

Universidade Federal de Uberlândia
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

**NÚMEROS IRRACIONAIS NA EDUCAÇÃO
BÁSICA: SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA UMA
APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA**

Sergio Geraldo da Cunha
Francielle Rodrigues de Castro Coelho



Uberlândia-MG
2025

Sumário

Introdução	1
1 Sequências Didáticas sobre Números Irracionais	4
1.1 Atividade 1: Obtendo números irracionais a partir do Teorema de Pitágoras . .	5
1.2 Atividade 2: O cálculo do valor aproximado de π utilizando objetos do cotidiano	9
1.3 Atividade 3: Uma abordagem mais prática para o ensino do número de Euler .	12
2 A Aplicação das Sequências Didáticas em Sala de Aula	18
2.1 Aplicação da Atividade 1	18
2.2 Aplicação da Atividade 2	21
Referências Bibliográficas	24

Introdução

Este material é dedicado à descrição do produto educacional desenvolvido ao longo do período de estudos e pesquisas que integram a dissertação intitulada “O Conjunto dos Números Irracionais: fundamentos teóricos e estratégias de ensino na Educação Básica”, de autoria de Sergio Geraldo da Cunha, sob a orientação da Profa. Dra. Francielle Rodrigues de Castro Coelho, do Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

O ensino dos números irracionais é essencial para a compreensão da estrutura dos números reais e para o desenvolvimento do pensamento matemático no Ensino Básico. Conceitos como continuidade, incompletude dos racionais e densidade numérica ganham profundidade com a introdução dos irracionais, que aparecem naturalmente em contextos históricos e cotidianos, como nas raízes quadradas de números primos, no número e e no número π (1, Boyer; Merzbach, 2012) e (3, D’Ambrosio, 2012).

Apesar disso, na Educação Básica, o tema costuma ser abordado de forma superficial, com foco em procedimentos algébricos e pouca ênfase na construção conceitual. Muitos alunos têm dificuldade em compreender a natureza dos irracionais, especialmente por suas representações decimais infinitas e não periódicas. Do lado docente, desafios como o tempo reduzido, a pressão curricular e a falta de materiais contextualizados dificultam o planejamento de aulas mais significativas.

Diante desses entraves, propusemos o desenvolvimento de sequências didáticas - Atividade 1 (seção 1.1), Atividade 2 (seção 1.2) e Atividade 3 (seção 1.3) - como produto educacional, com o intuito de despertar o interesse dos estudantes e possibilitar uma aprendizagem mais significativa.

O presente trabalho reúne três sequências didáticas dedicadas a proporcionar aos estudantes uma compreensão mais concreta e significativa dos números, por meio de materiais de seu cotidiano ou de fácil acesso. O foco principal recai sobre os números reais, com ênfase especial nos números irracionais, que ainda são vistos pela maioria dos alunos de forma

abstrata e superficial. Como aponta D'Ambrosio em 2012, a Matemática deve ser apresentada de forma contextualizada, aproximando-se da realidade do estudante e favorecendo sua compreensão crítica.

As atividades propostas foram planejadas de acordo com o público-alvo a que se destinam. As Atividades 1 e 2 foram elaboradas para estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental (8º ano e 9º ano) e também do Ensino Médio, possibilitando sua aplicação em diferentes contextos escolares. Já a Atividade 3 foi desenvolvida especialmente para turmas do Ensino Médio (2º ano e 3º ano), embora também possa ser utilizada em outras situações, conforme a necessidade do professor. Em todos os casos, sua implementação é adequada tanto no ensino regular quanto em contextos nos quais se identificam dificuldades de aprendizagem, exigindo intervenções pedagógicas específicas. O propósito central é proporcionar aos estudantes oportunidades de construção de conhecimento de maneira ativa e significativa, explorando o conjunto dos números reais, com especial ênfase nos irracionais, em consonância com as competências e habilidades definidas na Base Nacional Comum Curricular (2, BNCC). A seguir, destacamos algumas dessas habilidades:

- EF07MA27 – Estabelecer o número π como a razão entre a medida da circunferência e o seu diâmetro, a fim de compreender e resolver problemas, inclusive de natureza histórica.
- EF08MA16 – Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como a determinação de medidas de terrenos.
- EF08MA28MG – Identificar números racionais com dízimas periódicas (descritores SAEB: Identificar números racionais e irracionais).
- EF09MA01 – Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não pode ser expresso por um número racional (como as medidas das diagonais de polígonos e as alturas de triângulos, quando se toma a medida de cada lado como unidade).
- EF09MA02 – Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, estimando a localização de alguns deles na reta numérica.
- EF09MA04 - Resolver e elaborar problemas com números reais, incluindo a identificação de dízimas periódicas e não periódicas.

Essas habilidades orientam a elaboração da sequência didática, de modo a articular conceitos matemáticos abstratos com experiências concretas e acessíveis, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio lógico e a compreensão crítica dos números irracionais.

As duas primeiras atividades — Atividade 1 e Atividade 2 — foram aplicadas pelo autor em turmas do 8º ano do Ensino Fundamental (seção 2.1 e seção 2.2), contemplando as competências previstas na BNCC e, ao mesmo tempo, buscando inspirar outros professores a adaptarem e aperfeiçoarem essas propostas em seus próprios contextos. Assim, metodologias que estimulam a resolução de problemas e a participação ativa dos estudantes fortalecem o cumprimento das diretrizes curriculares e contribuem para uma aprendizagem mais significativa.

Sequências Didáticas sobre Números Irracionais

Com o intuito de tornar o estudo dos números irracionais mais acessível e significativo, foram elaboradas três atividades centrais que compõem as sequências didáticas.

- **Atividade 1:** “Obtendo números irracionais a partir do Teorema de Pitágoras”, explora situações geométricas que evidenciam a existência de medidas não expressas por números racionais, favorecendo a compreensão histórica e conceitual dos irracionais.
- **Atividade 2:** “O cálculo do valor aproximado de π utilizando objetos do cotidiano”, propõe uma abordagem experimental e contextualizada, permitindo que os alunos descubram, por meio de medições simples, a presença de π em diversas formas circulares.
- **Atividade 3:** “Uma abordagem mais prática para o ensino do número de Euler”, tem como objetivo introduzir o número e de forma intuitiva e aplicada, a partir de cálculos relacionados a juros compostos. Essa abordagem possibilita aos estudantes perceberem o caráter universal dos números irracionais, mostrando como eles se manifestam em diferentes áreas da matemática e em diversas situações do cotidiano.

Essas atividades, integradas, visam não apenas o domínio técnico, mas também o despertar da curiosidade e o desenvolvimento do raciocínio crítico.

1.1 Atividade 1: Obtendo números irracionais a partir do Teorema de Pitágoras

Recomenda-se iniciar esta atividade por meio de uma revisão do Teorema de Pitágoras e suas aplicações, de modo a retomar conhecimentos prévios e assegurar a compreensão dos alunos. Nos exemplos iniciais, é importante que os resultados correspondam a raízes quadradas exatas, ou seja, números racionais. Em seguida, gradativamente, podem ser apresentados casos cujos resultados envolvem raízes quadradas não exatas — particularmente de números primos —, possibilitando a caracterização dos números irracionais.

Ação 1

É essencial retomar o Teorema de Pitágoras com toda a turma, assegurando que todos os estudantes compreendam e saibam aplicá-lo corretamente. Caso sejam identificadas dificuldades ou lacunas na aprendizagem, recomenda-se a realização de intervenções pedagógicas específicas, a fim de garantir que todos alcancem o domínio necessário desse conteúdo antes do avanço para novos conceitos.

Duração: 1 a 2 aulas - 50 a 100 minutos.

Ação 2

Promover um debate coletivo, incentivando os estudantes a reconhecerem situações do cotidiano em que a aplicação do Teorema de Pitágoras se faz necessária, valorizando suas experiências e repertórios pessoais. Entre os exemplos que podem ser explorados, destacam-se:

- cálculo do comprimento de vigas em tesouras de telhados;
- determinação de diagonais em ambientes ou superfícies retangulares;
- cálculo do tamanho da tela de um dispositivo eletrônico (televisão, celular, notebook), que geralmente é medido pela diagonal;
- determinação da distância em linha reta entre dois pontos de um mapa (quando se conhecem as distâncias em latitude e longitude representadas em escala).

Além disso, o professor pode apresentar situações comuns na construção civil como as que segue:

- **A Regra do “X”:** prática muito utilizada por construtores para verificar se os ângulos internos de uma estrutura retangular são retos (ou “no esquadro”, na linguagem popular). Para isso, mede-se o comprimento das duas diagonais da construção do cômodo que tem formato retangular. Como em um retângulo os lados opostos são congruentes, as diagonais também devem ser iguais. Essa verificação pode ser realizada com base no Teorema de Pitágoras ou pela análise da congruência de triângulos formados. Se as medidas das diagonais não coincidirem, conclui-se que os ângulos não são retos.
- **Verificação de ângulo reto entre paredes:** outro procedimento comum consiste em medir 80cm em uma das paredes e 60cm na parede adjacente, a partir de um ponto comum. Em seguida, mede-se a distância entre os extremos desses segmentos, que deve ser de 100cm. Essa prática fundamenta-se no Teorema de Pitágoras, pois $60^2 + 80^2 = 100^2$. Caso o valor encontrado seja diferente, indica-se que o ângulo formado não é reto.

Tais exemplos evidenciam a aplicabilidade do Teorema de Pitágoras no cotidiano, especialmente na área da construção civil.

Duração: 1 aula - 50 minutos.

Ação 3

Na aula seguinte, propõe-se uma atividade que combina cálculo e medição, favorecendo a construção do conhecimento por meio da experimentação. A ideia é que os estudantes possam verificar, de maneira concreta, a validade do Teorema de Pitágoras em situações simples e acessíveis, estabelecendo uma ponte entre a abstração matemática e a observação empírica. Materiais sugeridos:

- Papel milimetrado (disponível em papelarias);
- Régua graduada;
- Calculadora (quando disponível).

As atividades podem ser realizadas individualmente ou em grupos, a depender da quantidade de alunos e da disponibilidade de material.

Orientar os alunos a construir ou recortar, no papel milimetrado, um retângulo com dimensões de 3cm×4cm. Em seguida, solicitar que calculem a medida da diagonal aplicando o

Teorema de Pitágoras. Posteriormente, pedir que meçam essa mesma diagonal com o auxílio da régua.

O objetivo é que percebam que o valor obtido pelo cálculo ($\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$) coincide com o valor medido, reforçando, assim, a validade e a aplicabilidade do teorema.

Caso desejado, a atividade pode ser repetida com retângulos de outras dimensões que resultem em diagonais de medida exata, como 5cm×12cm ou 6cm×8cm. Nesse primeiro momento, recomenda-se a escolha de exemplos cujas diagonais sejam números inteiros, de modo a facilitar a medição, a comparação e a consolidação do conceito.

Em seguida, solicitar que os alunos construam retângulos com medidas dos lados escolhidas livremente (preferencialmente números naturais). Orientar para que, em alguns casos, os valores escolhidos sejam tais que a soma dos quadrados dos lados resulte em um número primo, de modo que a diagonal seja dada pela raiz quadrada de um número primo.

Explicar aos alunos que as raízes quadradas de números primos são irracionais, ou seja, não podem ser expressas como fração e possuem representação decimal infinita e não periódica.

Por exemplo, um retângulo de lados 2 cm e 3 cm resulta em uma diagonal dada por:

$$d = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13},$$

onde 13 é primo. Assim, $\sqrt{13}$ é irracional.

A tabela a seguir apresenta alguns exemplos de pares de lados que resultam em diagonais cuja medida é a raiz quadrada de um número primo:

Lado 1	Lado 2	Diagonal d
2	3	$\sqrt{13}$
1	4	$\sqrt{17}$
2	5	$\sqrt{29}$
2	7	$\sqrt{53}$
5	6	$\sqrt{61}$

Em seguida, orientar os estudantes a calcular a medida das diagonais aplicando o Teorema de Pitágoras. Ao realizar os cálculos, observar que, nesses casos, o resultado será expresso por uma raiz quadrada não exata (não é um número racional). Solicitar que os estudantes estimem o valor dessas raízes por aproximação, seja por tentativas sucessivas, seja com o auxílio de calculadoras.

Por fim, pedir que meçam com a régua a diagonal obtida e comparem com a aproximação calculada. Conduzir uma discussão coletiva destacando que, embora os valores encontrados sejam bastante próximos, não coincidem exatamente, evidenciando que essas raízes não possuem valor exato.

Duração: 1 aula - 50 minutos.

Ação 4

Nesta aula, o professor pode introduzir formalmente o conceito de número irracional, retomando a atividade realizada anteriormente. Os valores de raízes quadradas de números primos encontrados pelos estudantes revelaram-se nem decimais exatos nem dízimas periódicas, oferecendo o contexto ideal para a introdução desse novo conceito. Como estratégia de fechamento, o professor pode promover um debate coletivo, no qual sejam apresentados e comparados os diferentes resultados obtidos pelos alunos ou pelos grupos. Durante essa discussão, é essencial destacar a presença tanto de números racionais quanto de irracionais, conduzindo os estudantes à reflexão de que, na prática, é mais comum surgirem resultados irracionais nesse tipo de situação. Assim, consolida-se o entendimento da relevância dos números irracionais e de sua ocorrência natural em diferentes contextos matemáticos.

Ao final desta atividade, é fundamental que os alunos compreendam que:

- quando a raiz quadrada obtida pelo Teorema de Pitágoras não corresponde a um número inteiro ou racional, o resultado deve ser classificado como irracional;
- os números irracionais possuem representação decimal infinita e não periódica, o que os distingue dos números racionais.

Para ampliar a reflexão e favorecer uma aprendizagem mais significativa, o professor pode propor um problema final que relacione o conceito discutido a situações reais. Por exemplo:

Imagine que você precise medir a diagonal de um terreno retangular de 7m por 8m para instalar uma cerca. Sem utilizar instrumentos de medição, apenas com cálculos, seria possível obter o valor exato dessa diagonal? Justifique sua resposta relacionando-a ao que aprendemos sobre números irracionais.

Duração: 1 aula - 50 minutos.

A importância da atividade

Essa atividade, ao articular cálculo, medição e reflexão crítica, possibilita aos estudantes compreender de maneira concreta a existência dos números irracionais, especialmente aqueles expressos como raízes quadradas de números primos. Tal abordagem está em consonância com a BNCC, que recomenda a contextualização e a exploração de diferentes representações dos números reais, favorecendo uma aprendizagem significativa e o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático. Além disso, ao articular o Teorema de Pitágoras com situações do cotidiano, promove-se uma aprendizagem significativa, favorecendo a construção de conceitos matemáticos de maneira mais consistente.

1.2 Atividade 2: O cálculo do valor aproximado de π utilizando objetos do cotidiano

Dentre os números irracionais, o π ocupa lugar de destaque, não apenas pelo seu valor histórico e cultural, mas também por sua presença constante em contextos matemáticos, científicos e tecnológicos.

A proposta desta atividade é levar os estudantes a compreender o significado do número π , explorando sua origem, sua natureza irracional e suas múltiplas aplicações. Para isso, serão utilizadas medições práticas, cálculos, recursos tecnológicos e reflexões históricas, de modo a proporcionar uma aprendizagem significativa e contextualizada.

Materiais sugeridos:

- Objetos circulares variados (trazidos pelos próprios alunos: tampas, pratos, copos, rodas de brinquedo etc.);
- Barbante;
- Régua graduada;
- Calculadora (quando disponível);
- Papel milimetrado (opcional, para registros).

Ação 1

Para o desenvolvimento desta atividade, é recomendável que os estudantes já tenham familiaridade com conceitos de perímetro, diâmetro e operações básicas com números racio-

nais. Caso sejam identificadas lacunas, o professor deverá realizar uma intervenção pedagógica prévia para garantir a participação de todos.

Inicia-se a aula promovendo um diálogo coletivo sobre a presença de formas circulares no cotidiano. Os alunos são incentivados a citar exemplos de objetos de uso doméstico, da natureza e de construções humanas que apresentem essa forma geométrica.

Em seguida, o professor amplia a discussão, apresentando imagens e exemplos de formas circulares em fenômenos naturais (seções de frutas, gotas de água, ondas) e astronômicos (Sol, Lua, órbitas planetárias). Essa etapa tem por objetivo despertar a curiosidade e mostrar a presença do círculo na natureza.

Além disso, o professor deve apresentar um panorama histórico das tentativas realizadas por diferentes civilizações antigas para determinar o valor de π , com destaque para a contribuição de Arquimedes, que utilizou polígonos inscritos e circunscritos em seus cálculos. Ressalta-se, ainda, o valor racional $\frac{22}{7}$, frequentemente considerado uma aproximação de π . Essa abordagem evidencia a relevância cultural e científica desse número ao longo da história.

Complementarmente, o professor pode introduzir o conceito de comprimento da circunferência, por meio da fórmula $C = \pi d$, de modo a antecipar ou reforçar o conteúdo que será explorado experimentalmente pelos alunos nas etapas seguintes da atividade.

Duração: 1 a 2 aulas - 50 a 100 minutos.

Ação 2

Divida a turma em grupos heterogêneos, de modo a favorecer a cooperação entre alunos com diferentes níveis de habilidade. Cada integrante do grupo deverá escolher um objeto circular trazido de casa e realizar as atividades propostas a seguir:

- Medir cuidadosamente o diâmetro (d) do objeto, utilizando régua.
- Medir a circunferência (C) do objeto com o auxílio de um barbante e, em seguida, registrar o comprimento medido com a régua.
- Preencher uma tabela registrando os dados coletados e calcular a razão $\frac{C}{d}$ para cada objeto, conforme o exemplo abaixo:

Objeto Circular	Diâmetro (d)	Circunferência (C)	$\frac{C}{d}$
Prato			
Copo			
Tampa			
Lata			
Roda de brinquedo			

- Se a turma estiver apta a acompanhar, o professor pode organizar os dados obtidos por alguns alunos em um gráfico, como o do exemplo a seguir, que mostra as razões $\frac{C}{d}$ calculadas em função do diâmetro medido e as compara com o valor de referência de π :

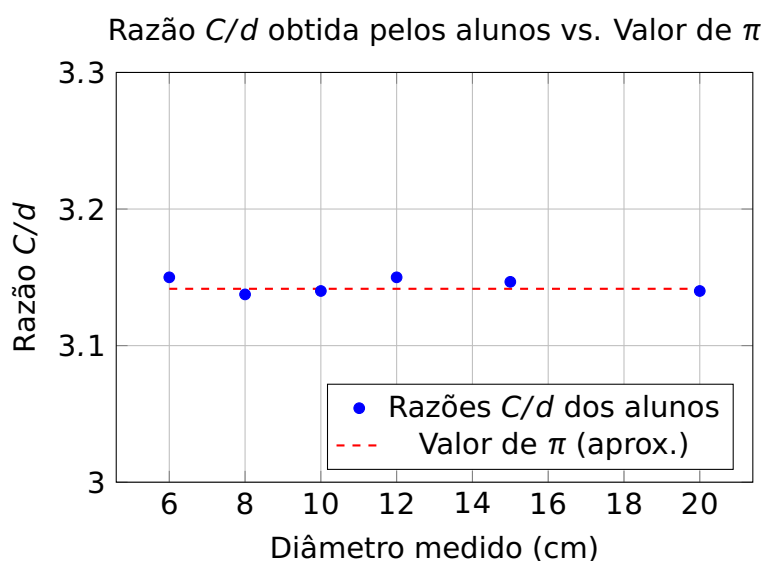


Figura 1.1: Comparação das razões C/d obtidas pelos alunos com o valor de π .

Duração: 1 aula.

Ação 3

No quadro, o professor organiza os resultados obtidos, destacando a aproximação comum em torno de 3,14 e as variações decorrentes das imprecisões de medição. Nesse momento, introduz-se formalmente o número π como irracional, cuja representação decimal é infinita e não periódica. Relacionam-se os resultados à fórmula da circunferência $C = 2\pi r$.

Como fechamento, sugere-se um debate coletivo em que se ressalta a presença de π em múltiplos contextos da matemática e das ciências. Para ampliar a reflexão, o professor pode propor um problema final, como o exemplo a seguir:

Uma pista de corrida possui formato circular e raio de 25 metros. Um atleta completa uma volta nessa pista. Sem realizar a medição direta, apenas com cálculos, é possível determinar

exatamente a distância percorrida? Justifique sua resposta à luz do que foi aprendido sobre o número π .

Essa reflexão conduz os estudantes a perceberem que, embora seja impossível obter o valor exato, é possível calcular aproximações confiáveis, destacando o caráter irracional de π .

Duração: 1 aula.

A importância da atividade

A proposta de calcular o valor aproximado de π com objetos do cotidiano é relevante por tornar o conceito de número irracional mais concreto e significativo. Ao realizar medições e comparações, os alunos percebem a constância da razão $\frac{C}{d}$, desenvolvendo habilidades de observação, análise e argumentação matemática. Além disso, a atividade permite verificar, de forma empírica, a validade da fórmula do comprimento da circunferência $C = 2\pi r$, reforçando o entendimento do conceito por meio da experimentação. A contextualização histórica contribui para destacar a importância cultural e científica de π , enquanto a proposta atende às competências da BNCC, aproximando a matemática do cotidiano e incentivando a curiosidade, a reflexão crítica e o protagonismo dos estudantes.

1.3 Atividade 3: Uma abordagem mais prática para o ensino do número de Euler

A proposta dessa atividade é realizar uma abordagem mais prática para o ensino do número de Euler **e**, com o objetivo de despertar o interesse e facilitar a aprendizagem dos estudantes sobre esse importante conceito matemático. A atividade é baseada no cálculo de juros compostos, aproximando o conceito de uma situação concreta e familiar aos estudantes.

Segundo (5, Maor, 2004), um dos primeiros indícios da aproximação implícita ao número de Euler aparece em um problema de Matemática Financeira encontrado em uma tábua de argila datada de cerca de 1700 a.C., onde se questiona: “Quanto tempo levará para uma quantia de dinheiro dobrar se for investida a uma taxa de 20% de juros compostos ao ano?”

Embora a veracidade histórica desse problema não seja o foco, ele oferece uma excelente oportunidade para contextualizar a aplicação do número de Euler no Ensino Médio. Historicamente, taxas de juros de 100% ao ano eram comuns em certos períodos. A partir disso, propomos a abordagem que será apresentada nas **Ações de 1 a 4** a seguir.

Utilizaremos a fórmula dos juros compostos, comumente ensinada no Ensino Médio:

$$M = C(1 + i)^t,$$

onde M é o montante final, C o capital inicial, i a taxa de juros e t o tempo de aplicação. A escolha cuidadosa de valores facilitará a identificação do número de Euler, tornando o conceito mais acessível a estudantes que ainda não o conhecem.

Público-alvo: Estudantes do 2º ano e do 3º ano do Ensino Médio.

Ação 1

Para o desenvolvimento desta atividade, recomenda-se que os estudantes já tenham familiaridade com operações envolvendo potências e com a fórmula dos juros compostos. Caso sejam identificadas lacunas nesses conhecimentos prévios, o professor deverá realizar uma intervenção pedagógica inicial, assegurando que todos possam compreender os cálculos propostos e participar ativamente da atividade.

Duração: 1 a 2 aulas.

Ação 2

Nesta etapa da atividade, os alunos serão convidados a calcular o montante de uma aplicação financeira em diferentes frequências de tempo, de modo a observar como os resultados se aproximam progressivamente de um valor específico. Essa abordagem permitirá introduzir de forma intuitiva o número irracional e .

Considere um capital inicial de $C = R\$1,00$ aplicado a juros compostos durante um ano, com taxa de $i = 100\% = 1$ ao ano. Com ou sem o auxílio de uma calculadora, cada aluno deve calcular o montante M para diferentes frequências de capitalização, observando o comportamento do valor obtido à medida que a capitalização aumenta. Ao realizar os cálculos, é esperado que cada aluno obtenha:

- Capitalização anual:

$$M = 1(1 + 1)^1 \Rightarrow M = 2.$$

- Capitalização semestral:

$$M = 1\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow M = 2,25.$$

- Capitalização mensal:

$$M = 1 \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} \Rightarrow M \approx 2,613035.$$

- Capitalização diária:

$$M = 1 \left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} \Rightarrow M \approx 2,714567.$$

- Capitalização horária:

$$M = \left(1 + \frac{1}{365 \cdot 24}\right)^{365 \cdot 24} = \left(1 + \frac{1}{8760}\right)^{8760} \Rightarrow M \approx 2,718126.$$

- Capitalização por minuto:

$$M = \left(1 + \frac{1}{525600}\right)^{525600} \Rightarrow M \approx 2,718279.$$

- Capitalização por segundo:

$$M = \left(1 + \frac{1}{31536000}\right)^{31536000} \Rightarrow M \approx 2,71828178.$$

Duração: 1 aula.

Ação 3

Após a realização dos cálculos da Ação 2, os alunos devem analisar os resultados obtidos e compará-los entre si. Observa-se que, à medida que o intervalo de capitalização diminui, o valor do montante M se aproxima progressivamente de um número específico. Por exemplo, no caso da capitalização por segundo, o montante encontrado é:

$$M \approx 2,71828178,$$

valor que coincide com as primeiras casas decimais do número irracional

$$e = 2,718281828459\dots$$

Além disso, o professor deve conduzir os alunos a perceberem que:

- o crescimento de M tende a se estabilizar em torno de um limite, mesmo que o intervalo de capitalização continue a diminuir.
- o valor ao qual M se aproxima é chamado de número de Euler, ou simplesmente **e**.

- Ressaltar que **e** é um número irracional, com representação decimal infinita e não periódica.
- Incentivar uma breve discussão sobre a importância de **e** em diversos contextos matemáticos e científicos, mostrando sua relevância prática.

Duração: 1 aula.

Ação 4

Uma maneira complementar e eficaz de aprofundar a compreensão do número de Euler **e** é por meio da análise gráfica da função $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

utilizando softwares matemáticos como o GeoGebra.

Nesta aula, o professor deve levar os estudantes ao laboratório de informática da escola, e:

- Solicitar que os alunos construam o gráfico da função no GeoGebra, variando os valores de x .
- Orientá-los a observar que, conforme x aumenta, os valores de $f(x)$ se aproximam cada vez mais de uma constante.
- Explicar que essa constante é o número irracional **e**, reforçando que, embora o conceito formal de limite ainda não faça parte do currículo do Ensino Médio, a visualização gráfica oferece uma compreensão intuitiva desse comportamento.
- Incentivar os alunos a registrar suas observações e discutir coletivamente por que a função tende a se estabilizar.

A Figura 1.2 apresenta um exemplo do gráfico gerado no GeoGebra, mas é recomendável que cada aluno construa o seu, pois a interação direta com o software favorece a assimilação do conceito.

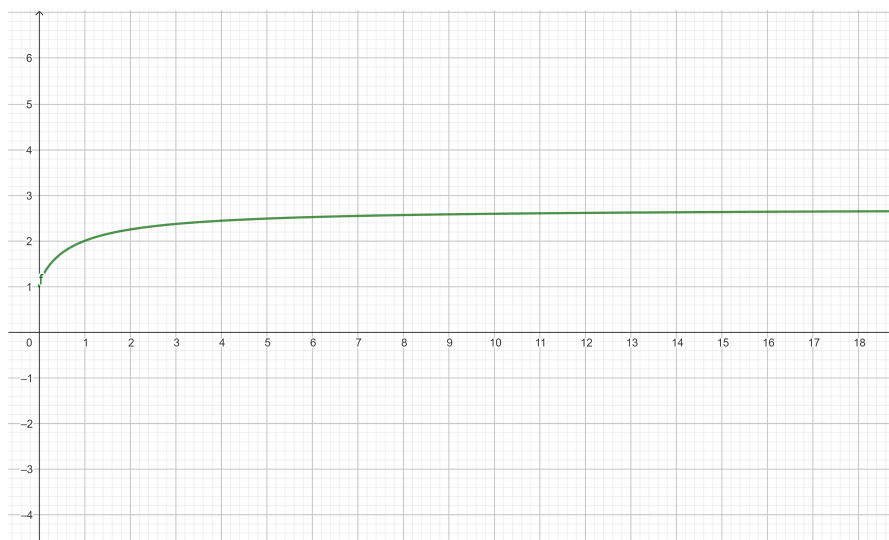


Figura 1.2: Gráfico da função $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Duração: 1 aula.

Curiosidade matemática sobre o número de Euler

O exemplo trabalhado nas ações anteriores considera a capitalização composta com intervalos discretos de tempo (anual, mensal, diária, etc.). Entretanto, é relevante mencionar que, em situações reais do mercado financeiro, utiliza-se também a capitalização contínua, na qual o número de Euler aparece de forma explícita na fórmula:

$$M = Ce^{it},$$

em que C é o capital inicial, i é a taxa de juros anual e t é o tempo em anos.

Embora a dedução formal dessa expressão ultrapasse o escopo do Ensino Médio, sua apresentação pode enriquecer a discussão, mostrando a importância prática e a presença constante de **e** em contextos do mundo real. Para mais detalhes, recomenda-se consultar (4, Arruda, 2007, p.64).

Caso haja tempo e interesse da turma, o professor pode propor uma atividade exploratória simples, em que os alunos substituam valores na expressão da capitalização contínua para calcular o montante M . Essa prática favorece a percepção da aplicabilidade do número **e** em situações financeiras reais.

A importância da atividade

A sequência didática sobre o número de Euler possui grande relevância pedagógica, pois permite que os estudantes compreendam, de forma intuitiva e contextualizada, a presença e a aplicabilidade desse número irracional em diferentes situações. Ao trabalhar com cálculos de juros compostos em diversas frequências de capitalização e, posteriormente, com a visualização de $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, os alunos percebem como o valor de **e** emerge naturalmente. Essa abordagem favorece a interdisciplinaridade, aproxima a Matemática da realidade cotidiana, introduz de maneira acessível a noção de limite e prepara o estudante para estudos futuros mais avançados, fortalecendo assim uma aprendizagem significativa e duradoura.

CAPÍTULO 2

A Aplicação das Sequências Didáticas em Sala de Aula

2.1 Aplicação da Atividade 1

A atividade foi realizada em quatro aulas de 50 minutos em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Coromandel - MG, com carga horária total de 200 minutos. Vamos separar a descrição da atividade em quatro momentos: Primeira aula, Segunda aula, Terceira aula e Quarta aula.

Primeira aula (50 minutos)

O desenvolvimento da sequência iniciou-se com uma exposição conduzida pelo professor, que apresentou um breve histórico do Teorema de Pitágoras, seguido de uma revisão conceitual e da resolução de diversos exemplos práticos. Nesse primeiro momento, foram utilizadas apenas medidas expressas em números naturais que resultassem em raízes quadradas exatas, de modo que as diagonais calculadas correspondessem a valores inteiros e racionais.

Durante a aula, observou-se que a maior parte dos alunos compreendeu os procedimentos, embora alguns tenham demonstrado dificuldades em operações básicas, como a manipulação de termos em equações (especialmente a mudança de sinal ao transpor um termo) ou a aplicação correta da raiz quadrada para isolar a incógnita. Houve também casos de dificuldades específicas no cálculo de raízes quadradas e em operações de multiplicação. Apesar disso, de modo geral, os alunos responderam corretamente às atividades propostas, ainda

que com alguns erros pontuais. Ao final, foi sugerido que, em seus ambientes cotidianos (casa, escola ou comunidade), os estudantes identificassem figuras geométricas relacionadas a triângulos retângulos, como preparação para a aula seguinte.

Segunda aula (50 minutos)

O professor iniciou retomando a proposta anterior e incentivando os alunos a compartilharem situações práticas em que identificaram a aplicação do Teorema de Pitágoras. Constatou-se certa dificuldade inicial dos estudantes em relacionar o conteúdo escolar ao seu cotidiano. Para estimular a participação, o professor apresentou um retângulo simples de dimensões $12\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ e desafiou-os a calcular sua diagonal. Um aluno percebeu que a diagonal dividia o retângulo em dois triângulos retângulos, o que levou a turma a aplicar os conhecimentos da aula anterior.

O professor ampliou a discussão abordando aplicações práticas do teorema em construções. Por exemplo, questionou sobre as estruturas de sustentação de telhados, levando os alunos a perceberem que as tesouras são compostas por triângulos retângulos. Posteriormente, apresentou dois exemplos tradicionais:

1. **A “regra do X”:** com auxílio de dois alunos, mediram-se as diagonais da sala de aula. Verificou-se que as medidas eram congruentes, o que foi explicado pelo fato de os ângulos internos da sala serem retos. O professor destacou que, se as medidas fossem diferentes, isso indicaria que a sala não estaria em perfeito esquadro, e demonstrou a aplicação do Teorema de Pitágoras nesse contexto.
2. **Verificação de ângulo reto entre duas paredes:** utilizando uma fita métrica, o professor e os alunos marcaram 80 cm em uma parede e 60 cm em outra, a partir de um mesmo vértice, medindo em seguida a distância entre as extremidades, que resultou em 100 cm . Substituindo esses valores no Teorema de Pitágoras, concluiu-se que o ângulo formado era reto, exemplificando outra aplicação prática do teorema.

Em seguida, o professor organizou a turma em duplas e distribuiu uma folha de papel milimetrado (ou quadriculado) para cada dupla, juntamente com uma folha de atividades.

Na primeira atividade, os alunos recortaram um retângulo de $6\text{ cm} \times 8\text{ cm}$. Em seguida, foram orientados a calcular sua diagonal utilizando o Teorema de Pitágoras. Todos obtiveram o resultado correto, com os alunos que apresentavam mais dificuldades sendo auxiliados por seus colegas. Posteriormente, o professor sugeriu que verificassem com uma régua a medida da diagonal do retângulo, confirmando o resultado de 10 cm .

Terceira aula (50 minutos)

Com a turma organizada em duplas, cada uma munida de uma folha de papel milimetrado e de uma folha de atividades, o professor propôs, dando continuidade à etapa inicial realizada na aula anterior, que construíssem um retângulo com medidas de lados escolhidas livremente, preferencialmente expressas em números naturais, e calculassem sua diagonal aplicando o Teorema de Pitágoras. Durante a realização da atividade, algumas duplas perceberam que o resultado obtido não correspondia a uma raiz quadrada exata.

Para direcionar o raciocínio, em uma outra atividade, o professor orientou os alunos a selecionar medidas cujos quadrados, ao serem somados, resultassem em um número primo. Como muitos apresentaram dificuldades nessa escolha, foram fornecidos exemplos práticos: $(2, 3)$ e $(2, 7)$. Dessa forma, os alunos calcularam, respectivamente, $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ e $\sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}$. Os resultados evidenciaram que se tratava de raízes quadradas de números primos e que os valores obtidos não eram exatos (números racionais).

Muitos alunos notaram que, ao calcular a raiz quadrada, não obtinham um número natural ou racional. Então, foram incentivados a realizar aproximações dessas raízes, seja por tentativas sucessivas, seja com o auxílio de calculadoras, quando disponíveis. Por fim, mediram com a régua a diagonal obtida e compararam com o valor aproximado calculado, observando que os valores eram próximos, mas não coincidiam exatamente.

Quarta aula (50 minutos)

Nesta aula, o professor retomou a atividade dos cálculos das raízes quadradas de números primos, introduzindo o conceito de números irracionais, ressaltando que tais raízes possuem infinitas casas decimais não periódicas (relacionando com o conhecimento prévio dos alunos sobre dízimas periódicas).

A aula foi finalizada com um debate coletivo, no qual as duplas compararam os diferentes resultados obtidos na aula anterior e compartilharam suas descobertas. Muitos concluíram que, nessas situações, é mais comum obter números irracionais do que racionais, reforçando o objetivo central da atividade.

Além disso, para favorecer uma aprendizagem mais significativa, o professor propôs, como atividade extra classe, o seguinte problema que relaciona o conceito discutido com situações reais:

Imagine que você precise medir a diagonal de um terreno retangular de 7m por 8m para colocar uma cerca. Sem usar instrumentos de medição, apenas com cálculos, você con-

seguiria obter o valor exato dessa diagonal? Justifique sua resposta relacionando-a ao que aprendemos sobre números irracionais.

Observações sobre a aplicação da Atividade 1

Vale ressaltar que, durante a aplicação da sequência didática proposta, foram observadas dificuldades de alguns alunos na realização de cálculos básicos, o que evidencia lacunas na aprendizagem de conteúdos que já deveriam ter sido consolidados nos anos finais do Ensino Fundamental. Por outro lado, destacou-se a boa receptividade das atividades por grande parte da turma, o que reforça a importância de abordar os conteúdos de forma contextualizada e mais próxima da realidade dos estudantes.

2.2 Aplicação da Atividade 2

A segunda atividade foi realizada em três aulas de 50 minutos, em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Coromandel - MG, com carga horária total de 150 minutos. Como na descrição da atividade anterior, vamos separar a descrição em três momentos: Primeira aula, Segunda aula e Terceira aula.

Primeira aula (50 minutos)

O professor iniciou a aula desenhando uma circunferência no quadro e promovendo um debate com a turma sobre o nome da figura e suas possíveis aplicações. Entre as respostas dos alunos, surgiram termos como bola, roda, círculo, esfera e circunferência. Em seguida, apresentou e definiu os principais elementos dessa figura: comprimento, diâmetro e raio. Para tornar a atividade mais envolvente, conduziu um diálogo sobre formas circulares presentes no cotidiano, sejam em objetos, na natureza ou em construções humanas. Para ilustrar a discussão, exibiu imagens de formas circulares em fenômenos naturais — como seções de frutas, gotas d'água e ondas — e também em contextos astronômicos, como o Sol, a Lua e os planetas. Os alunos reconheceram que tais formas são frequentes e exercem grande importância em nossas vidas.

Durante o debate, destacou-se ainda a relevância histórica da invenção da roda para o desenvolvimento da humanidade.

Na sequência, o professor apresentou uma breve revisão histórica das tentativas de cálculo do número π , destacando que ele corresponde à razão entre o comprimento de uma

circunferência e o seu diâmetro. Ressaltou que, já na Grécia Antiga, esse resultado era considerado de grande importância.

Ao final da aula, o professor solicitou que cada aluno trouxesse, para o próximo encontro, um objeto circular presente em seu cotidiano.

Segunda aula (50 minutos)

O professor iniciou a aula organizando a turma em grupos de dois ou três alunos para a realização da atividade. Cada estudante trouxe um objeto com formato circular, conforme solicitado na aula anterior. No primeiro momento, os alunos foram orientados a medir com atenção o comprimento da circunferência de seus respectivos objetos. Para isso, alguns utilizaram barbantes fornecidos pelo professor, enquanto outros, que trouxeram objetos cilíndricos, aplicaram o método da rolagem: marcaram um ponto na superfície do objeto e o fizeram rolar sobre uma folha, registrando o deslocamento a cada volta completa. Em seguida, com o auxílio de réguas, mediram o diâmetro de cada objeto. Os dados foram registrados em uma tabela semelhante à apresentada na Ação 2 da Atividade 2 (seção 1.2), na qual também calcularam a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro.

Posteriormente, cada grupo entregou seus resultados ao professor, que organizou as informações em um gráfico semelhante ao da Ação 2 da Atividade 2 (seção 1.2), permitindo a análise coletiva dos valores obtidos.

Apesar das pequenas variações decorrentes de imprecisões nas medições, o gráfico evidenciou que a maioria dos resultados se encontrava no intervalo de 3,1 a 3,2, com poucos casos fora dessa faixa.

Um dos resultados chamou especialmente a atenção do professor: uma estudante encontrou a razão $\frac{C}{d} = \frac{22}{7} = 3,142857143\dots$, valor conhecido historicamente como uma aproximação notável de π . Na ocasião, o professor explicou que essa fração é conhecida desde a Antiguidade e que é atribuída a Arquimedes, sendo uma das aproximações racionais mais famosas para o número π . O objeto utilizado pela estudante foi uma lata de milho em conserva.

A atividade despertou entusiasmo entre os alunos, que demonstraram grande interesse ao constatar que é possível estimar, de forma empírica, um número matemático tão importante utilizando objetos simples e cotidianos.

Terceira aula (50 minutos)

No terceiro dia de aula, após consolidar a ideia de como estimar o valor de π , o professor retomou os resultados obtidos na atividade anterior e destacou que a aproximação mais comum utilizada para esse número é 3,14 — valor bastante próximo da média dos resultados obtidos pelos grupos.

Nesse momento, o professor introduziu uma nova informação: o número π é, na verdade, um número irracional, ou seja, sua representação decimal é infinita e não periódica. Imediatamente, os alunos associaram essa característica às raízes quadradas não exatas, tema já trabalhado na turma anteriormente.

Como desdobramento prático da aula anterior, o professor retomou o conceito de comprimento da circunferência, que já havia sido apresentado, agora com o objetivo de reforçar sua compreensão por meio da aplicação concreta.

Segundo alguns alunos da turma, a atividade realizada, em que mediram o comprimento e o diâmetro de objetos circulares e calcularam a razão entre essas medidas, contribuiu significativamente para que compreendessem de forma mais intuitiva a fórmula $C = \pi d$.

Para reforçar a compreensão, o professor conduziu um debate com a turma sobre a importância de π em diversas situações do cotidiano, do qual os alunos participaram ativamente, citando aplicações do comprimento da circunferência em engrenagens, rodas, construções circulares, entre outros contextos.

Ao final da aula, o professor propôs um desafio:

Desafio: Uma pista de corrida tem formato circular e raio de 25 metros. Um atleta completa uma volta completa nessa pista. Sem realizar a medição direta, apenas com cálculos, seria possível determinar exatamente a distância percorrida?

Rapidamente, os alunos relacionaram o desafio à fórmula do comprimento da circunferência, reconhecendo que a distância percorrida poderia ser calculada por $C = 2\pi r$, evidenciando que haviam compreendido e assimilado a aplicação do número π em uma situação concreta do cotidiano.

Observações sobre a aplicação da Atividade 2

Durante a aplicação da sequência didática sobre o número π , foi possível observar alguns desafios relacionados à matemática básica, especialmente no que diz respeito a erros de cálculo envolvendo operações com números decimais e frações. Esses obstáculos evidenciam

a importância de revisitar conteúdos fundamentais ao trabalhar conceitos mais avançados, como a razão entre medidas. Por outro lado, a atividade também despertou grande entusiasmo entre os alunos, que demonstraram empolgação ao perceber que era possível visualizar na prática conceitos teóricos abordados em sala de aula. O uso de objetos do cotidiano, a realização de medições e a análise coletiva de dados favoreceram o engajamento da turma e contribuíram para uma aprendizagem mais significativa do número π e de suas aplicações.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2012.
- [2] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 28 jul. 2025.
- [3] D'AMBROSIO, U. **Educação matemática: da teoria à prática**. 23. ed. Campinas: Papirus, 2012.
- [4] Evilásio José de Arruda, **O número de Euler e os fundamentos dos números reais**. Dissertação de mestrado, UFMT-IE, 2007.
- [5] MAOR, Eli. **e: a história de um número**. 2. ed. Tradução de Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2004.
- [6] Sergio Geraldo da Cunha, **O Conjunto dos Números Irracionais: fundamentos teóricos e estratégias de ensino na Educação Básica**. Dissertação de mestrado, PROFMAT-IME-UFU, 2025.