E-book

Como iniciar um projeto de preparação para OBMEP na minha escola?

Manual para professores e Gestores Escolares

PROFMAT

UFPA

José Diones Costa de Freitas
Edson Jorge de Matos

SUMÁRIO

PARTE I

1. APRESENTAÇÃO........ 1
2. POR QUE PREPARAR PARA A OBMEP?........ 2
3. ETAPAS PARA A IMPLEMENTAÇÃO DE UM PROJETO........ 3
3.1. Etapa 1: Pesquisa e Inspiração........ 3
3.2. Etapa 2: Planejamento e extruturação do Projeto........ 4
3.2.1. Definir o público-alvo........ 4
3.2.2. Definir objetivos claros........ 4
3.2.3. Selecionar os conteúdos e elaborar o cronograma das aulas........ 5
3.3. Etapa 3: Execução das Aulas........ 6
3.4. Etapa 4: Planejar ações de engajamento........ 7
3.5. Etapa 5: Formação docente, avaliação e resultados........ 8
3.5.1. Formação e mobilização docente........ 8
3.5.2. Avaliação e acompanhamento........ 8
3.5.3. Resultados possíveis 9
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS........ 10
5. REFERÊNCIAS........ 11

PARTE II

1. APRESENTAÇÃO........ 13
2. TÓPICOS ABORDADOS POR AULA........ 14
3. QUADRO COM DETALHAMENTO DAS AULAS........ 15
4. PROBLEMAS PARA UTILIZAR NA AULAS........ 16
5. SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS 40

QUESTÕES EDITÁVEIS

PARTE I

APRESENTAÇÃO

Este livro digital constitui-se como um produto educacional, resultado da dissertação de mestrado intitulada “Da inspiração à ação: Iniciativas de sucesso na preparação para a OBMEP e a experiência em São Miguel do Guamá – PA”. Seu objetivo é contribuir com professores e gestores escolares que ainda não possuem experiência com preparação olímpica e desejam iniciar um projeto voltado à preparação de seus estudantes para a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

O e-book está dividido em duas partes. A primeira apresenta orientações gerais sobre o processo de implementação de um projeto, destacando algumas etapas fundamentais. Já a segunda parte consiste em um material que pode ser impresso e utilizado na preparação dos estudantes do Nível 1 classificados para a 2ª fase, destaca-se que este material também pode ser útil na preparação de alunos do Nível 2, igualmente classificados para essa etapa. Além das soluções e discussões dos problemas propostos no material.

Ademais, o e-book inclui links de acesso direto a recomendações de pesquisa e ao material para uso com alunos (prontos para download e edição).

POR QUE PREPARAR PARA A OBMEP?

A OBMEP é a maior olimpíada estudantil do mundo e contribui significativamente para o desenvolvimento do pensamento matemático, lógico e analítico dos estudantes. Participar de forma efetiva exige preparação, motivação e organização. Essa combinação favorece a melhora no desempenho na própria OBMEP, incentiva a inclusão cientifica, desenvolve a capacidade de resolução de problemas e promove a valorização de estudantes e professores.

A implementação de um projeto de preparação olímpica aumenta as chances de conquistar medalhas, e de acordo com Nascimento et al. (2023), Moreira (2017) apresenta evidências de que a presença de alunos premiados pode influenciar positivamente o desempenho dos colegas não premiados da mesma turma.

A preparação também contribui de forma direta para a aprendizagem. De acordo com Leão (2020), disputas como a OBMEP podem gerar aumento intelectual, desenvolver a autonomia dos estudantes e apoio tanto ao trabalho individual quanto coletivo, aprofundando o conhecimento matemático do aluno. Ainda segundo Nascimento et al. (2023), a preparação para a OBMEP impacta o desempenho dos alunos em avaliações nacionais e internacionais, como o ENEM e o PISA. O autor também observa que essa preparação pode influenciar atitudes de estudantes e professores, afetando variáveis comportamentais que mantêm relação indireta com o aprendizado e o desempenho escolar.

Portanto, percebe-se que a preparação para a OBMEP não se restringe ao destaque de poucos alunos com facilidade em matemática, mas proporciona inúmeros benefícios para a aprendizagem de todos os estudantes.

ETAPAS PARA A IMPLEMENTAÇÃO DE UM PROJETO

Etapa 1: Pesquisa e Inspiração

Essa deve ser a primeira etapa, pois fundamenta todo o projeto, oferecendo referências práticas e teóricas que orientarão as demais ações. Conhecer experiências bem-sucedidas permite adaptar estratégias à realidade local e evita erros comuns. Além disso, proporciona inspiração e segurança aos envolvidos.

Recomenda-se, nesta etapa, realizar pesquisas no site da OBMEP, que frequentemente publica matérias e vídeos inspiradores com histórias de alunos e ex-alunos participantes da OBMEP. Também é importante buscar trabalhos acadêmicos que relatem experiências exitosas e, sempre que possível, visitar pessoalmente projetos implementados em escolas ou municípios vizinhos. Além disso, recomenda-se participar do curso “Como implementar um treinamento olímpico na minha escola?”, promovido pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

Sugestões de conteúdos para pesquisa:

• Site da OBMEP

• Experiência de Cocal dos Alves

Dissertação de Freitas (2025):
“Da inspiração à Ação: Iniciativas de Sucesso na Preparação para a OBMEP e a experiência em São Miguel do Guamá-PA”

• Dissertação de Badaró (2017):
“Do Zero Às Medalhas: Orientações Aos Professores De Cursos Preparatórios Para Olimpíadas De Matemática”

• Curso da SBM:
“Como implementar um treinamento olímpico na minha escola?”

Etapa 2: Planejamento e Extruturação do Projeto

O planejamento é a espinha dorsal do projeto e deve contemplar aspectos pedagógicos, logísticos, humanos e temporais. Nesta fase, recomenda-se identificar o público-alvo, definir objetivos claros, selecionar os conteúdos a serem trabalhados e elaborar um cronograma das aulas.

É importante que ocorra uma reunião entre professores e equipe gestora para que possa ser esclarecido os objetivos e benefícios do projeto, pois é fundamental o apoio e engajamento de todos.

- ### Definir o público-alvo

A definição do público-alvo deve considerar a realidade da escola, como:

• Disponibilidade dos professores;
• Condições do espaço físico;
• Recursos básicos (quadro, projetor, apostilas);
• Apoio da equipe gestora.

Sugere-se iniciar com alunos do Nível 1. À medida que a rede de apoio e o número de professores crescerem, o projeto pode ser expandido para os demais níveis. Esse início é importante, pois quanto mais cedo os estudantes começarem a preparação, maiores são as chances de se obter bons resultados com a continuação da preparação.

- ### Definir objetivos claros

Os objetivos devem ser realistas, mensuráveis e alinhados à realidade local. Alguns exemplos incluem:

• Conquistar a primeira medalha;
• Obter menções honrosas;
• Garantir que os alunos classificados para a 2ª fase estejam mais bem preparados;
• Promover o engajamento dos estudantes para que estudem matemática de forma autônoma;
• Aumentar o número total de premiações.

- Selecionar os conteúdos e elaborar o cronograma das aulas

É importante que a preparação tenha início antes da 1ª fase da OBMEP. Para isso, recomenda-se:

• Aplicar simulados periódicos;
• Inserir questões da OBMEP durante as aulas regulares;
• Reservar momentos específicos para discussão de problemas desafiadores, contribuindo para o aprofundamento da aprendizagem.

Para a 2ª fase é essencial:

• Definir datas e frequência dos encontros, que podem ocorrer semanalmente no contra turno ou aos sábados, conforme a disponibilidade dos envolvidos;
• Montar um cronograma com base nos tópicos mais recorrentes nas provas anteriores;
• Trabalhar com questões anteriores da 1ª fase sem utilizar as alternativas, além das questões da 2ª fase;
• Incluir períodos de revisão e simulados.
• Além de recomendar aos estudantes o estudo idependente, apresentando-lhes os sites escpecializados como o Portal da OBMEP e o POTI.

Etapa 3: Execução das Aulas

Esta etapa é o coração do projeto, onde todo o planejamento se transforma em ação concreta. Recomenda-se realizar encontros semanais com atividades práticas e teóricas, apresentando problemas e explorando, sempre que possível, diferentes estratégias de resolução.

É fundamental incentivar os alunos a redigir suas respostas, descrevendo o processo que levou ao resultado. É natural que no início encontrem dificuldades, por isso é importante estimulá-los a verbalizar seus raciocínios, como uma forma de transição gradual do pensamento falado para o escrito, que será aprimorado ao longo das aulas.

Outro ponto essencial é a socialização das resoluções. Cada aluno deve ser incentivado a compartilhar suas observações sobre os problemas propostos, destacando e relacionando dados relevantes, mesmo que não tenha chegado a uma resposta final. Aqueles que obtiverem uma solução, podem compartilhá-la destacando o com caminho percorrido para alcançá-la.

Além disso, é recomendável aplicar simulados periódicos para diagnosticar avanços e dificuldades. Os alunos que se destacarem podem receber materiais complementares, como forma de incentivo e aprofundamento. Para facilitar a comunicação e o compartilhamento de material, pode-se criar um grupo de WhatsApp com os estudantes envolvidos no projeto ou com seus responsáveis.

Etapa 4: Planejar ações de engajamento

A OBMEP é uma competição na qual poucos alcançam a premiação, que ocorre apenas uma vez por ano. Nesse sentido, é necessário desenvolver ações que possam motivar e manter os alunos engajados. Sugere-se implementar estratégias de premiações internas, como:

• premiação para os mais bem classificadospara a 2ª fase, por nível;
• premiação para os alunos que obtiverem maior média nos simulados;
• emissão de certificados de participação;
• criação de mural na escola com homenagem aos alunos classificados para a 2ª fase;
• realização de gincanas ou olimpíadas internas.

Esses são alguns exemplos de medidas que podem ser adotadas para incentivar os alunos.

A aproximação da família nesse processo é essencial e pode ser iniciada após a classificação dos alunos para a 2ª fase, pois esse será um momento de maior dedicação. Essa aproximação é fundamental para que os alunos se sintam apoiados e motivados. Contudo, é importante conscientizar os familiares para que não façam cobranças excessivas por resultados, evitando criar expectativas e pressões. O aluno pode sentir-se pressionado para obter resultados e, caso não alcance a premiação desejada, frustrar-se.

É importante sempre destacar o ganho educacional e pessoal proporcionado pela participação ativa na preparação, ressaltando que a obtenção de premiação é uma consequência desse processo e que virá com o tempo.

Etapa 05: Formação docente, avaliação e resultados

- ### Formação e mobilização docente

A formação docente é uma etapa essencial para o êxito do projeto. É importante que o professor busque se aprimorar, na medida do possível, participando de cursos ou encontros formativos que contribuam para sua prática. Podem resolver e analisar questões de provas anteriores, por nível. Também é fundamental conhecer o funcionamento da OBMEP, os programas associados, as plataformas e materiais didáticos destinados a preparação olímpica.

Ao ter acesso a esses materiais sugere-se o compartilhamento com os colegas professores, afim de estimular a criação de projetos semelhantes em escolas próximas, ampliando e disseminando a cultura de preparação olímpica e formando uma rede de apoio entre os professores. A formação continuada fortalece o papel do professor como mediador do processo de preparação.

- ### Avaliação e acompanhamento

Monitorar os resultados é fundamental para garantir a continuidade e a melhoria do projeto. A partir desse acompanhamento, é possível rever os objetivos relacionados à conquista de premiações. Esse monitoramento pode ser realizado por meio da aplicação de avaliações diagnósticas e simulados. Vale destacar que avaliar não significa apenas mensurar resultados, mas também identificar caminhos para aperfeiçoamento e consolidação da cultura olímpica na escola.

- Resultados possíveis

Com a aplicação do projeto, pode-se alcançar resultados importantes para os envolvidos, tais como:

• Estudantes mais motivados e autônomos no processo de aprendizagem da matemática;

• alunos classificados para a 2ª fase mais preparados;
• premiações como menção honrosa, medalhas e posterior participação no PIC Jr;

• criação de uma cultura olímpica na escola, já que a OBMEP pode abrir portas para a participação em outras competições estudantis;

• melhoria do desempenho em avaliações como o SAEB.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A construção de uma cultura de preparação para a OBMEP exige tempo, comprometimento e planejamento. No entanto, os resultados que se colhem vão muito além de medalhas e premiações; trata-se de investir em uma formação matemática mais sólida, crítica e significativa. Acredita-se que, com ações bem estruturadas e consistentes, é possível despertar o interesse dos alunos, melhorar a autoestima escolar, promover a inclusão científica e alcançar resultados concretos na OBMEP.

É notório que não existe uma fórmula pronta para melhorar a participação dos alunos e das escolas na OBMEP. Cada escola ou município deve construir seu caminho de acordo com suas particularidades. Contudo, é importante ter um ponto de partida, e este e-book, ao reunir orientações práticas e materiais didáticos voltados à preparação de estudantes do Nível 1, oferece um possível ponto de partida para professores e gestores que desejam dar os primeiros passos nessa jornada e serve de base para a preparação de estudantes dos outros dois níveis.

A seguir, apresenta-se a segunda parte deste e-book, que consiste na sugestão de cronograma e conteúdo para um curso de preparação para a 2ª fase, nível 1, podendo também incluir alunos do nível 2. Que este material possa inspirar novas iniciativas, fortalecer redes de colaboração entre escolas e professores e ampliar o acesso de nossos estudantes à vivência matemática desafiadora e transformadora que a OBMEP proporciona.

REFERÊNCIAS

BADARÓ, Ronei Lima. Do Zero às Medalhas: ORIENTAÇÕES AOS PROFESSORES DE CURSOS PREPARATÓRIOS PARA OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal da Bahia, 2015.

COMO MONTAR UM PROJETO DE OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA NA MINHA ESCOLA. Sociedade Brasileira de Matemática. Online, [s.d.]. Curso [recurso eletrônico]. Disponível em: https://cursos.sbm.org.br/. Acesso em: 15 mar. 2024.

LEÃO, Francisco Araújo de Almeida. A metodologia contextualizada da OBMEP no processo de ensino-aprendizagem. 2020. 61 f. Dissertação (Mestrado Profissional

NASCIMENTO, Vitor Henrique Gomes do. et. al. Impacto da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) nas motivações acadêmicas de professores e alunos de escolas públicas do Recife. Contribuciones a Las Ciencias Sociales, São José dos Pinhais, v. 16, n. 10, p. 20083-20102, 2023. DOI: 10.55905/revconv.16n.10-086.

OBMEP. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Apresentação. [S.l.]: OBMEP, [s.d.]. Disponível em: http://www.obmep.org.br/apresentacao.htm. Acesso em: 04 dez. 2024.

OBMEP. OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS. Provas da OBMEP (pf1n1 e pf2n1 – 2023; pf1n1 e pf2n1 – 2019; pf1n1 e pf2n1 – 2018; pf1n1 e pf2n1 – 17; pf1n1 – 2016). Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas.htm. Acesso em: 21 jun. 2024.

PARTE II

APRESENTAÇÃO

Esta etapa consiste em um cronograma com sugestão de tópicos a serem trabalhados, acompanhado de um material que pode ser impresso e entregue aos estudantes para trabalhar nas aulas. O cronograma e as questões aqui apresentados foram utilizados durante o curso intitulado “Aprimorando Talentos”, aplicado na Escola Padre Leandro Pinheiro, em São Miguel do Guamá-PA, no ano de 2024.

Destaca-se que, assim como muitas outras escolas e municípios, a cidade de São Miguel do Guamá e a Escola Padre Leandro não possuíam um histórico de preparação olímpica nem resultados expressivos na OBMEP, o município nunca conquistou uma medalha. Portanto, foi necessária uma abordagem introdutória que preparasse os estudantes conforme o nível identificado.

As aulas seguintes estão organizadas em 10 encontros, período disponível para a aplicação do projeto em 2024, cada encontro teve a duração de 2h15. Entretanto, cada professor pode ampliar a quantidade e duração encontros utilizando o mesmo material ou complementando-o.

As primeiras aulas trabalham com problemas do Quebra-cabeças da OBMEP, permitindo que os alunos se familiarizem com a prática de analisar e resolver problemas; depois, abordam problemas da 1ª fase da OBMEP, apresentados sem as alternativas, e finalizam com problemas da 2ª fase. O material é composto apenas por problemas, mas sugere-se que o professor faça uma revisão no início de cada aula, conforme indicado no quadro de detalhamento das aulas (página 15).

TÓPICOS POR AULA

- Aula 01 – Apresentação e resolução de problemas que não exigiam pré-requisitos.
- Aula 02 – Números naturais, paridade e operações básicas.
- Aula 03 – Múltiplos, divisores, critérios de divisibilidade e números primos.
- Aula 04 – Área e perímetro.
- Aula 05 – Resolução de problemas das aulas anteriores;
- Aula 06 – Igualdade.
- Aula 07 – Frações.
- Aula 08 – Padrões e sequências lógicas, medidas de comprimento, potenciação.
- Aula 09 – Simulado.
- Aula 10 – Encerramento.

QUADRO COM O DETALHAMENTO DAS AULAS

Data	Aulas	Conteúdos
	Aula 01	Apresentação da OBMEP, do projeto e de técnicas de resolução de problemas. Quebra-cabeça da OBMEP. Resolução de problemas da OBMEP dos anos anteriores.
	Aula 02	Revisão: Números naturais, paridade e operações básicas. Quebra-cabeças de Matemática. Resolução de problemas da OBMEP dos anos anteriores.
	Aula 03	Revisão: Múltiplos, divisores, critérios de divisibilidade e números primos. Quebra-cabeças de Matemática. Resolução de problemas da OBMEP dos anos anteriores.
	Aula 04	Revisão: Área e perímetro. Resolução de problemas da OBMEP dos anos anteriores.
	Aula 05	Resolução de problemas da OBMEP dos anos anteriores.
	Aula 06	Revisão sobre Igualdade. Resolução de problemas da OBMEP dos anos anteriores.
	Aula 07	Revisão de frações. Resolução de problemas da OBMEP dos anos anteriores.
	Aula 08	Revisão: Padrões e sequências lógicas, medidas de comprimento, potenciação. Resolução de problemas da OBMEP dos anos anteriores.
	Simulado	Quebra-cabeças da OBMEP (editado) e problemas da OBMEP dos anos anteriores.
	Encerramento	Entrega dos certificados de participação e coquetel de encerramento.

PROBLEMAS PARA UTILIZAR NAS AULAS

Aula 01

Quebra-cabeças de Matemática

DIVIDINDO EM PARTES

Lucas fez o desenho ao lado em uma folha de papel, entregou um palito para Isabel e lançou o seguinte desafio:

De que maneira você pode colocar este palito em cima desta figura dividindo-a em 3 partes?

Agora que você sabe dividirem 3 a figura, como você faria para dividi-la em 6 usando 2 palitos?

CASINHAS NOVAS

Marcelo adotou dois cachorros e dois gatos:

Ele comprou quatro casinhas e definiu qual seria a de cada um. Depois, identificou cada casinha com os nomes correspondentes e observou que:

No primeiro dia, as quatro casinhas foram ocupadas, mas só um dos animais ocupou a casinha correta e foi um cachorro;

No segundo dia, as quatro casinhas foram ocupadas, mas só um dos animais ocupou a casinha correta, mas desta vez foi um gato.

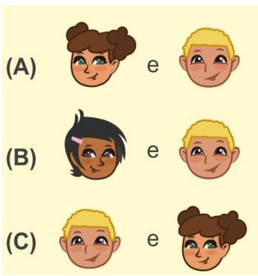
Qual casinha pertence a cada um dos animais?

____
____
____
____
____

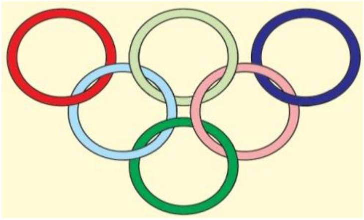
Resolução de problemas da OBMEP de anos anteriores

01. (OBMEP 2023 – 1f) As idades de três crianças são 7, 8 e 9 anos. Na figura, vemos a resposta de cada uma delas, quando perguntadas sobre suas idades. A criança com 8 anos foi a única que mentiu.

A criança mais velha e a criança mais nova são, nessa ordem:

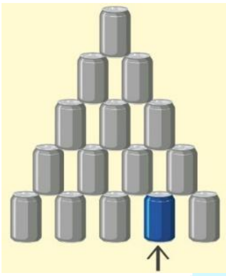


02. (OBMEP 2016 – 1f) Os anéis da figura estão entrelaçados. Qual é o menor número de anéis que devem ser cortados para que todos fiquem soltos?



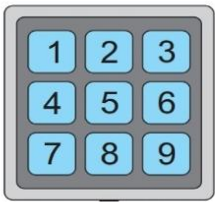
____
____
____
____
____

03. (OBMEP 2023 – 1f) Joana só pode retirar uma lata da pilha se não houver nenhuma lata apoiada sobre ela. Qual é o menor número de latas que ela precisa retirar antes de pegar a lata azul indicada pela seta?



____
____
____
____
____

04. (OBMEP 2019 – 1f) A senha de Aurélio é 5149. Ele está tão acostumado com essa senha que a digita sem olhar para o teclado. Certo dia, quando foi digitar sua senha, não percebeu que o teclado estava girado de 180°, ou seja, de cabeça para baixo. Qual foi o número que ele digitou?

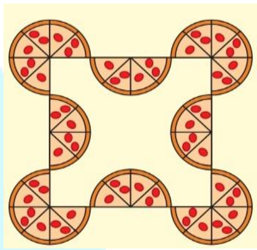


____
____
____
____

05. (OBMEP 2019 – 1f) Ana, Beatriz, Cláudia, Daniela e Érica foram visitar a vovó margarida. Beatriz chegou antes de Ana e depois de Daniela. Já Cláudia, Daniela e Érica chegaram uma em seguida da outra, nessa ordem. Quem foi a primeira a chegar?

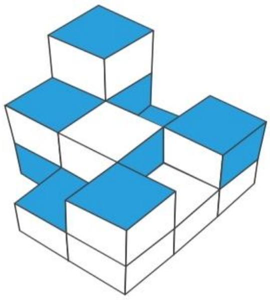
____
____
____
____
____
____

06. (OBMEP 2019 – 1f) A figura abaixo foi formada com pizzas de mesmo tamanho, cada uma dividida em oito pedaços iguais. Quantas pizzas inteiras é possível formar com esses pedaços?



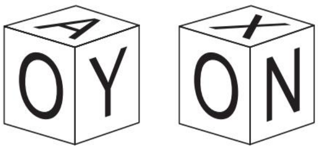
____
____
____
____
____

07. (OBMEP 2023 – 1f) José empilhou 14 cubos com faces brancas ou azuis, conforme mostra a figura. Quantos desses cubos podem ter todas as faces azuis?



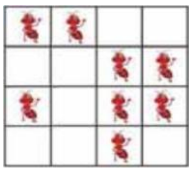
____
____
____
____
____
____

08. (OBMEP 2019 – 1f) A figura mostra duas vistas de um mesmo cubo com as letras A, O, Y X, N e E em suas faces. Qual é a face oposta a face de letra E?



09. (OBMEP 2017 – 1f) Zequinha tem três dados iguais, com letras O, P. Q R, S e T em suas faces. Ele juntou esses dados como na figura, de modo que as faces em contato tivessem a mesma letra. Qual é a letra na face oposta à que tem a letra T?

10. (OBMEP 2022 – 1f) Na figura, as formiguinhas podem se movimentar na horizontal, na vertical ou diagonalmente. Qual é a menor quantidade de formiguinhas que devem mudar de posição para que, em cada linha e em cada coluna, fiquem somente duas formiguinhas?



11. (OBMEP 2016 – 1f) Em uma brincadeira, a mãe de João e Maria combinou que cada um deles daria uma única resposta correta a três perguntas que ela faria.

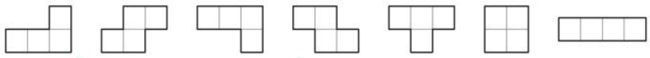
Ela perguntou: Que dia da semana é hoje?
- Hoje é quinta, disse João.
- É sexta, respondeu Maria.

Depois perguntou: Que dia da semana será amanhã?
- Segunda, falou João.
- Amanhã será domingo disse Maria.

Finalmente ela perguntou: Que dia da semana foi ontem?
- Terça, respondeu João.
- Quarta, disse Maria

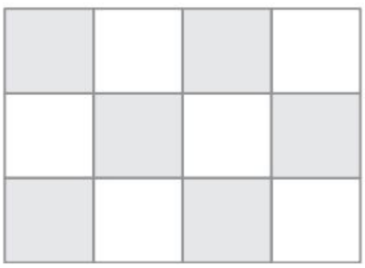
Em que dia da semana a brincadeira aconteceu?

12. (OBMEP 2018 – 2f) Marilia tem sete peças de madeira, como ilustrado abaixo



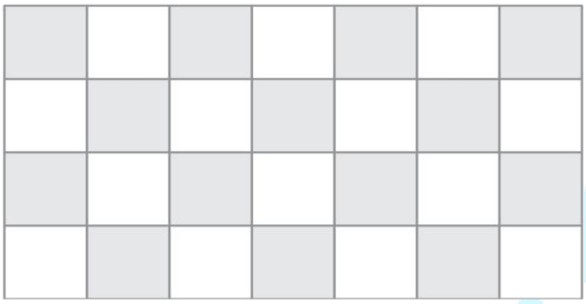
Ela brinca de cobrir todas as casas de tabuleiros retangulares com essas peças, sem colocar uma peça sobre outra. Cada peça deve cobrir exatamente 4 casas do tabuleiro veja como Marilia cobriu um tabuleiro 2 x6:

a) Cubra o tabuleiro abaixo usando três peças de Marilia



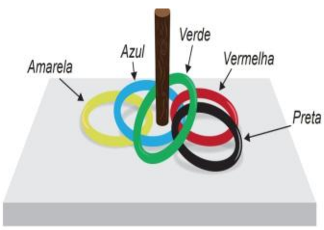
b) Qual peça não cobre o mesmo número de casas brancas e casas cinzas de um tabuleiro?

c) Explique por que Marilia nunca irá conseguir cobrir o tabuleiro abaixo.



13. (OBMEP 2019 – 2f) Marcelo lança cinco argolas em um pino de madeira, uma de cada vez. Quando a argola acerta o pino, ele ganha pontos, conforme a tabela abaixo. Quando a argola não acerta o pino, ele não ganha pontos. A figura mostra cinco lançamentos feitos por Marcelo, em que somente as argolas azul e verde acertaram pino. Observe que argola verde foi a última lançada, pois ficou sobre as outras.

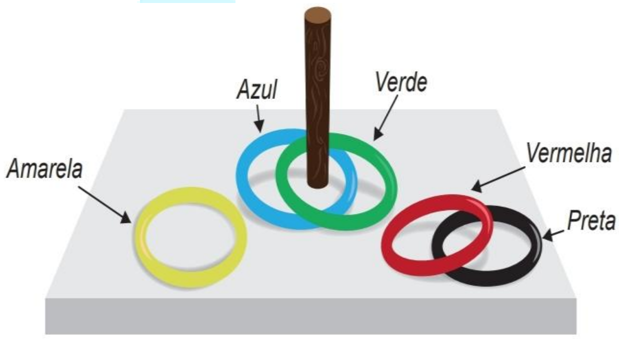
Número do lançamento	Número de pontos
1º	10
2º	5
3º	3
4º	1
5º	1



a) Quantos pontos Marcelo fez com os cinco lançamentos mostrados na figura acima?

b) Em outros cinco lançamentos, Marcelo só errou um deles e fez 17 pontos. Qual foi o número do lançamento que ele errou?

c) A figura abaixo mostra como ficaram outros cinco lançamentos feitos por Marcelo. Se a terceira argola lançada foi a vermelha, qual é a maior pontuação que ele pode ter obtido nesses lançamentos?



Aula 02

Quebra-cabeças de Matemática

Quantas pulseiras?

No planeta Zepoide habitam monstros de 3 ou 5 braços.

Certo dia, 20 monstros foram a uma loja de artesanato e encomendaram uma pulseira para cada um de seus braços. O dono da loja fez algumas contas e concluiu que deveria produzir 77 pulseiras.

Como podemos explicar ao dono da loja que seus cálculos estão errados?

Jogo de dardos

Andreia ganhou um jogo de dardos e convidou suas amigas Bárbara e Vitória para jogar. As regras eram:

- A pontuação de cada lançamento tinha de ser igual ao número na região que o dardo acertasse;

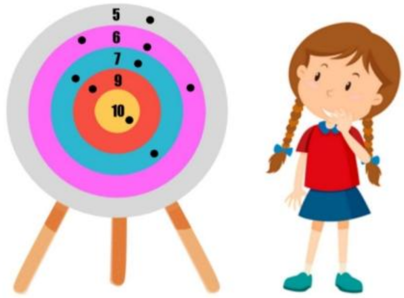
- Cada jogadora podia realizar três lançamentos;

- A pontuação total da cada jogadora era a soma dos pontos nos três lançamentos

No final do jogo, cada uma das três amigas ficou com 21 pontos e as posições dos dardos no alvo foram:

Andreia conseguiu 15 pontos somados em seus dois primeiros lançamentos e primeiro lançamento de Vitória foi de 5 pontos.

Quem atingiu o centro do alvo?



Cactos e Suculentas

Ana, Bento, Carlos, Mariela e Nicole passeavam pela cidade quando avistaram diversos vasinhos de cactos e suculentas numa floricultura.

Nesse momento, cada um fez o seguinte comentário:

- Bento: "Tenho 8 vasinhos em casa";

- Mariela: "Tenho a metade da quantidade de vasinhos que Bento tem';

- Nicole: "Tenho o triplo da quantidade de vasinhos que Mariela tem";

- Carlos: "Tenho a mesma quantidade de vasinhos de Mariela e Nicole juntas";

- Ana: 'Tenho a metade da quantidade de vasinhos que Nicole tem";

Quem tem a menor quantidade de vasinhos? E quem tem a maior?

Resolução de problemas da OBMEP de anos anteriores

14. (OBMEP – Simulado) Caetano fez cinco cartões, cada um com uma letra na frente e um número atrás. As letras formam a palavra OBMEP e os números são 1, 2, 3, 4 e 5. Observe os quadrinhos e responda: qual é o número atrás do cartão com a letra M?

15. (OBMEP 2017 – 1f) Em uma mesa há nove cartões numerados de 1 a 9. Ana e Beto pegaram três cartões cada um. A soma dos números dos cartões de Ana é 7 e a soma dos números dos cartões de Beto é 23. Qual é a diferença entre o maior e o menor dos números dos três cartões deixados sobre a mesa?

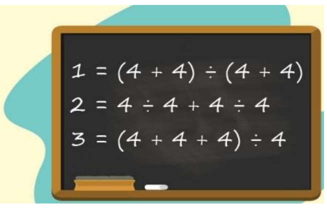
16. (OBMEP 2023 – 1f) José comprou uma calça na loja Ala e uma camisa na loja Beta. Luís comprou uma calça na loja Beta e uma camisa na loja Gama. Os preços aparecem na tabela abaixo. Quanto Luís gastou a mais do que José?

	Loja Alfa	Loja Beta	Loja Gama
Calça	R$ 80,00	R$ 90,00	R$ 85,00
Camisa	R$ 70,00	R$ 65,00	R$ 60,00

17. (OBMEP 2018 – 1f) Os edifícios A e B da figura não possuem janelas em suas laterais e têm o mesmo número de janelas na parte de trás. O edifício A tem mais janelas na frente do que atrás; já o edifício B tem mais janelas atrás do que na frente. Qual é o número total de janelas nos dois edifícios?

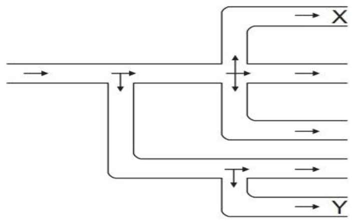
18. (OBMEP 2018 – 1f) Joaozinho escreveu os números 1, 2 e 3 como resultados de operações envolvendo exatamente quatro algarismos 4, como na figura. Ele continuou até o número 8, como nas 1alternativas abaixo, mas cometeu um erro. Em qual das alternativas ele errou?

A) $4 = 4 + (4 - 4) \times 4$
B) $5 = (4 \times 4 + 4) \div 4$
C) $6 = 4 + 4 \div 4 + 4$
D) $7 = 44 \div 4 - 4$
E) $8 = 4 + 4 + 4 - 4$



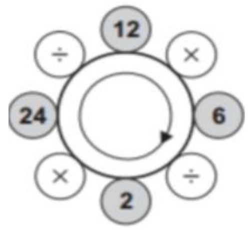
19. (OBMEP 2018 – 1f) Sílvia e Renato vão fazer 60 biscoitos cada um. Eles começam a fazer os biscoitos ao mesmo tempo. A cada minuto Sílvia faz 5 biscoitos, enquanto Renato faz 3. Quantos biscoitos Renato ainda deverá fazer depois que Sílvia terminar sua tarefa?

20. (OBMEP 2017 – 1f) Na rede de distribuição de água representada abaixo, a água passa pelos canos como indicado pelas setas e se distribui igualmente em cada ramificação. Em uma hora passaram 200 mil litros de água pela saída X. Quantos litros de água passaram pela saída Y nessa mesma hora?



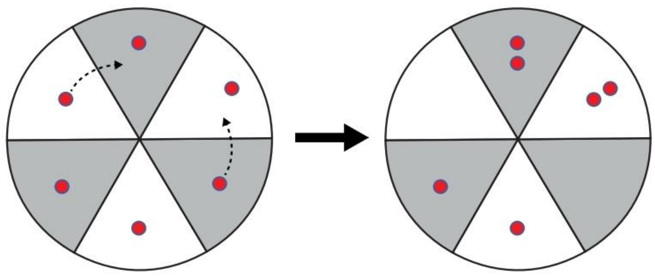
21. (OBMEP 2022 – 1f) A primeira fase da OBMEP é composta por três provas, de níveis 1, 2 e 3, com 20 questões em cada prova. Nessas provas, três questões são comuns aos três níveis, duas são comuns somente aos níveis 1 e 2 e outras duas são comuns somente aos níveis 2 e 3. As demais questões só aparecem em uma das provas. Quantas questões diferentes aparecem nas três provas da primeira fase da OBMEP?

22. (OBMEP – Simulado) partindo do número 2 na figura e fazendo as quatro contas no sentido da flecha o resultado é 12, porque 2 x 24 = 48, 48 ÷ 12 = 4, 4 x 6 = 24 e 24 + 2 = 12. Se fizermos a mesma coisa partindo do maior número que aparece na figura, qual será o resultado?

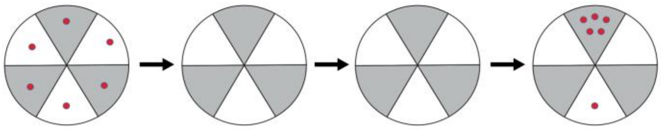


23. (OBMEP 2023 – 2f) Um tabuleiro circular é dividido em seis setores iguais pintados alternadamente de cinza e branco. inicialmente há uma bolinha em cada setor. As bolinhas são movimentadas em etapas obedecendo as seguintes regras:

- escolhemos duas bolinhas quaisquer;
- em seguida deslocamos uma dessas bolinhas para o setor vizinho no sentido horário e, simultaneamente, deslocamos a outra bolinha para o setor vizinho no sentido anti-horário



a) Indique na figura abaixo como chegar ao tabuleiro final em três etapas.



b) Explique por que, partindo do tabuleiro inicial e após qualquer número de etapas, a quantidade total de bolinhas em todos os setores brancos é sempre ímpar.

____
____
____
____
____
____

c) Explique por que é impossível, partindo do tabuleiro inicial, colocar todas as bolinhas em um mesmo setor

____
____
____
____
____
____
____
____
____

24. (OBMEP 2018 – 2f) Joaozinho comprou um álbum em que figurinhas numeradas devem ser coladas em ordem crescente, começando na página 2 e terminando na página 61. Nas páginas pares devem ser coladas 5 figurinhas impares, 6 figurinhas.

a) No total, quantas figurinhas devem ser coladas no álbum?

____
____
____
____
____
____

b) Em qual página deve ser colada a figurinha de número 196?

____
____
____
____
____
____
____
____

c) Para completar seu álbum, Joãozinho comprou muitos pacotes de figurinhas. Após colar a última figurinha que faltava, o número de figurinhas repetidas era oito vezes o número de figurinhas coladas. Se o álbum custou 20 reais e cada pacote com 5 figurinhas custou 2 reais, quanto Joaozinho gastou para ter seu álbum completo?

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

Aula 03

Quebra-cabeças de Matemática

Desafio dos primos

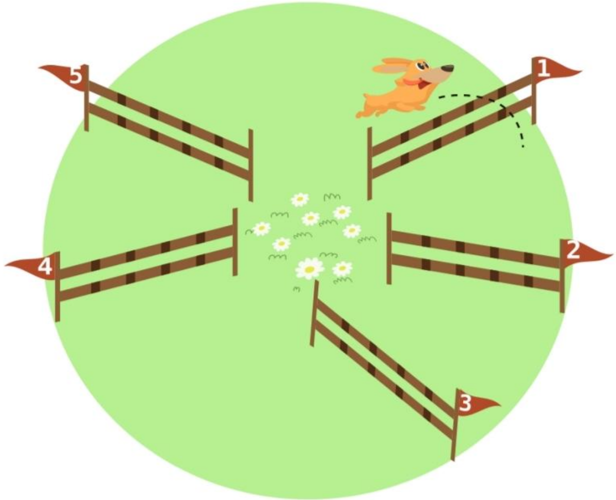
Este é um jogo com fichas numeradas de 1 a 10, como se vê abaixo.

Por exemplo:

Como você organizaria todas as fichas de acordo com as regras do jogo?

Salto de Obstáculos

O cachorro Totó adora participar da competição de salto de obstáculos. A figura abaixo mostra que há 5 obstáculos. Os competidores devem saltar no sentido horário, começando pelo obstáculo 1.



Totó conseguiu fazer 129 saltos.

Qual foi o último obstáculo que Totó saltou?

Resolução de problemas da OBMEP de anos anteriores

25. (OBMEP 2019 – 1f) No Planeta Pemob as semanas têm 5 dias: Aba, Eba, Iba, Oba e Uba, nessa ordem. Os anos são divididos em 6 meses com 27 dias cada um. Se o primeiro dia de um certo ano foi Eba, qual foi o último dia desse ano?

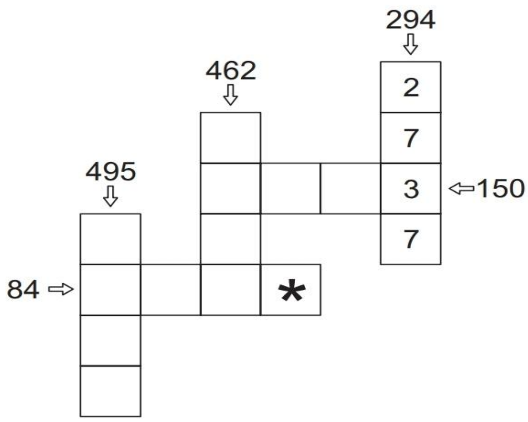
26. (OBMEP 2016 – 1f) Isabel escreveu em seu caderno o maior número de três algarismos que é múltiplo de 13. Qual é a soma dos algarismos do número que ela escreveu?

____
____
____
____
____
____
____

27. (OBMEP 2023 – 1f) Nove amigos comeram 5 pizzas, algumas cortadas em 6 fatias e outras cortadas em 8 fatias. Todos comeram o mesmo número de fatias e não sobrou nada. Quantas fatias cada um comeu?

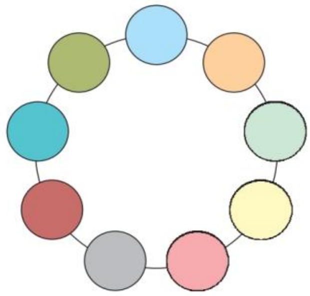
____
____
____
____
____
____
____

28. (OBMEP 2019 – 1f) As casas da figura abaixo devem ser preenchidas com números primos. Em cada linha ou coluna, o produto dos números deve ser igual ao número indicado pela seta. A coluna indicada por 294 já está preenchida. Qual é o número que deve ser escrito na casa marcada com *?

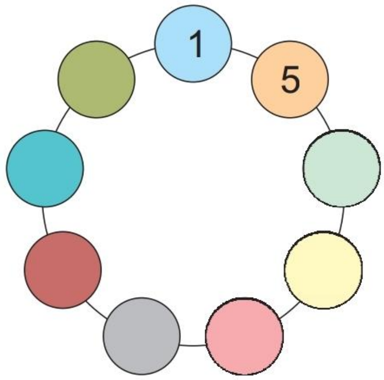


29. (OBMEP 2019 – 2f) Os números da tabela abaixo serão colocados nos círculos coloridos de modo que nenhum deles apareça mais de uma vez e a soma dos números em três círculos consecutivos seja sempre um múltiplo de 3.

Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3
1	2	3
4	5	6
7	8	9



a) Complete o preenchimento abaixo



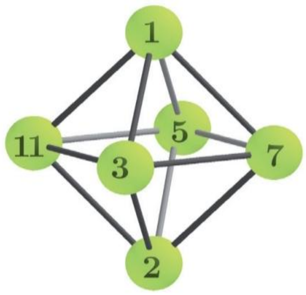
b) Explique por que, em qualquer preenchimento, três círculos consecutivos sempre serão preenchidos com números de colunas diferentes da tabela.

____
____
____
____
____
____
____
____
____

c) Quantos preenchimentos diferentes são possíveis?

____
____
____
____
____
____
____
____

30. (OBMEP 2017 – 2f) Um objeto foi construído com doze varetas iguais e seis bolinhas numeradas com 1, 2 3, 5, 7 e 11, como na figura. Uma formiguinha caminha pelas varetas, passeando de bolinha em bolinha, a partir de uma bolinha inicial. Quando termina um passeio, ela multiplica todos os números das bolinhas que visitou e obtém um número para esse passeio. Por exemplo, ao final do passeio 3 -> 1 -> 3 -> 2 -> 3 -> 11 -> 1 ela obtém 3 x 1 x 3 x 2 x 3 x 11 x 1 = 594.



a) Descreva um passeio no qual a formiguinha obtém, ao final, o número 45.

____
____
____
____
____

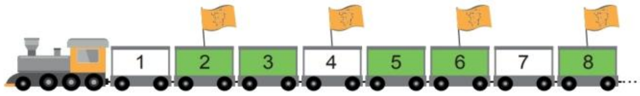
b) Explique por que a formiguinha nunca vai conseguir obter o número 52 ao final de um passeio.

____
____
____
____
____
____
____
____
____

c) Explique por que a formiguinha nunca vai conseguir obter o número 40 ao final de um passeio.

____
____
____
____
____
____
____
____

31. (OBMEP 2023 – 2f) A figura mostra os primeiros vagões do trenzinho da OBMEP. O primeiro vagão é branco, seguido de dois verdes, depois outro branco, seguido de dois verdes, e assim por diante. Além disso, em cada vagão de número par há uma bandeirinha.



a) Qual é o número do primeiro vagão branco com bandeirinha após o vagão de número 8?

____
____
____
____
____
____
____

b) Qual é a cor do vagão de número 2023?

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

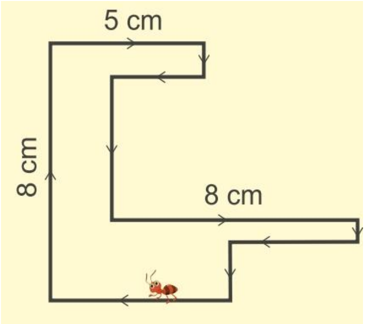
c) Quantas bandeirinhas há em vagões brancos até o vagão de número 2023?

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

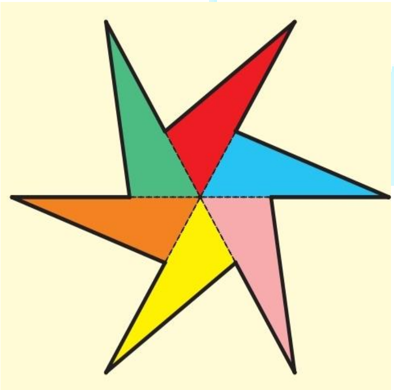
Aula 04

Resolução de problemas da OBMEP de anos anteriores

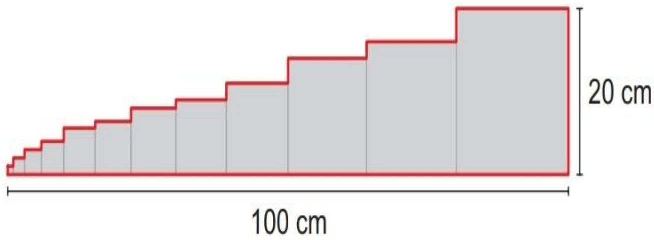
32. (OBMEP 2023 – 1f) Uma formiga percorreu o trajeto indicado na figura, formado por segmentos verticais e horizontais, começando e terminando no mesmo ponto. Quantos centímetros ela andou?



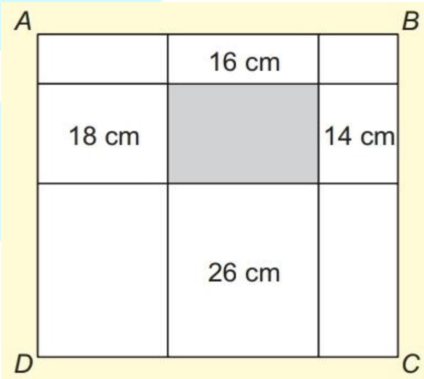
33. (OBMEP 2016 – 1f) A figura foi construída com triângulos de lados 3 cm, 7 cm e 8 cm. Qual é perímetro da figura?



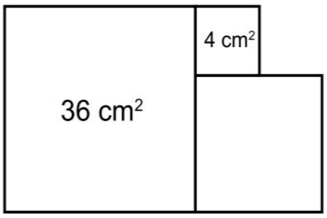
34. (OBMEP 2017 – 1f) Vários quadrados foram dispostos um ao lado do outro, em ordem crescente de tamanho, formando uma figura com 100 cm de base. O lado do maior quadrado mede 20 cm. Qual é o perímetro (medida do contorno em vermelho) da figura formada por esses quadrados?



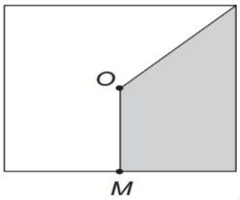
35. (OBMEP 2016 – 1f) O retângulo ABCD foi dividido em nove retângulos menores, alguns deles com seus perímetros indicados na figura. O perímetro do retângulo ABCD é 54 cm. Qual é o perímetro do retângulo cinza?



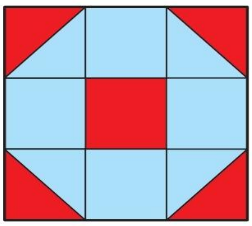
36. (OBMEP 2022 – 1f) A figura abaixo é formada por três quadrados. A área do maior deles é 36 cm² e a área do menor é 4 cm²? Qual é a área do terceiro quadrado?



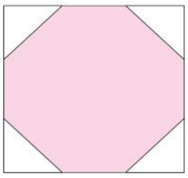
37. (OBMEP 2017 – 1f) A figura mostra um quadrado de centro O e área 20 cm². O ponto M é o ponto médio de um dos lados. Qual é a área da região sombreada?



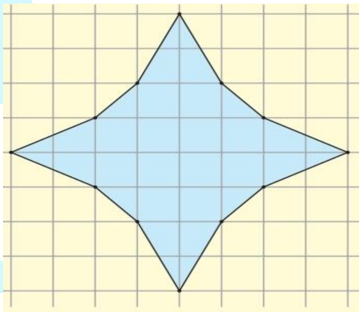
38. (OBMEP 2019 – 1f) O quadrado abaixo está dividido em nove quadradinhos iguais. A área pintada de vermelho mede 6 cm². Quanto mede a área pintada de azul?



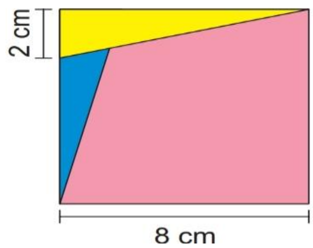
39. (OBMEP 2018 – 1f) A área da figura destacada em rosa é 28 cm² e seus vértices dividem os lados do quadrado em três partes. iguais. Qual é a área do quadrado?



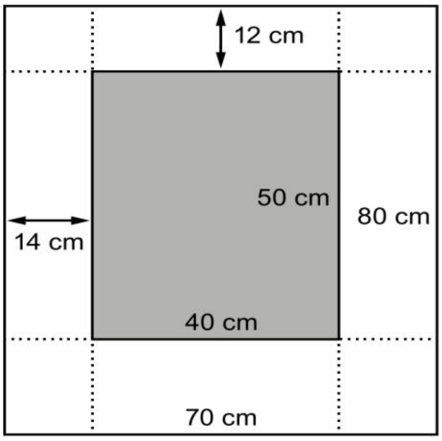
40. (OBMEP 2017 – 1f) A área da figura azul é igual à soma das áreas de quantos quadradinhos do quadriculado?



41. (OBMEP 2019 – 1f) O quadrado abaixo está dividido em dois triângulos e um quadrilátero. O triângulo amarelo tem o dobro da área do triângulo azul. Qual é a área do quadrilátero rosa?

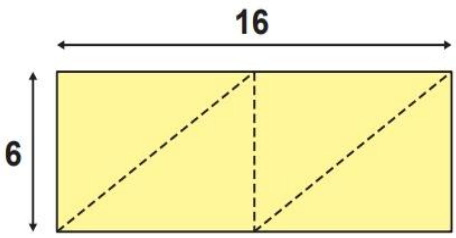


42. (OBMEP 2022 – 1f) Alice colocou uma folha de papel cinzento de lados 40 cm e 50 cm em cima de uma folha branca de lados 7O cm e 80 cm como indicado na figura. Em seguida ela dobrou a folha branca em cima da cinzenta pelas linhas pontilhadas. Qual é a área da parte cinzenta que não ficou coberta?



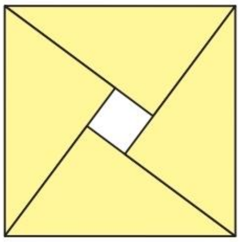
____
____
____
____
____
____
____
____

43. (OBMEP 2022 – 2f) Janaina cortou uma cartolina retangular de 16 cm de comprimento e 6 cm de largura em quatro triângulos retângulos iguais, conforme mostra a figura.



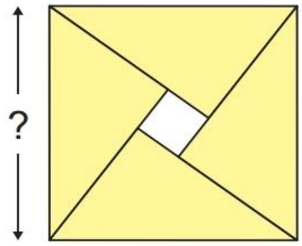
____
____
____
____
____
____
____
____

b) Em seguida, Janaina usou os quatro triângulos para montar um quadrado com um buraco no seu interior, conforme mostrado na figura. Qual é a área do buraco?



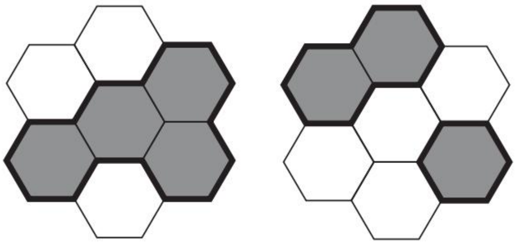
____
____
____
____
____
____
____

c) Quanto mede o lado do quadrado que Janaina montou?

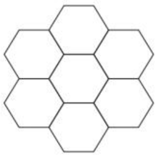


____
____
____
____
____
____
____

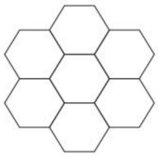
44. (OBMEP 2023 – 2f) Em um tabuleiro, formado por sete hexágonos de lado 1 cm, podemos fazer figuras diferentes pintando de cinza um ou mais desses hexágonos. Dizemos que o perímetro de uma dessas figuras é comprimento total de seu contorno. Por exemplo, as duas figuras ao lado possuem perímetros iguais a 16 cm.



a) Em cada um dos tabuleiros abaixo, pinte três hexágonos formando figuras com os perímetros indicados.

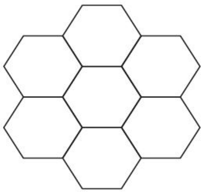


Perímetro 12 cm



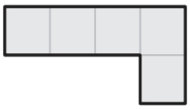
Perímetro 18 cm

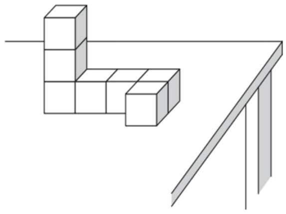
b) Pinte quatro hexágonos no tabuleiro ao lado formando uma figura que tenha o maior perímetro possível



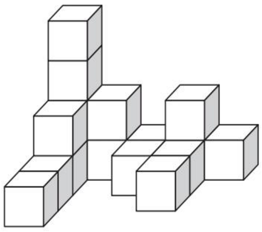
c) Explique por que qualquer figura formada por hexágonos pintados tem perímetro par.

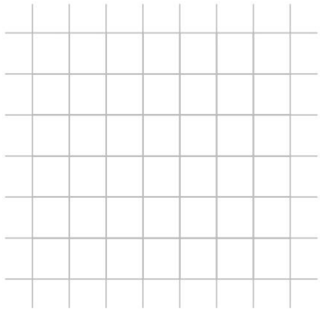
45. (OBMEP 2017 – 2f) Janaína junta cubinhos de modo que as faces em contato coincidam completamente. Ela montou a peça ao lado sobre uma mesa e observou que as faces em contato com a mesa deixaram a seguinte marca:





a) Acrescentando mais dez cubinhos à peça sobre a mesa, Janaina obteve a peça abaixo. Desenhe no quadriculado a marca que essa nova peça deixa sobre a mesa.

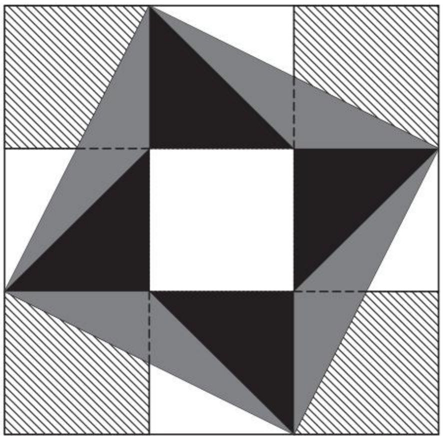




b) Qual é o menor número de cubinhos que Janaina deve acrescentar à peça da figura do item **a)** para que a marca deixada sobre a mesa pela nova peça seja uma região quadrada?

c) A partir da peça do item **a)**, Janaina acrescentou o menor número possível de cubinhos até completar um cubo. Quantos cubinhos ela teve que acrescentar desta vez?

46. (OBMEP 2016 – 2f) A figura ao lado foi desenhada sobre um quadriculado formado por nove quadradinhos cada um com área igual a 4 cm².



a) Qual é a área total pintada de preto?

____

____

____

____

____

____

____

____

____

b) Qual é a área total listrada?

____

____

____

____

____

____

____

____

____

c) Qual é a área total pintada de cinza?

____

____

____

____

____

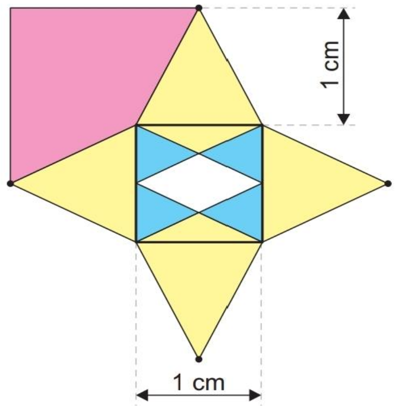
____

____

____

____

47. (OBMEP 2019 – 2f) Na figura, o quadrado tem lado 1 cm. Os quatro triângulos azuis são iguais, assim como os dois triângulos amarelos menores. Os quatro triângulos amarelos maiores têm, cada um deles, base igual ao lado do quadrado, altura com relação a essa base igual a 1 cm, e seus outros dois lados com mesma medida. Dois lados do quadrilátero rosa são paralelos aos lados do quadrado.



a) Qual é a área da região formada pelos triângulos azuis?

____

____

____

____

____

____

____

b) Qual é a área da região formada pelos triângulos amarelos?

____

____

____

____

____

____

____

c) Qual é a área do quadrilátero rosa?

____

____

____

____

____

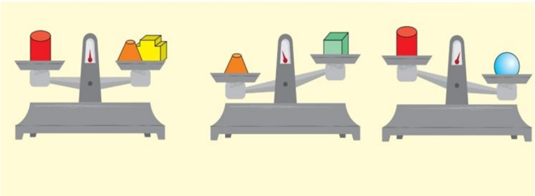
____

____

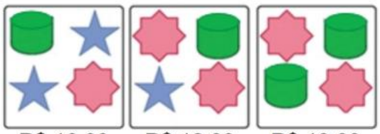
Aula 06

Resolução de problemas da OBMEP de anos anteriores

48. (OBMEP 2017 – 1f) Nas balanças da figura, objetos iguais têm pesos iguais. Qual dos objetos é o mais pesado?



49. (OBMEP 2016 – 1f) Na figura vemos três cartelas com quatro adesivos e seus respectivos preços. O preço de uma cartela é a soma é a dos preços de seus adesivos.

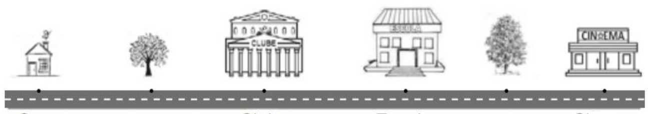


Qual é o preço da cartela abaixo com seis adesivos?

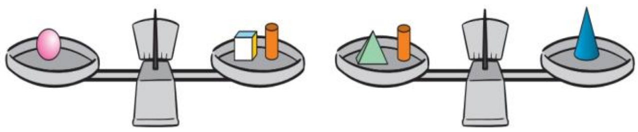
50. (OBMEP 2019 – 1f) Qual é o número que está escondido pelo borrão?

$17 - 3 = 20 - 16 +$ 

51. (OBMEP 2022 – 1f) Miguel saiu de casa, foi para a escola, voltou para o clube, foi para o cinema e voltou para casa, andando sempre pela rua representada na figura. Neste caminho existem duas árvores e a distância entre elas é de 900 m. Uma das árvores está na metade do caminho entre a casa e o clube e a outra árvore está na metade do caminho entre a escola e o cinema. Quantos metros Miguel andou?

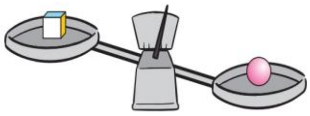


52. (OBMEP 2019 – 2f) Paulinho tem peças com cinco formas diferentes (cubos, pirâmides, esferas, cilindros e cones). Peças com a mesma forma têm o mesmo peso (massa). Ele coloca algumas peças numa balança de pratos e observa o equilíbrio nas duas abaixo.



a) Indique se as figuras abaixo representam situações certas ou erradas.

( ) certa
( ) errada



( ) certa
( ) errada

____
____
____
____
____
____

b) Qual das figuras abaixo representa a situação correta?

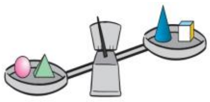


Figura A

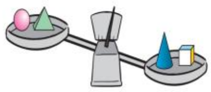


Figura B

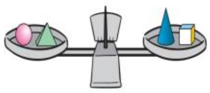
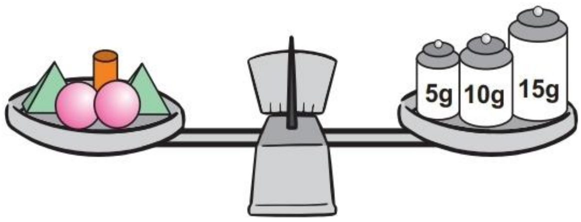


Figura C

Justificativa:

____
____
____
____
____
____
____
____
____

c) Com alguns pesos conhecidos, Paulinho observou a situação de equilíbrio abaixo. Quanto pesam, juntos, um cubo, uma pirâmide, uma esfera, um cilindro e um cone?



Justificativa:

____
____
____
____
____
____
____
____
____

53. (OBMEP 2022 – 2f) No tabuleiro cada letra da palavra OBMEP representa um número inteiro de 1 a 5. Letras diferentes representam números diferentes. Além disso, cada número escrito na lateral do tabuleiro é a soma dos valores das letras da linha horizontal correspondente.

O	O	O	O	4
B	B	O	B	7
M	E	B	O	10
E	P	O	B	12

a) Encontre o valor da letra O.

____
____
____
____
____
____
____

b) Encontre o valor da letra B.

____
____
____
____
____
____

c) Encontre o valor da letra M.

____
____
____
____
____
____
____
____
____

d) Qual é a letra que representa o número 5?

____
____
____
____
____
____

Aula 07

Resolução de problemas da OBMEP de anos anteriores

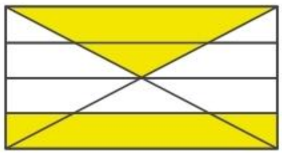
54. (OBMEP 2017 – 1f) Para obter tinta de cor laranja, devem-se misturar 3 partes de tinta vermelha com 2 partes de tinta amarela. Para obter tinta de cor verde, devem-se misturar 2 partes de tinta azul com 1 parte de tinta amarela. Para obter tinta de cor marrom, deve-se misturar a mesma quantidade de tintas laranja e verde. Quantos litros de tinta amarela são necessários para obter 30 litros de tinta marrom?

55. (OBMEP 2023 – 1f) Em uma cidade, 1/4 da população tem pelo menos uma bicicleta. Dentre os que têm bicicleta, 1/3 tem mais do que uma. Qual fração da população tem apenas uma bicicleta?

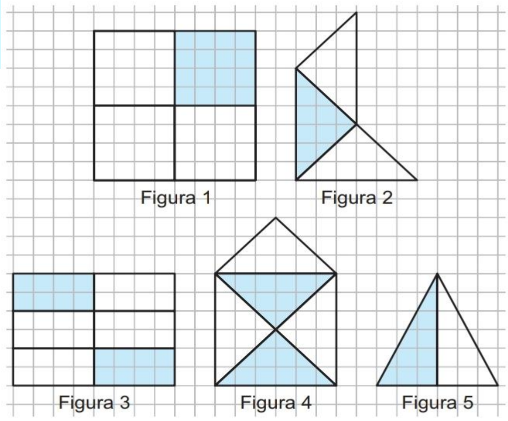
56. (OBMEP 2023 – 1f) Antônio, Benedito e Carlos colecionam figurinhas.0 número de figurinhas de Antônio é igual a 4/5 do número de figurinhas de Benedito O número de figurinhas de Carlos é igual a 3/4 do número de figurinhas de Benedito. Dos três amigos, quem tem mais e quem tem menos figurinhas nossa ordem?

57. (OBMEP 2018 – 1f) Luísa pagou R$ 4,50 por 3/8 de um bolo, e João comprou o resto do bolo. Quanto João pagou?

58. (OBMEP 2023 – 1f) Os segmentos horizontais dividem o retângulo da figura em quatro faixas de mesma largura. A área da região amarela corresponde a qual fração da área do retângulo?



59. (OBMEP 2018 – 1f) Na Figura 1 a área pintada corresponde a da área ¼ do total. Em qual figura a fração correspondente à área pintada é a maior?



60. (OBMEP 2019 – 1f) Janaina tem três canecas, uma pequena, uma média e uma grande. Com a caneca pequena cheia, ela enche 3/5 da caneca média. Com a caneca média cheia, ela enche 5/8 da caneca grande. Janaína enche as canecas pequena e média e despeja tudo na caneca grande. O que vai acontecer com a caneca grande?

61. (OBMEP 2019 – 1f) Qual das expressões abaixo tem valor **diferente** de 15/4?

A) $15 \times \frac{1}{4}$

B) $\frac{15+15+15}{4+4+4}$

C) $\frac{3}{4}+3$

D) $\frac{10}{2}+\frac{5}{2}$

E) $\frac{3}{2} \times \frac{5}{2}$

62. (OBMEP 2017 – 2f) André, Bernardo e Carlos retiraram de um pacote, respectivamente, $\frac{1}{2}, \frac{2}{7}, \frac{1}{14}$ do total de doces de um pacote.

a) Quem retirou o menor número de doces?

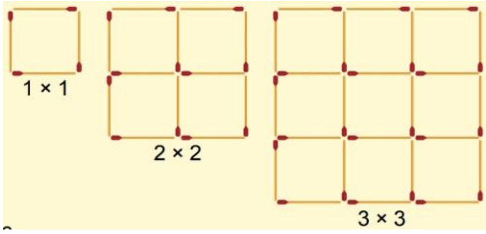
b) A quantidade de doces que restou no pacote corresponde a que fração do total?

c) André deu 15 doces a Carlos e ficou com o mesmo número de doces que Bernardo. Quantos doces havia inicialmente no pacote?

Aula 08

Resolução de problemas da OBMEP de anos anteriores

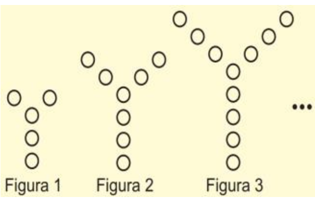
63. (OBMEP 2022 – 1f) Marcelo usa palitos para fazer quadriculados como na figura. Para fazer um quadriculado 1 x 1, ele usa 4 palitos; para fazer um quadriculado 2 X 2 ele usa 12 palitos, e assim por diante. Quantos palitos ele precisará para fazer um quadriculado 5 x 5?



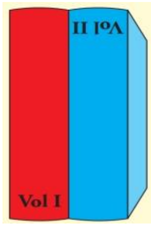
64. (OBMEP 2022 – 1f) Duas placas de sinalização foram colocadas no inicio de uma ponte sobre um rio. Uma placa indica a largura máxima permitida e a outra, o peso máximo permitido para os veículos que pretendem passar por ela. Qual dos caminhões a seguir pode passar por essa ponte?

a) O que pesa 4300 kg e tem largura de 3,3 m.
b) O que pesa 4305 kg e tem largura de 3,15 m.
c) O que pesa 4250 kg e tem largura de 3,3 m.
d) O que pesa 4400 kg e tem largura de 3,25 m.
e) O que pesa 4290 kg e tem largura de 3,2 m.

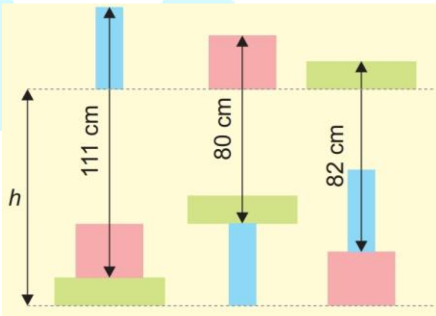
65. (OBMEP 2019 – 1f) Observe a sequência de figuras abaixo, todas elas com a forma da letra Y. Seguindo este padrão, quantas bolinhas terá a 15º figura?



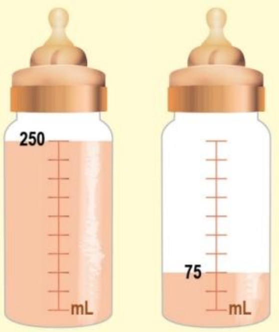
66. (OBMEP 2019 – 1f) Dois livros estão em uma prateleira. O Volume 1 está na posição correta, mas o Volume II está de cabeça para baixo. Cada capa tem espessura de 0,25 centímetros, e cada livro, sem as capas, tem espessura de 5 centímetros. Nessa disposição, qual a distância entre a última página do é Volume I e a última página do Volume II?



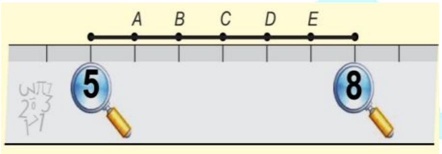
67. (OBMEP 2019 – 1f) Na figura, os lados dos retângulos são horizontais ou verticais, e os retângulos de mesma cor são idênticos. Qual é o valor de h?



68. (OBMEP 2018 – 1f) Na figura vemos a mamadeira de Zezé antes e depois de ele mamar. Quantos mililitros ele mamou?



69. (OBMEP 2016 – 1f) José dividiu um segmento de reta em seis partes iguais. Ele observou que os pontos das extremidades do segmento correspondem às marcas de 5 cm e 8 cm de sua régua. Qual dos pontos corresponde à marca de 6 cm da régua?



70. (OBMEP 2022 – 2f) Uma régua de 30 cm é graduada em milímetros com marcações grandes, médias e pequenas, como indicado na figura.

a) Qual é a distância, em milímetros, entre a 11ª marcação pequena e a 3ª marcação média?

b) Quantas marcações pequenas tem a régua inteira?

c) Qual é a marcação que está a 73 milímetros de distância da 215º marcação pequena? Justifique sua resposta.

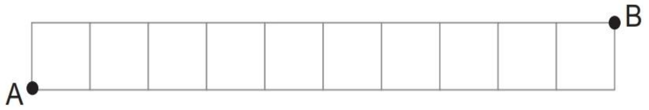
71. (OBMEP 2022 – 2f) Alice, Beatriz e Cláudia moram em uma rua de 200 metros de comprimento Alice mora no início da rua, Beatriz a 80 metros de Alice e Cláudia no final da rua. Elas se encontram de vez em quando, sempre partindo de suas casas.

a) Qual é a soma das distâncias que Alice e Beatriz percorrem quando elas se reúnem na casa de Cláudia?

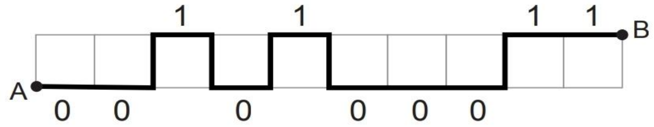
b) Se Alice, Beatriz e Cláudia se encontrarem na rua a 150 metros do seu início, qual será a soma das distâncias que elas percorrerão?

c) As três amigas decidem se encontrar em algum ponto da rua tal que a soma das distâncias percorridas por elas seja a menor possível. A quantos metros do início da rua elas devem se encontrar?

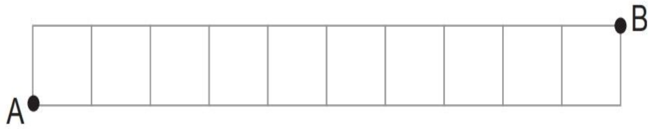
72. (OBMEP 2023 – 2f) A formiguinha da OBMEP caminha do ponto A até ponto B ao longo dos lados dos 10 quadradinhos da figura abaixo.



Ela só pode andar para a direita, para cima ou para baixo, sem passar por onde já passou. Para representar um caminho, ela inventou o seguinte código: para cada quadradinho, da esquerda para a direita, se ela passar por baixo, escreve 0 e se passar por cima, escreve 1. Na figura a seguir observamos o caminho representado por 0010100011.

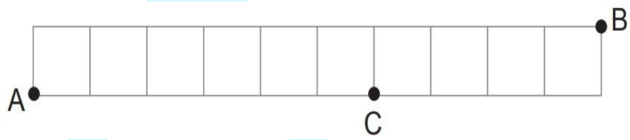


a) Desenhe o caminho representado por 1001001100.



b) De quantas maneiras diferentes a formiguinha pode ir de A até B?

c) De quantas maneiras diferentes a formiguinha pode ir de A até B passando pelo ponto C?



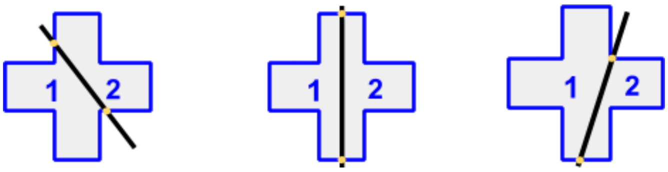
SOLUÇÃO DOS PROBLEMAS

DIVIDINDO EM PARTES

Discussão

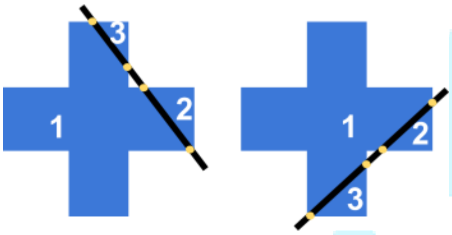
Primeiro, Isabel recebeu o desafio de colocar um palito em cima da figura para dividi-la em 3 partes.

Se Isabel colocar o palito sobre a figura, de modo que ele intercepte seu contorno apenas em 2 pontos, ela não conseguirá dividi-la de acordo com o que foi pedido. Observe os exemplos abaixo:



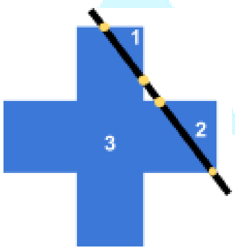
Mas, se o palito interceptar o contorno em 4 pontos, ela conseguirá dividir a figura em 3 partes, pois, dessa forma, 2 partes dele se separarão do restante.

Abaixo, apresentamos duas soluções diferentes:



O segundo desafio é dividir a figura em 6 partes, utilizando 2 palitos.

Para começar, vamos fixar o primeiro palito, dividindo a figura em 3 partes.



Se Isabel colocar o outro palito, de modo que ele intercepte o contorno da figura em 2 pontos (Imagem 1) ou em 4 pontos (Imagem 2), ainda assim, ela não conseguirá dividir a figura em 6 partes. Veja abaixo:

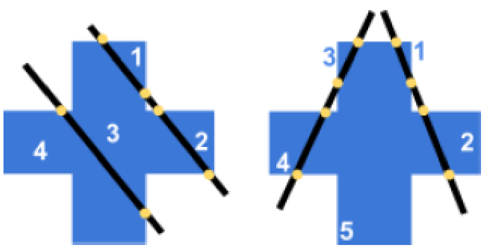
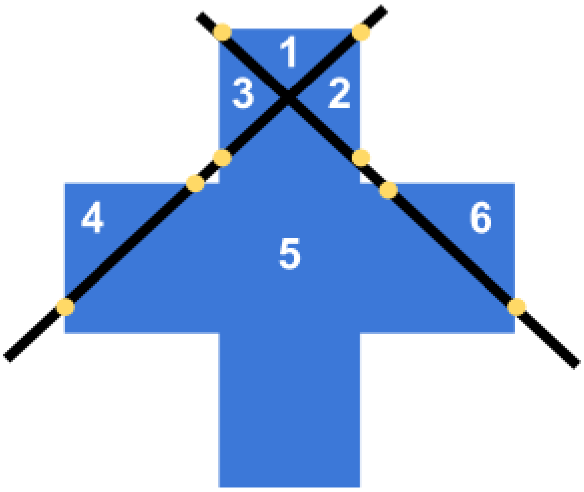


Imagem 1 Imagem 2

Em ambos os casos ela não conseguiu dividir a figura em 6. Assim, para obter 6 partes, basta que um palito intercepte o outro, dividindo uma delas em 2 partes, como mostra a imagem abaixo.



CASINHAS NOVAS

Discussão

Iniciaremos a discussão lembrando os nomes dos animais.

Observemos a casinha que cada animal ocupou no primeiro dia.

1° dia

Sabemos que, neste dia, dos quatro animais, apenas um cachorro ocupou a casinha correta. Assim, os dois gatos e um cachorro ficaram em casinhas erradas.

Agora, vamos verificar a casinha que cada animal ocupou no segundo dia.

2° dia

Sabemos que, dos quatro animais, apenas um gato ocupou a casinha correta. Assim, como Nick continuou na mesma casinha do dia anterior, podemos concluir que a casinha de teto laranja pertence à Mel.

Como, no primeiro dia, o gato Nick ficou na casinha de teto amarelo, e apenas um cachorro estava certo, podemos concluir que sua casinha é a de teto verde.

Assim, a casinha do cachorro Ivo é a de teto amarelo.

Portanto, a casinha correspondente a cada animal é:

Resolução de problemas da OBMEP de anos anteriores

01. (OBMEP 2023 – 1f) – ALTERNATIVA B

Solução: Como a única criança que mentiu é a que tem 8 anos, a criança que diz que não tem 8 anos está mentindo,

pois qualquer uma das outras duas que disser que não tem 8 anos está dizendo a verdade. Como as outras duas

estão falando a verdade, a que diz que não tem 9 anos tem 7 anos e a que diz que não tem 7 anos tem 9 anos.

Assim, a mais velha é a que diz que não tem 7 anos e a mais nova é a que diz que não tem 9 anos.

Outra solução: Analisemos a criança que diz “Não é 8”. Há só duas possibilidades: ou ela mente ou fala a verdade.

1) Se ela diz a verdade, sua idade só pode ser 7 ou 9 anos.

Se for 7, alguém deve ter 8 anos. Suponha que seja a criança de cabelo preto. Nesse caso a de cabelo preto estaria

dizendo a verdade, mas sua idade é 8 anos, uma contradição, pois quem tem 8 anos mente. Analogamente, se a

criança de 8 anos for a de cabelo loiro, ela estaria dizendo a verdade, novamente uma contradição.

Do mesmo modo, se a idade de quem diz “Não é 8” for 9 anos, uma das outras duas crianças teria 8 anos e estaria

falando a verdade, contradição.

2) Se ela mente, então tem 8 anos. Como só há uma pessoa mentirosa, as outras duas falam a verdade; a de cabelo

preto tem 9 anos e a de cabelo loiro tem 7.

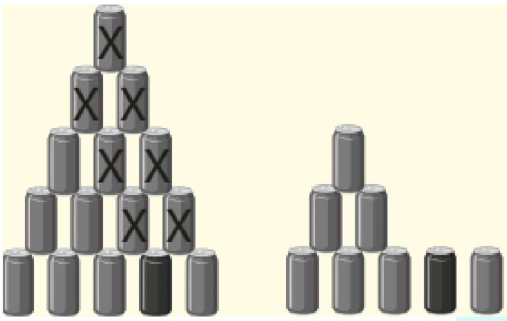
02. (OBMEP 2016 – 1f) – Solução

Observando como os anéis estão entrelaçados, vemos que não é possível soltar todos os seis anéis cortando apenas um deles. De fato, cortando só o vermelho, só ele se solta; o mesmo acontece se cortarmos só o verde claro, só o azul escuro ou só o verde escuro. Cortando o azul claro, soltam-se ele e o vermelho, e, cortando o rosa, soltam-se ele e o azul escuro.

Como há quatro anéis que estão soltos entre si (vermelho, verde claro, azul escuro e verde escuro), cortando os outros dois (azul claro e rosa), todos os seis anéis vão ficar soltos. Assim, o número mínimo de anéis que devem ser cortados para que todos fiquem soltos é 2.

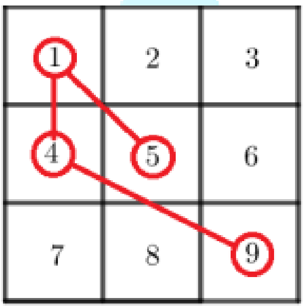
03. (OBMEP 2023 – 1f) – Solução

Para Joana retirar uma lata da pilha, ela deve, antes, retirar todas as outras latas que se apoiam na primeira, sempre que houver latas apoiadas. Há duas latas apoiadas na lata azul, as quais, por sua vez, são apoio de outras duas latas, e assim por diante até se chegar à lata do topo da pilha. Note que, apesar de a lata azul estar na camada mais inferior da pilha, nem todas as latas das camadas superiores precisam ser retiradas, pois não se apoiam na lata azul, nem em uma lata que se apoia na azul. Por isso, as latas marcadas com um X devem ser removidas antes de se remover a lata azul.

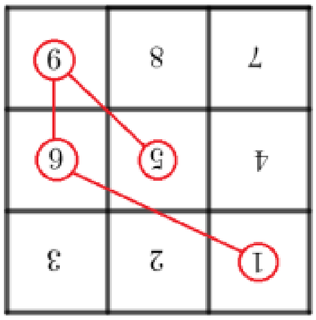


04. (OBMEP 2019 – 1f) – Solução

Como Aurélio está acostumado a digitar sua senha sem olhar para o teclado, ele basicamente digita pelas posições. Começa pela tecla central, vai para quina superior da esquerda, desce uma posição e, em seguida, termina na quina inferior da direita, conforme o diagrama abaixo:



Rodando o teclado 180o e repetindo o movimento indicado pela figura acima, ele só pode ter digitado da seguinte maneira:



5961

Portanto, dentre as alternativas apresentadas, a única que pode representar o número digitado por Aurélio é a que aparece na letra B, 5961.

05. (OBMEP 2019 – 1f) – Solução

Vamos pensar nas netas como as letras A, B, C, D e E e descrever a ordem em que elas chegaram como uma sequência dessas letras, lida da esquerda para a direita. O enunciado nos diz que nessa sequência

1. O B está à esquerda do A (Beatriz chegou antes de Ana);

2. O B está à direita do D (Beatriz chegou depois de Daniela);

3. O bloco CDE aparece sem letras intermediárias e com as letras nessa ordem (Cláudia, Daniela e Érica chegaram uma em seguida da outra, nessa ordem).

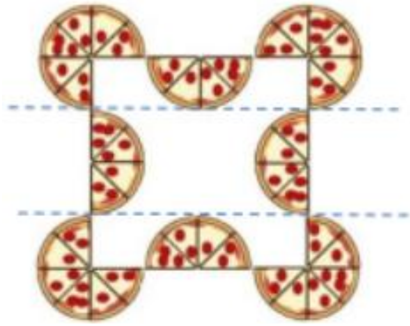
As informações 2 e 3 mostram que o B aparece à direita do bloco CDE, e a informação 1 diz que o A está à direita do B. A nossa sequência é, então, CDEBA, e concluímos que a primeira a chegar foi Cláudia.

06. (OBMEP 2019 – 1f) – Solução

Há várias formas de se determinar quantas pizzas foram utilizadas para formar a figura. Por exemplo, contando os pedaços temos 24 + 16 = 40 pedaços e, como cada pizza é dividida em oito pedaços, temos 40 ÷ 8 = 5 pizzas.

Outra solução: Outra forma de se determinar isso é observar, na figura, que temos 4 metades de pizzas e mais 4 três quartos de pizzas; como 4 metades é igual a duas pizzas $(4 \times \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2)$ e 4 três quartos é igual a três pizzas $(4 \times \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3)$, o total de pizzas utilizado foi de 2 + 3 = 5 pizzas.

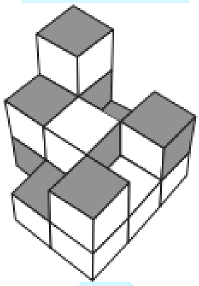
Outra solução: Uma terceira forma de se determinar quantas pizzas foram utilizadas é olhar para a figura e imaginar três linhas horizontais de pizzas; basta observar que na primeira linha podemos formar 2 pizzas inteiras, na segunda linha, 1 pizza e, na terceira linha, 2 pizzas, totalizando 2 + 1 +2 = 5 pizzas inteiras.



07. (OBMEP 2023 – 1f) – Solução

Na camada inferior, há 4 cubos que podem ter todas as suas faces azuis. Dois deles possuem uma de suas faces visíveis e dois deles estão completamente escondidos.

Na camada intermediária há somente um cubo que pode ter suas faces todas azuis. O cubo do topo não pode ter todas as suas faces azuis. Logo, há 5 cubos que podem ter todas as suas faces azuis.

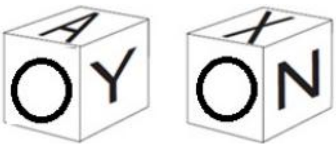


Podemos também descontar dos 14 cubos os 9 que mostram ao menos uma face branca

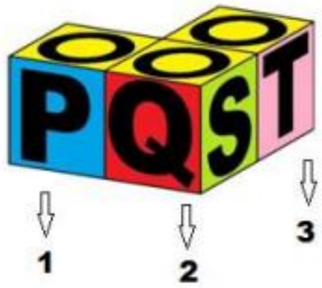
(14 – 9 = 5).

08. (OBMEP 2019 – 1f) – Solução

As duas figuras indicam que as faces com as letras A, Y, X e N compartilham um lado em comum com a face de letra O. Isso não ocorre com a face oposta à que tem a letra O. Assim, a face com o O é oposta à de letra E.



09. (OBMEP 2017 – 1f) – Solução



Como as letras **P, Q, S** e **T** estão visíveis na ilustração, essas são as faces adjacentes à face com a letra **O**, e a face oposta à letra **O** é a face com a letra **R**.

As faces em contato entre os dados 1 e 2 não podem ser **P** (visível na ilustração do dado 1), nem **Q** ou **S** (visíveis na ilustração do dado 2). Portanto, tem que ser **T**. Olhando para o dado 2, concluímos que a face com **S** é oposta à face com **T**.

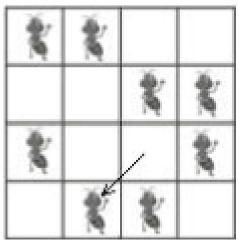
Outra solução:

A letra **O** possui quatro faces vizinhas com as letras **P, Q, S** e **T.**

Primeiramente observe que Zequinha juntou o dado 2 com o dado 3 pela face **P**, pois esta mesma face não pode estar na junção do dado 2 com o dado 1, que possui a face **P** visível. Logo, os dados 1 e 2 foram juntados pela face **T**. Assim, **S** e **T** são faces opostas, o que responde à questão. É claro também que **P** é oposta a **Q**, bem como **R**, que não aparece na ilustração, é oposta a **O**.

10. (OBMEP 2022 – 1f) – Solução

Alguma formiguinha deve mudar de posição, pois a terceira linha e a terceira coluna do tabuleiro têm mais de duas formigas. Para que fiquem em cada linha e em cada coluna exatamente duas formigas, basta movimentar a formiga como ilustrado ao lado.



11. (OBMEP 2016 – 1f) – Solução

A tabela abaixo indica o que João e Maria dizem a respeito do dia da brincadeira (hoje, no diálogo) em cada pergunta:

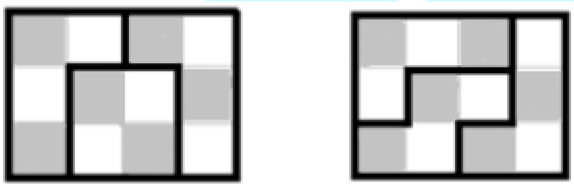
Pergunta	João	Maria
Primeira	quinta	sexta
Segunda	domingo	sábado
Terceira	quarta	quinta

Como, pelo enunciado, João e Maria deram a resposta correta exatamente uma vez, concluímos que a brincadeira aconteceu em uma quinta-feira.

Outra solução: Observamos que a resposta correta de João foi para a primeira pergunta "Que dia da semana é hoje?". As outras duas respostas de João não podem ser verdadeiras, pois implicariam que todas as respostas de Maria estariam erradas. De fato, se a resposta correta de João fosse para a pergunta "Que dia da semana será amanhã?", ou seja, se o dia seguinte fosse uma segunda-feira, a conversa teria ocorrido em um domingo e o dia anterior seria um sábado, confirmando que as três respostas de Maria estariam erradas. Conclusão análoga é encontrada se a resposta correta de João fosse para a pergunta "Que dia da semana foi ontem?". Portanto, a conversa ocorreu em uma quinta-feira.

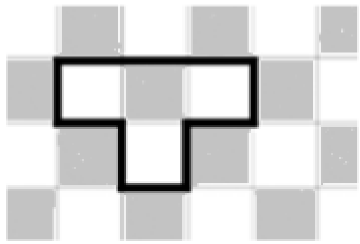
12. (OBMEP 2018 – 2f) – Solução

a) Há diversas maneiras de cobrir o tabuleiro usando três das sete peças. Aqui estão duas delas:

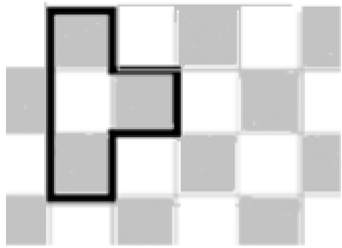


b) A única peça que não cobre o mesmo número de casas brancas e casas cinzas é a peça com o formato da letra T. As demais peças sempre cobrem duas casas brancas e duas casas cinzas.

Exemplo em que a peça em formato de "T" cobre 3 casas brancas e 1 casa cinza



Exemplo em que a peça em formato de "T" cobre 1 casa branca e 3 casas cinzas



c) O tabuleiro tem 28 casas, 14 brancas e 14 cinzas; assim, todas as sete peças devem ser usadas para cobri-lo.

Há somente uma peça que não cobre o mesmo número de casas brancas e casas cinzas (a peça T) e esta peça deve ser obrigatoriamente usada. Depois de colocada a peça em formato de T, independentemente de onde ela for colocada, restarão no tabuleiro 24 casas. Ocorre, então, duas possibilidades para as casas ainda não cobertas:

1) haverá 11 casas brancas e 13 cinzas ou

2) haverá 13 casas brancas e 11 cinzas.

Com as demais seis peças fica, portanto, impossível cobrir as 24 casas pois cada uma dessas peças cobre o mesmo número de casas brancas e cinzas.

Outra solução:

Colocam-se primeiramente todas as seis peças à disposição, com exceção da peça em formato de "T". Desta forma são cobertas 24 casas do tabuleiro, 12 casas brancas e 12 casas cinzas. Restam ainda 2 casas brancas e 2 casas cinzas para serem cobertas com a peça "T". Como vimos no item b), isto é impossível.

13. (OBMEP 2019 – 2f) – Solução

a) De acordo com a figura, a primeira argola que foi lançada foi a amarela, pois ela está completamente em contato com a mesa, sem nenhuma embaixo dela, e as demais, em contato entre si, estão de algum modo acima dela. A seguir foi lançada a argola azul, depois a vermelha, depois a preta e, finalmente, a verde. Em suma, o que ocorreu foi o seguinte:

1º. lançamento: a argola amarela não está enlaçada – 0 ponto;

2º. lançamento: a argola azul está enlaçada – 5 pontos;

3º. lançamento: a argola vermelha não está enlaçada – 0 ponto;

4º. lançamento: a argola preta não está enlaçada – 0 ponto;

5º. lançamento: a argola verde está enlaçada – 1 ponto.

Assim, as jogadas que marcaram pontos foram a segunda e a quinta, logo, Marcelo fez 6 pontos.

b) O lançamento que Marcelo errou foi o terceiro. De fato, 10 + 5 + 1 + 1 = 17 e, de acordo com o enunciado, essa é a única maneira de se obterem 17 pontos.

c) Para obter pontuação máxima na situação descrita, Marcelo deve acertar o maior número possível de argolas nas primeiras jogadas; entretanto, como a argola vermelha está em cima da preta, a argola preta deve ter sido jogada antes dela, na primeira ou na segunda jogada. Para maximizar a pontuação, a segunda argola jogada deve ter sido a preta. Conclui-se que a pontuação máxima deve ocorrer quando a argola azul for a primeira a ser jogada (10 pontos) e a argola verde for a quarta ou a quinta a ser jogada (mais 1 ponto). A pontuação, nesse caso maximal, é, portanto, 10 + 1 = 11 pontos.

Outra solução: Se todas as argolas fossem enlaçadas, a pontuação máxima seria 20 pontos. Como a argola vermelha foi a terceira a ser lançada, Marcelo errou, logo, desconta-se 3 pontos. Para Marcelo ter obtido a soma máxima, a argola preta, que também errou, deve ter sido a segunda a ser lançada, então, desconta-se mais 5 pontos. Por último, a argola amarela pode ter sido a quarta ou a quinta a ser lançada. Logo, desconta-se mais um ponto. Portanto, a pontuação máxima é 20 – 3 – 5 – 1 = 11 pontos.

Quebra-cabeças de Matemática

Quantas pulseiras?

Discussão

Se todos os 20 monstros fossem de 3 braços, então, o total de braços seria 60 (pois 20x3=60), e o dono da loja deveria produzir 60 pulseiras. Mas, como não sabemos quantos monstros de cada tipo foram à loja, é preciso continuar pensando em outros casos.

O que ocorreria com o total de braços se fôssemos substituindo um monstro de 3 braços por um monstro de 5 braços? Por exemplo, se, dos 20 monstros, 19 fossem de 3 braços, e 1 fosse de 5 braços, então, o total de braços seria 62 (pois 19 x 3 + 1 x 5 = 62) e o dono da loja deveria produzir 62 pulseiras. Seguindo esse raciocínio, poderíamos preencher uma tabela como está abaixo e observar os resultados.

Número de monstros de 3 braços	Número de monstros de 5 braços	Total de braços ou Total de pulseiras
20	0	20 x 3 + 0 x 5 = 60
19	1	19 x 3 + 1 x 5 = 62
18	2	18 x 3 + 2 x 5 = 64
17	3	17 x 3 + 3 x 5 = 66
...	...	...

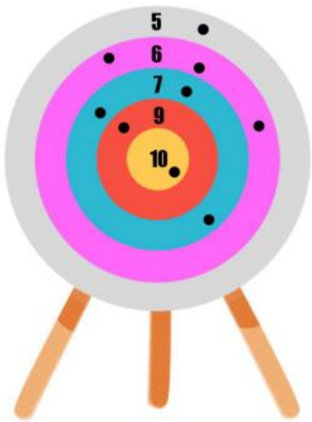
Observemos que o total de braços em todos os casos é um número par e que, conforme vamos substituindo um monstro de 3 braços por um de 5 braços, o total de braços aumenta em 2. Portanto, o dono da loja está enganado ao concluir que deve produzir um total de 77 pulseiras.

Jogo de dardos

Discussão

Para iniciarmos a discussão, analisaremos as informações que temos e a imagem do alvo ao final do jogo. Sabemos que:

- As três garotas ficaram cada qual com 21 pontos;
- Andreia conseguiu 15 pontos nos dois primeiros lançamentos;
- O primeiro lançamento de Vitória foi de 5 pontos.



Ao observarmos o alvo, deduzimos que Vitória foi a única das três que acertou a região de 5 pontos.

	Andreia	Bárbara	Vitória
1º Lançamento			5
2º Lançamento			
3º Lançamento			

Sabemos que Andreia não acertou a região de 5 pontos. Logo, a única forma de ela obter 15 pontos com dois lançamentos seria com a soma 9 + 6 = 15.

	Andreia	Bárbara	Vitória
1º Lançamento	6		5
2º Lançamento	9		
3º Lançamento			

Portanto, o último lançamento de Andreia só pode ter sido de 6 pontos, totalizando 21.

	Andreia	Bárbara	Vitória
1º Lançamento	6		5
2º Lançamento	9		
3º Lançamento	6		

Observemos que nenhuma outra jogadora, além da Andréia, acertou a região de 9 pontos. Portanto, sobraram três dardos, que acertaram a região de 7 pontos; um dardo, que acertou a região de 6 pontos; e um dardo, que acertou o centro do alvo.

Notemos que Vitória não poderia ter acertado nenhum dardo na região de 7 pontos. Caso ela acertasse, sua soma seria 5+7=12, faltando 9 pontos para atingir os 21. Isso seria impossível, pois a única pessoa que acertou a região de 9 pontos foi Andreia.

Logo, Vitória acertou nos seus últimos dois lançamentos as regiões de 6 e de 10 pontos.

Com isso, concluímos que Bárbara acertou os três dardos na região de 7 pontos.

	Andreia	Bárbara	Vitória
1º Lançamento	6	7	5
2º Lançamento	9	7	6
3º Lançamento	6	7	10

Assim, Vitória acertou o centro do alvo.

Cactos e Suculentas

Discussão

Analisaremos o comentário de cada um para descobrirmos quantos vasinhos de plantas cada criança tem em casa.

- Bento: “Tenho 8 vasinhos em casa.”

- Mariela: “Tenho a metade da quantidade de vasinhos que Bento tem.” Para sabermos a quantidade de vasinhos de Mariela, dividimos 8 por 2. Dessa forma, concluímos que Mariela tem 4 vasinhos.

8 : 2 = 4

- Nicole: “Tenho o triplo da quantidade de vasinhos que Mariela tem.” Para sabermos a quantidade de vasinhos de Nicole, multiplicamos 3 por 4. Assim, concluímos que Nicole tem 12 vasinhos.

- Carlos: “Tenho a mesma quantidade de vasinhos de Mariela e Nicole juntas.” Para sabermos a quantidade de vasinhos de Carlos, somamos 4 com 12. Dessa forma, concluímos que Carlos tem 16 vasinhos.

- Ana: “Tenho a metade da quantidade de vasinhos que Nicole tem.” Para sabermos a quantidade de vasinhos de Ana, dividimos 12 por 2. Assim, concluímos que Ana tem 6 vasinhos.

Portanto, a criança que tem a menor quantidade de vasinhos é Mariela. E quem tem a maior quantidade de vasinhos é Carlos.

Resolução de problemas da OBMEP de anos anteriores

14. (OBMEP – Simulado) – Solução

A única maneira de somar três números distintos entre 1, 2, 3, 4, e 5 e obter o resultado 6 é 1 + 2 + 3 = 6. Logo os cartões com as letras O, B e E têm, em seu verso, os números 1, 2 ou 3 (não necessariamente nessa ordem). Ao olhar para o verso dos cartões com as letras O e P, Caetano vê no verso do cartão O um dos números 1, 2 e 3. Observando as somas 1 + 7 = 8, 2 = 6 = 8 e 3+5 = 8, e lembrando que o número no verso do cartão P é no máximo 5, vemos que os números no verso dos cartões O e P são, respectivamente, 3 e 5. Resta o número 4, que é o que está no verso do cartão M.

15. (OBMEP 2017 – 1f) – Solução

A soma dos números dos cartões de Ana é 7, logo, ela pegou os cartões de números 1, 2 e 4, pois esta é a única possibilidade de decomposição do número 7 como soma de três parcelas diferentes, cada uma delas compreendida de 1 a 9. Como 23 é ímpar, temos as seguintes alternativas para os números dos cartões de Beto:

- Os três números são ímpares. Isso é impossível, pois a maior soma possível, nesse caso, é 5 + 7 + 9 = 21, menor do que 23.
- Um número é ímpar e os outros dois são pares: como Ana está com os cartões de números 2 e 4, a única possibilidade é Beto ter pego os cartões de números 6, 8 e 9.

Então, na mesa ficaram os cartões de números 3, 5 e 7. A diferença entre o maior e o menor deles é 7 – 3 = 4.

Outra solução: A soma máxima de três cartas é 9 + 8 + 7 = 24. Se a soma de Beto é 23, então, ele tem necessariamente as cartas 9, 8 e 6. A soma mínima de três cartas é 1 + 2 + 3 = 6. Se a soma de Ana é 7, então, ela tem necessariamente 1, 2 e 4. Portanto, na mesa temos as cartas 3, 5 e 7, e a diferença entre a maior e a menor é 7 – 3 = 4.

16. (OBMEP 2023 – 1f) – Solução

A compra de José custou 80,00 + 65,00 = 145,00 reais e a compra de Luiz custou 90,00 + 60,00 = 150,00 reais. Então, Luís gastou 5,00 reais a mais do que José.

17. (OBMEP 2018 – 1f) – Solução

Por observação direta da ilustração, vemos que o edifício A tem 12 janelas na frente. Logo, tem 11 ou menos janelas atrás. O edifício B tem 10 janelas na frente. Logo, tem 11 ou mais janelas atrás. Como os dois prédios têm o mesmo número de janelas na parte de trás, concluímos que esse número só pode ser 11. Como nas laterais não há janelas, os dois edifícios juntos têm 12 + 11 + 10 + 11 = 44 janelas.

18. (OBMEP 2018 – 1f) – Solução

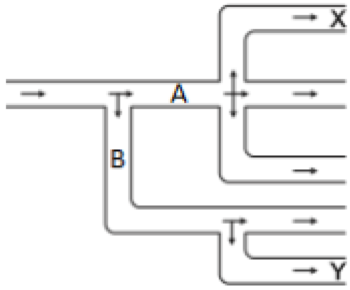
Devemos em primeiro lugar resolver as expressões entre parêntesis, seguindo a ordem de prioridade das operações. Essa ordem é a seguinte: fazer primeiramente as multiplicações e divisões para, a seguir, realizar as adições e subtrações. Assim,

- a alternativa A) está correta pois, $4 + (4 - 4) \times 4 = 4 + 0 \times 4 = 4 + 0 = 4$.
- a alternativa B) está correta pois, $(4 \times 4 + 4) \div 4 = (16 + 4) \div 4 = 20 \div 4 = 5$.
- a alternativa C) está errada pois, $4 + 4 \div 4 + 4 = 4 + 1 + 4 = 9 \neq 6$.
- a alternativa D) está correta pois, $44 \div 4 - 4 = 11 - 4 = 7$.
- a alternativa E) está correta pois, $4 + 4 + 4 - 4 = 8 + 4 - 4 = 12 - 4 = 8$.

19. (OBMEP 2018 – 1f) – Solução

Silvia terminou sua tarefa em 12 minutos (pois $60 \div 5 = 12$), momento em que Renato fez 36 biscoitos (pois $3 \times 12 = 36$); portanto, ele deverá fazer mais 24 biscoitos para completar sua tarefa.

20. (OBMEP 2017 – 1f) – Solução



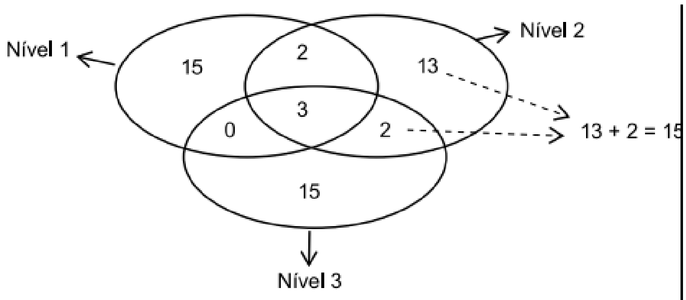
Como indicado na figura ao lado, vamos chamar de A o cano que se ramifica em três saídas, sendo uma delas a saída X, e de B o cano que se ramifica em duas saídas, sendo uma delas a saída Y. Como a água que passa pelos canos distribui- se igualmente em cada ramificação, pelo cano A passa, por hora, 3 vezes a quantidade de água que passa pela saída X, enquanto pelo cano B passa, por hora, 2 vezes a quantidade de água que passa pela saída Y. Como os canos A e B são as únicas saídas de uma mesma ramificação, a quantidade de água que passa por eles em uma hora é a mesma. Assim, 3 vezes a quantidade de água que passa por hora pela saída X é igual a 2 vezes a quantidade de água por hora que passa pela saída Y. Mas, a quantidade de água que passa por X é 200 mil litros; logo, a quantidade de água que passa pela saída Y por hora é a metade de 600 mil litros, ou seja, 300 mil litros.

21. (OBMEP 2022 – 1f) – Solução

A prova do nível 1 tem 20 questões; a prova do nível 2 tem 15 questões diferentes das questões do nível 1, pois há 3 questões comuns aos três níveis e 2 questões que são partilhadas entre os níveis 2 e 3 (assim há somente 13 questões que só aparecem no nível! 2). Do mesmo modo, a prova do nível 3 tem 15 questões que só aparecem nesse nível, pois 3 questões são comuns aos três níveis e duas questões são partilhadas apenas nas provas dos níveis 2 e 3.

Não há questões comuns apenas entre os níveis 1 e 3

Logo, no total, o número de questões diferentes que aparecem nas provas da primeira fase é 20 + 15+ 15= 50. isso também pode ser visualizado no diagrama abaixo:



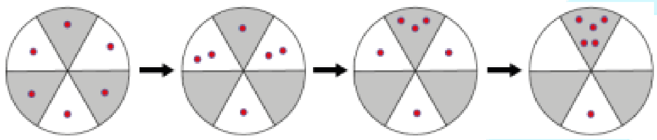
22. (OBMEP – Simulado) – Solução

24 é o maior número que aparece na figura. Indicamos abaixo a sequência de operações e seu resultado.

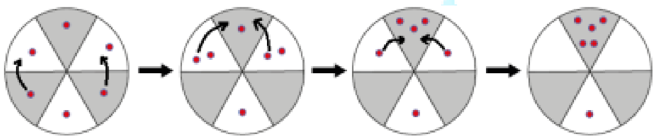
$$24 \xrightarrow{\div 12} 2 \xrightarrow{\times 6} 12 \xrightarrow{\div 2} 6 \xrightarrow{\times 24} 144.$$

23. (OBMEP 2023 – 2f) – Solução

a)



ou, indicando os movimentos



b) As bolinhas que serão movimentadas podem estar: 1.

1. ambas em setores cinzas;
2. ambas em setores brancos;
3. uma em um setor cinza e uma em um setor branco.

Analisemos o que acontece após um movimento em cada um desses casos

1. Ambas bolinhas em setores cinzas - após um movimento, cada uma delas irá para um setor branco, ou seja, o número total de bolinhas em setores brancos irá aumentar em duas unidades.
2. Ambas bolinhas em setores brancos - após um movimento, cada uma delas irá para um setor cinza, ou seja, o número total de bolinhas em setores brancos irá diminuir em duas unidades;
3. Uma bolinha em um setor cinza e uma bolinha em setor branco - após um movimento. a bolinha do setor cinza irá para um setor branco e a bolinha do setor branco irá para um setor cinza ou seja. número total de bolinhas em setores brancos fica inalterado

Pelo que vimos, após cada movimento, o número de bolinhas em setores brancos aumenta em duas unidades, diminui em duas unidades ou fica inalterado, ou seja se é ímpar inicialmente, permanecerá sempre ímpar. Note que o mesmo argumento vale para a quantidade de bolinhas em setores cinzas, ou seja, a partir da configuração inicial, essa quantidade também será sempre ímpar.

c) Se colocarmos todas as bolinhas em um mesmo setor cinza (ou branco), teremos um número par de bolinhas (seis) em um setor cinza (ou branco). Mas a quantidade total de bolinhas nos setores brancos (ou da cor cinza), iniciando-se como no enunciado, é sempre ímpar; logo, é impossível colocá-las todas em um mesmo setor.

24. (OBMEP 2018 – 2f) – Solução

a) As páginas pares do álbum têm os números 2, 4, 6, ..., 60 num total de 60 ÷ 2 = 30 páginas e as páginas ímpares têm os números 3, 5, ..., 61. Como existe uma página ímpar ao lado de cada página par, então o número de páginas ímpares também é 30. Portanto, o número total de figurinhas que devem ser coladas no álbum é

$$30 \times 5 + 30 \times 6 = 150 + 180 = 330$$

b) Para cada conjunto de duas páginas, uma par e outra ímpar, como mostrado na ilustração, são coladas 5 + 6 = 11 figurinhas. Por exemplo, nas páginas 2 e 3, colamos 11 figurinhas, nas páginas 4 e 5 também são coladas 11 figurinhas etc. Assim, dividindo 196 por 11, podemos localizar o conjunto de duas páginas onde deve ser colada a figurinha 196 e a posição dessa figurinha nesse conjunto de páginas. O quociente da divisão de 196 por 11 é 17 e o resto é 9. Assim, a figurinha 196 está no 18º conjunto de páginas, ou seja, nas páginas 36 e 37, e na 9ª posição dentre as 11 figurinhas aí coladas. Como 5 figurinhas devem ser coladas na página par, a figurinha de número 196 deve ser colada na página ímpar, ou seja, na página 37.

c) Joãozinho comprou 330 figurinhas que foram coladas e 8 vezes 330 figurinhas que vieram repetidas. Portanto, ele comprou 9 x 330 = 2970 figurinhas, num total de 2970 ÷ 5 = 594 pacotes. Como cada pacote custou 2 reais, foram gastos 594 x 2 = 1188 reais na compra das figurinhas. Como o álbum custou 20 reais, Joãozinho gastou ao todo 20 + 1188 = 1208 reais para ter seu álbum completo.

Quebra-cabeças de Matemática

Desafio dos primos

Discussão

Para iniciarmos a discussão deste desafio, observemos que neste jogo qualquer soma de dois valores será maior que 2. Basta observar que a menor de todas as somas é igual a 3. Observemos também que a soma de dois números naturais pode ser par ou ímpar, o que depende dos valores que serão somados.

Vejamos, mais detalhadamente, os casos em que a soma de dois valores é ou não é um número primo:

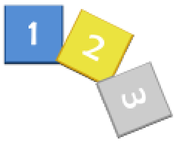
- **Se os dois números forem pares:** a soma deles será par e maior do que 2; portanto, não será um número primo.
- **Se os dois números forem ímpares:** a soma deles será par e maior do que 2; portanto, não será um número primo.
- **Se for um número ímpar e um número par:** a soma deles será ímpar e, dependendo dos números escolhidos, será possível obter um número primo.

Assim, para atendermos à condição inicial do desafio, de que a soma dos números de duas fichas que se encostarem seja um número primo, devemos intercalar os números de acordo com as suas paridades.

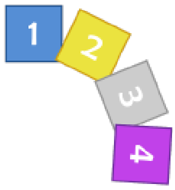
Este jogo possui diversas soluções. A seguir discutiremos uma delas.

Escolhemos uma das fichas para iniciar. Vamos começar pela ficha de número 1. A partir dela, sabemos que precisamos colocar um número par ao lado. Se colocarmos o número 2, a soma será 1+2=3 que é um número primo.

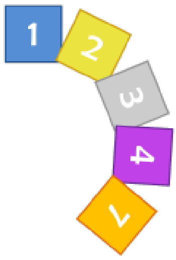
Agora, como o número 2 é par, na sequência devemos colocar uma ficha que tenha um número ímpar. Se escolhermos o número 3, temos 2+3=5 que também é um número primo.



Vamos, agora, colocar a ficha de número 4 ao lado da ficha de número 3, pois a soma 3+4=7 é um número primo.



Se colocarmos a ficha de número 5 ao lado da ficha de número 4, teremos 4+5=9, que não é um número primo. Deste modo, como não podemos colocar a ficha de número 6 por ser par, vamos colocar a ficha de número 7, já que 4+7=11 é um número primo.

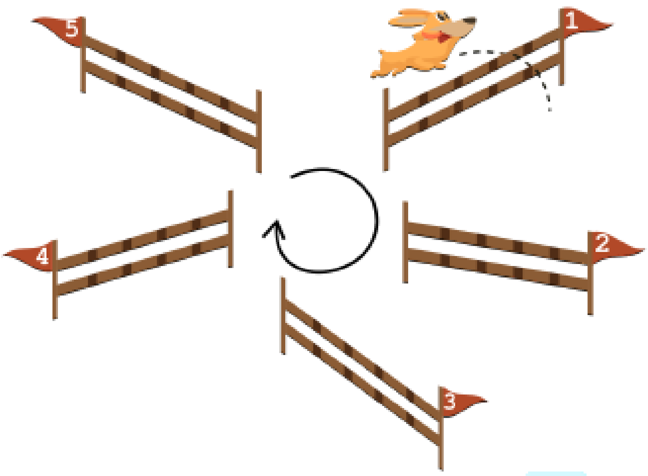


Seguindo este raciocínio, podemos completar o formato circular e obter a solução abaixo

Salto de Obstáculos

Discussão

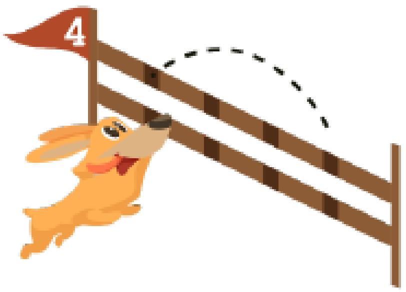
Há cinco obstáculos na competição. Totó começou saltando o obstáculo número 1, depois saltou o obstáculo número 2, e assim por diante. Ao saltar o obstáculo número 5, ele terá novamente que retornar ao obstáculo número 1, repetindo o trajeto.



Notemos que, sempre que Totó saltar o obstáculo número 5, a quantidade de saltos será um número múltiplo de 5. Por exemplo, o 5º, 10º e o 15º saltos são múltiplos de 5.

Obs.: Lembre-se de que os múltiplos de 5 são aqueles números cujo algarismo das unidades é 0 ou 5.

Totó deu 129 saltos, e o múltiplo de 5 mais próximo deste número é 130. Portanto, se Totó tivesse dado 130 saltos, o último obstáculo saltado teria sido o número 5, mas, como foram 129, então seu último salto foi no obstáculo número 4.



Resolução de problemas da OBMEP de anos anteriores

25. (OBMEP 2019 – 1f) – Solução

No planeta Pemob, cada ano tem 6 x 27 = 162 dias. Se, em um certo ano, o primeiro dia do ano foi Eba, então dia 5 foi Aba, dia 10 também foi Aba, e assim sucessivamente, de 5 em 5, até o dia 160, que também foi Aba.

Logo, o dia 161 foi Eba e o último dia, o de número 162, foi Iba.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
Eba	Iba	Oba	Uba	Aba	Eba	Iba	Oba	Uba	Aba	...

Outra maneira de ver isto é observar que, como as semanas têm 5 dias, o resto da divisão de 162 por 5 é 2, o que imediatamente dá Iba como o dia da semana do último dia do ano.

26. (OBMEP 2016 – 1f) – Solução

O maior número de três algarismos é 999. Se dividirmos 999 por 13, temos como resultado 76 e resto 11. Logo, 999 – 11 = 988 é o maior múltiplo de 13 com três algarismos e a soma de seus algarismos é 9 + 8 + 8 = 25.

27. (OBMEP 2023 – 1f) – Solução

Basta contar o número de fatias e observar se o resultado é um múltiplo de 9.

Se todas as cinco pizzas tivessem sido cortadas em 6 fatias, teríamos um total de 6 x 5 = 30 fatias, o que não permitiria a divisão exata entre os 9 amigos.

Se quatro pizzas tivessem sido cortadas em 6 e uma em 8, teríamos 6 x 4 + 8 x 1 = 32 pedaços, divisão novamente incorreta.

Se três pizzas tivessem sido cortadas em 6 e duas em 8, teríamos 6 x 3 + 2 x 8 = 34 pedaços, divisão novamente incorreta.

Se duas pizzas tivessem sido cortadas em 6 e três em 8, teríamos 6 x 2 + 3 x 8 = 36 pedaços. Nesse caso, cada amigo teria comido 4 pedaços, pois 9 x 4 = 36.

Se uma pizza tivesse sido cortada em 6 e quatro em 8, teríamos 6 x 1 + 4 x 8 = 38 pedaços, divisão novamente incorreta.

Finalmente, a possibilidade de termos as cinco pizzas com 8 fatias resultariam em 40 pedaços, impossível de dividir exatamente por 9.

Logo, os 9 amigos comeram 4 fatias cada. Note que eles não comeram a mesma quantidade de pizza, mas sim a mesma quantidade de fatias.

Outra solução:

Sejam x o número de pizzas cortadas em 6 fatias e y o número de pizzas cortadas em 8 fatias. O enunciado diz que x + y = 5, o que nos dá as possibilidades (x,y) = (5,0),(4,1),(3,2),(2,3),(1,4),(0,5). Além disso, o número total de fatias em que as pizzas foram cortadas é 6x + 8y; como essas foram igualmente divididas entre os 9 amigos, segue que 6x + 8y deve ser um múltiplo de 9. Substituindo os possíveis valores de (x,y) nessa expressão, vemos que o único múltiplo de 9 que aparece é 2 x 6 + 3 x 8 = 36, ou seja, duas pizzas cortadas em 6 fatias e três pizzas em 8 fatias.

Uma maneira de tornar essa solução mais rápida é escrever o número de fatias como 9z e reescrever 6x + 8y = 9z como 8y = 9z - 6x = 3(3x - 2z).

Isso mostra que 8y deve ser um múltiplo de 3, que só acontece para y = 3 e chegamos à solução (2,3), como acima.

28. (OBMEP 2019 – 1f) – Solução

Inicialmente, observamos que as decomposições em fatores primos dos números que aparecem no enunciado são:

462 = 2.3.7.11

150 = 2.3.5.5

495 = 3.3.5.11

84 = 2.2.3.7

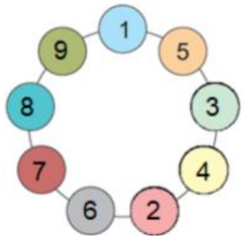
Na interseção de 150 com 462, deve aparecer o 2, pois o 3 já está na interseção de 150 com 294.

A interseção de 495 com 84 deve ser preenchida com o 3, pois é o único fator primo comum entre esses dois números. Desta forma, sobra o 7 para a interseção de 462 com 84.

Então, como a fatoração do 84 é 3 . 2 . 7 . 2, concluímos que ∗ = 2.

29. (OBMEP 2019 – 2f) – Solução

a) Há muitos exemplos, observe um deles:

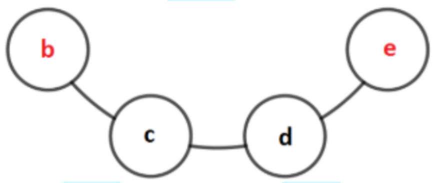


b) Para que a soma de três números seja múltipla de 3, uma dentre duas coisas deve acontecer:

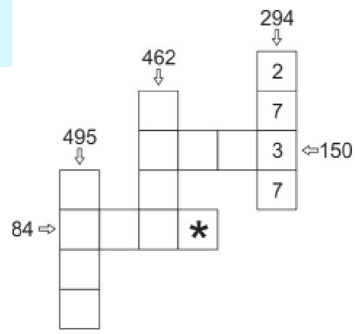
1. Os três deixam o mesmo resto da divisão por 3, ou seja, os 3 são de uma mesma coluna da tabela.

ou

2. Cada um dos três deixa resto diferente na divisão por 3, ou seja, os 3 números são de três colunas diferentes. Vamos ver que a alternativa 1 não pode ocorrer. Para isso, suponhamos que dois vizinhos, os quais indicaremos pelas letras **c** e **d,** estão em uma mesma coluna da tabela, ou seja, deixam o mesmo resto da divisão por 3. Indiquemos por **b** e **e** os vizinhos de **c** e de **d**, respectivamente, como na figura:

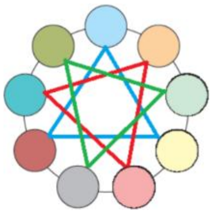


Então, como (**b** + **c** + **d**) é múltiplo de 3, obrigatoriamente **b** terá que ser da mesma coluna da tabela onde ficam **c** e **d.** Da mesma forma, como (**c** + **d** + **e**) é múltiplo de 3, obrigatoriamente e também estaria na mesma coluna da tabela, o que é impossível pois, pelo enunciado, nenhum número pode repetir no preenchimento e em cada coluna da tabela só há espaço para três números.



Já que não podemos ter 2 vizinhos de uma mesma coluna, então só sobra a alternativa 2, ou seja, 3 bolas consecutivas precisam ser preenchidas com 3 números posicionados em 3 colunas diferentes da tabela 3 x 3 do enunciado.

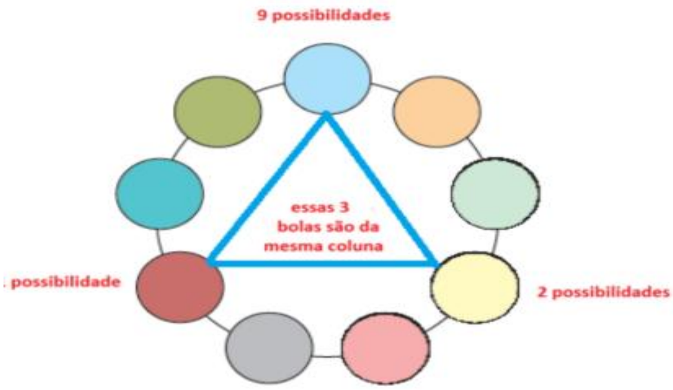
Observemos atentamente a figura abaixo, onde destacamos três triângulos coloridos:



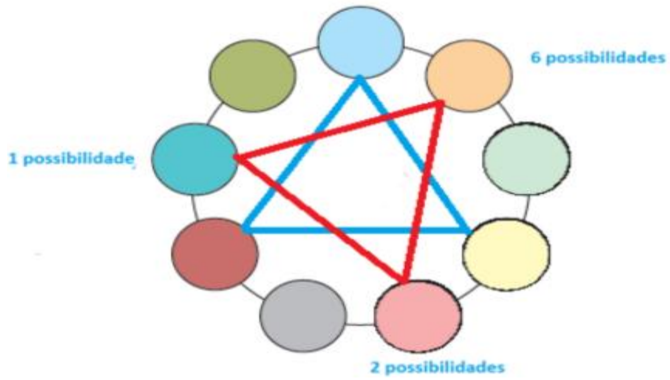
Os vértices do triângulo azul são sempre preenchidos com os números de uma mesma coluna da tabela apresentada no enunciado; os vértices do triângulo vermelho, com os números de outra coluna e, finalmente, os vértices do triângulo verde, com os números da coluna restante.

c) Agora vamos calcular de quantas formas podemos preencher as bolas coloridas:

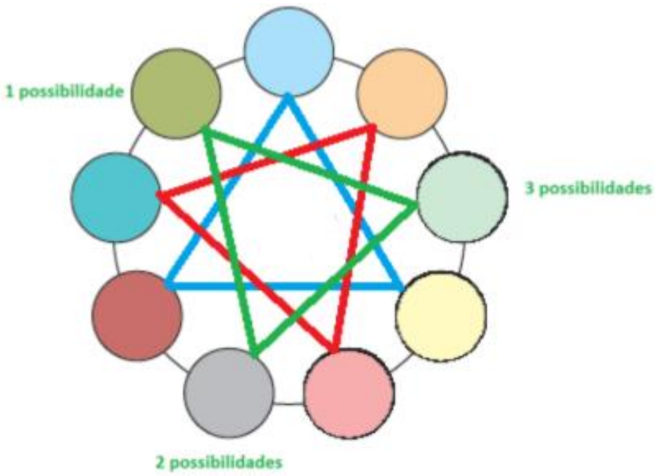
Começaremos escolhendo o número que preencherá a bola azul clara (9 possibilidades), em seguida, o número da bola amarela (2 possibilidades), pois é da mesma coluna da azul clara e, por fim, a bola marrom (1 possibilidade), pois também é da mesma coluna, conforme o diagrama abaixo:



Agora, vamos preencher o trio de bolas da figura abaixo, que estão nos vértices do triângulo vermelho (os números dessas bolas devem estar na mesma coluna da tabela): 6 possibilidades para bola laranja, 2 possibilidades para bola rosa e 1 possibilidade para bola azul escura, conforme o diagrama abaixo:



Enfim, vamos preencher os 3 círculos que faltam, lembrando que as bolas nos vértices do triângulo verde devem pertencer à mesma coluna restante da tabela, conforme o diagrama abaixo:



Portanto, o total de possibilidades é 9 x 2 x 1 x 6 x 2 x 1 x 3 x 2 x 1 = 1296.

Outra solução:

Começaremos escolhendo o número que preencherá a bola azul clara (9 possibilidades), em seguida, o número da bola laranja (6 possibilidades), pois deve ser de uma das outras duas colunas, que não aquela da azul clara e, por fim, a bola verde clara (3 possibilidades), pois deve ser da coluna restante, diferente da coluna da azul clara e da laranja.

Agora, vamos preencher a bola amarela (2 possibilidades), pois este número deverá ser de uma coluna diferente da laranja e da verde clara, logo, deve ser da mesma coluna da azul clara. O número que preencherá a bola rosa deve ser da mesma coluna da laranja (2 possibilidades), e o número que preencherá a bola cinza da mesma coluna da verde clara (2 possibilidades).

Enfim, vamos preencher os 3 círculos que faltam, seguindo o mesmo raciocínio a bola marrom deve ser da coluna das bolas amarela e azul clara (1 possibilidade), a bola azul escura deve ser da coluna das bolas rosa e laranja (1 possibilidade) e a bola verde escura deve ser da mesma coluna da bolas cinza e verde clara (1 possibilidade).

Portanto, o total de possibilidades é 9 x 6 x 3 x 2 x 2 x 2 x 1 x 1 x 1 = 1296.

30. (OBMEP 2017 – 2f) – Solução

a) Existem vários passeios da formiguinha nos quais ela obtém o número 45. Ela deve necessariamente visitar duas vezes a bolinha com o número 3 e uma vez a bolinha com o número 5, em uma ordem correta. Eis alguns exemplos:

- 3 → 1 → 3 → 1 → 5
- 5 → 1 → 3 → 1 → 3
- 1 → 3 → 1 → 5 → 1 → 3
- 1 → 5 → 1 → 3 → 1 → 3
- 3 → 1 → 5 → 1 → 3
- 5 → 1 → 3 → 1 → 3 → 1
- 1 → 3 → 1 → 5 → 1 → 3 → 1
- 1 → 5 → 1 → 3 → 1 → 3 → 1

b) A fatoração do número 52 em produtos de números primos é 52 = 2 × 2 × 13. A formiguinha nunca vai conseguir obter o número 52 em um passeio pois, no objeto, não há uma bolinha com o número 13 para ela visitar.

c) A fatoração do número 40 em produtos de números primos é 40 = 2 × 2 × 2 × 5.

Assim, para obter o número 40 em um passeio, a formiguinha deve passar somente pelas bolinhas 1, 2 e 5, passando exatamente três vezes pela bolinha 2 e uma vez pela bolinha 5. Como não há vareta ligando as bolinhas 1 e 2, para passar três vezes pela bolinha 2 a formiguinha é obrigada a passar pelo menos três vezes pela vareta que liga as bolinhas 2 e 5 e, ao fazer isso, ela passa pelo menos duas vezes pela bolinha 5. Assim, é impossível para a formiguinha fazer um passeio passando somente pelas bolinhas 1, 2 e 5, passando exatamente três vezes pela bolinha 2 e uma vez pela bolinha 5.

d) A fatoração do número 30 em produto de números primos é 30 = 2 × 3 × 5. Para obter o número 30 no final de um passeio, a formiguinha deve passar somente pelas bolinhas 1, 2, 3 e 5, passando uma única vez pelas bolinhas 2, 3 e 5. A formiguinha não pode passar mais de duas vezes pela bolinha 1, pois, se isso acontecesse, ela passaria mais de uma vez pelas bolinhas 3 ou 5. Assim, temos as seguintes situações:

- obter 30 sem passar pela bolinha 1;
- obter 30 passando somente uma vez pela bolinha 1;
- obter 30 passando duas vezes pela bolinha 1;

Na primeira situação, a formiguinha tem duas possibilidades para iniciar seu passeio (bolinhas 3 ou 5) e, em cada uma delas, uma única direção a seguir. Temos, então, 2 × 1 = 2 possibilidades. São as seguintes:

- 3 → 2 → 5
- 5 → 2 → 3

Na segunda situação, a formiguinha tem quatro possibilidades para iniciar seu passeio (bolinhas 1, 2, 3 ou 5) e, em cada uma delas, duas direções a seguir. Temos, então, 4 × 2 = 8 possibilidades. São elas:

- 1 → 3 → 2 → 5
- 1 → 5 → 2 → 3
- 2 → 3 → 1 → 5
- 2 → 5 → 1 → 3
- 3 → 1 → 5 → 2
- 3 → 2 → 5 → 1
- 5 → 1 → 3 → 2
- 5 → 2 → 3 → 1

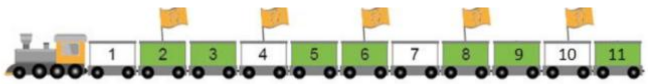
Na terceira situação, a formiguinha tem três possibilidades: iniciar e terminar na bolinha 1, iniciar na bolinha 1 e terminar na bolinha 2, ou iniciar na bolinha 2 e terminar na bolinha 1; em cada uma delas, ela tem duas direções a seguir. Temos, então, 3 × 2 = 6 possibilidades. São as seguintes:

- 1 → 3 → 2 → 5 → 1
- 1 → 5 → 2 → 3 → 1
- 1 → 3 → 1 → 5 → 2
- 1 → 5 → 1 → 3 → 2
- 2 → 3 → 1 → 5 → 1
- 2 → 5 → 1 → 3 → 1

No total, temos 2 + 8 + 6 = 16 passeios diferentes em que a formiguinha obtém, ao final, o número 30.

31. (OBMEP 2023 – 2f) – Solução

a) O número do vagão branco com bandeirinha após o vagão de número 8 é 10, basta continuar com o padrão apresentado.



b) Os vagões brancos são aqueles cujos números são múltiplos 3 mais 1. Dividindo 2023 por 3 obtemos 2023 = 3 × 674 + 1. Logo, o vagão de número 2023 é branco.

c) A cada seis vagões consecutivos há exatamente um vagão branco com bandeirinha. Como 2023 = 6 × 337 + 1, há 337 bandeirinhas em vagões brancos até o vagão de número 2023.

Outras soluções:

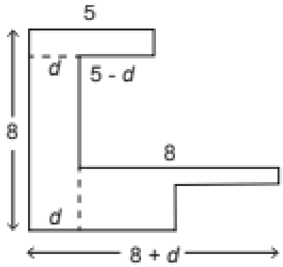
• Uma outra maneira de ver isso é observar que os vagões brancos com bandeira são os de números 4 + (n − 1) × 6, n = 1, 2, 3, ... Quando n = 337, chegamos ao vagão 2020; o próximo vagão branco com bandeira será, portanto, o vagão de número 2026.

• Como 1 a cada 3 vagões consecutivos é branco, há 674 vagões brancos anteriores ao 2023 (2023 = 1 + 3 x 674). Observar que dois vagões brancos consecutivos alternam a paridade; assim, metade destes 674 vagões são de números pares (com bandeirinhas). Logo há 674/2 = 337 vagões brancos com bandeirinha.

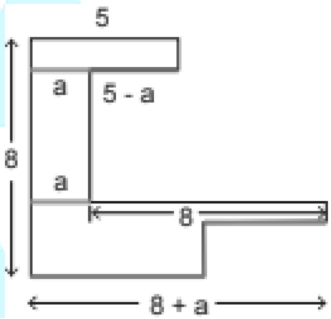
• Como há 1011 vagões pares anteriores a 2023 (2023 = 1 + 2 x 1011), há 1011 vagões com bandeirinhas. Dentre estes vagões com bandeirinhas, 1 a cada 3 vagões consecutivos, a partir do número 4, são brancos. Assim, há 1011/3 = 337 vagões brancos com bandeirinhas.

32. (OBMEP 2023 – 1f) – Solução

Chame de **d** a distância indicada na figura. Observe que verticalmente a formiga andou 8 + 8 = 16 cm e horizontalmente 5 + (5 – d) + 8 + 8 + d = 10 + 16 = 26 cm. No total, ela andou 16 + 26 = 42 cm.

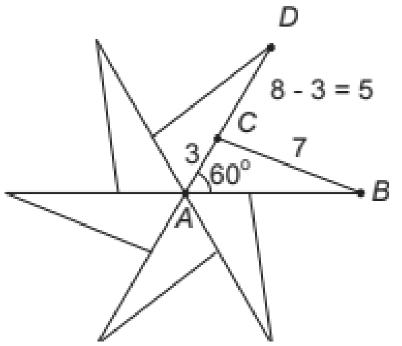


Outra solução: As duas linhas verdes juntas têm comprimento igual a 8 + a, sendo a o comprimento da linha marrom. A linha azul tem comprimento igual a 5 cm menos o comprimento da linha mesma linha marrom, ou seja, 5 – a. Assim, a soma dos comprimentos de todas as linhas horizontais da figura é 5 + (5 – a) + 8 + 8 + a = 26 cm. A soma dos comprimentos das três linhas verticais à direita é igual ao comprimento da linha vertical à esquerda, portanto a soma dos comprimentos de todas as linhas verticais é 8 + 8 = 16 cm. A formiguinha deu a volta completa na figura; logo, ela percorreu 26 + 16 = 42 cm.



33. (OBMEP 2016 – 1f) – Solução

Observemos, em primeiro lugar, que o lado BC do triângulo, como na figura abaixo, mede 7 cm; já o lado AB, sendo maior que o lado AC, mede 8 cm e o lado AC, sendo o menor, mede 3 cm. Segue, então, que o segmento CD mede 8 – 3 = 5 cm e o perímetro da figura é 6 x 7 + 6 x 5 = 72 cm.



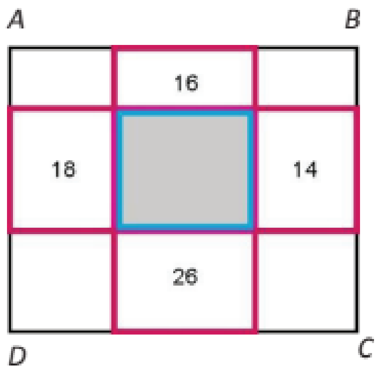
Outra solução

O perímetro de cada um dos triângulos é 3 + 7 + 8 = 18 cm. Cada um deles tem o lado de 3 cm apoiado em um lado maior de outro triângulo; tanto esse lado quanto a parte correspondente do outro triângulo não contam para o perímetro da figura. Desse modo, cada triângulo deixa de acrescentar 6 cm ao perímetro da figura, que é, então, 6 x 18 – 6 x 6 = 72cm.

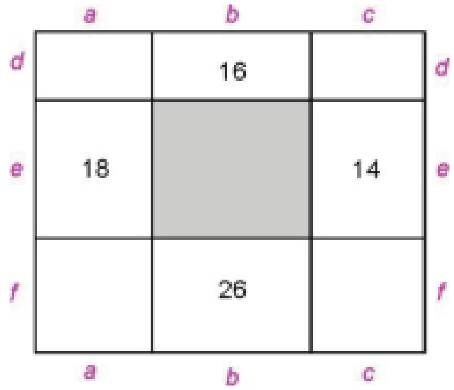
Observemos também que, como os seis ângulos que têm vértice em A são iguais e eles somam 360º, então, cada um deles mede 360º ÷ 6 = 60º. É um fato notável que, em um triângulo de lados 3, 7 e 8, o ângulo entre o menor lado e o maior meça 60º.

35. (OBMEP 2016 – 1f) – Solução

O perímetro do retângulo maior ABCD é igual ao perímetro da figura em forma de cruz formada pelos cinco retângulos (os que possuem números marcados em seu interior e o retângulo cinza), como na ilustração ao lado. O perímetro dessa figura é igual à soma das medidas de todos os lados dos quatro retângulos externos, menos as de cada um de seus lados que coincidem com os lados do retângulo cinza. A soma das medidas de todos os lados desses quatro retângulos externos é 16 + 18 + 26 + 14 = 74 e o perímetro da figura em forma de cruz é 54, pois ele é igual ao perímetro do retângulo ABCD. Logo, o perímetro do retângulo cinza é 74 – 54 = 20 cm.



Outra solução: solução (exige alguns conhecimentos de Álgebra):



As letras de **a** até **f** na figura são as medidas dos lados dos retângulos menores. Calculando o perímetro de cada um dos retângulos menores, temos:

$$\begin{aligned} 2b + 2d &= 16 \\ 2a + 2e &= 18 \\ 2c + 2e &= 14 \\ 2b + 2f &= 26 \\ 2b + 2e &= ? \end{aligned}$$

O perímetro do retângulo maior ABCD é 2(a + b + c) + 2(d + e + f) = 2a+ 2b + 2c + 2d + 2e + 2f = 54. Somando os perímetros dos quatro retângulos ao redor do retângulo central cujas medidas são dadas, temos:

$$2b + 2d + 2a + 2e + 2c + 2e + 2b + 2f =$$
$$\underbrace{2a + 2b + 2c + 2d + 2e + 2f}_{\text{perímetro do retângulo maior}} + 2b + 2e$$

Assim,

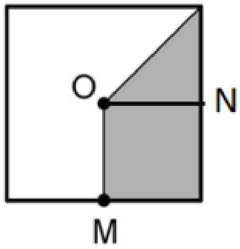
$$16 + 18 + 14 + 26 = 54 + 2b + 2e \Leftrightarrow 2b + 2e = 74 - 54 = 20.$$

Portanto, o perímetro do retângulo cinza é 20 cm.

36. (OBMEP 2022 – 1f) – Solução

O quadrado maior 'tem lado medindo 6 cm e o quadrado menor tem lado medindo 2 cm, já que a área de um quadrado é igual ao quadrado da medida de seu lado. Portanto de acordo com a distribuição geométrica dos quadrados na figura. terceiro quadrado tem lado medindo 6 - 2 = 4 cm; logo, sua área é 16 cm².

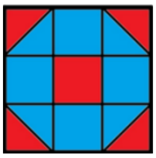
37. (OBMEP 2017 – 1f) – Solução



Podemos decompor a figura sombreada em um quadrado e um triângulo, traçando um segmento de O até o ponto médio N do lado do quadrado, conforme indicado na figura.

Assim, a área da região sombreada é igual a (1/4) + (1/8) da área do quadrado com centro em O, ou seja, a área sombreada é igual a 5 + 2,5 = 7, 5 cm^2

38. (OBMEP 2019 – 1f) – Solução



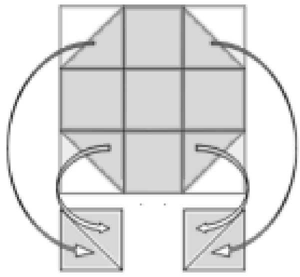
A parte vermelha é formada por um quadradinho mais 4 metades de quadradinhos.

Essas 4 metades juntas têm a mesma área que a de 2 quadradinhos. Assim, a área total da parte vermelha é igual à área de 1 + 2 = 3 quadradinhos. Como essa área é de 6 cm^2, cada quadradinho tem uma área de 2 cm^2

O quadrado inteiro é formado por 9 quadradinhos. Assim, a área em azul equivale à área de 9 – 3 = 6 quadradinhos, que é igual a 6 x 2 = 12 cm^2

39. (OBMEP 2018 – 1f) – Solução

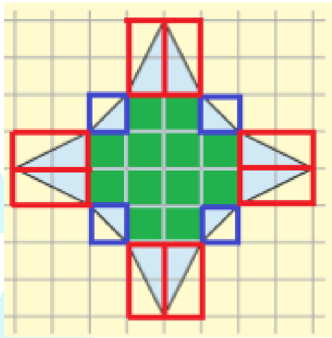
Como os vértices da figura destacada (um octógono) dividem os lados do quadrado em três partes iguais, podemos ligá-los de forma a obter um quadriculado que divide o quadrado em nove quadradinhos iguais. A figura cuja área conhecemos é formada por cinco desses quadradinhos e quatro triângulos, os quais são, cada um deles, metade de um quadradinho.



Reunindo esses quatro triângulos dois a dois, como na figura, teremos mais dois quadradinhos; portanto, o octógono, cuja área é 28 cm^2, é equivalente a 5 + 2 = 7 quadradinhos. A área de cada um dos quadradinhos é, portanto, igual a 28 ÷ 7 = 4 cm^2.

Como o quadrado equivale a nove quadradinhos, sua área é 9 x 4 = 36 cm^2.

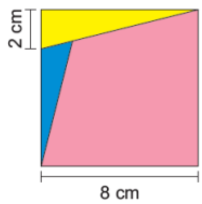
40. (OBMEP 2017 – 1f) – Solução:



Observe que a figura é formada por quadradinhos inteiros, em verde; por metades de 1 quadradinho, assinalados em azul; e por metades de retângulos formados por dois quadradinhos, assinalados em vermelho. Cada uma dessas áreas vale 1, 1/2 e 1 da área de um quadradinho, respectivamente. Logo, a área total da figura equivale a 12 + 4 x (1/2) + 8 x 1 = 22 quadradinhos.

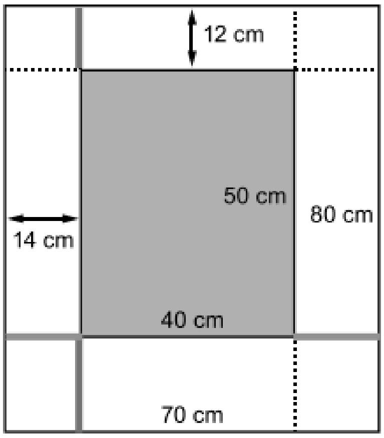
41. (OBMEP 2019 – 1f) – Solução

Observe o triângulo amarelo. Sua área é $\frac{2\times 8}{2} = 8$ cm^2. Logo, a área do triângulo azul é 4 cm^2. Como o quadrado tem área 64 cm^2, o quadrilátero rosa tem área 64 − 8− 4 = 52 cm^2

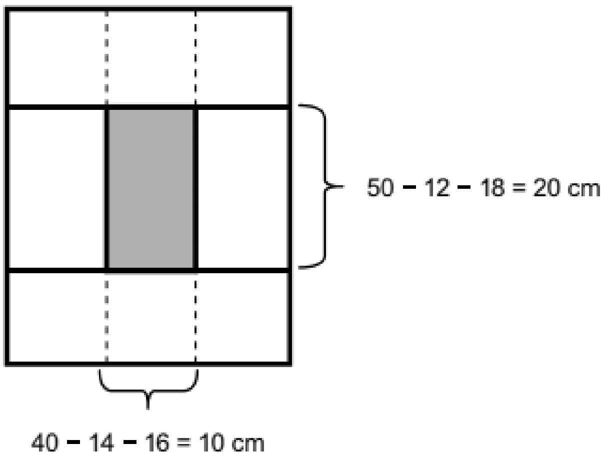


42. (OBMEP 2022 – 1f) – Solução

Observemos a figura abaixo:

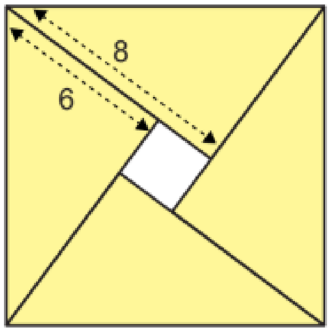


Como os lados da folha menor são paralelos aos lados da folha maior, a soma dos comprimentos dos segmentos azuis é igual à diferença entre os comprimentos dos lados horizontais da folha branca e da folha cinza, ou seja, é igual a 70 - 40 = 30 cm; analogamente, a soma dos comprimentos dos segmentos vermelhos é igual a 80 - 50 = 30 cm. Desse modo, ao dobrarmos a folha branca pelas linhas pontilhadas, obteremos a figura abaixo, em que o retângulo cinza tem dimensões horizontal 40 - 30 = 10 cm e vertical 50 - 30 = 20 cm; sua área é, então, 200 cm^2.



Observe que a posição da folha cinza sobre a branca não é importante, desde que as margens vertical e horizontal das folhas se mantenham respectivamente paralelas, ou seja, as distâncias 12 cm e 14 cm não são relevantes; de fato, mudando-as, a área da região cinza não coberta, após a dobra, continua a mesma.

43. (OBMEP 2022 – 2f) – Solução



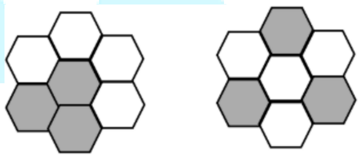
a) Como os 4 triângulos são iguais, basta calcular a área da folha de cartolina e dividir por 4. Portanto, qualquer um desses triângulos tem área igual a $\frac{6\times16}{4} = 24$ cm^2. Alternativamente, vemos que os quatro triângulos são triângulos retângulos iguais e seus lados menores (catetos) têm medidas 6 e 8. Portanto, a área de cada um deles é igual a $\frac{6\times8}{2} = 24$ cm^2

b) O buraco no centro do quadrado tem lado cuja medida é igual à diferença entre as medidas dos dois catetos dos triângulos, ou seja, 8 - 6 = 2 cm. Logo, a área do buraco é 2^2 = 4 cm^2.

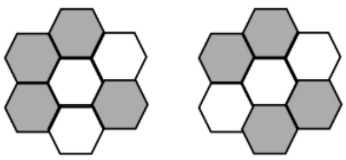
c) A área do quadrado que Janaína montou é igual à soma das áreas dos 4 triângulos, mais a área do buraco. Logo, a área desse quadrado é igual a 4 × 24 + 4 = 96 + 4 = 100 cm^2 e o lado do quadrado é $\sqrt{100}$ = 10 cm.

44. (OBMEP 2023 – 2f) – Solução

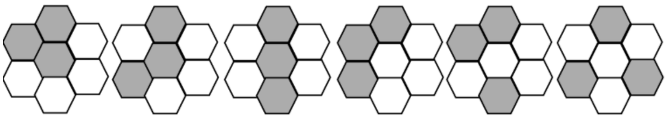
a) Há várias maneiras de pintar. Veja exemplos:



b) O maior perímetro possível com 4 hexágonos pintados é 20 cm. Veja dois exemplos:



Por que isso ocorre? Há apenas 6 padrões que podem ser obtidos quando pintamos 3 hexágonos (não levando em conta rotações e reflexões); são eles:



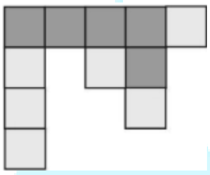
Se pintarmos de cinza um quarto hexágono, somente as duas últimas figuras poderiam produzir uma nova figura com perímetro superior a 20 cm; entretanto, como pode ser verificado diretamente, isso não ocorre já que o quarto hexágono deveria partilhar pelo menos um de seus lados com um hexágono já pintado.

c) Toda vez que pintarmos de cinza dois hexágonos com um lado em comum, a figura formada perde duas unidades de perímetro correspondentes aos lados que se tocam; logo, ou dois hexágonos pintados não se tocam (e o perímetro total é um múltiplo de 6) ou, quando se tocam, a figura formada diminui seu perímetro em um múltiplo de 2.

Assim, não existem figuras pintadas com perímetro ímpar.

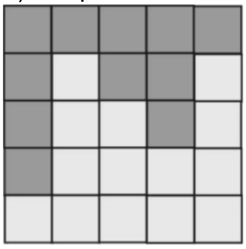
45. (OBMEP 2017 – 2f) – Solução

a) Ao juntar novos cubinhos à peça, Janaína percebeu que somente aqueles em contato com a mesa mudaram a marca original. No caso em questão, seis novos cubinhos foram colocados diretamente sobre a mesa, e a marca passou a ter seis novos quadradinhos (os mais claros na figura abaixo).



Observamos que, no total, foram acrescentados dez novos cubinhos, mas só seis deles em contato direto com a mesa.

b) Para poder usar a menor quantidade possível de cubinhos e obter uma marca quadrada sobre a mesa, Janaína deve acrescentar cubinhos somente na camada inferior da peça, ou seja, cubinhos em contato com a mesa. Como já existem cinco quadradinhos alinhados na marca da peça do item a), o comprimento do lado da marca quadrada deverá ser igual ao comprimento de cinco quadradinhos alinhados, no mínimo. Portanto, a marca deverá ter mais quatro linhas de cinco quadradinhos, totalizando 5 x 5 = 25 quadradinhos. Logo, falta acrescentar 25 – 11 = 14 cubinhos à peça do item a). Representamos abaixo a marca quadrada da nova peça.



Obs.: *Como a peça do item a) tinha originalmente 17 cubinhos, depois dos acréscimos a nova peça com a marca quadrada passou a ter 17 + 14 = 31 cubinhos.*

c) O menor cubo que pode ser montado a partir da peça obtida no item a) deverá ter uma altura correspondente a uma coluna de cinco cubinhos. Esse cubo ser composto de 5 × 5 × 5 = 125 cubinhos. Para obter esse cubo, Janaína terá que usar mais 125 − 17 = 108 cubinhos.

Obs.: *Se Janaína fosse completar um cubo a partir da peça do item b), ela necessitaria de 125 − 31 = 94 cubinhos, pois 14 cubinhos já teriam sido acrescentados à peça do item a) para deixar a marca sobre a mesa com a forma de uma região quadrada.*

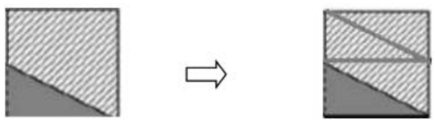
46. (OBMEP 2016 – 2f) – Solução

a) A parte em preto é formada por quatro triângulos pretos menores, os quais são retângulos isósceles. Um desses triângulos aparece na figura abaixo:

A área de cada um dos triângulos pretos é a metade da área do quadrado do quadriculado, ou seja, é igual à metade de 2 x 2 = 4 cm^2, ou seja, é igual a 2 cm^2.

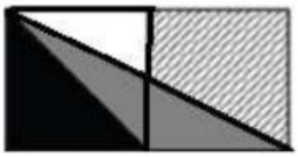
Portanto, a área da parte em preto é igual a 4 x 2 = 8 cm^2

b) A parte listrada de um quadradinho do quadriculado é um trapézio. Assim, a parte listrada de um quadradinho tem área igual a 3/4 da área do mesmo. De fato, se considerarmos, por exemplo, a divisão na figura ilustrada abaixo



Vemos que a área de cada trapézio é $\frac{3}{4} \times 4 = 3$ cm^2 e, portanto, a área total da parte listrada é igual a 4 x 3 = 12 cm^2.

c) Para calcular a área de um pequeno triângulo cinza, podemos destacar da figura o retângulo abaixo, formado por dois quadradinhos do quadriculado.



A área desse retângulo é 8 cm^2. A diagonal o divide em dois triângulos retângulos de mesma área e um deles é formado por um triângulo preto e um triângulo cinza. A área do triângulo cinza será, portanto, igual à diferença entre a metade da área do retângulo e a área do triângulo preto, isto é, 4 – 2 = 2 cm^2. A área total da parte em cinza é 4 x 2 = 8 cm^2.

Outra forma de chegar a esse resultado é observar que a metade do quadrado do reticulado (o triângulo preto) é equivalente ao triângulo cinza, ou seja, eles têm a mesma área, pois têm mesmas medidas de base

47. (OBMEP 2019 – 2f) – Solução

a) O quadrado central tem área igual a 1 cm2 e ele pode ser decomposto em 16 triângulos pequenos, todos congruentes entre si, como mostra a figura:

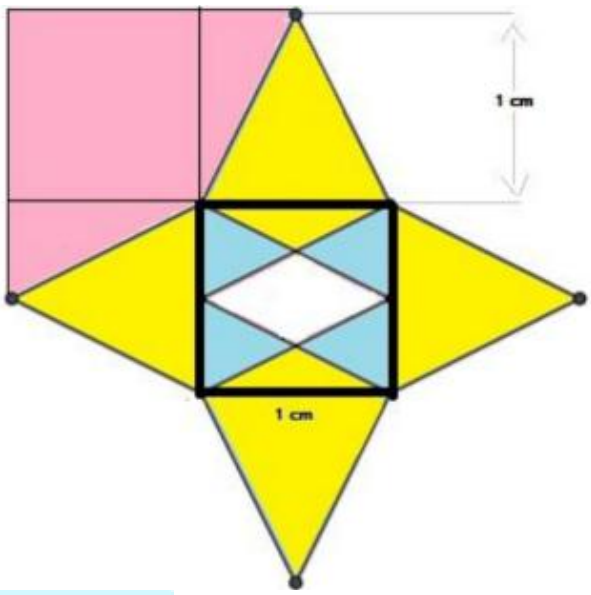
Oito desses pequenos triângulos são azuis. Logo, a área da região azul é igual a $8 \times \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ cm2

b) Observemos, na figura do item a), que quatro dos triângulos pequenos são amarelos, logo, a região amarela interna ao quadrado tem área igual a $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$. A região amarela total é formada por 4 triângulos grandes amarelos (cada um deles com área igual à metade de um quadrado de lado 1), juntamente com esses quatro triângulos amarelos contidos dentro do quadrado, logo, sua área da região amarela é igual a

$$4 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2{,}25\ cm^2$$

c) A região rosa pode ser decomposta em dois triângulos retângulos congruentes, cada um deles de área 1/4 cm^2, e um quadrado de lado 1 cm, como mostra a figura abaixo. Assim, a área da região rosa é igual a

$$a\ 1 + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2} = 1,5\ \text{cm}^2.$$



Há muitas outras decomposições da região rosa que permitem o cálculo de sua área de uma maneira simples.

Resolução de problemas da OBMEP de anos anteriores

48. (OBMEP 2017 – 1f) – Solução

Observamos na primeira balança que o objeto  tem o mesmo peso que a soma dos pesos de  e .

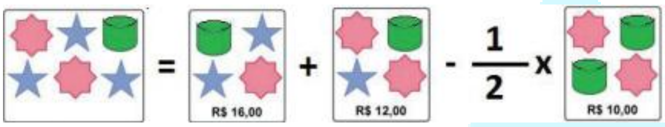
Consequentemente, o peso de  é maior do que o peso de cada um dos outros dois objetos. A segunda balança evidencia que o peso de  é maior do que o peso de . Logo,  é o mais pesado dentre os quatro objetos verificados até este momento. Por outro lado, a terceira indica que  é mais pesado do que . Portanto,  é o mais pesado dentre os cinco objetos avaliados. Evidentemente a expressão “pesos iguais” indica “massas iguais”.

49. (OBMEP 2016 – 1f) – Solução

Observe que a cartela com seis adesivos é idêntica à primeira cartela acrescida dos adesivos e . Logo, o preço da cartela com seis adesivos é igual a 16 reais mais o preço desses dois adesivos. Por outro lado, esses dois adesivos aparecem na segunda cartela juntamente com os adesivos e , mas esses dois últimos adesivos juntos custam 5 reais, como mostra a terceira cartela. Logo, o preço dos adesivos e , juntos, é 12 – 5 = 7 reais e, como consequência, a cartela com seis adesivos custa 16 + 7 = 23 reais.

Observe uma variação da solução:

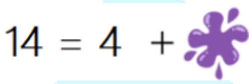
Ou seja,



Portanto, o preço da cartela com seis adesivos é igual a 16 + 12 – 5 = 23 reais.

50. (OBMEP 2019 – 1f) – ALTERNATIVA A

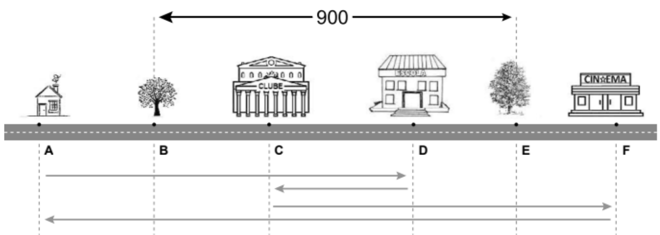
Como 17 – 3 = 14 e 20 – 16 = 4, a conta com o borrão é a mesma que



Ora, qual é o número que somado com 4 dá 14? É o número 10. Logo, o número escondido pelo borrão é o número 10.

51. (OBMEP 2022 – 1f) – Solução

O caminho percorrido por Miguel está indicado em na figura abaixo (AD + DC + CF + FA).



Como AB = BC, pois B é ponto médio de AC, e DE = EF, pois E é ponto médio de DF, então, o caminho percorrido por Miguel mede:

AD + DC + CF + FA =

(AB + BC + CD) + DC + (CD + DE + EF) + (FE + ED + DC + CB + BA) =

(BC + BC + CD) + DC + (CD + DE + ED) + (DE + ED + DC + CB + BC) =

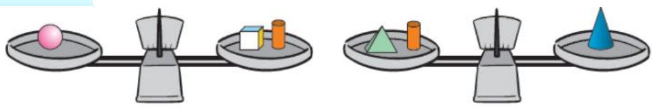
4 x BC + 4 x CD + 4 x DE =

4 x (BC+ CD+ DE) =

4 x BE = 4 x 900 = 3600m.

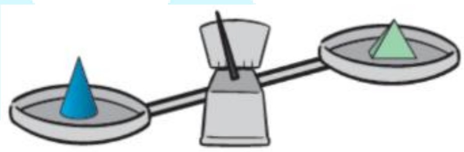
52. (OBMEP 2019 – 2f) – Solução

Observe as duas balanças que aparecem inicialmente no enunciado.



Na segunda delas, retirando-se o cilindro, notamos que o cone é mais pesado do que a pirâmide:

Logo, a ilustração que aparece na primeira balança no item a) está certa.



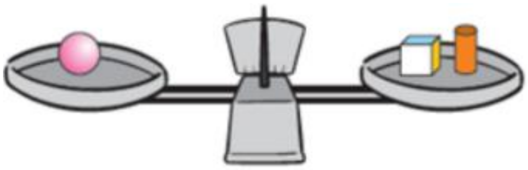
(X) Certa
(   ) Errada

Analogamente, retirando-se o cilindro da primeira balança que aparece inicialmente no enunciado, vemos que a esfera pesa mais do que o cubo:

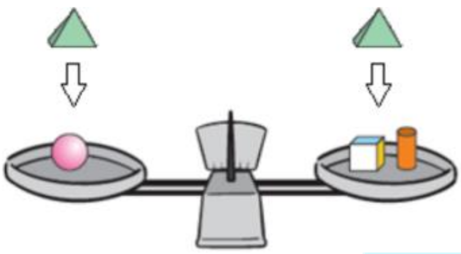
Logo, a segunda ilustração que aparece no item a) também está correta.

(X) Certa
(   ) Errada

b) A figura correta é a que está em equilíbrio (Figura C). Isto pode ser confirmado por meio das pesagens descritas a seguir. Partimos de



e acrescentamos uma pirâmide em cada um dos pratos:



Sabemos que uma pirâmide e um cilindro, juntos, pesam o mesmo que um cone (veja a segunda balança do enunciado). Logo, na balança acima, depois de acrescentadas as pirâmides em ambos os pratos, podemos trocar, no segundo prato, a pirâmide e o cilindro por um cone, obtendo a balança da Figura C.

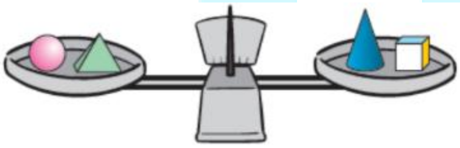
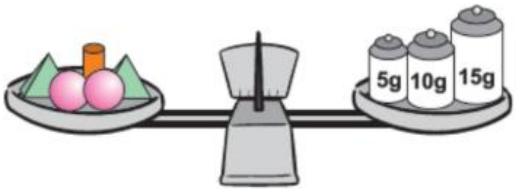
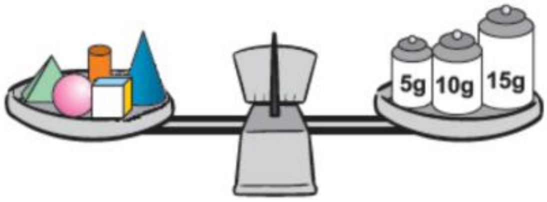


Figura C

c) Partimos inicialmente da seguinte situação de equilíbrio:



ou seja, duas pirâmides, duas esferas e um cilindro, juntos, pesam 5 + 10 + 15 = 30 gramas. Utilizando o resultado obtido em b), podemos trocar uma esfera e uma pirâmide por um cone e um cubo, obtendo:



Assim, os cinco sólidos diferentes, juntos, pesam 30 gramas.

53. (OBMEP 2022 – 2f) – Solução

a) Somando os valores da primeira linha, temos que O + O + O + O = 4. Portanto, O = 1.

b) Somando os valores da segunda linha, temos que B + B + O + B = 7. Como O = 1, então B + B + B = 6. Logo, B = 2.

c) Somando os valores da última linha, temos que E + P + O + B = 12.

Por outro lado, as letras O, B, M, E e P representam, em alguma ordem, os números 1, 2, 3, 4 e 5. Portanto, O + B + M + E + P = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15. Assim,

15 = O + B + M + E + P = (E + P + O + B) + M = 12 + M;

logo, 12 + M = 15. Portanto, M = 15 - 12 = 3.

d) Somando os valores da terceira linha, temos que M + E + B + O = 10. Como O = 1, B = 2 e M = 3, substituindo esses valores, encontramos E = 4. Portanto, P = 5, pois é a última letra que ainda não foi encontrado seu valor (pode-se também usar a quarta linha para calcular P)

Outra solução

Já temos O = 1 e B = 2; da terceira linha segue M + E = 7 e da quarta, E + P = 9. Como M, E, P representam 3, 4, 5, a única possibilidade é M = 3, E = 4 e P = 5, isso responde c) e d).

O	O	O	O	4
B	B	O	B	7
M	E	B	O	10
E	P	O	B	12

Resolução de problemas da OBMEP de anos anteriores

54. (OBMEP 2017 – 1f) – Solução

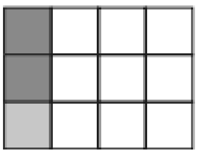
Para obter 30 litros de tinta marrom, precisaremos de 15 litros de cada uma das cores laranja e verde. A primeira condição nos diz que, para obter essa quantidade de tinta laranja, precisaremos da fração $\frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$ da quantidade total exclusivamente de tinta amarela, ou seja, $\frac{2}{5} \cdot 15 = 6$ litros de tinta amarela. Da mesma forma, a segunda condição nos diz que, para obter 15 litros de tinta verde, precisaremos da fração $\frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$ da quantidade total exclusivamente de tinta amarela, ou seja, $\frac{1}{3} \times = \frac{2}{5} \cdot 15 = 5$ litros de tinta amarela. Portanto, a quantidade total de tinta amarela necessária é 5 + 6 = 11 litros.

55. (OBMEP 2023 – 1f) – Solução

Das pessoas que têm bicicleta (ou seja, 1/4 da população) temos que 2/3 tem apenas uma.

Logo, $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ é a fração da população que tem apenas uma bicicleta.

Outra solução: Observe a figura abaixo formada por 12 quadradinhos que representam a população da cidade Como (1/4) = (3/12) pintamos 3 quadradinhos de 12. Em seguida, queremos 2/3 desses quadradinhos pintados e temos 2 quadradinhos em 12. Logo, (2/12) = (1/6) é a fração da população que tem apenas uma bicicleta.



56. (OBMEP 2023 – 1f) – Solução

Primeiramente, (3/4) < (4/5) < 1. Se a, b e c denotam as quantidades de figurinhas que Antônio, Benedito e Carlos possuem, então (3/4)b < (4/5)b < b. Logo, quem possui mais figurinhas é Benedito e quem possui menos é Carlos.

Outra solução

De acordo com enunciado, O número de figurinhas de Antônio é igual a 4/5 do número de figurinhas de Benedito. Assim, para cada conjunto de 5 figurinhas que Benedito possui, Antônio possui um conjunto de 4 figurinhas.

Já número de figurinhas de Carlos é igual a 3/4 do número de figurinhas de Benedito. Assim, para cada conjunto de 4 figurinhas que Benedito possui, Carlos possui um conjunto de 3 figurinhas.

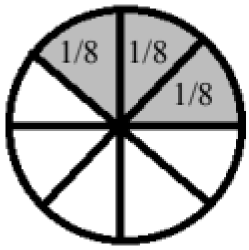
Logo, considerando conjuntos com 20 figurinhas (menor múltiplo comum entre 4 e 5), para cada conjunto de 20 = 5 x 4 figurinhas que Benedito possui, Antônio possui um conjunto de 16 = 4 x 4 figurinhas e, para cada conjunto de 20 = 5 x 4 figurinhas que Benedito possui, Carlos possui um conjunto de 15 = 5 x 3 figurinhas

Portanto, para cada conjunto de 20 figurinhas de Benedito, Antônio possui um conjunto de 16 figurinhas e Carlos possui um conjunto de 15.

Logo, Benedito é o que tem mais figurinhas e Carlos é o que tem menos figurinhas

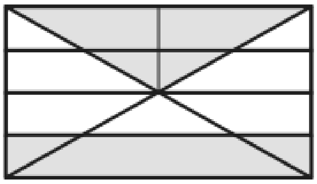
57. (OBMEP 2018 – 1f) – Solução

Luísa comprou três pedaços do bolo que estava dividido em 8 partes iguais, e João comprou os 5 pedaços restantes. Como 3/8 do bolo custou R$ 4,50, cada fatia (ou seja, 1/8 do bolo) custou R$ 1,50. Portanto, João pagou 5 x R$ 1,50 = R$ 7,50.



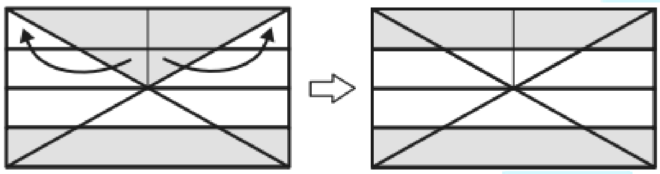
58. (OBMEP 2023 – 1f) – Solução

Podemos, a partir do centro do retângulo, dividir verticalmente as duas faixas superiores em dois retângulos iguais. A área em amarelo na parte superior é igual à área de cada um dos retângulos resultantes dessa divisão feita nas duas faixas superiores e, portanto, igual a 1/4 da área do retângulo maior.

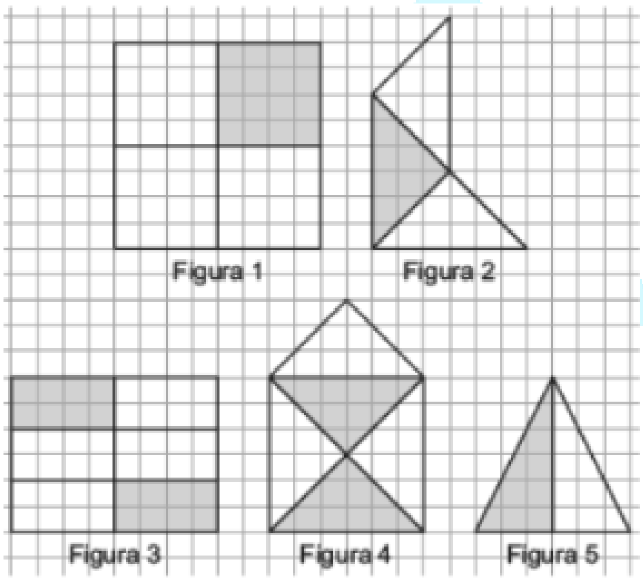


Por outro lado, a área da faixa inferior em amarelo também é igual a 1/4 da área do retângulo maior. Consequentemente, a área da região em amarelo é igual a $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ da área do retângulo maior.

Poderíamos, também, transferir dois pequenos triângulos, como na figura abaixo, para confirmar que a área total amarela é metade da área do retângulo maior:



59. (OBMEP 2018 – 1f) – Solução



Observemos que os três triângulos da Figura 2 são congruentes (portanto, têm mesma área). De fato, são três triângulos retângulos isósceles com os correspondentes lados de mesma medida (pode ser verificado facilmente no quadriculado).

Consequentemente, a área pintada, que é exatamente a de um triângulo, corresponde à fração 1/3.

Os seis retângulos que constituem a Figura 3 são congruentes. Como a área pintada é formada por dois desses retângulos, segue que a área pintada na Figura 3 corresponde a 2/6 = 1/3 da área total da Figura 3.

Por outro lado, na Figura 4, observamos cinco triângulos congruentes, sendo que apenas dois estão pintados, os quais correspondem à fração 2/5.

Finalmente, na Figura 5, temos um triângulo isósceles formado por dois triângulos retângulos congruentes, sendo que apenas um deles está pintado. Logo, a área pintada corresponde à fração ½.

Como 1/4 < 1/3 = 2/6 < 2/5 < 1/2, a maior fração corresponde à área pintada na Figura 5, a saber, 1/2.

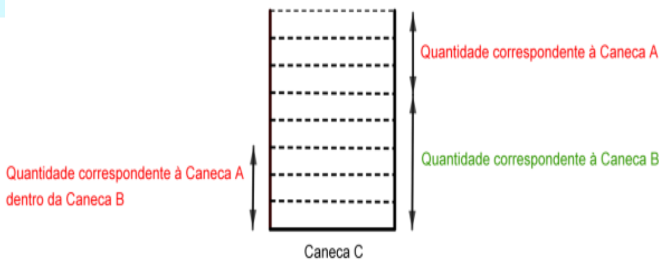
Esta questão serve para exemplificar que devemos ter muito cuidado ao comparar frações, pois, entre diferentes figuras, a fração numericamente maior pode não corresponder visualmente à maior área pintada.

60. (OBMEP 2019 – 1f) – Solução

Ao despejar o conteúdo das canecas A (pequena) e B (média) cheias na Caneca C (grande) será ocupado

$$\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}=1$$

da capacidade da Caneca C, ou seja, ela ficará totalmente cheia, sem transbordar. De forma ilustrativa, dividindo a Caneca C em 8 partes iguais, a figura a seguir mostra que 5 dessas partes correspondem à capacidade da Caneca B, e as outras 3, à capacidade da Caneca A.



61. (OBMEP 2019 – 1f) – Solução

Os valores das expressões nas alternativas são:

A) $15 \times \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$

B) $\frac{15+15+15}{4+4+4} = \frac{3 \times 15}{3 \times 4} = \frac{15}{4}$

C) $\frac{3}{4} + 3 = \frac{3+12}{4} = \frac{15}{4}$

D) $\frac{10}{2} + \frac{5}{2} = \frac{10+5}{2} = \frac{15}{2}$

E) $\frac{3}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{3 \times 5}{2 \times 2} = \frac{15}{4}$

Logo, a única alternativa em que o valor da expressão não é igual a 15/4.

62. (OBMEP 2017 – 2f) – Solução

a) Para comparar as frações, vamos escrevê-las como frações equivalentes, todas com o mesmo denominador 14, para depois comparar os numeradores.

André retirou $\frac{1}{2} = \frac{7}{14}$ do pacote, Bernardo retirou $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$ do pacote e Carlos retirou $\frac{1}{14}$ do pacote. Logo, quem retirou o menor número de doces foi Carlos.

b) A fração que representa o total de doces no pacote é $1 = \frac{14}{14}$. Portanto, a fração que representa a quantidade dos doces que restaram no pacote com relação ao total de doces é

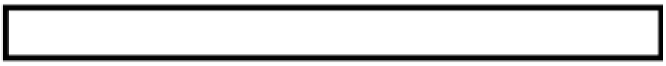
$$1-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{7}+\frac{1}{14}\right)=1-\left(\frac{7}{14}+\frac{4}{14}+\frac{1}{14}\right)=\frac{14}{14}-\frac{12}{14}=\frac{2}{14}=\frac{1}{7}.$$

c) O número de doces de André (que é $\frac{1}{2} = \frac{7}{14}$ do pacote) menos 15 doces é igual ao número de doces de Bernardo (que é $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$ do pacote). Logo, o número de doces de André é igual ao número de doces de Bernardo somado a 15. Portanto, a diferença entre o número de doces de André e o número de doces de Bernardo é igual a 15, ou seja, $\frac{1}{2} - \frac{2}{7} = \frac{7}{14} - \frac{4}{14} = \frac{3}{14}$ corresponde a 15 doces. Se $\frac{3}{15}$ do pacote corresponde a 15 doces, então a terça parte desta quantidade, isto é, $\frac{1}{14}$ do pacote, corresponde a 5 doces, já que $\frac{1}{3} \times 15 = 5$

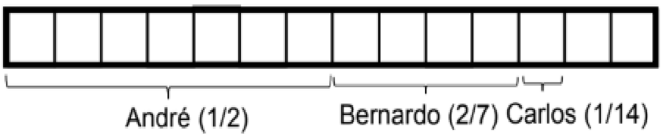
Deste modo, o número de doces no pacote é 14 x 5 = 70.

Outra solução

Nesta solução, representamos as frações 1/2, 2/7 e 1/14 como partes de um mesmo todo (o pacote de doces), que será representado por



Como $\frac{1}{2} = \frac{7}{14}$ e $\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$, dividimos o todo em 14 pedaços iguais e, deste modo, cada um desses pedaços representará $\frac{1}{14}$ do pacote de doces:

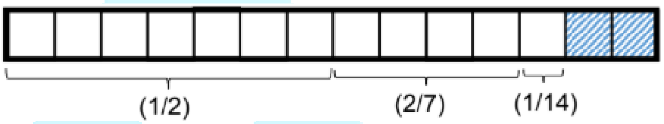


item a)

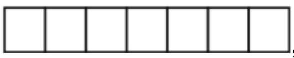
Observando na figura acima as quantidades que correspondem às retiradas de André, Bernardo e Carlos, concluímos que quem retirou a menor quantidade de doces foi Carlos. A quantidade retirada por Carlos corresponde a um único quadradinho.

item b)

A quantidade de doces que restou está representada na figura abaixo pelos dois últimos quadradinhos hachurados; portanto, deve ser igual a 2 x (1/14) = 1/7 do total.

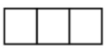


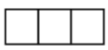
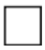
item c)

O número de doces de André, que corresponde a , menos 15 é igual ao número de doces de Bernardo, que corresponde a .

Logo,

O número de doces de André é igual ao número de doces de Bernardo somado a 15.

Portanto, a diferença entre o número de doces de André e o número de doces de Bernardo é igual a 15 doces e essa diferença corresponde a .

Se  corresponde a 15, então , corresponde a 5 doces (15 ÷ 3 = 5).

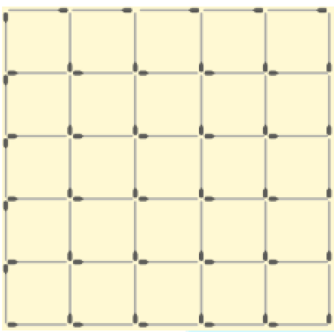
Portanto, inicialmente havia no pacote 14 x 5 = 70 doces.

***Obs.:** Agora podemos compreender numericamente a situação toda: dos 70 doces originalmente no pacote, André pegou 35, Bernardo pegou 20, e Carlos, 5. O número de balas que ficou no pacote depois de todas as retiradas foi 10.*

Resolução de problemas da OBMEP de anos anteriores

63. (OBMEP 2022 – 1f) – Solução

Em um quadriculado *n x n* há *n* + 1 fileiras de palitos horizontais e *n* + 1 fileiras de palitos verticais, e cada uma dessas fileiras tem *n* palitos. Portanto, o número total de palitos em um quadriculado *n x n* é 2 x *n* x (*n*+ 1). Logo, um quadriculado 5 x 5 tem 2 x 5 x 6 = 60 palitos. Isto também pode ser visto na ilustração a seguir.



64. (OBMEP 2022 – 1f) – ALTERNATIVA A

Solução

A alternativa A é falsa, pois o caminhão tem largura maior do que a permitida, já que 33 > 3,25.

A alternativa B é falsa, pois o caminhão tem peso maior do que o permitido, já que 4305 > 4300.

A alternativa C é falsa, pois o caminhão tem largura maior do que a permitida, já que 3,3 > 3.25.

A alternativa D é falsa, pois o caminhão tem peso maior do que o permitido, já que 4400 > 4300.

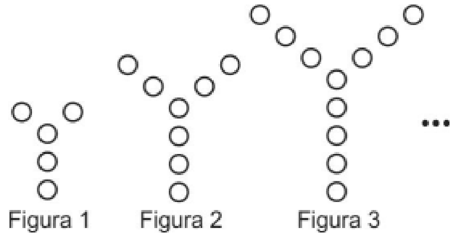
A alternativa E é verdadeira, pois 4290 < 4300 e 3,2 < 3,25.

65. (OBMEP 2019 – 1f) – Solução

A figura 1 é formada por 5 bolinhas em formato de Y e, a partir dela, quando passamos de uma figura para a seguinte, a próxima figura tem 3 bolinhas acrescidas, sendo uma em cada ponta do Y.

Logo, a 15ª figura terá 5 + 3 × 14 = 47 bolinhas.

Mais geralmente, a quantidade de bolinhas na n-ésima figura é 5 + 3(n-1) = 3n + 2.



66. (OBMEP 2019 – 1f) – Solução

Basta observar a disposição das últimas páginas dos dois livros:

Portanto, a distância entre a última página do Volume I até a última página do Volume II é

5	+	0,25	+	0,25	+	5	=	10,5 cm
Espessura do miolo do Vol I		Capa da frente do Vol I		Capa da frente do Vol II		Espessura do miolo do Vol II		

67. (OBMEP 2019 – 1f) – Solução

Representando graficamente as três situações uma no topo da outra, como na figura ao lado, observamos que a soma das três medidas corresponde a 3 vezes a distância h (o bloco verde debaixo compensa com o bloco verde do topo).

Logo, h = $\frac{113+80+82}{3} = 91\text{cm}^2$

Outra solução:

Cada uma das distâncias nas três figuras pode ser expressa em termos de h e das alturas de dois dos blocos:

111 = h – bloco verde + bloco azul

80 = h – bloco azul + bloco rosa

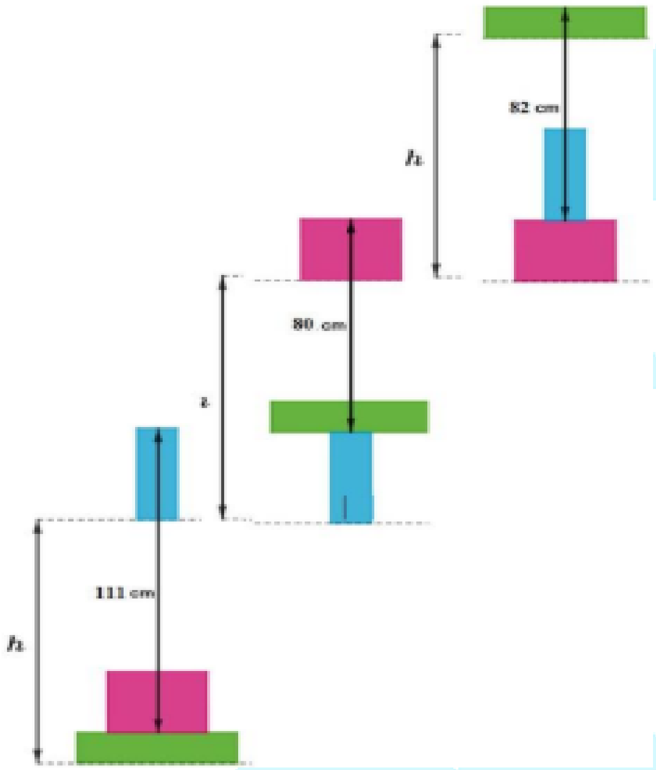
82 = h – bloco rosa + bloco verde

Cada bloco aparece uma vez nessas igualdades com sinal positivo e outra com sinal negativo.

Portanto, ao somá-las, eles se cancelam. Temos, assim:

111 + 80 + 82 = 3h

Logo, 3h = 273 e, portanto, h = 91 cm.

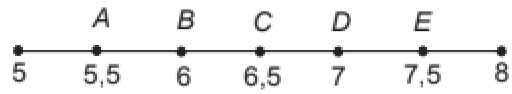


68. (OBMEP 2018 – 1f) – Solução

A primeira mamadeira (na ilustração) marca 250 ml, enquanto a segunda marca 75 ml. Para saber quanto Zezé mamou, basta fazer a subtração 250 – 75 = 175. Assim, Zezé mamou 175 mililitros.

69. (OBMEP 2016 – 1f) – Solução

O comprimento do segmento é 8 – 5 = 3 cm. Como ele foi dividido em 6 partes iguais, cada uma das partes mede 3 ÷ 6 = 0,5 cm. Da marcação cm, mas 1 = 2 x 0,5, logo, a partir da marcação 5 cm, há duas partes de 0,5 para chegarmos até 6 cm. Concluímos que 6 cm corresponde ao ponto B.

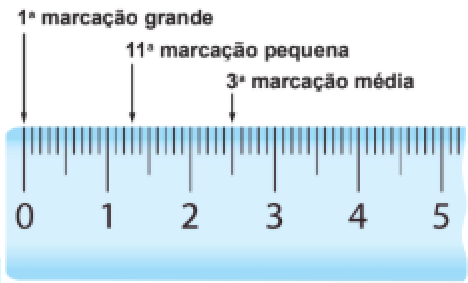


70. (OBMEP 2022 – 2f) – Solução

a) A 3ª marcação média marca 2,5 cm (25 mm).

A 11a marcação pequena marca 1,3 cm (13 mm).

A distância, em milímetros, entre essas marcações é 25 - 13 = 12 mm.



b) Entre cada par de marcações grandes consecutivas há 8 marcações pequenas. A régua inteira possui 30 pares de marcações grandes consecutivas. Logo, há 30 × 8 = 240 marcações pequenas na régua inteira.

c) Para encontrar entre qual par de marcações grandes está a 215ª marcação pequena, devemos calcular o quociente da divisão de 215 por 8. Temos 215 = 26 × 8 + 7.

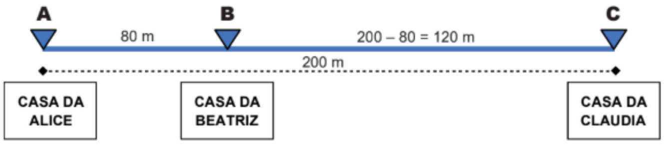
A 215ª marcação pequena está, então, na 7ª marcação pequena depois do 26º par de marcações grandes. A 215ª marcação pequena marca, então, 26,8 cm (268 mm).

A marcação que está à distância de 73 milímetros da 215ª marcação pequena ocorre necessariamente antes dessa marcação, senão ela estaria fora da régua.

A marcação que está à distância de 73 milímetros da 215ª marcação pequena marca, então, 268 - 73 = 195 milímetros, na 20ª marcação média.

71. (OBMEP 2022 – 2f) – Solução

a) Para responder qual é a soma das distâncias que Alice e Beatriz percorrem quando elas se reúnem na casa de Cláudia, fazemos um desenho:



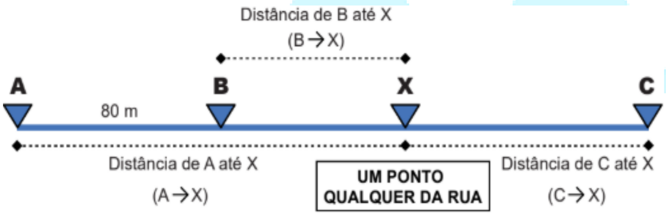
Como a distância da casa de Alice até a casa de Claudia é 200 m e a distância da casa de Beatriz até a casa de Claudia é 120 m, a soma das distâncias percorridas pelas duas é 200 + 120 = 320 m.

b) Se Alice, Beatriz e Cláudia se encontrarem a 150 metros do início da rua, teremos o desenho:

Esquematicamente, (A → E) + (C → E) = 150 + 50 = 200m. Além disso, (B → E) = 150 – 80 = 70m. A soma das distâncias será, portanto, 200 + 70 = 270 m.

c) A soma das distâncias de qualquer ponto da rua às casas de Alice e Claudia, sempre será 200 m.

Portanto, a menor soma das distâncias percorridas será no ponto onde Beatriz andar o mínimo possível, ou seja, em sua própria casa.

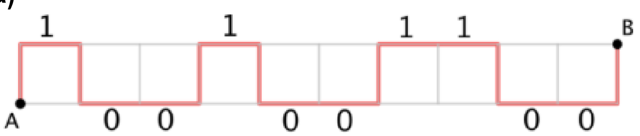


(A → X) + (B → X) + (C → X) = 200 + (B → X) é a mínima quando (B → X) = 0.

Logo, elas devem se encontrar a 80 m do início da rua, na casa de Beatriz.

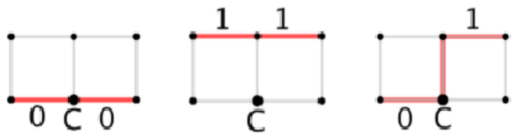
72. (OBMEP 2023 – 2f) – Solução

a)



b) Um caminho de A até B é determinado pelas escolhas da formiguinha de como ela vai passar por cada quadradinho. Ela pode escolher se vai passar por baixo (0) ou por cima (1). Dessa maneira, ela tem 10 escolhas a fazer e, para cada escolha, ela tem 2 possibilidades. Como qualquer escolha independe das anteriores, segue que o número de caminhos de A até B é $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{10} = 1024$.

c) A formiguinha pode passar por C de 3 maneiras diferentes, como mostrado na figura abaixo.



Dessa maneira, para escolher um caminho passando por C, ela pode primeiro escolher uma das 3 possibilidades acima e depois escolher como vai passar pelos outros 8 quadradinhos. Dessa maneira, ela pode ir de A para B passando por C de $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 3 \times 2^8 = 768$ maneiras diferentes.

Outra maneira de resolver esse item é notar que para **não** passar por C a formiguinha tem que percorrer o seguinte trajeto em seu caminho de A até B e isso pode ser feito de 2^8 maneiras diferentes. Desse modo, ela pode passar por C de $2^{10} - 2^8 = (2^2 - 1) \times 2^8 = 3 \times 2^8 = 768$ maneiras diferentes, como antes.