UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
PROFMAT

Natanael Silva Ribeiro

A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E DEMONSTRAÇÕES

PRODUTO EDUCACIONAL

Orientador: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

CAMPINA GRANDE
2025

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente Produto Educacional é parte integrante da Dissertação de Mestrado intitulada por: UM PASSEIO POR ALGUNS TÓPICOS DA GEOMETRIA PLANA COM A UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA, apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Rede Nacional da Universidade Estadual da Paraíba - Profmat/UEPB, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Neste Produto, apresentamos algumas maneiras de facilitar a aplicação de conceitos geométricos e melhorar a compreensão de estudantes e professores da Educação Básica em relação ao tema proposto, caso venham fazer uso deste material.

Este Trabalho propõem-se a contribuir com o tema abordado de forma inovadora com o intuito de melhorar o processo de ensino e aprendizado. Para tal contribuição, construímos um tutorial com o uso do *software* GeoGebra com o passo a passo e animações das demonstrações dos resultados clássicos da Geometria Plana, conhecidos como Trorema da Borboleta e Reta de Simson-Wallace.

Nosso propósito é mostrar ao público a importância do uso das tecnologias no processo de ensino-aprendizagem, bem como despertar potenciais nos estudantes, fortalecendo seu raciocínio lógico dedutivo, suas habilidades e contribuindo de forma significativa para a sua formação.

As construções e animações que iremos expor, foram feitas seguindo um passo a passo detalhado com a utilização do GeoGebra, enfatizamos uma maior clareza e uma melhor assimilação causadas por essas animações, principalmente naqueles estudantes que têm um maior grau de dificuldade quanto à visualização de figuras. Ao término de cada demonstração, temos o link de direcionamento para o acesso às construções e animações, onde utilizamos, simultaneamente, um tutorial sequencial e explicativo.

2 OBJETIVOS

2.1 Geral

O objetivo geral deste Produto Educacional é utilizar o GeoGebra na assimilação, compreensão, visualização e construção de um tutorial com o passo a passo do Teorema da Borboleta e aplicação e da Reta de Simson-Walace.

2.2 Específicos

No geral, esperamos que os alunos alcancem todos ou quase todos os objetivos propostos na dissertação a qual este Produto Educacional integra, a saber:

- Fazer com que estudantes da educação básica tenham o primeiro contato com o GeoGebra;
- Utilizar o *software* para construir figuras com a participação dos alunos;
- Incentivar e despertar o interesse de professores e alunos pelo uso do GeoGebra como instrumento auxiliar nas aulas de matemática e também na resolução de exercícios e problemas mais sofisticados;
- Tornar as aulas mais dinâmicas e prazerosas através do GeoGebra, explorar, entre suas diversas funções, a visualização de figuras planas e espaciais;
- Explorar, demonstrar e aplicar determinados teoremas que, em geral, não são vistos nos livros didáticos mas podem ter suas provas compreendidas através de resultados elementares da geometria plana.
- Contribuir de maneira eficaz para o melhoramento e aperfeiçoamento do ensino de matemática nas escolas públicas da educação básica.

2.3 Embasamento Teórico

Seguindo as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o uso das tecnologias no Ensino Fundamental e também no Ensino Médio, temos a intenção de abordar as principais competências e habilidades propostas pela Base.

Mesmo diante de várias alternativas na área tecnológica, o desafio de agregar às aulas de geometria o desenvolvimento das habilidades e competências de maneira eficaz não é uma tarefa fácil, pensando nisso, queremos deixar neste trabalho uma parcela de contribuição através das construções que iremos desenvolver.

A Base Nacional Comum Curricular em sua 5ª Competência para o Ensino Fundamental aponta que devemos: "Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados".

Ainda de acordo com a BNCC, a Etapa do Ensino Fundamental - Anos Finais contempla várias habilidades alfanuméricas no que concerne à Unidade Temática de **Geometria**, entre as quais destacamos aquelas que se referem ao uso de *softwares* de geometria dinâmica, como é o caso do GeoGebra.

- Para o 6º Ano do Ensino Fundamental, temos:
  - (EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
  - (EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.
  - (EF06MA27) Determinar medidas da abertura de ângulos, por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais.
- Para o 7º Ano do Ensino Fundamental, temos:
  - (EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
  - (EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica.
- Para o 8º Ano do Ensino Fundamental, temos:
  - (EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
  - (EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica.

- Para o 9º Ano do Ensino Fundamental, temos:
  - (EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.
  - (EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.

Todas essas habilidades propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) mostram o quanto precisamos nos adequar para as novas formas de ensino. No que segue, apresentaremos o objetivo principal desse Produto Didático que é a construção de figuras de forma animada, contribuindo para uma aprendizagem mais prazerosa, divertida e, principalmete, significativa, com a utilização do *software* de geometria dinâmica, o GeoGebra.

3 UTILIZANDO O GEOGEBRA PARA CONSTRUÇÃO E ANIMAÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS DE GEOMETRIA

Inicialmente, espera-se que os estudantes envolvidos já tenham tido um primeiro contato com o *software*, pois a intenção aqui é utilizá-lo para facilitar o entendimento das demonstrações dos teoremas que abordamos e também de uma Aplicação do Teorema da Borboleta. Entretanto, nada impede de utilizarmos esses mesmos recursos para enfatizar os conceitos iniciais da Geometria Plana, tais como pontos, retas, ângulos, noções de paralelismo, perpendicularismo, entre outros.

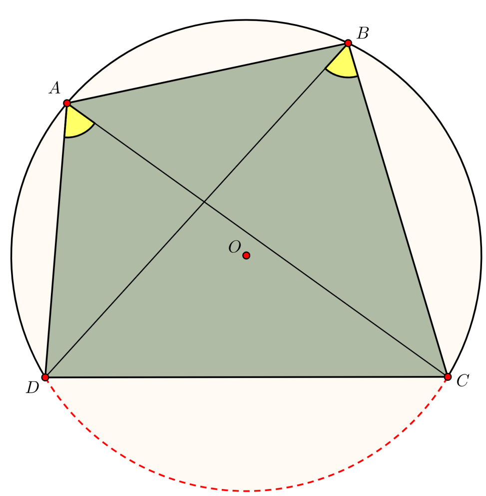
Como mencionado na Introdução deste trabalho, iremos abordar a demonstração do famoso **Teorema da Borboleta** acompanhado de uma aplicação e também um outro teorema conhecido como **Reta de Simson-Wallace.** Esses resultados clássicos da Geometria Plana encontram-se na Dissertação à qual esse Produto Educacional é parte integrante.

Em seguida, veremos como esses resultados foram apresentados na Dissertação e, logo após, deixaremos um *link* para cada construção que realizamos de forma animada no Geogebra.

Observação 3.1. Antes, vamos enunciar um Lema utilizado várias vezes durante as provas desses teoremas. Esse Lema encontra-se demonstrado no Capítulo 6 da Dissertação referenciado como **Lema (6.1).**

Lema 6.1 da Dissertação. Um quadrilátero é inscritível se, e somente se, o ângulo entre um lado e uma diagonal é igual ao ângulo entre o lado oposto e a outra diagonal.

Figura 3.1 – Quadrilátero inscritível.



Fonte: Elaboração própria.

Os resultados que apresentamos neste Trabalho seguem as mesmas referências consultadas para o desenvolvimento da Dissertação. Ao final, deixamos nas referências apenas aquelas que foram consultadas para a realização desse Produto Educacional.

3.1 O Teorema da Borboleta

Teorema 3.1. (Borboleta). Seja M o ponto médio de uma corda $\overline{AB}$ de um círculo, através do qual outras duas cordas $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ são desenhadas; $\overline{EH}$ e $\overline{FG}$ cruzam a corda $\overline{AB}$ nos pontos N e L, respectivamente. Então M é o ponto médio de $\overline{NL}$.

Demonstração. Faremos aqui apenas o 1º caso da prova deste teorema, os outros dois casos encontram-se detalhadamente na Dissertação. Ressaltamos que um de nossos objetivos aqui é mostrar uma maneira eficaz e atrativa de se ensinar.

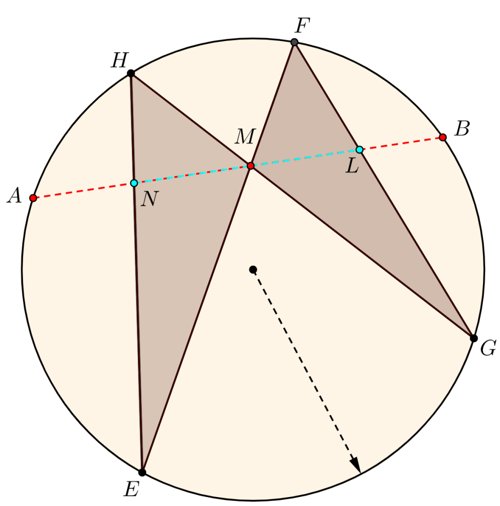
Podemos observar que nesse primeiro caso a corda $\overline{AB}$ está contida na circunferência e os pontos N e L também.

- **1º caso:** Se $\overline{AM} = \overline{MB}$, então $\overline{NM} = \overline{ML}$.

  De fato, por hipótese, $\overline{AM} = \overline{MB}$ o que implica $\overline{AB} \perp \overline{MO}$, pois $\overline{MO}$ é um diâmetro que passa pelo ponto médio de $\overline{AB}$.

  Observe a figura a seguir.

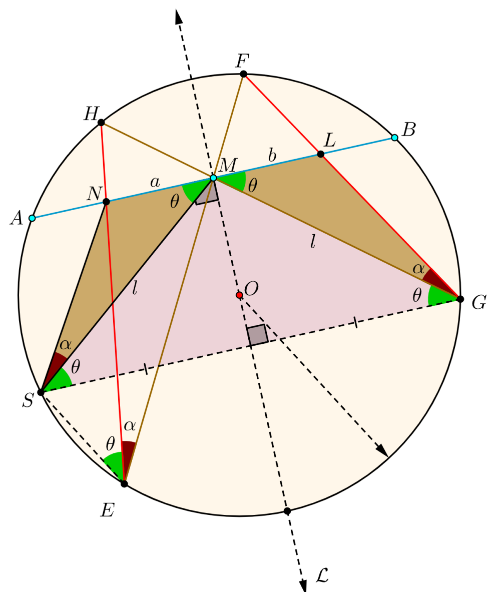
Figura 3.2 – Teorema da Borboleta.



Fonte: (**Bastidas, 2025.**)

A próxima figura apresenta todos os dados necessários para a demonstração do 1º caso, vejamos:

Figura 3.3 – Demonstração do 1º caso do Teorema da Borboleta.



Fonte: (Bastidas, 2025).

A partir do ponto G traçamos o segmento $\overline{GS}$ de modo que $\overline{GS} \perp \mathcal{L}$. Note que o ΔGMS é isósceles de base $\overline{GS}$, ou seja, $\overline{MS} = \overline{MG}$ e consequentemente os ângulos $M\hat{S}G = M\hat{G}S = \theta$.

Por outro lado, o ângulo $S\hat{E}H$ é ângulo inscrito e tem em comum o mesmo arco que o ângulo $M\hat{G}S$, isto é,

$$\measuredangle S\hat{E}H = \measuredangle M\hat{G}S = \measuredangle M\hat{S}G = \theta.$$

No quadrilátero $EMNS$ são congruentes os ângulos $S\hat{E}N$ e $N\hat{M}S$, já que $N\hat{M}S$ e $M\hat{S}G$ são ângulos alternos internos, o que implica, (ver Lema 6.1 na Dissertação) que este quadrilátero é inscritível.

Sendo assim, existe uma circunferência que passa pelos vértices do quadrilátero $EMNS$, ou seja, os ângulos $N\hat{S}M$ e $N\hat{E}M$ compartilham do mesmo arco, $\widehat{AB}$. Logo, $N\hat{S}M = N\hat{E}M = \alpha$.

Portanto, os triângulos MNS e GLM são congruentes pelo **caso ALA**. Isto é, os lados $\overline{MN}$ e $\overline{LM}$ são iguais e, consequentemente, $a = b$, como queríamos demonstrar. □

A seguir, deixamos o *link* de acesso à animação da demonstração desse teorema, a qual esperamos deixar uma marca de contribuição para o processo de aprendizagem.

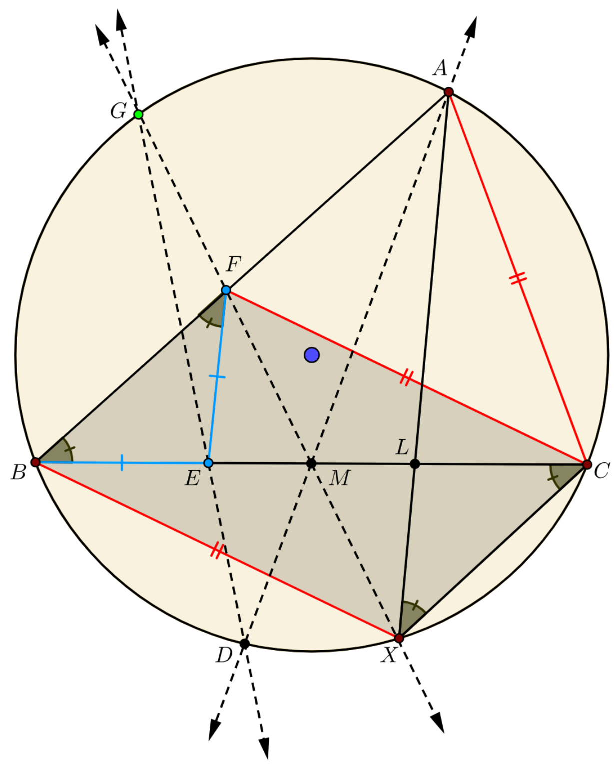
- https://www.geogebra.org/classic/uzcxcrdj

3.2 Uma Aplicação do Teorema da Borboleta: problema 3 da Olimpíada de Matemática do Cone Sul

Problema.

Seja ABC um triângulo acutângulo, com $\overline{AC} < \overline{BC}$ e ω a circunferência que passa por A, B e C. Seja M o ponto médio de $\overline{BC}$. Seja F um ponto sobre o segmento $\overline{AB}$ tal que $\overline{CA} = \overline{CF}$ e seja E um ponto do segmento $\overline{BC}$ tal que $\overline{EB} = \overline{EF}$. A reta $\overleftrightarrow{AM}$ intersecta ω no ponto D (diferente de A). A reta $\overleftrightarrow{DE}$ intersecta a reta $\overleftrightarrow{FM}$ em G. Demonstrar que G pertence a ω.

Figura 3.4 – Olimpíada de Matemática do Cone Sul, 2020.



Fonte: (Madeira, 18/12/2024.)

Demonstração. Tracemos os segmentos $\overline{CX} \parallel \overline{AB}$, daí, $\overline{BX} = \overline{AC}$. Como por hipótese, $\overline{AC} = \overline{CF}$, logo, $\overline{BX} = \overline{AC} = \overline{CF}$. Ou seja, o quadrilátero $BXCF$ é um paralelogramo e o quadrilátero $BXCA$ é um trapézio isósceles.

Como as diagonais do paralelogramo $BXCF$ intersectam-se em seus respectivos pontos médios e por hipótese M é ponto médio de $\overline{BC}$, então $\overline{FX} \cap \overline{BC} = M$. Observe que $\measuredangle L\hat{C}X = \measuredangle E\hat{B}F = \alpha$, uma vez que $\overline{CX} \parallel \overline{BF}$ enquanto $\overline{BC}$ é uma transversal.

Ainda, como $\overline{EB} = \overline{EF}$, temos que o triângulo BEF é isósceles de base $\overline{BF}$ e daí, $\measuredangle B\hat{F}E = \measuredangle E\hat{B}F = \alpha$. Note também que o ângulo inscrito $E\hat{B}F$ compartilha o mesmo arco que o ângulo inscrito $C\hat{X}L$, isto é, $\measuredangle E\hat{B}F = \measuredangle C\hat{X}L = \alpha$. Ou seja, o triângulo CXL é isósceles de base $\overline{CX}$ e como o quadrilátero $BXCF$ é um paralelogramo temos que $\overline{CX} = \overline{BF}$, o que implica que os triângulos BEF e CXL são congruentes pelo **caso ALA**.

Logo, $\overline{XL} = \overline{CL} = \overline{BE} = \overline{FE}$, o que acarreta $\overline{BE} = \overline{CL}$ e como por hipótese M é ponto médio de $\overline{BC}$, temos que $\overline{BM} = \overline{CM}$. Portanto, $\overline{EM} = \overline{ML}$. Dessa forma, podemos concluir pelo Teorema da Borboleta que o ponto $G \in \omega$, como queríamos demonstrar. $\square$

Para uma melhor compreensão dessa demonstração, o convidamos a acessar o *link* do tutorial com o passo a passo da solução do referido problema, o qual no entender contribui para uma visualização mais profunda dos entes geométricos envolvidos e mais significativa.

- https://www.geogebra.org/classic/bqxtr9mp

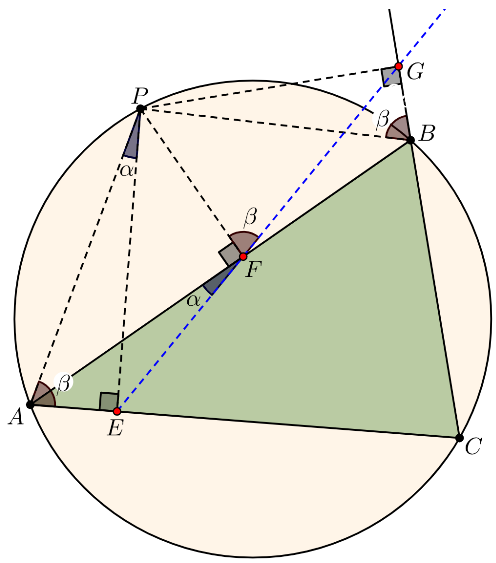
O próximo resultado diz respeito à reta de Simson-Wallace, vamos apresentá-lo e, em seguida, deixar o link de acesso ao passo a passo da animação realizada com o GeoGebra.

3.3 A reta de Simson-Wallace

Teorema 3.2. (Reta de Simson-Wallace) Em todo triângulo, as projeções ortogonais de um ponto da circunferência circunscrita aos seus lados, são colineares. A reta que contém os pés das perpendiculares baixadas desse ponto até os lados do triângulo chama-se reta de Simson-Wallace.

Demonstração. Vamos iniciar nossa prova observando a figura a seguir.

Figura 3.5 – Demonstração da reta de Simson-Wallace.



Fonte: (Bastidas, 2025.)

Nesta figura traçamos os segmentos PA e PB. Sejam os ângulos $A\hat{F}E = \alpha$ e $P\hat{F}G = \beta$. Vamos mostrar que $\alpha + \beta = 90°$.

De fato, os quadriláteros $APFE$ e $PFBG$ são inscritíveis. Note que, no quadrilátero $APFE$, estamos utilizando o Lema 6.1 e o fato de que os ângulos $A\hat{E}P = A\hat{F}P = 90°$. Já no quadrilátero $PFBG$ estamos levando em consideração as projeções ortogonais do ponto P, isto é, $P\hat{F}B = P\hat{G}B = 90°$. Logo, $P\hat{F}B + P\hat{G}B = 180°$, o que acarreta na inscritibilidade de $PFBG$. Veja que pelo Lema 6.1, $P\hat{F}G = P\hat{B}G = \beta$. (Ver Lema 6.1 na Dissertação.)

No quadrilátero inscrito $APBC$, temos $P\hat{A}C = \beta$. Ora, como $P\hat{B}G = \beta$, então, $P\hat{B}C = (180° - \beta)$. Daí,

$$P\hat{A}C + (180° - \beta) = 180° \Rightarrow P\hat{A}C = \beta.$$

Assim, no triângulo retângulo AEP, temos que $\alpha + \beta + 90° = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$. Isso implica dizer que o ângulo $E\hat{F}G = (\alpha + \beta) + 90° = 90° + 90° = 180°$. Ou seja, $E\hat{F}G$ é ângulo raso e consequentemente os pontos E, F e G são colineares, como queríamos demonstrar. □

Novamente, como nos resultados anteriores, temos o *link* de acesso a esta demonstração, onde a encontramos feita com todos os detalhes, de forma animada, seguindo um pequeno tutorial de apresentação no GeoGebra.

- https://www.geogebra.org/classic/tuwnrzy7

REFERÊNCIAS

BASTIDAS, Julio Orihuela. **Circunferencia: teoría-demonstraciones trazos auxiliares**. Cuzcano.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

CLASSIC, GeoGebra. **GeoGebra Classic.** Disponível em: https://www.geogebra.org/classic

MADEIRA, Renato. **Blog do Madeiro.** Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1riiJSoY5QVozwcPPNS5Ckg7fTHgEFPy3/view. Acesso em: 18/12/2024.