nossos espirolaterais eram construídos apenas por retângulos, temos que a área do retângulo é dada por base × altura, assim se os comprimentos quadruplicam a área multiplicada pelo "quádruplo do quádruplo" ou seja $4^2 = 16$.

- 1_{90}, 4 ciclos: 16 cm^2
- 3_{90}, 4 ciclos: 128 cm^2

7° ano do Ensino Fundamental

ATIVIDADE 6 - Espirais do código: Detectando erros em programas.

Habilidade da BNCC COMPUTAÇÃO

- (EF07CO02) Analisar programas para detectar e remover erros, ampliando a confiança na sua correção.

Objetos de conhecimento:

- Análise de programas.

Objetivos da atividade:

- Determinar e concertar os erros nos códigos propostos..

Materiais necessários:

- Navegador online

* O professor pode utilizar papel milimetrado, caso esteja disponível, para a realização da atividade.

Nome:
Turma:
Data:

1) Os programas abaixo contêm erros. Identifique-os e corrija-os para que possam ser executados no Python Sandbox, gerando os respectivos espirolaterais.

a) 3_{90} , 4 ciclos.

```
import turtle
t turtle.            Turtle()
k = 4
x 25
theta



        =90
bheta=180-theta
for i in range(k):
    t.forward(x)


    t.right(beta)    t.forward(2x)
    t.right(beta)


    t.forward(3x)


t.right(beta)
```

b) 2_{90} , 4 ciclos.

```
import turtlee
t = turtle.Turtle()
k==2
x=25

theta==

90
beta=180-thetha
for i in range(k):
    t.forward(x)


t.right(beta)



    t.forward(2*y)
    t.right(beta)
```

c) 3^{2}_{67} , 4 ciclos.

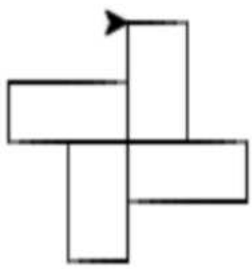
```
inport turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
treset()
x=10
theta=67
beta=180-t heta
k=4
for i in range (k,):
t.forward(Y)
t.leaft(beta)  t.forward(2*x)  t.rigt(beta)

  t.forward(3*X)
  t.left(beta)
```

Solução

1) Os programas abaixo contêm erros. Identifique-os e corrija-os para que possam ser executados no Python Sandbox, gerando os respectivos espirolaterais.

a) 3_{90} , 4 ciclos.

```
import turtle
t=turtle.Turtle()
k = 4
x=25
theta=90
beta=180-theta
for i in range(k):
    t.forward(x)
    t.right(beta)
    t.forward(2*x)
    t.right(beta)
    t.forward(3*x)
    t.right(beta)
```

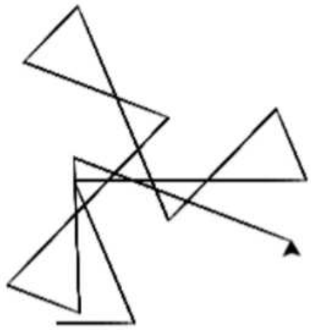


b) 2_{90} , 4 ciclos.

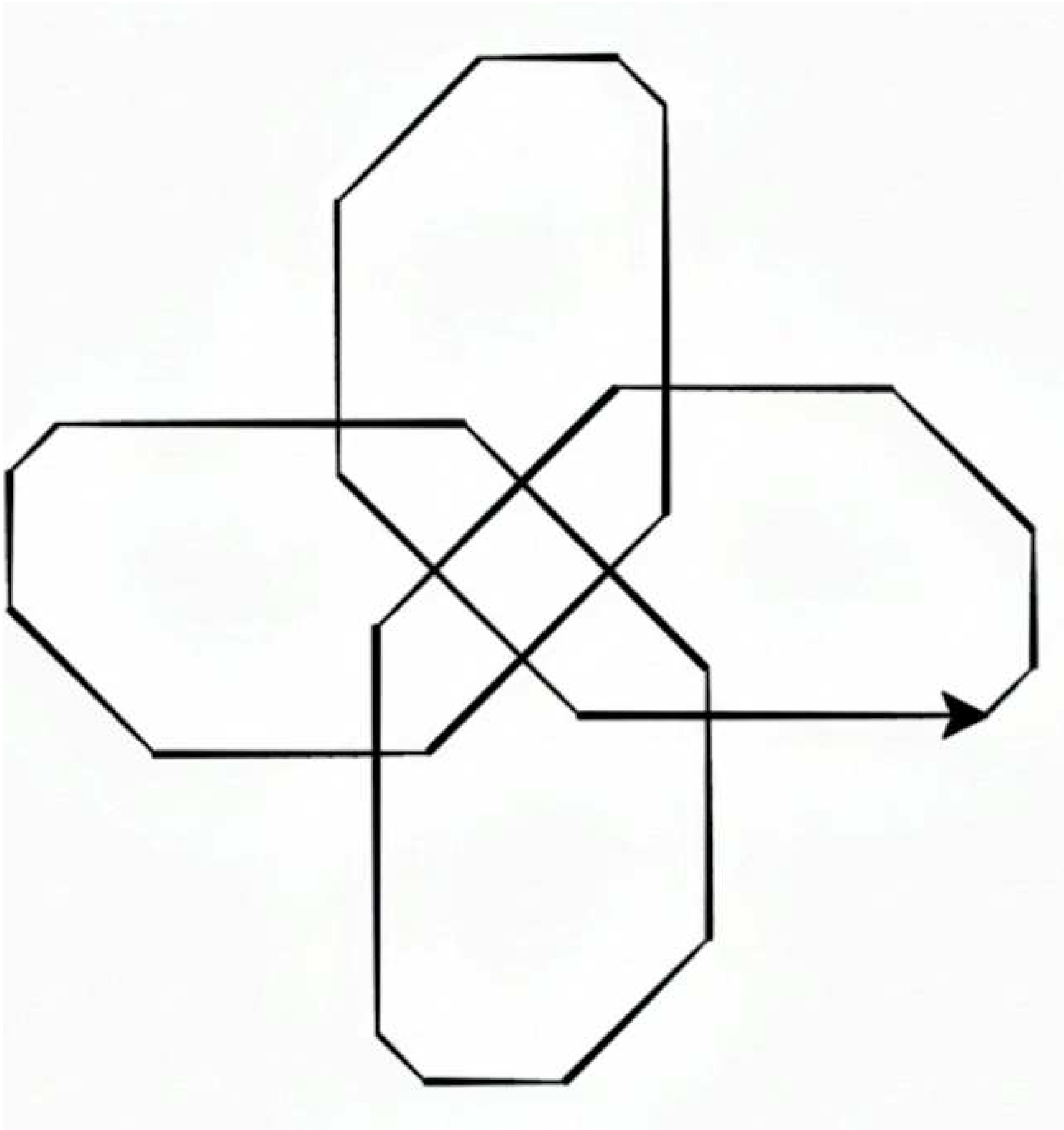
```
import turtle
t = turtle.Turtle()
k=2
x=25
theta=90
beta=180-theta
for i in range(k):
    t.forward(x)
    t.right(beta)
    t.forward(2*x)
    t.right(beta)
```

c) 3^{2}_{67} , 4 ciclos.

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
x=10
theta=67
beta=180-theta
k=4
for i in range (k):
  t.forward(x)
  t.left(beta)
  t.forward(2*x)
  t.right(beta)
  t.forward(3*x)
  t.left(beta)
```



Atividades 8º ano do Ensino Fundamental



ATIVIDADE 7 - Espirolaterais e expressões algébricas: Calculando com criatividade.

Habilidade da BNCC:

- (EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

Objetos de conhecimento:

- Valor numérico de expressões algébricas.

Objetivos da atividade:

- Substituir o valor numérico em uma expressão algébrica.

Materiais necessários:

- Lápis
- Navegador Online

* O professor pode utilizar papel milimetrado, caso esteja disponível, para a realização da atividade.

Nome:
Turma:
Data:

1) Complete o algoritmo com o valor correspondente:

a) 2_{60}, 3 ciclos.

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
x=10
theta=60
beta=180-theta
k=3
for i in range (k):
  t.forward(x)
  t.right(beta)
  t.forward(2*x)
  t.left(beta)
```

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
for i in range (   ):
  t.forward(   )
  t.right(   )
  t.forward(   )
  t.left(   )
```

b) 4_{50}, 9 ciclos.

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
x=10
theta=50
beta=180-theta
k=9
for i in range (k):
  t.forward(x)
  t.right(beta)
  t.forward(2*x)
  t.left(beta)
   t.forward(3*x)
  t.left(beta)
   t.forward(4*x)
  t.left(beta)
```

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
for i in range (   ):
  t.forward(   )
  t.right(   )
  t.forward(   )
  t.left(   )
   t.forward(   )
  t.left(   )
   t.forward(   )
  t.left(beta)
```

c) 3_{90}, 4 ciclos.

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
x=10
theta=90
beta=180-theta
k=4
for i in range (k):
  t.forward(x)
  t.right(beta)
  t.forward(2*x)
  t.left(beta)
   t.forward(3*x)
  t.left(beta)
```

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
for i in range (    ):
  t.forward(    )
  t.right(    )
  t.forward(    )
  t.left(    )
   t.forward(    )
  t.left(    )
```

2) Construa os espirolaterais anteriores no Python Sandbox.

Solução

1) Complete o algoritmo com o valor correspondente:

a) $2\frac{1}{60}$, 3 ciclos.

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
x=10
theta=60
beta=180-theta
k=3
for i in range (k):
  t.forward(x)
  t.right(beta)
  t.forward(2*x)
  t.left(beta)
```

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
for i in range ( 3 ):
  t.forward( 10 )
  t.right(120)
  t.forward( 20 )
  t.left(120)
```

b) $4\frac{1}{50}$ com nove ciclos.

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
x=10
theta=50
beta=180-theta
k=9
for i in range (k):
  t.forward(x)
  t.right(beta)
  t.forward(2*x)
  t.left(beta)
   t.forward(3*x)
  t.left(beta)
   t.forward(4*x)
  t.left(beta)
```

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
for i in range ( 9 ):
  t.forward( 10 )
  t.right( 130 )
  t.forward( 20 )
  t.left( 130 )
   t.forward( 30 )
  t.left( 130 )
   t.forward( 40 )
  t.left( 130 )
```

c) 3^{1}_{90} , 4 ciclos.

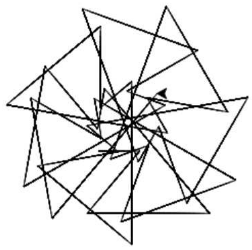
```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
x=10
theta=90
beta=180-theta
k=4
for i in range (k):
  t.forward(x)
  t.right(beta)
  t.forward(2*x)
  t.left(beta)
   t.forward(3*x)
  t.left(beta)
```

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
for i in range ( 4 ):
  t.forward( 10 )
  t.right( 90 )
  t.forward( 20 )
  t.left( 90 )
   t.forward( 30 )
  t.left( 90  )
```

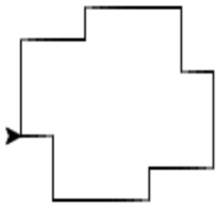
2) Construa os espirolaterais anteriores no Python Sandbox.

- 2_{60}, 3 ciclos.

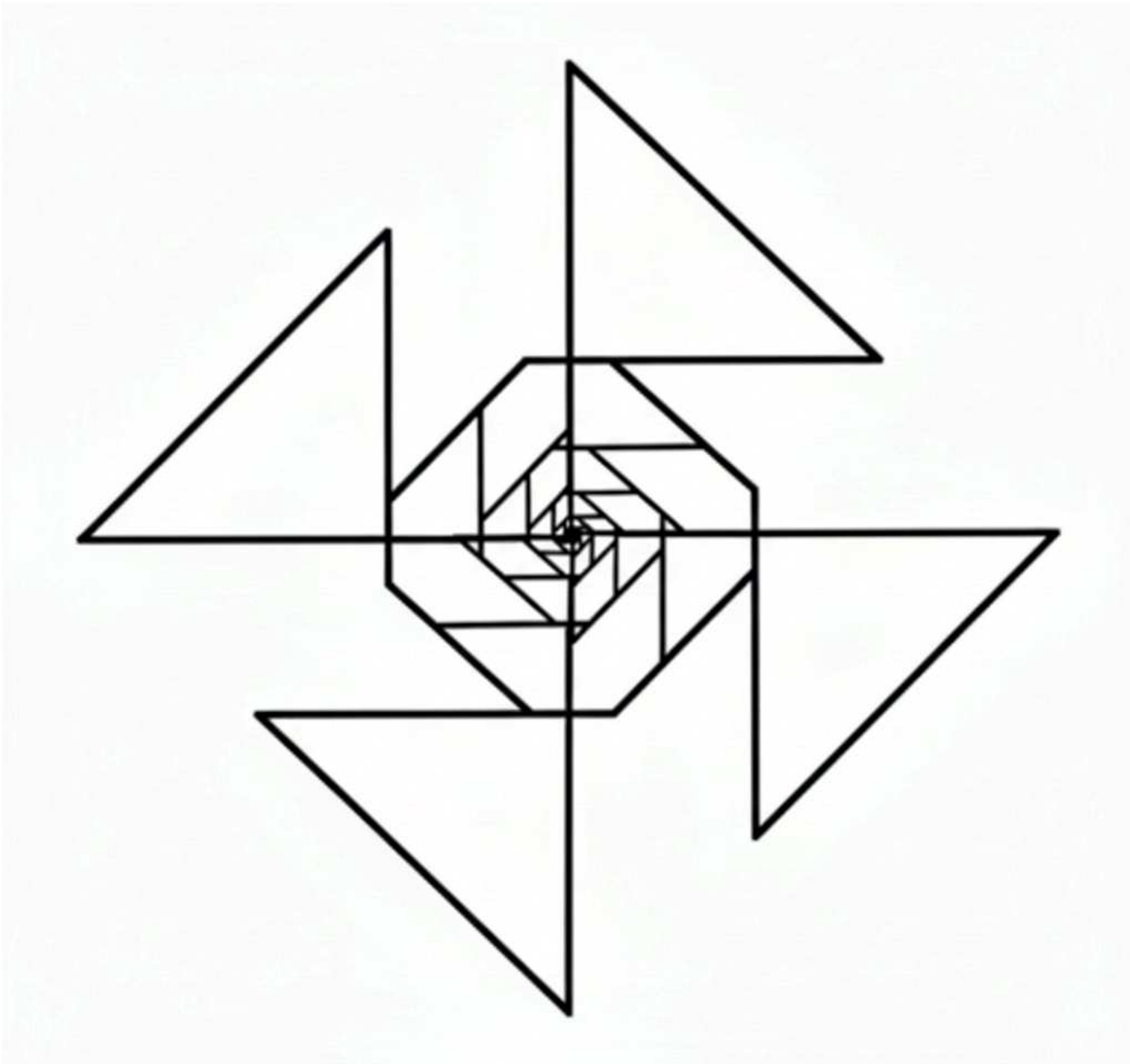
- 4_{50} , 9 ciclos.



- c) 3_{90} , 4 ciclos.



Atividades 9º ano do Ensino Fundamental



9° ano do Ensino Fundamental

ATIVIDADE 8 - Espirolaterais no plano: Explorando distâncias .

Habilidade da BNCC:

- (EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

Objetos de conhecimento:

- Distância entre pontos no plano cartesiano.

Objetivos da atividade:

- Determinar o ponto médio de um segmento de espirolateral.
- Determinar as coordenadas de um espirolateral.
- Determinar o tamanho de unidade de um espirolateral.

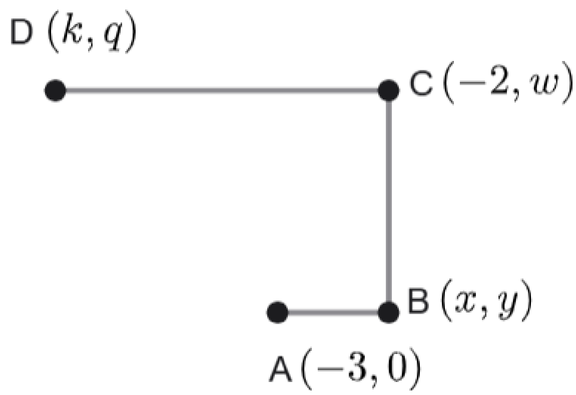
Materiais necessários:

- Lápis
- Régua
- Transferidor
- Navegador online

* O professor pode utilizar papel milimetrado, caso esteja disponível, para a realização da atividade.

Nome:	
Turma:	
Data:	

1. Observe o primeiro ciclo do espirolateral 3_{90} abaixo e responda:



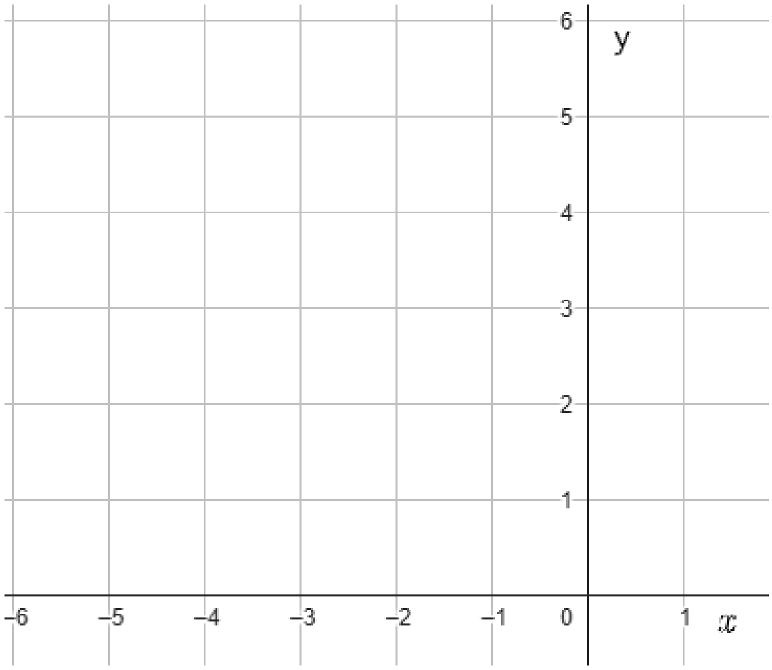
a) Determine as coordenadas dos pontos B,C e D. Considere 1 cm como a do passo inicial.

____

____

____

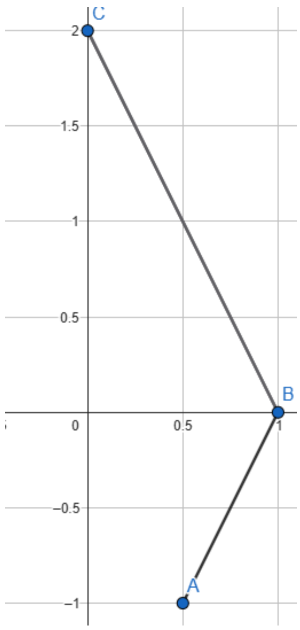
b) De acordo com a regra do espirolateral, construa-o em um plano cartesiano e determine os seus vértices.



c) Qual o ponto médio dos segmentos AB, BC e CD?

---

2. Observe o primeiro ciclo do espirolateral 2_{127} ilustrado abaixo e determine:

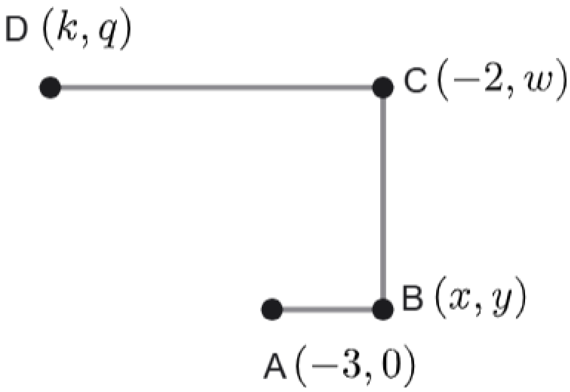


a) A unidade do passo inicial.

b) Construa o espirolateral no Python Sandbox.

Solução

1. Observe o primeiro ciclo do espirolateral 3_{90}abaixo e responda:



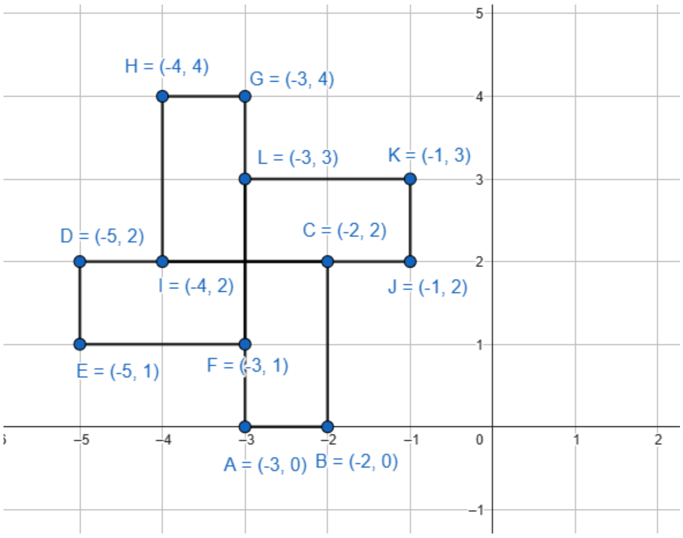
a) Determine as coordenadas dos pontos B,C e D. Considere 1 cm como a medida da unidade.

Sabemos que a unidade do espirolateral é 1 cm e que o ângulo de rotação é 90°. Assim, AB = 1, BC = 3.

- $x - (-3) = 1 \Leftrightarrow x =- 2;$
- $y - 0 = 0 \Leftrightarrow y = 0;$
- $w - 0 = 2 \Leftrightarrow w = 2;$
- $k - (-2) = 3 \Leftrightarrow k =- 5;$
- $q - 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2.$

Dessa forma, as coordenadas que queremos são B(-2,0), C(-2,2), D(-5,2)

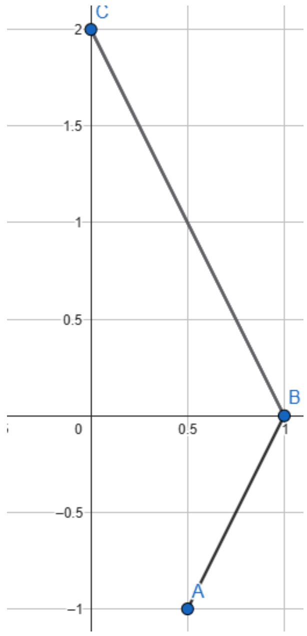
b) De acordo com a regra do espirolateral, construa-o em um plano cartesiano e determine os seus vértices.



c) Qual o ponto médio dos segmentos AB, BC e CD?

O ponto médio de um segmento é o ponto que divide este segmento em duas partes exatamente iguais, ou seja, ele está localizado exatamente no centro do segmento. Como AB e CD são paralelos ao eixo x, temos que a coordenada em x será a média aritmética entre os valores das abscissas. Analogamente, como BC é paralelo ao eixo y, temos que a coordenada em y será a média aritmética entre os valores das ordenadas. De fato os pontos médios dos segmentos AB, BC e CD, serão respectivamente Ma(-2,5; 0), Mb(-2,1) e Mc(-3,5; 2).

2. Observe o primeiro ciclo do espirolateral 2_{127} ilustrado abaixo e determine:



a) A unidade de medida.

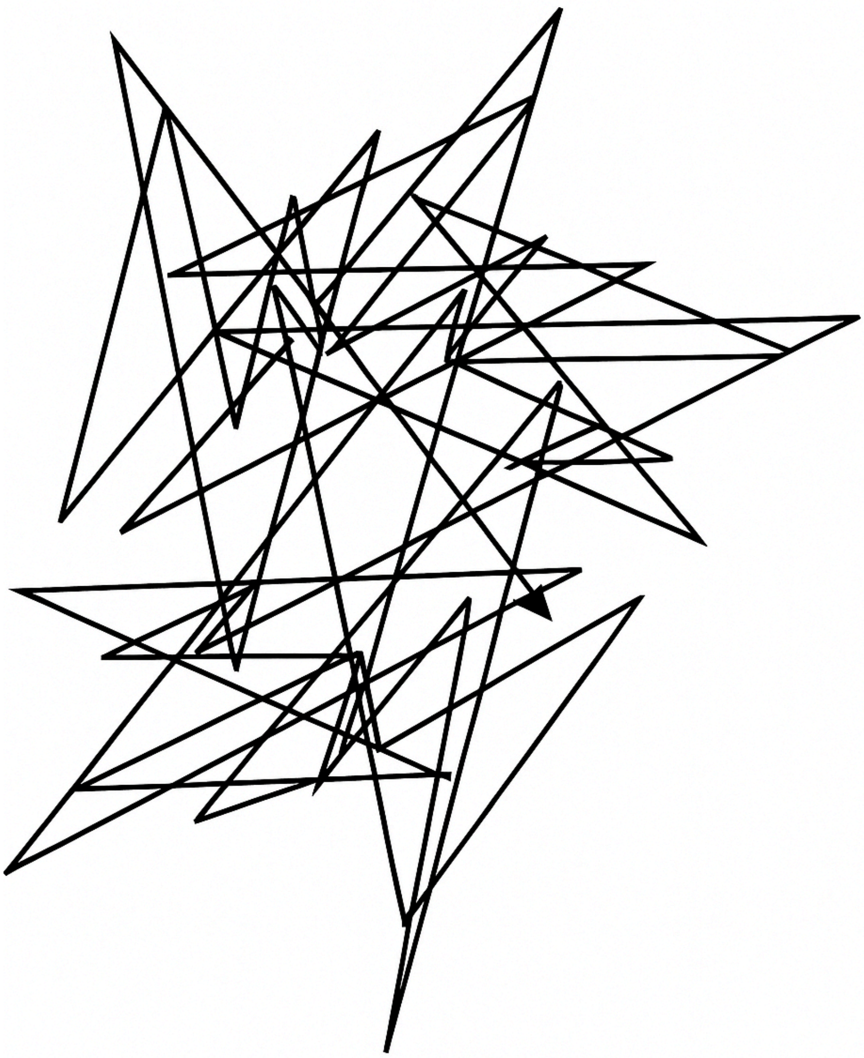
Seja A(0,5; -1) B(1,0) e C(0,2). Temos que AB = $\sqrt{(1-0,5)^2+(0-(-1))^2} = \sqrt{1,25} \simeq 1,1$

Logo, o valor da unidade é 1.1, assim o segmento BC = 2 × AB, ou seja BC = 2.2 .

b) Construa o espirolateral no Python Sandbox .

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
x = 50
theta = 127
beta = 180 - theta
for i in range (15):
  t.forward(x)
  t.left(beta)
  t.forward(2*x)
  t.left(beta)
```

Atividade 1º ano do Ensino Médio



1° ano do Ensino Médio

ATIVIDADE 9 - Espirolaterais e ângulos: Explorando a lei dos cossenos.

Habilidade da BNCC:

- (EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Objetos de conhecimento:

- Lei dos cossenos.
- Calcular a distância entre dois pontos.

Objetivos da atividade:

- Determinar o ângulo de rotação de um espirolateral através da lei do cossenos.

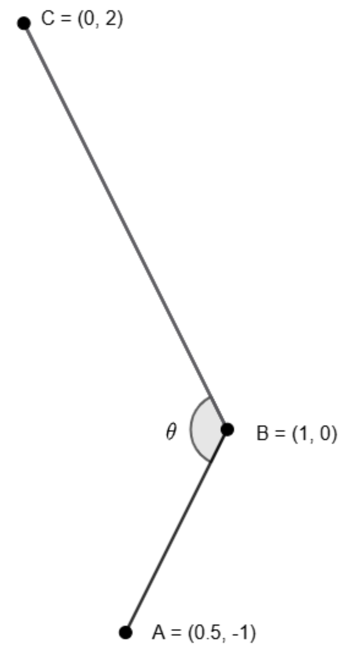
Materiais necessários:

- Lápis
- Navegador online

* O professor pode utilizar papel milimetrado, caso esteja disponível, para a realização da atividade.

Nome:	
Turma:	
Data:	

1) Observe o primeiro ciclo do espirolateral 2_θ e determine:



a) O tamanho dos segmentos AB e BA.

____

____

____

b) A distância dos pontos A e C.

____

____

____

c) Determine o ângulo θ.

___

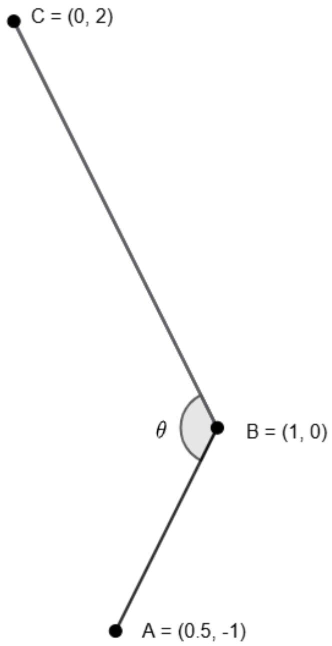
___

___

d) Construa no Python SandBox o espirolateral 2_{θ} usando AB como medida para o passo inicial.

Solução

1) Observe o primeiro ciclo do espirolateral 2_θ e determine:



a) O tamanho dos segmentos AB e BC.

Seja A(0,5;-1), B(1,0) e C(0,2). Temos AB= $\sqrt{(1-0.5)^2+(0-(-1))^2}=\sqrt{1.25}\simeq 1,1$

Logo, o valor da unidade 1.1, assim o segmento BC = 2 × AB , ou seja BC = 2.2

b) A distância dos pontos A e C.

Seja A(0,5; -1) e C(0,2). Temos que AC= $\sqrt{(0-0.5)^2+(2-(-1))^2}+\sqrt{9.25}\simeq 3.04$

c) Determine o ângulo θ.

Sejam AB = 1.1, BC = 2.2, AC = 3.04. De acordo com a lei dos cossenos,

$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2 \times BC \times AB\, cos(\theta)$, ou seja

$3.04^2 = 2.2^2 + 1.1^2 - 2 \times 2.2 \times 1.1\, cos(\theta) \Leftrightarrow$

$9.2416 = 6.05 - 4.84\, cos\,(\theta) \Leftrightarrow 3.1916 =- 4.84\, cos(\theta) \Leftrightarrow$

$- 0.6594 = cos(\theta) \Leftrightarrow \theta = 127°$

d) Construa no Python SandBox o Espirolateral 2_θ usando AB como unidade de comprimento.

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
x = 50
theta = 127
beta = 180 - theta
for i in range (15):
  t.forward(x)
  t.left(beta)
  t.forward(2*x)
  t.left(beta)
```

1° ano do Ensino Médio

ATIVIDADE 10 - Espirolaterais e sua ordem: Analisando progressões aritméticas.

Habilidade da BNCC:

- (EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PAs) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Objetos de conhecimento:

- Sequências numéricas: progressões aritméticas (PAs)

Objetivos da atividade:

- Aplicar os conceitos de progressões aritméticas a ideia de espirolaterais.

Materiais necessários:

- Lápis
- Navegador online

* O professor pode utilizar papel milimetrado, caso esteja disponível, para a realização da atividade.

Nome:	
Turma:	
Data:	

1) Observe os espirolaterais abaixo e determine a razão da progressão aritmética formada pelos lados de um ciclo do espirolateral.

a) 6_{90} com medida do passo inicial 1.

b) 7_{90} com medida do passo inicial 3.

c) 10_{90} com medida do passo inicial 23.

d) 17_{90} com medida do passo inicial 18.

2) Determine a ordem N do espirolateral N_{20} sabendo que o primeiro e último termo da progressão aritmética formada pelos lados de um ciclo do espirolateral são 7 e 42 respectivamente. Em seguida construa o espirolateral no Python Sandbox com nove ciclos.

3) Determine a ordem N do espirolateral N_{15} sabendo que a soma dos termos da progressão aritmética formada pelos lados de um ciclo do espirolateral é 100, além de que o primeiro termo e último termo da PA são 5 e 35 respectivamente, em seguida construa o espirolateral no Python Sandbox.

Solução

1) Observe os espirolaterais abaixo e determine a razão da progressão aritmética formada pelos lados de um ciclo do espirolateral.

a) 6_{90} com comprimento da unidade 1.

Os lados de um ciclo do espirolateral 6_{90} (comprimento da unidade 1) são: 1,2,3,4,5,6. Note que eles formam uma aritmética de razão 1.

b) 7_{90} com comprimento da unidade 3.

Os lados de um ciclo do espirolateral 7_{90} (comprimento da unidade 3) são:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21. Note que eles formam uma aritmética de razão 3.

c) 10_{90} com comprimento da unidade 23.

Os lados de um ciclo do espirolateral 10_{90} (comprimento da unidade 23) são: 23, 46, 69, 92 115, 138, 161, 184, 207, 230. Note que eles formam uma aritmética de razão 23.

d) 17_{90} com comprimento da unidade 18.

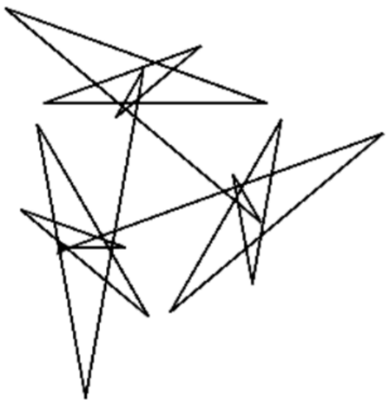
Os lados de um ciclo do espirolateral 17_{90} (comprimento da unidade 18) são:

18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162, 180, 198, 216, 234, 252, 270, 288, 306. Note que eles formam uma aritmética de razão 18.

2) Determine a ordem N do espirolateral N_{20} sabendo que o primeiro e último termo da progressão aritmética formada pelos lados de um ciclo do espirolateral são 7 e 42 respectivamente. Em seguida construa o espirolateral no Python Sandbox com nove ciclos.

Temos que o primeiro lado do espirolateral é de comprimento 7. Assim, a unidade do espirolateral será 7, ou seja, 7 será a razão da PA formada pelos lados da figura (7, 14, 21, 28, 35, 42). Um ciclo do espirolateral terá 6 segmentos, assim a ordem do espirolateral é 6. Portanto o espirolateral que queremos é 6_{20}.

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
k=9
x=40
theta = 20
beta = 180 - theta
for i in range(k):
  t.forward(x)
  t.left(beta)
  t.forward(2*x)
  t.left(beta)
  t.forward(3*x)
  t.left(beta)
  t.forward(4*x)
  t.left(beta)
  t.forward(5*x)
  t.left(beta)
  t.forward(6*x)
  t.left(beta)
```



3) Determine a ordem N do espirolateral N_{15} sabendo que a soma dos termos da progressão aritmética formada pelos lados de um ciclo do espirolateral é 100, além de que o primeiro termo e último termo da PA são 5 e 35 respectivamente, em seguida construa o espirolateral no Python Sandbox.

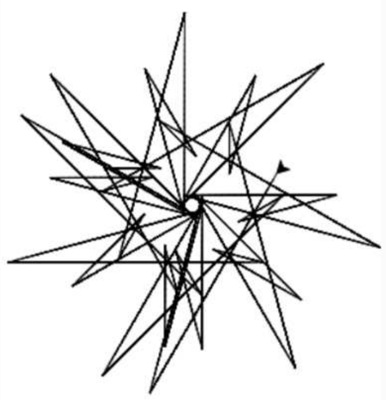
Temos que a soma S dos termos de uma PA pode ser definida por:

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$

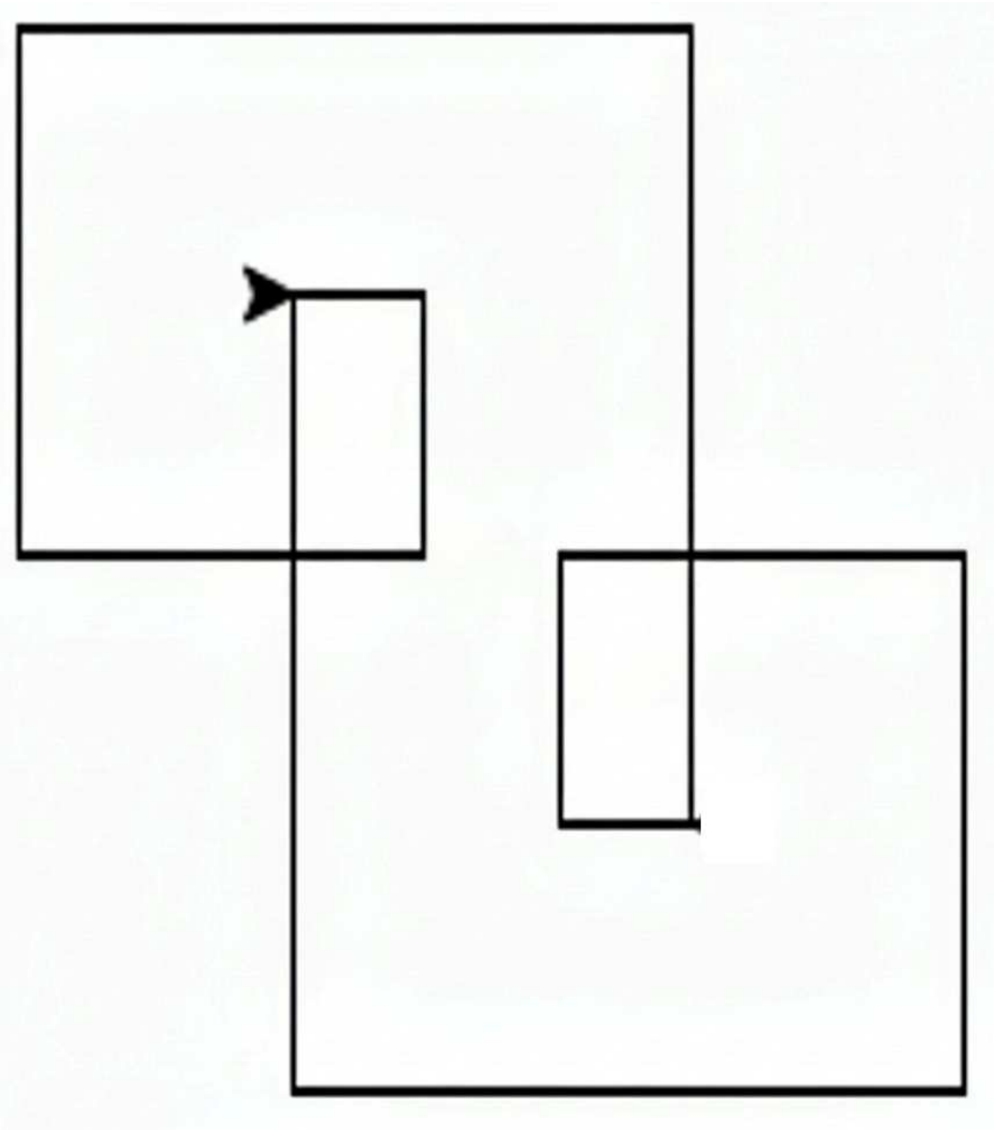
Sabemos que $a_1 = 5$ e $a_n = 35$, logo $\frac{(5+35) \times n}{2} = 100 \Leftrightarrow 40n = 200 \Leftrightarrow n = 5.$

Portando o espirolateral que queremos é 5_{15}.

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
k=9
x=40
theta = 15
beta = 180 - theta
for i in range(k):
  t.forward(x)
  t.left(beta)
  t.forward(2*x)
  t.left(beta)
  t.forward(3*x)
  t.left(beta)
  t.forward(4*x)
  t.left(beta)
  t.forward(5*x)
  t.left(beta)
```



Atividade 2º ano do Ensino Médio



2° ano do Ensino Fundamental

ATIVIDADE 11 - Espirolaterais e área: Métodos criativos para medir superfícies.

Habilidade da BNCC:

- (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Objetos de conhecimento:

- Áreas de figuras geométricas (cálculo por decomposição, composição ou aproximação);
- Expressões algébricas.

Objetivos da atividade:

- Determine uma expressão algébrica para área dos seguintes espirolaterais.

Materiais necessários:

- Lápis

* O professor pode utilizar papel milimetrado, caso esteja disponível, para a realização da atividade.

Nome:
Turma:
Data:

1) Construa os espirolaterais abaixo, em seguida determine determine uma expressão algébrica para sua área. Use um passo inicial de valor não especificado x .

a) 1_{90} , 4 ciclos.

b) 3_{90} , 4 ciclos.

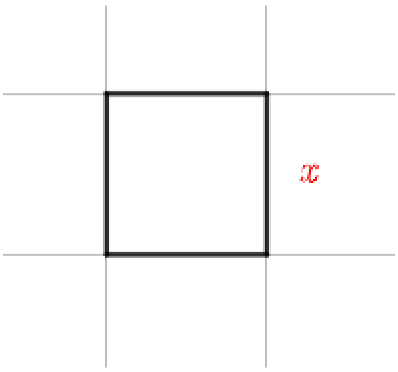
c) 6_{90} , 2 ciclos.

Solução

1) Construa os espirolaterais abaixo, em seguida determine determine uma expressão algébrica para sua área. Use um passo inicial de valor não especificado x .

a) 1_{90} , 4 ciclos.

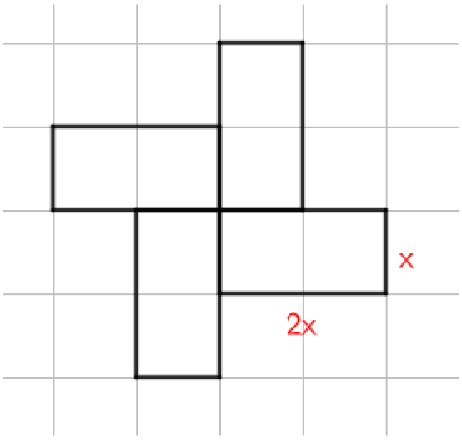
Vamos construir o espirolateral



Note que o espirolateral é um quadrado de lado de x, dessa forma a área do espirolateral será x^2.

b) 3_{90}, 4 ciclos.

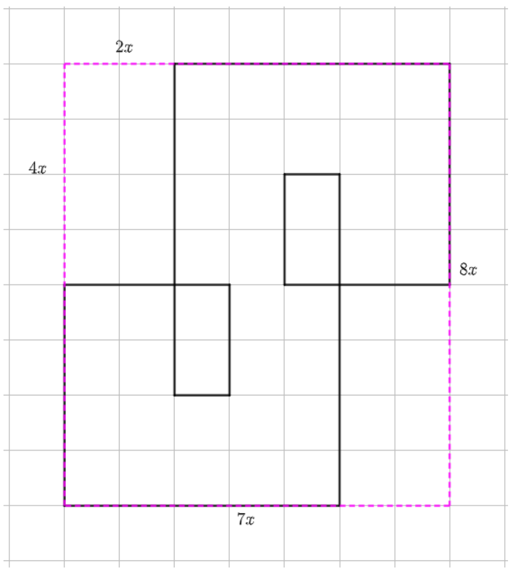
Vamos construir o espirolateral



Observe que o espirolateral é constituído por 4 retângulos de área x e $2x$, dessa forma área do espirolateral será $4 \cdot x \cdot 2x = 8x^2$.

c) 6_{90}, 2 ciclos.

Vamos construir o espirolateral



É possível inscrever o espirolateral em um retângulo de lados $8x$ e $7x$, assim a área do espirolateral será a diferença entre a área desse retângulo e de 2 retângulos de lados $2x$ e $3x$. Portanto, área que queremos é $56x^2 - 2 \cdot 6x^2 = 44x^2$.

2° ano do Ensino Fundamental

ATIVIDADE 12 - Espirolaterais e perímetro: Construindo o gráfico de uma função afim.

Habilidade da BNCC:

- (EM13MAT506). Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

Objetos de conhecimento:

- Polígonos regulares (perímetro e área);
- Função linear.

Objetivos da atividade:

- Determinar uma expressão para calcular o perímetro de espirolaterais.
- Construir o gráfico de funções lineares.

Materiais necessários:

- Lápis
- Régua

* O professor pode utilizar papel milimetrado, caso esteja disponível, para a realização da atividade.

Nome:
Turma:
Data:

1) Determine uma regra para calcular o perímetro de um espirolateral N_{θ}com passo inicial de unidade M e número de ciclos k.

____

____

____

2) Construa uma função f(x) (onde x representa a medida do passo inicial do espirolateral e f(x) o seu respectivo perímetro) para os espirolaterais abaixo. Em seguida esboce o gráfico da função.

a) 1_{90} , 4 ciclos.

____

____

____

b) 2_{90} , 2 ciclos.

Solução

1) Determine uma regra para calcular o perímetro de um espirolateral N_θ com passo inicial de unidade M e número de ciclos k.

Note que um ciclo do espirolateral N com unidade M é dado por: M, 2M, ..., NM, assim os lados formam uma PA de razão M e N termos. O primeiro termo da razão é M e o último termo NM. Podemos calcular o perímetro de um ciclo do espirolateral utilizando a fórmula da soma de uma PA. Logo o perímetro do primeiro ciclo do espirolateral será: $\frac{(N+MN)\times N}{2}$.

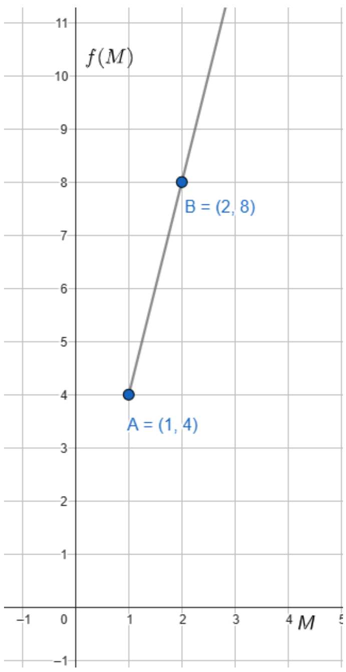
Assim, o perímetro de k ciclos será dado por: $k \times \frac{(N+MN)\times N}{2}$.

2) Construa uma função f(x) (onde x representa a medida do passo inicial do espirolateral e f(x) o seu respectivo perímetro) para os espirolaterais abaixo. Em seguida esboce o gráfico da função.

a) 1_{90} , 4 ciclos.

Considerando a função $f(M) = k \times \frac{(N+MN)\times N}{2}$. De acordo com o enunciado, consideramos N = 1 e k = 4, construímos então o gráfico da função abaixo:

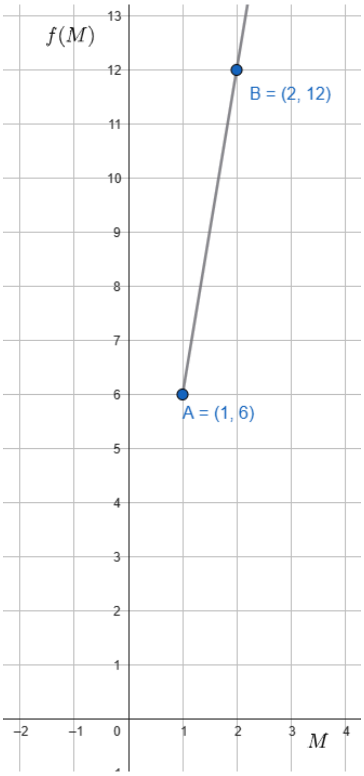
$f(M) = k \times \frac{(N+MN)\times N}{2} = 4 \times \frac{(M+M)\times 1}{2} = 4M$.



b) 2_{90} , 2 ciclos.

Considerando a função $f(M) = k \times \frac{(N+MN)\times N}{2}$. De acordo com o enunciado, consideramos N = 2 e k = 2, construímos então o gráfico da função abaixo:

$f(M) = k \times \frac{(N+MN)\times N}{2} = 2 \times \frac{(M+2M) \times 2}{2} = 6M$.



2° ano do Ensino Fundamental

ATIVIDADE 13 - Espirolaterais e as transformações: Ampliação e redução de um espirolateral.

Habilidade da BNCC:

- (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

Objetos de conhecimento:

- Transformações homotetias (ampliação e redução).

Objetivos da atividade:

- Aplicar as transformações geométricas (ampliação e redução) em espirolaterais.

Materiais necessários:

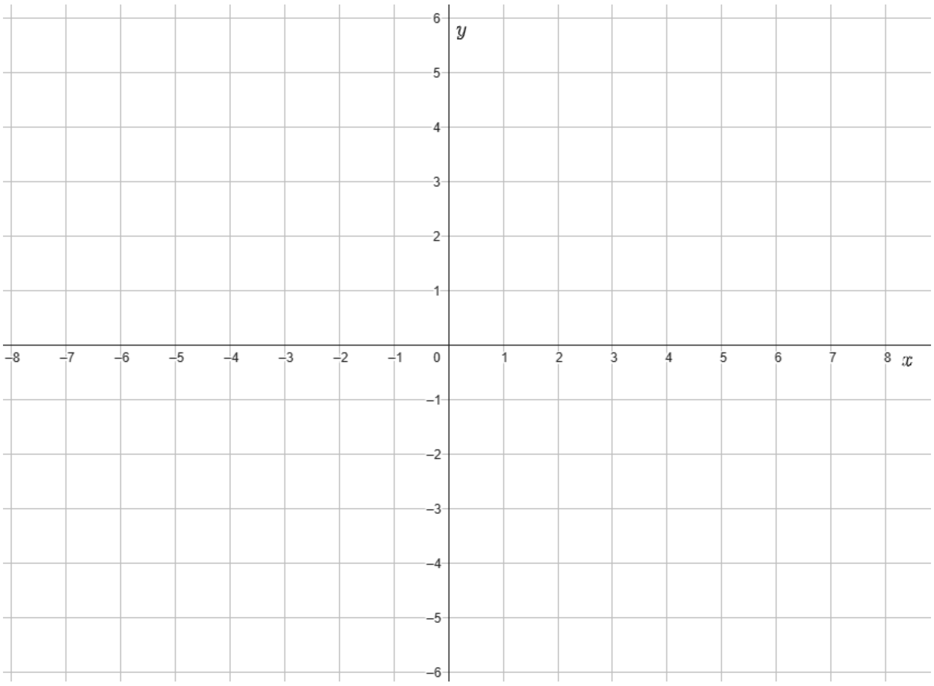
- Lápis
- Régua
- Transferidor

* A seguir encontram-se as folhas de impressão da tarefa e seu gabarito

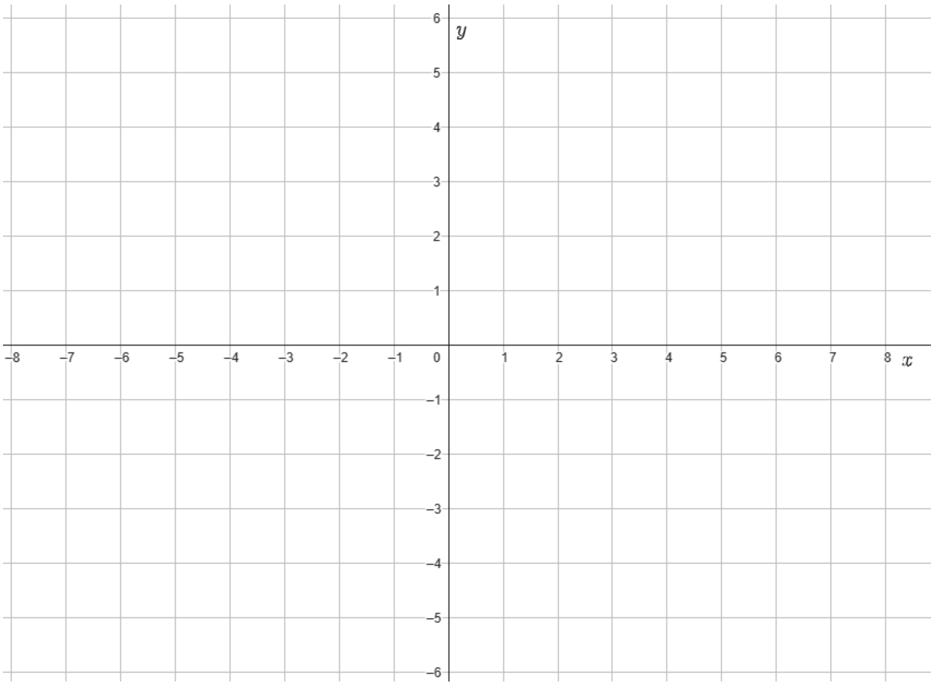
Nome:	
Turma:	
Data:	

1. Construa os espirolaterais abaixo no plano cartesiano partindo da origem (utilize o tamanho de um quadrado como unidade de medida). Em seguida, determine as coordenadas dos vértices.

a) 1_{90} , 4 ciclos.

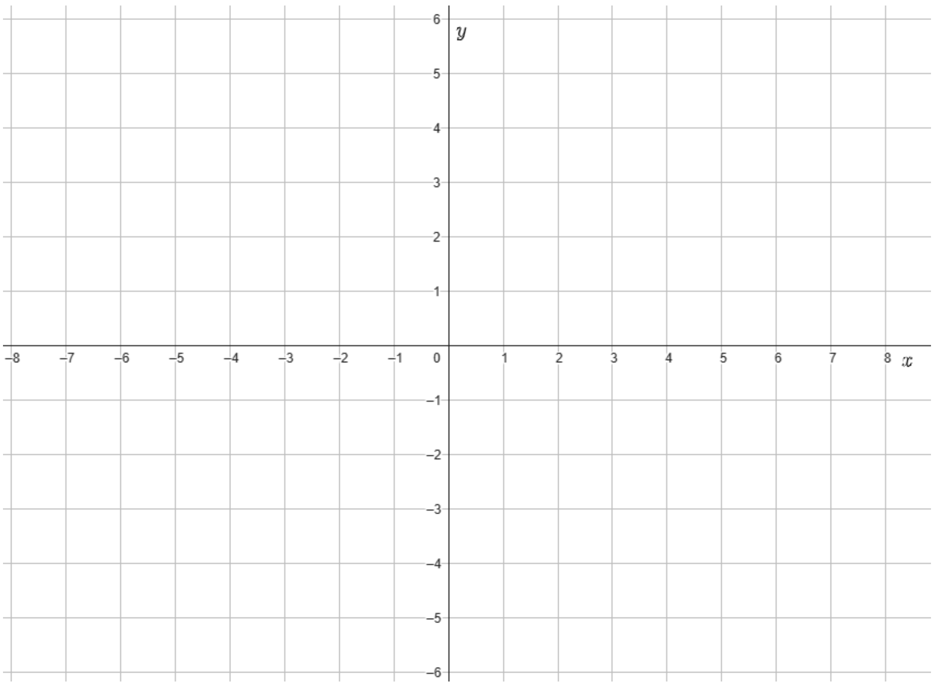


b) 2_{90} , 2 ciclos.

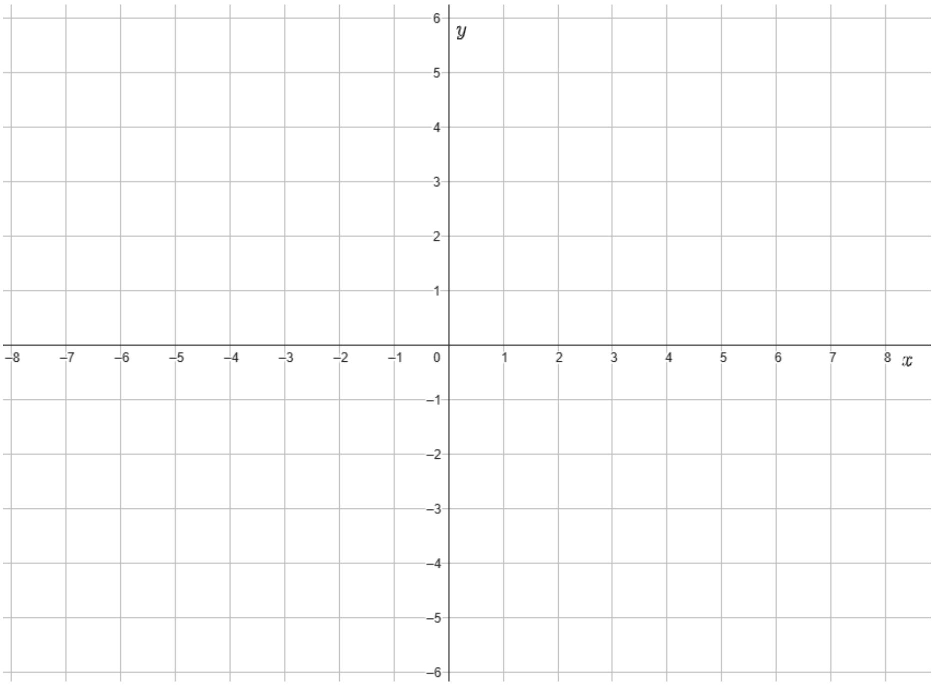


2) Em um plano cartesiano amplie quatro vezes os espirolaterais do exercício anterior e em seguida determine as coordenadas dos vértices.

a) 1_{90} , 4 ciclos.

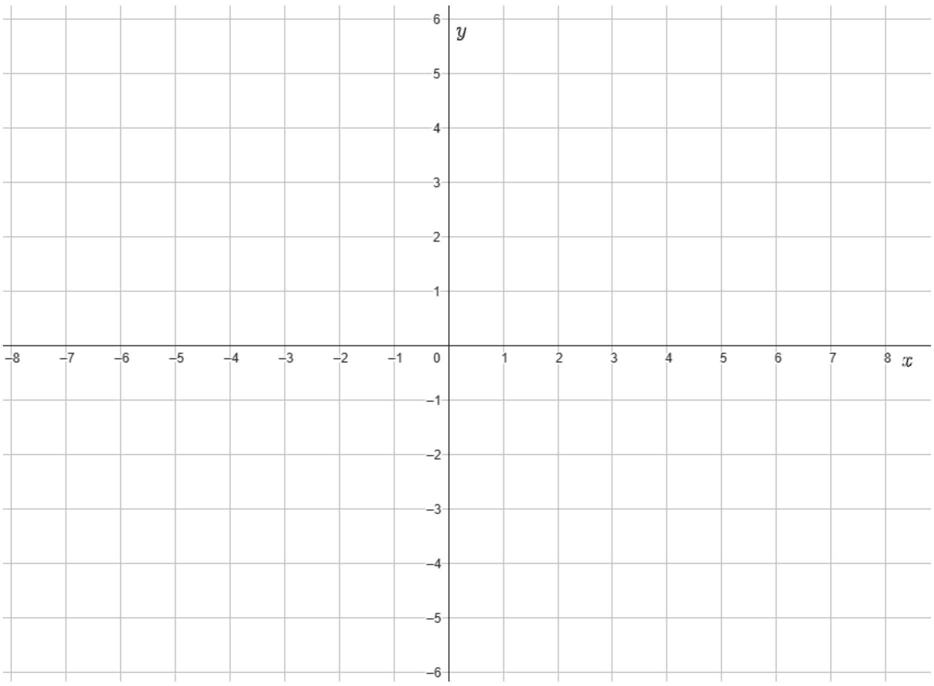


b) 2_{90} , 2 ciclos.

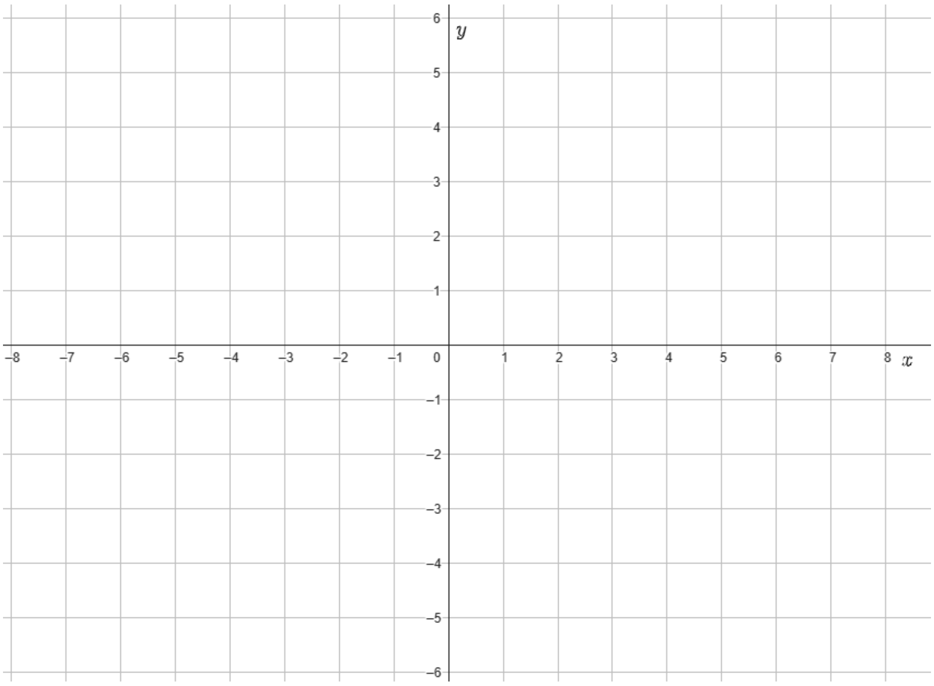


3. Em um plano cartesiano reduza em duas vezes os espirolaterais do exercício anterior e em seguida determine as coordenadas dos vértices.

a) 1_{90} , 4 ciclos.



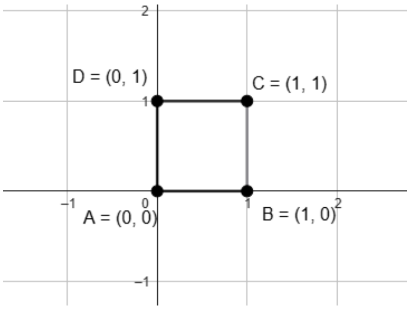
b) 2_{90} , 2 ciclos.



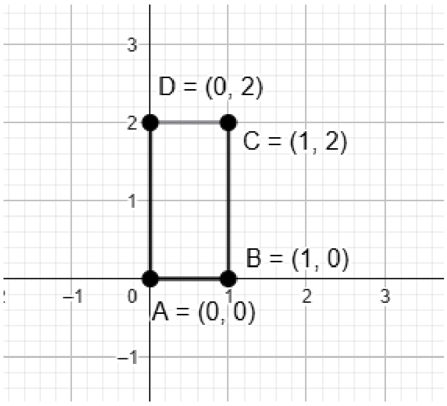
Solução

1. Construa os espirolaterais abaixo no plano cartesiano partindo da origem (utilize o tamanho de um quadrado como unidade de medida). Em seguida, determine as coordenadas dos vértices.

a) 1_{90} , 4 ciclos.

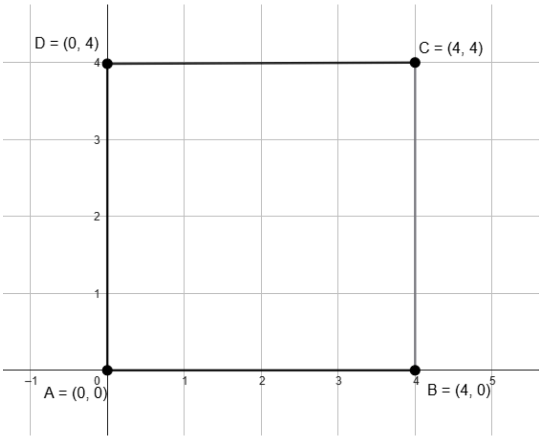


b) 2_{90} , 2 ciclos.

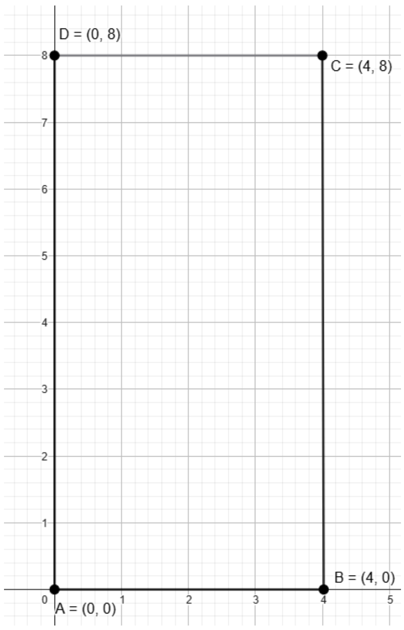


2) Em um plano cartesiano amplie quatro vezes os espirolaterais do exercício anterior e em seguida determine as coordenadas dos vértices.

a) 1_{90} , 4 ciclos.

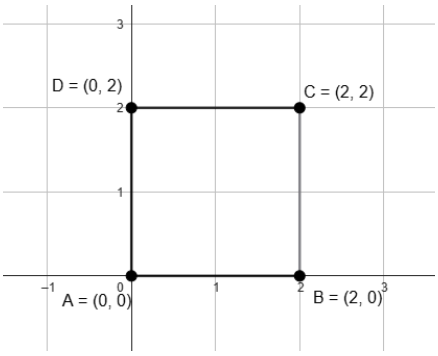


b) 2_{90} , 2 ciclos.

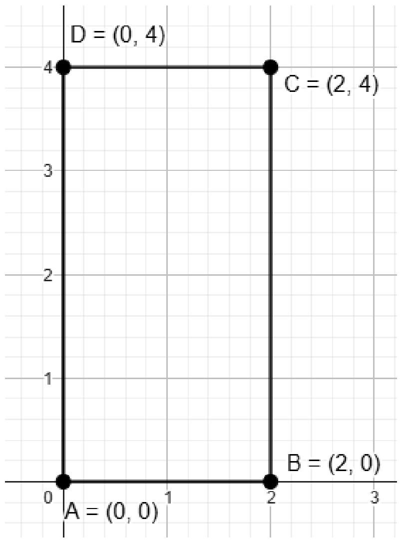


3. Em um plano cartesiano reduza em duas vezes os espirolaterais do exercício anterior e em seguida determine as coordenadas dos vértices.

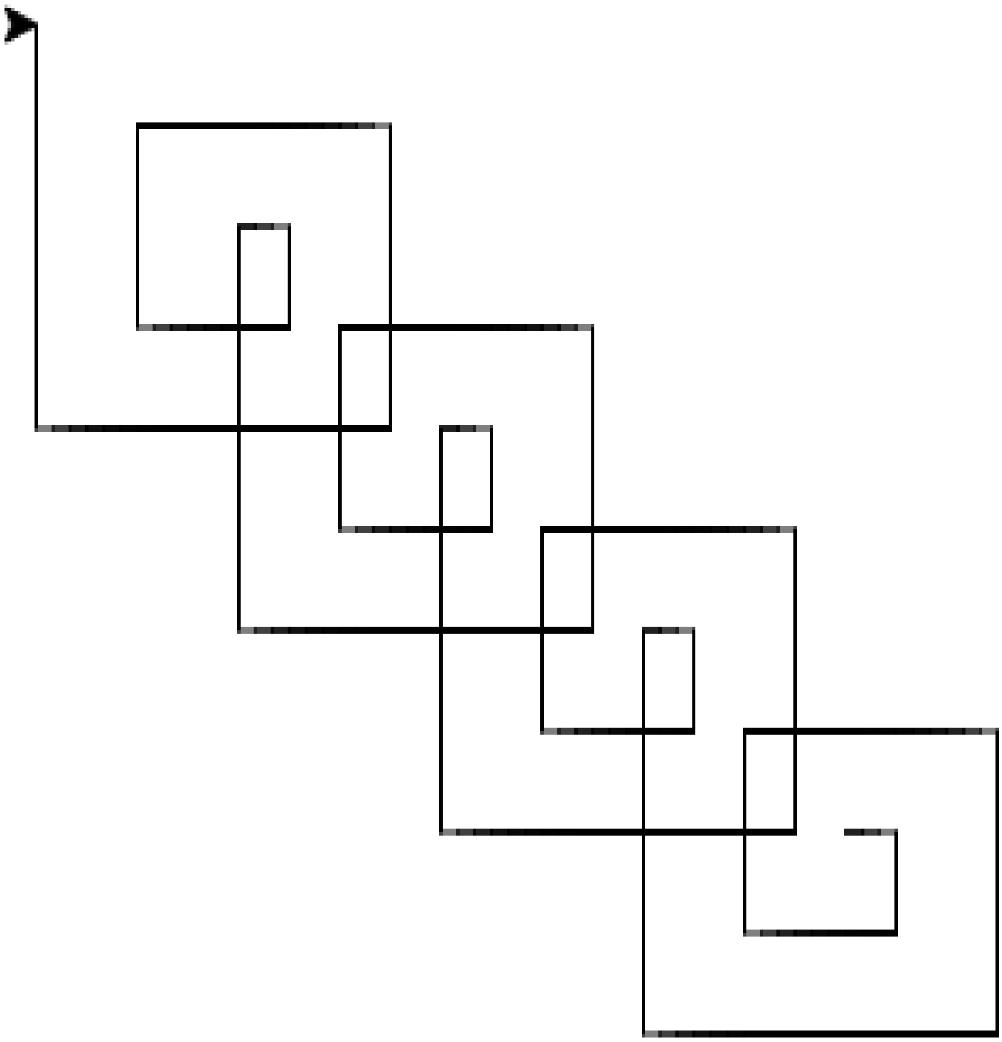
a) 1_{90} , 4 ciclos.



b) 2_{90}, 2 ciclos.



Atividades 3º ano do Ensino Médio



3° ano do Ensino Médio

ATIVIDADE 14 - Espirolaterais e as transformações: Reflexão, translação e rotação de um espirolateral.

Habilidade da BNCC:

- (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

Objetos de conhecimento:

- Transformações isometrias (reflexão, translação e rotação).

Objetivos da atividade:

- Transformações isometrias (reflexão, translação e rotação).

Materiais necessários:

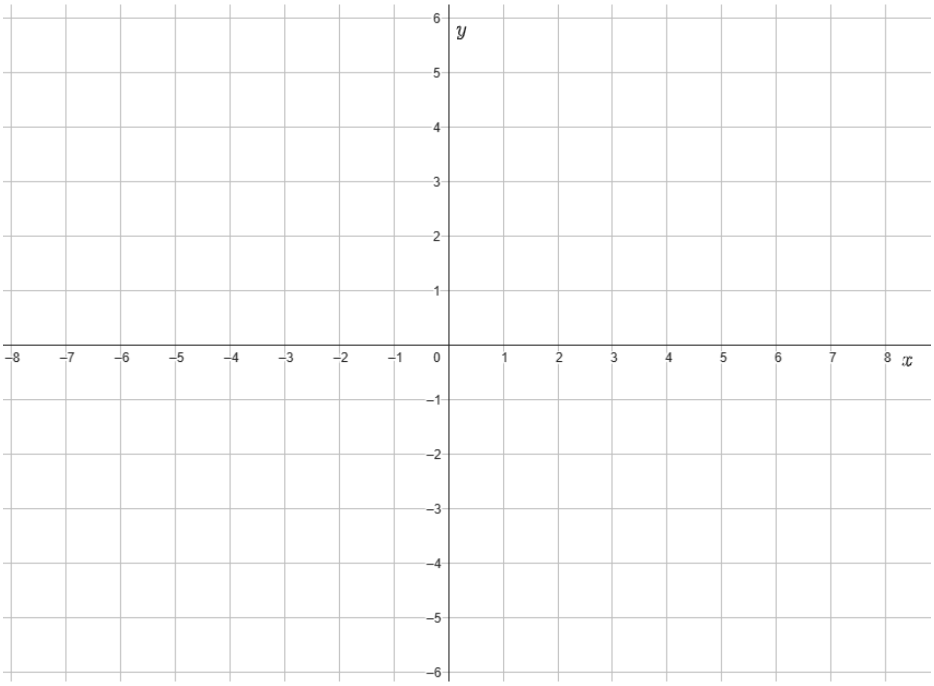
- Lápis
- Régua
- Transferidor

* O professor pode utilizar papel milimetrado, caso esteja disponível, para a realização da atividade.

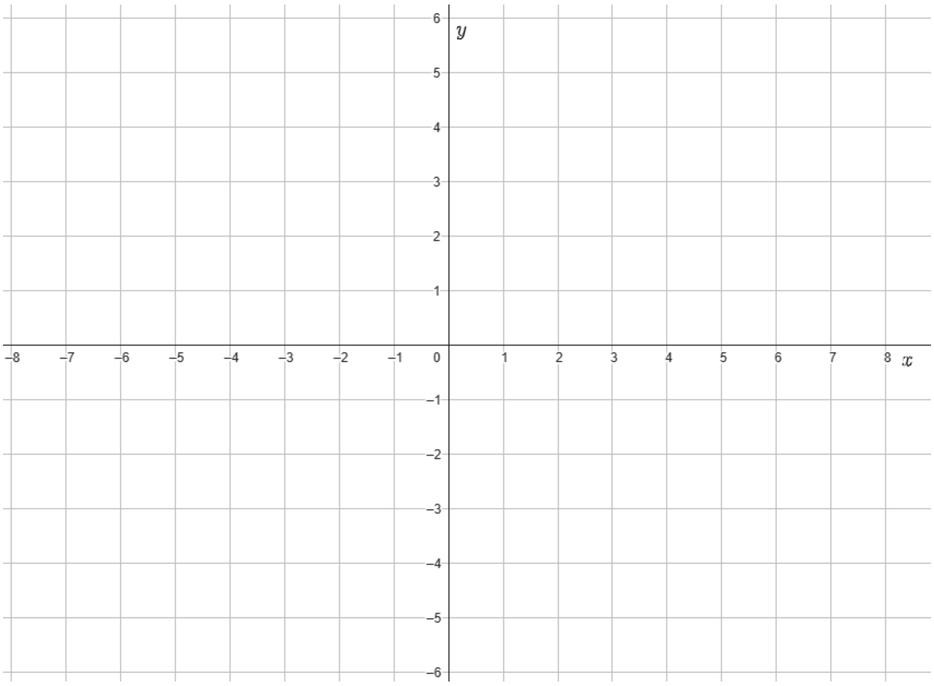
Nome:	
Turma:	
Data:	

1. Construa os espirolaterais abaixo no plano cartesiano partindo da origem (utilize o tamanho de um quadrado como unidade de medida). Em seguida, determine as coordenadas dos vértices.

a) 1_{90} , 4 ciclos.

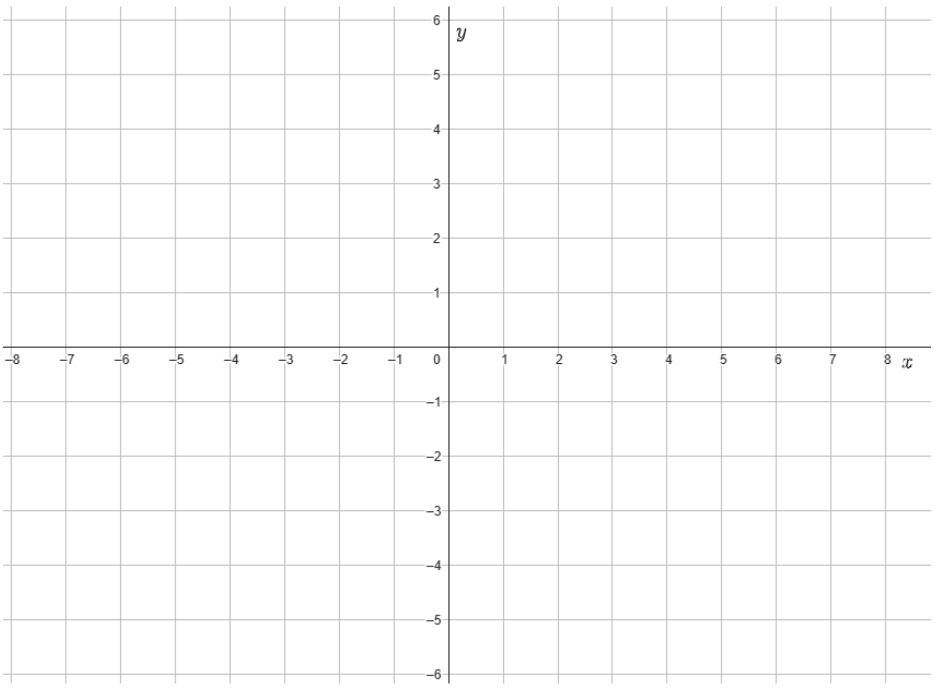


b)2_{90} , 2 ciclos.

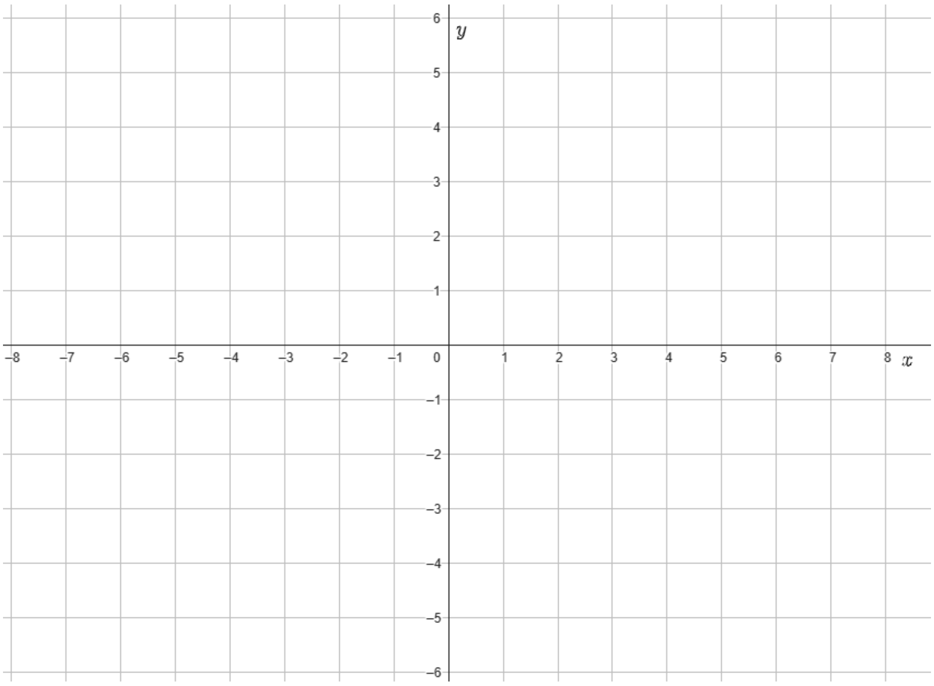


2) Utilizando as coordenadas dos vértices dos espirolaterais do exercício anterior, gire os espirolaterais 45° no sentido horário em relação ao ponto M(−3,0). Em seguida, determine as novas coordenadas dos vértices.

a) 1_{90} , 4 ciclos.

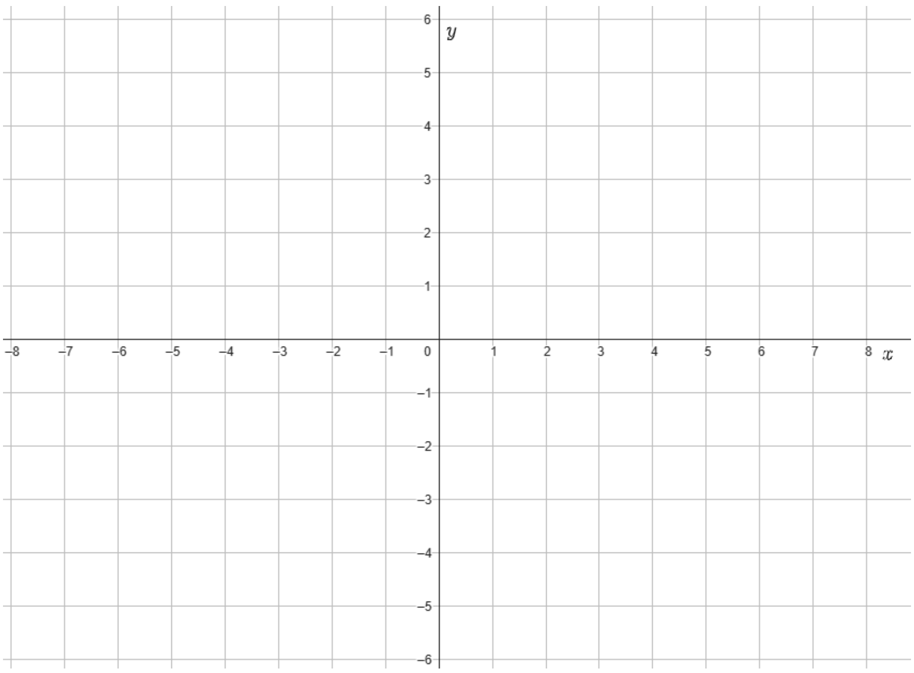


b) 2_{90} , 2 ciclos

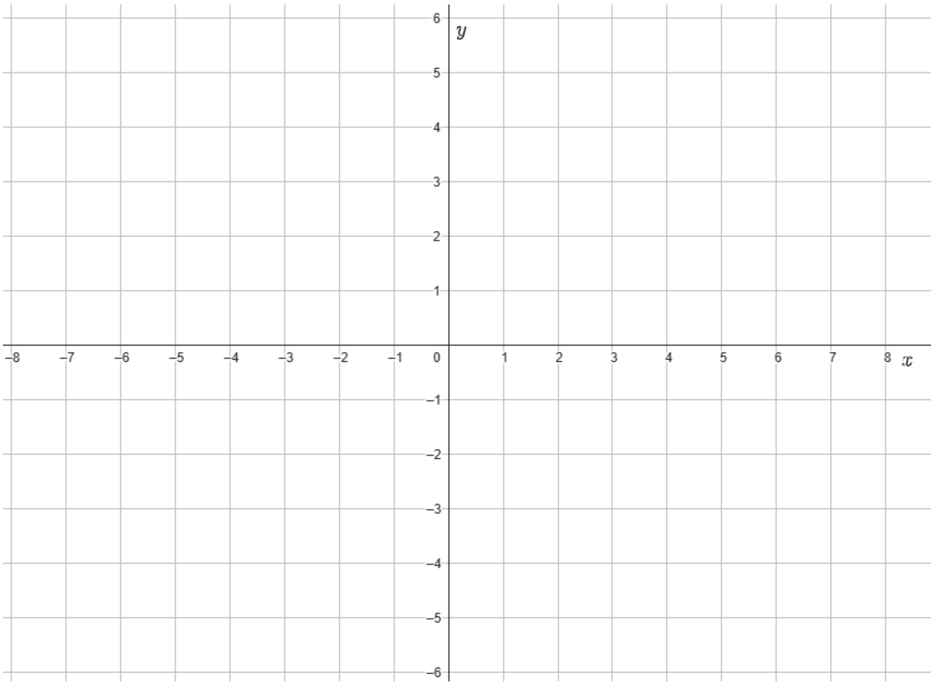


3) Utilizando as coordenadas dos vértices dos espirolaterais do primeiro exercício, faça uma translação dos espirolaterais duas unidades para a esquerda e três unidades para baixo e, em seguida, determine as novas coordenadas dos vértices.

a) 1_{90} , 4 ciclos.

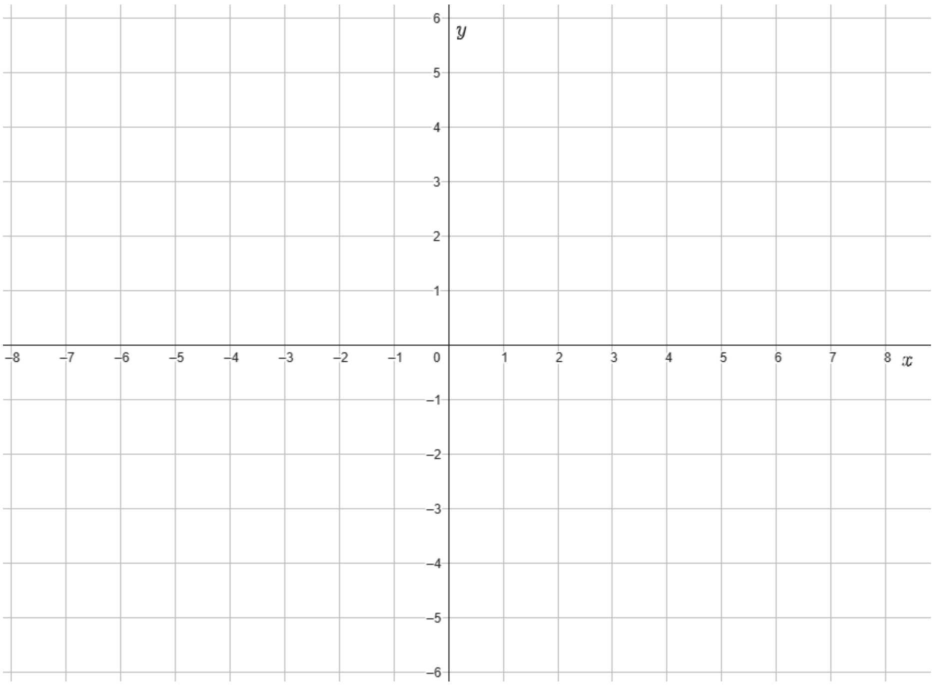


b) 2_{90} , 2 ciclos

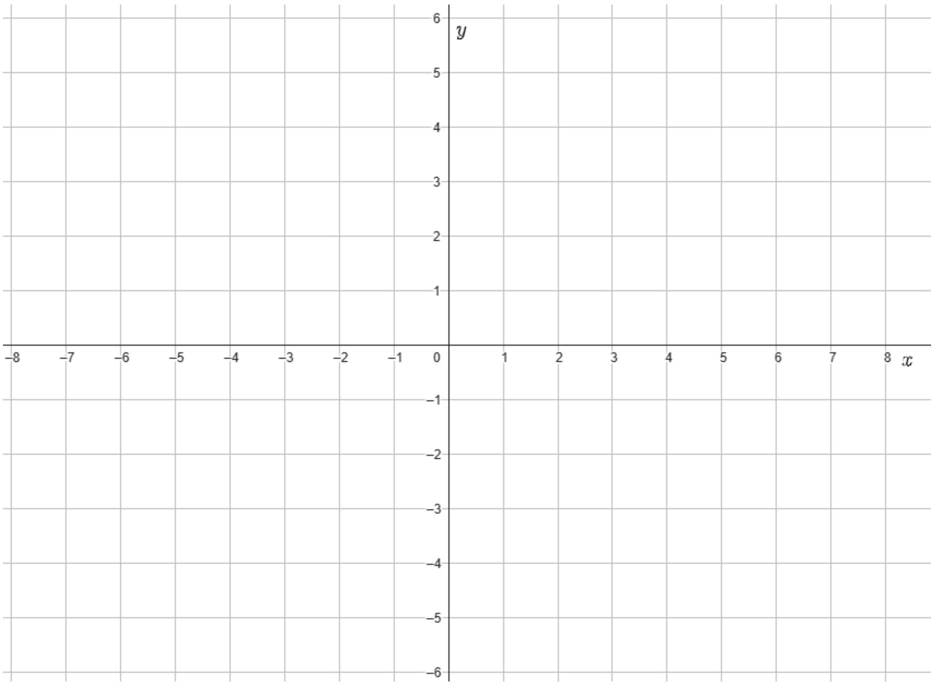


4) Utilizando as coordenadas dos vértices dos espirolaterais do primeiro exercício, apresente uma reflexão em relação à reta y=−2 e, em seguida, determine as novas coordenadas dos vértices.

a) 1_{90} , 4 ciclos.



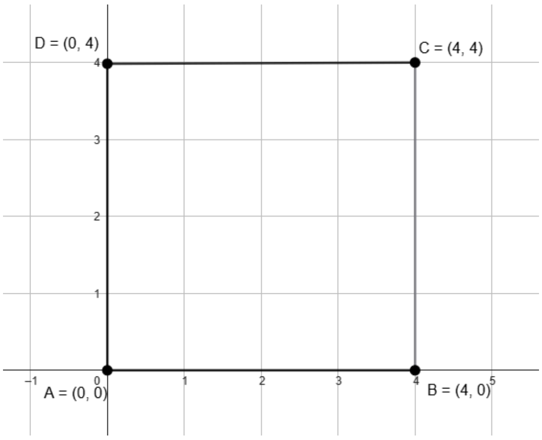
b) 2_{90}, 2 ciclos.



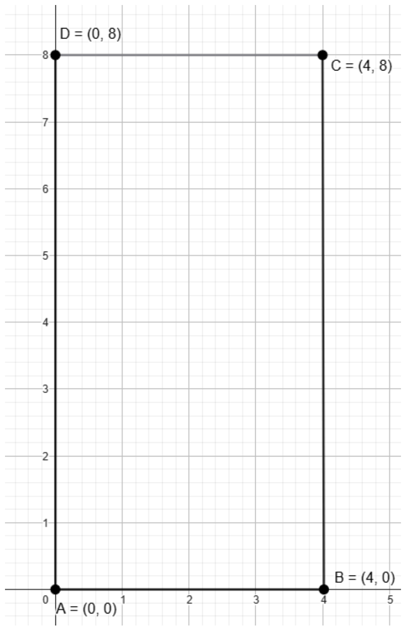
Solução

1. Construa os espirolaterais abaixo no plano cartesiano partindo da origem (utilize o tamanho de um quadrado como unidade de medida). Em seguida, determine as coordenadas dos vértices.

a) 1_{90} , 4 ciclos.

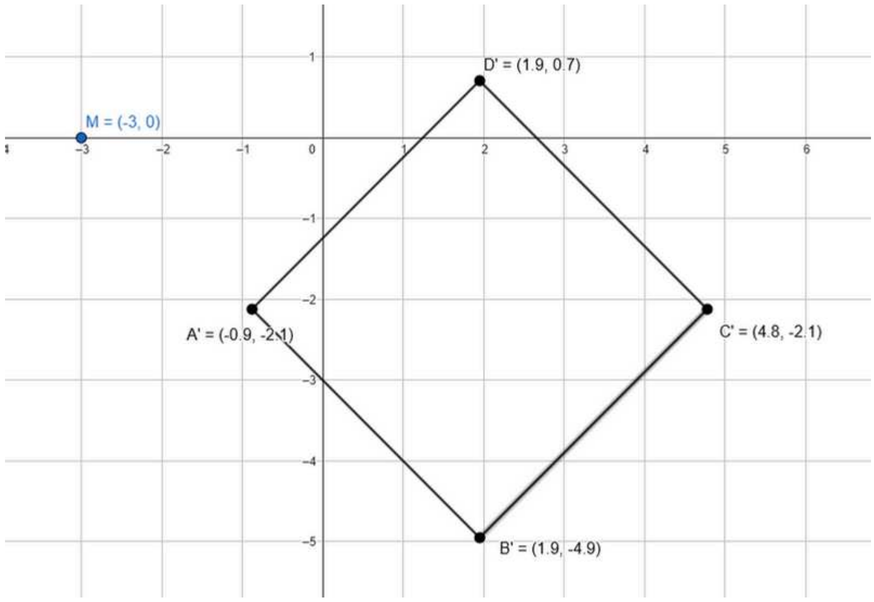


b) 2_{90} , 2 ciclos.

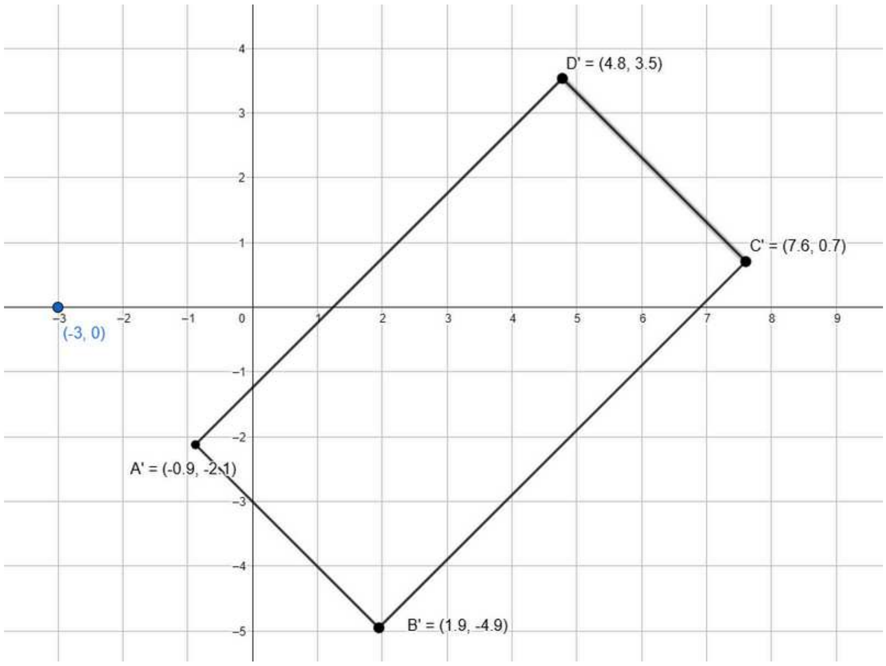


2) Utilizando as coordenadas dos vértices dos espirolaterais do exercício anterior, gire os espirolaterais 45° no sentido horário em relação ao ponto M(−3,0). Em seguida, determine as novas coordenadas dos vértices.

a) 1_{90} , 4 ciclos.

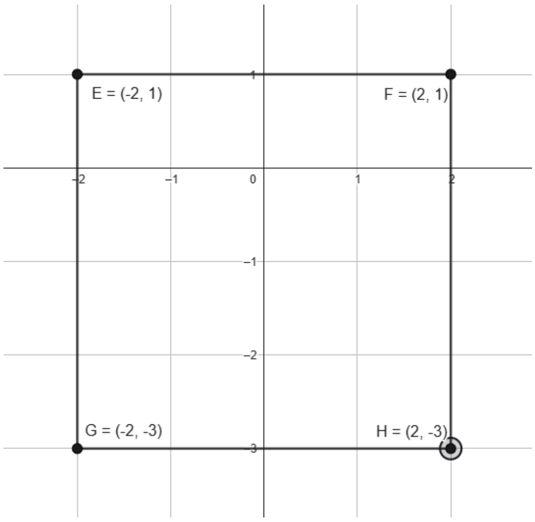


b) 2_{90} , 2 ciclos.

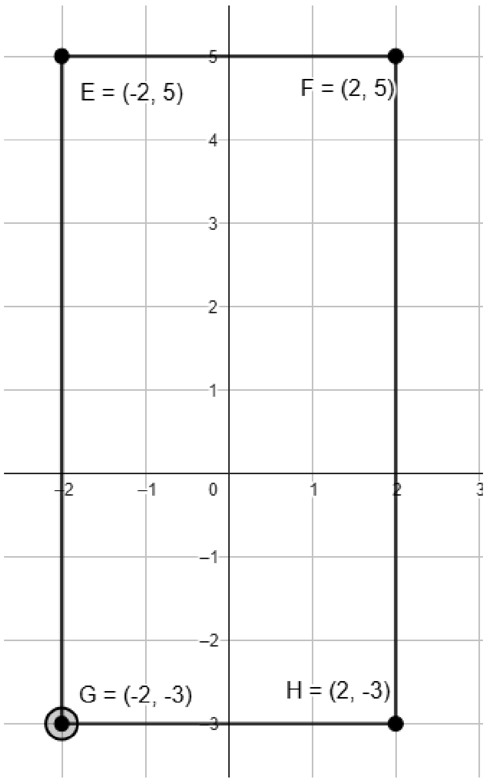


3) Utilizando as coordenadas dos vértices dos espirolaterais do primeiro exercício, faça uma translação dos espirolaterais duas unidades para a esquerda e três unidades para baixo e, em seguida, determine as novas coordenadas dos vértices.

a) 1_{90} , 4 ciclos.

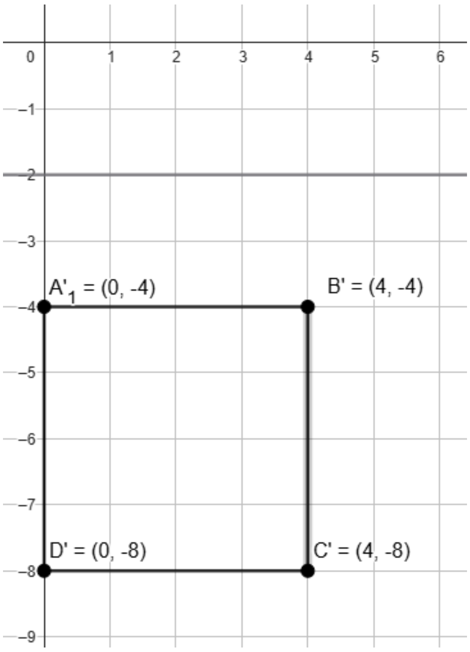


b) 2_{90} , 2 ciclos

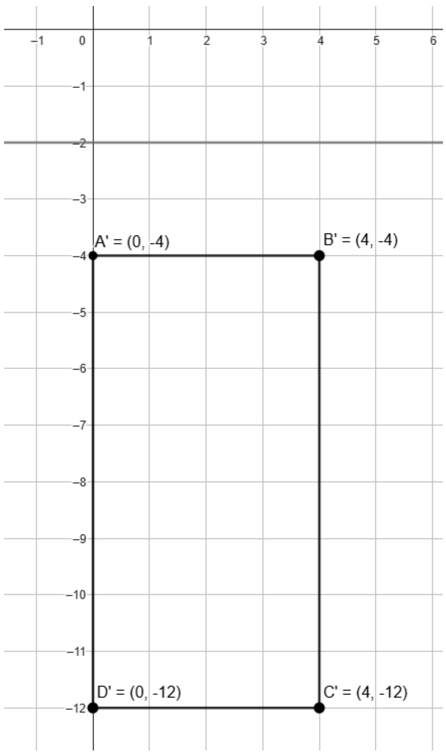


4) Utilizando as coordenadas dos vértices dos espirolaterais do primeiro exercício, apresente uma reflexão em relação à reta y=−2 e, em seguida, determine as novas coordenadas dos vértices.

a) 1_{90} , 4 ciclos.



b) 2_{90} , 2 ciclos



3° ano do Ensino Fundamental

ATIVIDADE 15 - Espirolaterais em Código: Explorando Soluções e Limites da Computação

Habilidade da BNCC Computação:

- (EM13CO01) Explorar e construir a solução de problemas por meio da reutilização de partes de soluções existentes.

Objetos de conhecimento:

- Compreender as possibilidades e os limites da Computação para resolver problemas, tanto em termos de viabilidade quanto de eficiência, propondo e analisando soluções computacionais para diversos domínios do conhecimento, considerando diferentes aspectos.

Objetivos da atividade:

- Construir códigos de programação.

Materiais necessários:

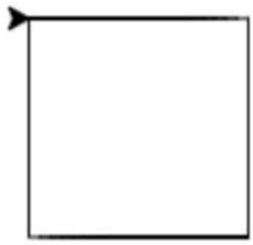
- Navegador online

* O professor pode utilizar papel milimetrado, caso esteja disponível, para a realização da atividade.

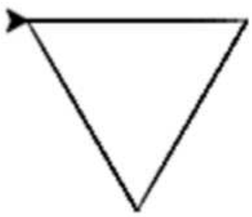
Nome:
Turma:
Data:

1) Observe as linhas de códigos para a construção de um quadrado de lado 100 e um triângulo equilátero de lado 100:

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
for i in range(4):
 t.forward(100)
 t.right(90)
```

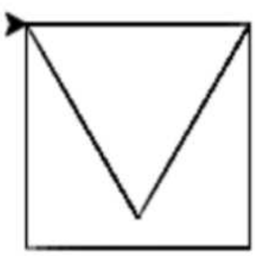


```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
for i in range(3):
 t.forward(100)
 t.right(120)
```

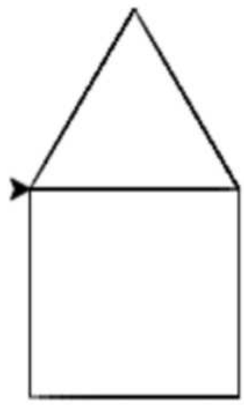


Utilize os códigos acima para a construção de novos códigos capazes de gerar as seguintes figuras:

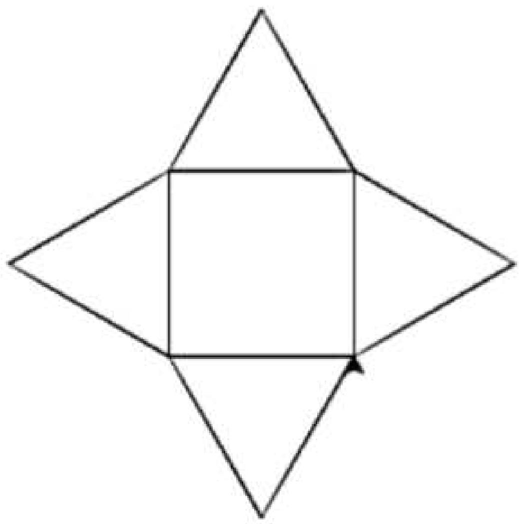
a)



b)



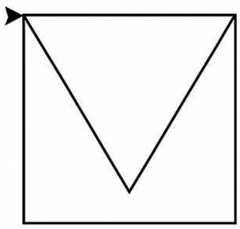
c)



Solução

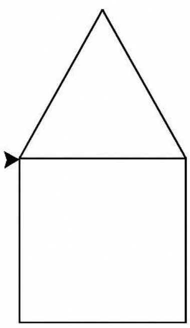
a)

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
for i in range (4):
  t.forward(100)
  t.right(90)
for i in range
  t.forward(100)
  t.right(120)
for i in range  (3):
  t.forward(100)
  t.right(120)
```



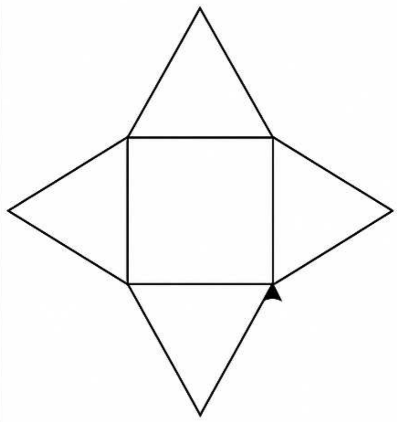
b)

```
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
for i in range (4):
  t.forward(100)
  t.right(90)
t.forward(100)
t.left(180)
for i in range (3):
  t.forward(100)
  t.right(120)
t.right(120)
for i in range (3):
  t.forward(100)
  t.right(120)
```



c)

```
import turtle
 t = turtle.Turtle()
 t.clear()
 t.reset()
 for i in range (4):
   t.forward(100)
   t.right(120)
   t.left(180)
 for i in range (3):
   t.forward(100)
   t.right(120)
   t.right(-90)
 for i in range (3):
   t.forward(100)
   t.right(120)
   t.right(-90)
 for i in range (3):
   t.forward(100)
   t.right(120)
   t.right(-90)
 for i in range (3):
   t.forward(100)
   t.right(120)
   t.right(-90)
 for i in range (3):
   t.forward(100)
   t.right(120)
   t.right(120)
```



3° ano do Ensino Fundamental

ATIVIDADE 16 - Código Pessoal: Criando Meu Espirolateral

Habilidade da BNCC Computação:

- (EM13CO01) Explorar e construir a solução de problemas por meio da reutilização de partes de soluções existentes.
- (EM13CO04) Reconhecer o conceito de metaprogramação como uma forma de generalização na construção de programas, permitindo que algoritmos sejam entrada ou saída para outros algoritmos.
- (EM13CO05) Identificar os limites da Computação para diferenciar o que pode ou não ser automatizado, buscando uma compreensão mais ampla dos limites dos processos mentais envolvidos na resolução de problemas.

Objetos de conhecimento:

- Decompor problemas complexos em partes menores, utilizando soluções existentes por meio de funções, módulos e bibliotecas.
- Generalizar algoritmos, reconhecendo a metaprogramação como uma estratégia em que programas podem receber outros algoritmos como entrada ou produzir novos algoritmos como saída.

Objetivos da atividade:

- Construir códigos de programação.

Materiais necessários:

- Navegador online

* O professor pode utilizar papel milimetrado, caso esteja disponível, para a realização da atividade.

Nome:	
Turma:	
Data:	

1) Construa uma função em Python que desenhe um espirolateral, utilizando o módulo turtle. Para cada colega da turma, você deverá gerar um espirolateral diferente.

Dicas para a construção:

- O ângulo de giro pode variar entre 0° e 180°.
- Utilize informações dos colegas (como altura, data de nascimento ou número de letras do primeiro nome) para definir os parâmetros do espirolateral (ex.: ordem, comprimento do lado, ângulo).
- Defina a função de forma parametrizada, de modo que seja possível gerar diferentes espirolaterais mudando apenas os valores de entrada.

```
#Função espirolateral
import turtle
t = turtle.Turtle()
t.clear()
t.reset()
# Define a função f com 4 parâmetros:
# x: comprimento da base do espirolateral
# N: ordem do espirolateral (número de lados)
# theta: ângulo dado para giro
# k: quantidade de ciclos (repetições)
def f(x, N, theta, k):
    # Calcula o ângulo complementar para virar a tartaruga
    beta = 180 - theta
    # Repete o ciclo k vezes
    for i in range(k):
        # Para cada ciclo, percorre os y lados do espirolateral
        for j in range(N):
            t.left(beta)
            t.forward((j + 1) * x)
```

2) Após construir o seu espirolateral, faça um estudo da figura e responda:

a) O espirolateral obtido é fechado ou aberto?
b) De acordo com a regra de Krawczyk, com quantos ciclos (k) o espirolateral se fecha?
c) Se não for fechado, explique o motivo segundo a regra.

Dica:

Lembre-se da formulação da regra:
Se $\varphi = \theta \cdot N \cdot k$, sendo θ o ângulo de giro, N a ordem do espirolateral e k o número de ciclos, então o espirolateral forma um polígono fechado se:

(i) φ é múltiplo de 360° (diferente de 360°),

(ii) e $k \neq 1$.

Solução

1) Construa uma função em Python que desenhe um espirolateral, utilizando o módulo turtle. Para cada colega da turma, você deverá gerar um espirolateral diferente.

Um exemplo de solução

```
import turtle
# Inicializa a tartaruga
t = turtle.Turtle()
# x: comprimento da base do espirolateral
x = 10
# Solicita e converte as entradas do usuário
theta = int(input("Em que dia voce nasceu? "))
N = int(input("Diga quantas letras tem no seu nome: "))
k = int(input("Quantos ciclos voce quer construir? "))
# Calcula o ângulo, garantindo que esteja dentro de 0 a 360
beta = (180 - theta * 6) % 360
# Desenha o padrão
for i in range(k):
    for j in range(N):
        t.forward((1 + j) * x)
        t.left(beta)
```

Perceba que, para construir o espirolateral, utilizamos informações simples, como a data de aniversário e a quantidade de letras do nome. A data de aniversário é usada para definir o ângulo θ. Como a variação do ângulo vai de 0° a 180°, dividimos esse intervalo em 30 partes, de modo que cada passo equivale a 6°. Já o número de letras do nome determina a ordem da figura.

2) Após construir o seu espirolateral, faça um estudo da figura e responda:

Nesta questão, vou usar minhas próprias informações como exemplo. Meu nome é *Matheus*, que possui 7 letras, e nasci em 06/02/2000. Assim, o espirolateral correspondente será representado por 7_{36}. O número k de ciclos utilizado foi 5.

a) O espirolateral obtido é fechado ou aberto?

O espirolateral 7_{36} é fechado.

b) De acordo com a regra de Krawczyk, com quantos ciclos (k) o espirolateral se fecha?

De acordo com a regra, temos que $\varphi = 36° \times 7 \times k = 252°k$. Queremos que φ seja um múltiplo de 360°, assim devemos determinar o mínimo múltiplo comum entre φ e 360°, logo o $mmc(360°, 252°k) = 2520°k$. Dividindo $252°k$ por $252°k$ chegamos que k = 10.

c) Se não for fechado, explique o motivo segundo a regra.

O espirolateral 7_{36} é fechado a partir de 5 ciclos, porém com 5 ciclos $\varphi = 1260°$, logo φ não é um múltiplo de 360°, portanto a regra não se aplica a esse espirolateral.

Referências

GARDNER, Martin. *Knotted doughnuts and other mathematical entertainments*. New York: W. H. Freeman, 1986.

GARDNER, Martin. *Mathematical games.* Scientific American, New York: Scientific American, v. 229, n. 5, p. 116-123B, 1973.

KRAWCZYK, Robert J. *Curving spirolaterals.* Bridges: Mathematical Connections in Art, Music, and Science, 2001, [s. l.]. Anais [...]. [s. l.: s. n.], 2001. p. 29-36.

KRAWCZYK, Robert J. *Spirolaterals, complexity from simplicity.* International Society of Arts, Mathematics and Architecture, [s. l.]: Citeseer, v. 99, p. 293-299, 1999.

KRAWCZYK, Robert J. *The art of spirolaterals.* The Millennial Open Symposium on the Arts and Interdisciplinary Computing, 2000, [s. l.]. Anais [...]. [s. l.: s. n.], 2000. p. 127-136.

NUNES, Matheus Vinicius. *Espirolaterais com Python*. 2025. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) – Universidade do Estado de Santa Catarina, UDESC, 2025.

ODDS, Frank C. *Spirolaterals.* The Mathematics Teacher, JSTOR, v. 66, n. 2, p. 121-124, 1973.

UDESC
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
JOINVILLE
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
BIBLIOTECA UNIVERSITÁRIA
REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT

ATESTADO DE VERSÃO FINAL

Eu, Fernando Deeke Sasse, professor do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, declaro que esta é a versão final aprovada pela comissão julgadora do Produto Educacional intitulado: Espirolaterais: Guia de atividades em sala de aula de autoria do acadêmico Matheus Vinicius Nunes.

Joinville, 09 de outubro de 2025.

Assinatura digital do orientador:

gov.br
Documento assinado digitalmente
FERNANDO DEEKE SASSE
Data: 09/10/2025 19:31:13-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Fernando Deeke Sasse