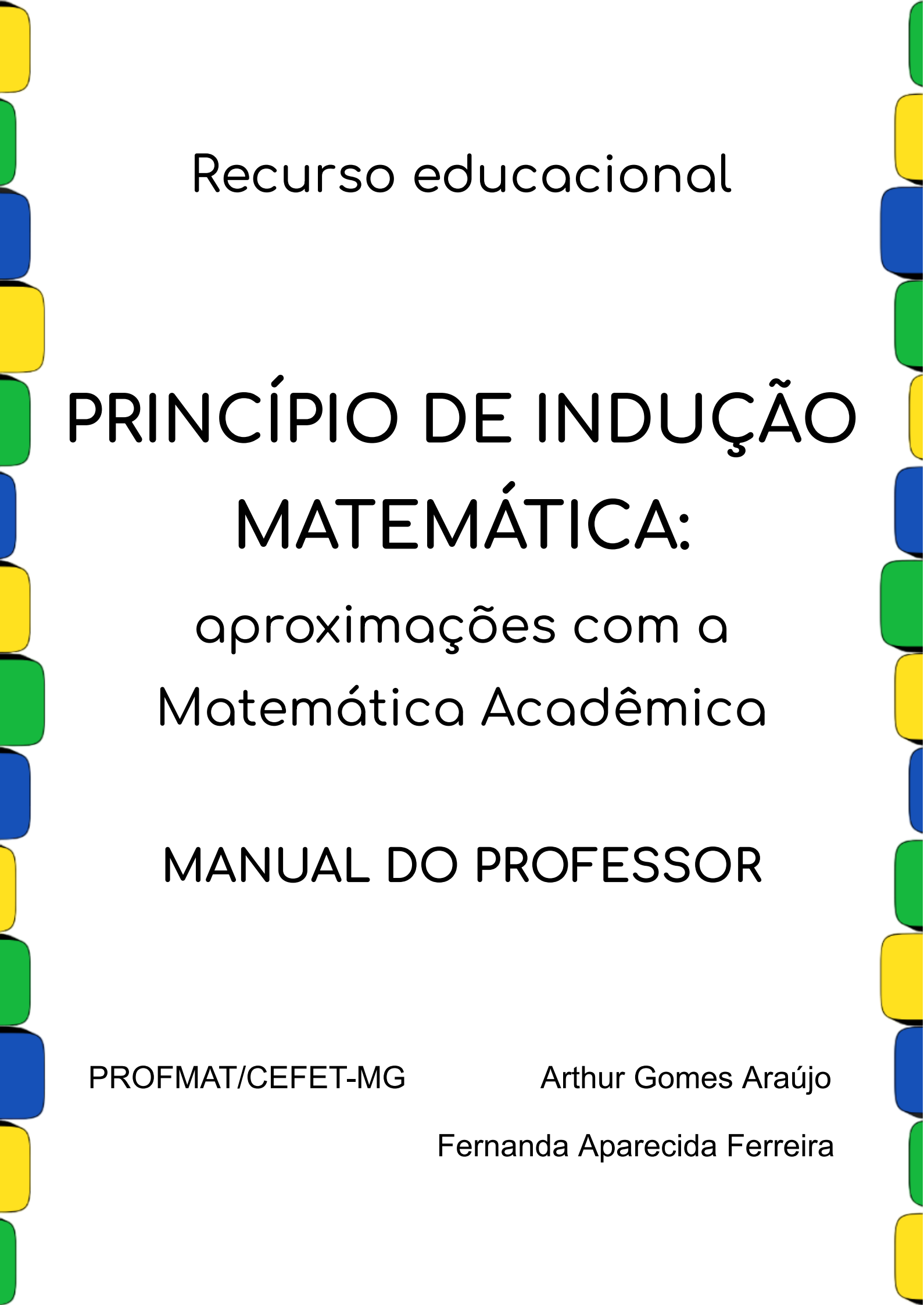




Recurso educacional

PRINCÍPIO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA:

aproximações com a
Matemática Acadêmica

MANUAL DO PROFESSOR

PROFMAT/CEFET-MG

Arthur Gomes Araújo

Fernanda Aparecida Ferreira

ÍNDICE

Apresentação – Um manual para o professor.....	2
Atividade 1 – A lei forte dos pequenos números.....	3
Atividade 2 – Princípio de Indução Matemática.....	11
Atividade 3 – Exercícios de Indução.....	17
Atividade 4 – Torre de Hanói.....	22
Referências.....	24

Apresentação – Um manual para o professor

Esse Recurso Educacional é produto de uma dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do polo Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais – CEFET-MG. Na dissertação estão descritas as bases teóricas e metodológicas que fundamentam as atividades aqui encontradas.

O Manual do Professor é composto de aulas com o objetivo de ensinar o Princípio de Indução Matemática para alunos do Ensino Médio. Nele você encontrará as aulas:

- A lei forte dos pequenos números: um desafio para avaliar a capacidade do estudante de pensar matematicamente o infinito.
- Princípio de Indução Matemática: construção da Indução a partir de um problema geométrico, o Problema dos Quadrados. Também contém exercícios e soluções.
- Torre de Hanói: atividade com material manipulativo, um antigo jogo fundamentado na recorrência.

Trabalhamos na perspectiva da Competência Específica 5 de Matemática da BNCC:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (Brasil, 2018, p. 532).

O intuito de ensinar um tópico de Matemática Acadêmica para alunos do Ensino Médio é desenvolver uma etapa do Pensamento Matemático Avançado, a intuição lógica (Tall, 1991), para suavizar a Transição para o Ensino Superior.

Esperamos que esse Manual possa auxiliar o trabalho docente.

Link de acesso para a dissertação: [clique aqui](#).

Atividade 1 – A lei forte dos pequenos números

Tempo previsto: 2 horas.

Objetivo: suscitar a necessidade de formular uma teoria matemática que ofereça provas rigorosas, em vez de nos basearmos apenas na intuição sem o devido rigor.

Público alvo: Ensino Médio.

Material: Lápis, borracha e materiais impressos.

A lei forte dos pequenos números é uma intuição que as pessoas mostram uma tendência para acreditar que se uma propriedade é válida para um número relativamente pequeno de valores, então será válida para todos.

Para este primeiro momento, nos baseamos no artigo de Richard Guy, *The strong law of small numbers* (Guy, 1988). O autor propõe questões do tipo “faça você mesmo”, na qual mostra exemplos de padrões que parecem se delinear quando olhamos para vários pequenos valores de n , em vários problemas cujas respostas dependem de n .

A questão será, em cada caso: você acha que o padrão persiste para todos os n ? Ou você acredita que é uma ilusão da pequenez dos valores de n que são trabalhados nos exemplos? Cuidado: exemplos de ambos os tipos aparecem; nem todos são ilusões! Em seguida daremos as respostas, junto com as referências. Tente manter um *scorecard*: para cada exemplo, insira seu palpite sobre se o padrão observado continua (Verdadeiro), não continua (Falso) ou não é conhecido. Divirtam-se.

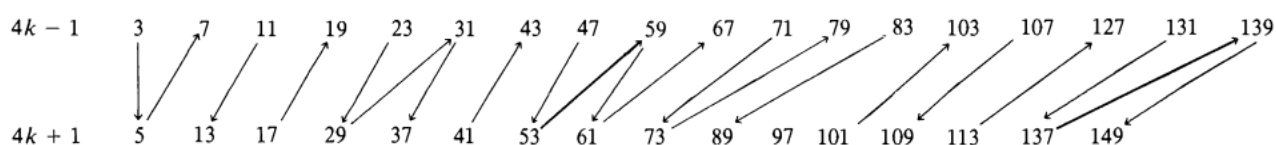
Scorecard: A lei forte dos pequenos números

Situação	Verdadeiro	Falso	Situação	Verdadeiro	Falso
1			6		
2			7		
3			8		
4			9		
5			10		

Situação 1: Os números $2^{2^0} + 1 = 3$, $2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$, $2^{2^4} + 1 = 65537$ são primos.

Situação 2: Os números da forma $2^p - 1$, com p primo, são primos. É fácil verificar que $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 31$, $2^7 - 1 = 127$ são todos primos.

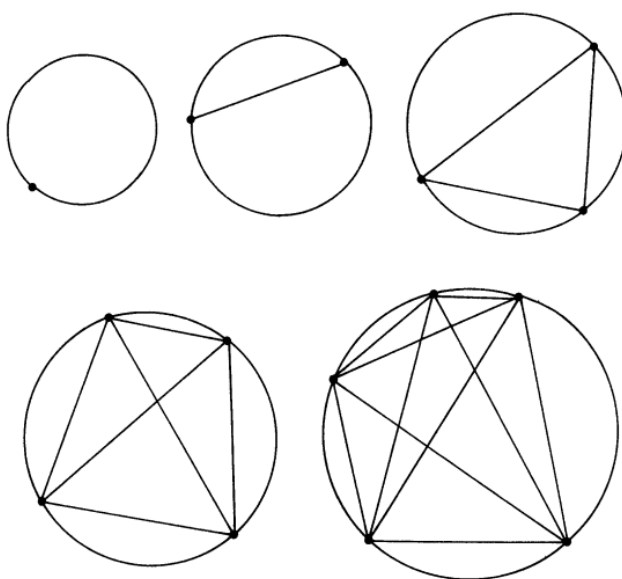
Situação 3: Sabe-se que exceto o 2, que é o único primo par, todos os outros primos têm a forma $4k - 1$ ou a forma $4k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. O intervalo $[1, 10]$ contém 2 primos da forma $4k - 1$ (o 3 e o 7) e só 1 da forma $4k + 1$ (o 5). O intervalo $[1, 32]$ contém 6 primos da forma $4k - 1$ e só 4 da forma $4k + 1$ (verifique). Em qualquer intervalo $[1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, a quantidade de primos da forma $4k + 1$ é menor ou igual aos do que da forma $4k - 1$. Dizemos que os da forma $4k - 1$ vencem a “corrida dos números primos”.



Situação 4: Um número natural tem um ou mais fatores primos da forma $4k + 1$ do que da forma $4k - 1$ ou a mesma quantidade de cada uma das formas. Por exemplo, 21 tem dois do primeiro tipo (3 e 7) e dois do segundo (1 e 21), enquanto 25 tem todos os três (1, 5, 25) do segundo tipo.

Situação 5: Os cinco círculos abaixo tem $n = 1, 2, 3, 4, 5$ pontos marcados sobre sua circunferência. Em cada um deles, todos os pontos são ligados a todos os outros, de modo que as cordas determinam regiões. Observação: três das n cordas não concorrem num único ponto, ou seja, cada grupo de 4 pontos tem apenas uma interseção. Contando o número de regiões nas quais as cordas dividem cada círculo.

Número de pontos	1	2	3	4	5	...	n
Número de regiões	1	2	4	8	16	...	2^{n-1}



Situação 6. Os números 31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, etc. são todos primos.

Situação 7. O fatorial de um número inteiro e positivo n , representado por $n!$ é obtido a partir da multiplicação de todos os seus antecessores até o número um, cuja expressão genérica é $n! = n \times (n - 1)!$. Por exemplo: $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. As somas alternadas de fatoriais dão números primos.

$$3! - 2! + 1! = 5$$

$$4! - 3! + 2! - 1! = 19$$

$$5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 101$$

$$6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 619$$

$$7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 4421$$

$$8! - 7! + 6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 35899$$

Situação 8. Quando você usa o método de Euclides para mostrar que existem infinitos primos,

$$2 + 1 = 3$$

$$(2 \times 3) + 1 = 7$$

$$(2 \times 3 \times 5) + 1 = 31$$

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7) + 1 = 211$$

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) + 1 = 231$$

que nem sempre produz números primos

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) + 1 = 30031 = 59 \times 509$$

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17) + 1 = 510511 = 19 \times 97 \times 277$$

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19) + 1 = 9699691 = 347 \times 27953$$

mas se tomarmos o próximo primo, a diferença com o produto é sempre um primo:

$$5 - 2 = 3$$

$$11 - (2 \times 3) = 5$$

$$37 - (2 \times 3 \times 5) = 7$$

$$223 - (2 \times 3 \times 5 \times 7) = 13$$

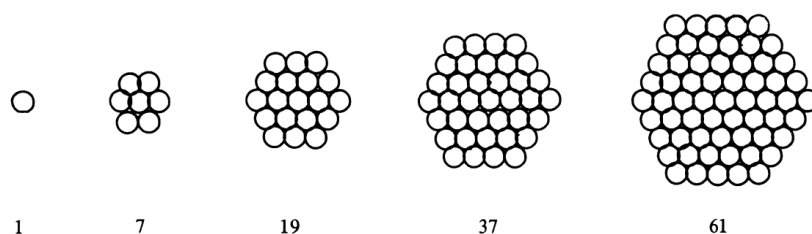
$$2333 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) = 23$$

$$30047 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) = 17$$

$$510529 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17) = 19$$

$$9699713 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19) = 23.$$

Situação 9. A sequência de números hex (assim chamados para distingui-los dos números hexagonais) estão representados na figura abaixo.



As somas parciais desta sequência (a soma parcial de uma sequência é a soma dos seus n primeiros termos), 1, 8, 27, 64, 125 parecem ser cubos perfeitos.

$$1 = 1^3$$

$$1 + 7 = 8 = 2^3$$

$$1 + 7 + 19 = 27 = 3^3 \dots$$

Situação 10. Escreva os inteiros positivos, exclua os pares e forme as somas parciais dos restantes.

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$$

Respostas da Atividade 1

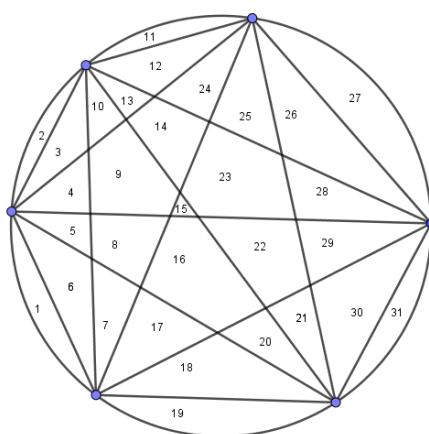
Situação 1: Falso. Ninguém menos do que Fermat (1607-1665) foi enganado pela lei forte! Euler deu a fatoração $2^{32} + 1 = 641 \times 6700417$, que é um contraexemplo. Todos os outros exemplos conhecidos de números de Fermat são compostos.

Situação 2: Falso. Contraexemplo: $2^{11} - 1 = 23 \times 89$ não é primo. Existem poucos primos de Mersenne (1588-1648), que são primos da forma $2^p - 1$, com p primo. Ninguém sabe se existem infinitos primos de Mersenne ou não. O maior primo de Mersenne conhecido corresponde ao valor de $p = 136279841$, tem 41 024 320 dígitos, e foi descoberto em 21 de outubro de 2024¹.

Situação 3: Falso. Na “corrida dos números primos”, $4k - 1$ e $4k + 1$ assumem a liderança alternadamente com frequência infinita. Isso foi provado por Littlewood²

Situação 4: Verdadeiro. Um teorema de Legendre (1752-1833)³ afirma que D_+ e D_- são os números de divisores de n das formas $4k + 1$ e $4k - 1$, respectivamente, então os números de divisores de n como a soma de dois quadrados é $4(D_+ - D_-) \geq 0$. Portanto, $D_+ \geq D_-$ para todo número n .

Situação 5: Falso. Contraexemplo: vejamos o círculo abaixo que tem 6 pontos e está dividido em 31 regiões.



Situação 6: Falso. Nenhum membro desta sequência é divisível por 2, 3, 5, 7, 11, 13 ou 37, como pode ser visto imediatamente a partir de testes de divisibilidade bem

¹ Conferido em <https://www.mersenne.org/>. Data de acesso: 12 de mai. de 2025.

² LITTLEWOOD, J. E. Sur la distribution des nombres premiers. **Comptes Rendus de l'Acad Sci.** Paris, v. 158, p. 1869-1872, 1914.

³ DAVENPORT, H. **The higher arithmetic.** Hutchinson's University Library, 1952.

conhecidos. Por outro lado, 17, 19, 23, 29 e 31 dividem 33...331 apenas se o número de três for respectivamente $16k + 8$, $18k + 11$, $22k + 20$, $28k + 19$ e $15k + 1$, enquanto 41, 43, 53, 67, 71, 73, 79, ... não dividem nenhum membro da sequência. Richard Guy não acredita que haja uma descrição simples de quais primos dividem e quais primos não dividem. O próximo da lista, 33333331, também é primo, mas o seguinte, 333333331, não. Contraexemplo: $333333331 = 17 \times 196078$.

Situação 7: Falso. contraexemplo:

$$9! - 8! + 7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 326981$$

e $326981 = 79 \times 4139$.

Situação 8: Conjectura. R. F. Fortune⁴ conjecturou que essas diferenças seriam sempre números primos. As próximas diferenças são: 37, 61, 67, 71, 47, 107, 59, 61, 109, 89, 103. Evidências apontam para a veracidade da conjectura, mas nada foi provado (ainda?).

Situação 9: Verdadeiro. Primeiramente, o n -ésimo número hex é

$$1 + 6 + 12 + \dots + 6(n - 1) = \frac{(6+6(n-1))(n-1)}{2} + 1 = 3n(n - 1) + 1 = 3n^2 - 3n + 1.$$

O resultado é verdadeiro e a prova é por indução. Sabemos que vale para o caso $n = 1$ (e $n = 2, 3, 4, 5$ também). Suponha que a soma parcial dos n primeiros números hex seja n^3 . O $(n + 1)$ -ésimo número hex é $3(n + 1)^2 - 3(n + 1) + 1 = 3n^2 + 3n + 1$ e, quando adicionado a n^3 , resulta em $(n + 1)^3$. Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, o padrão é verdadeiro para todo n natural.

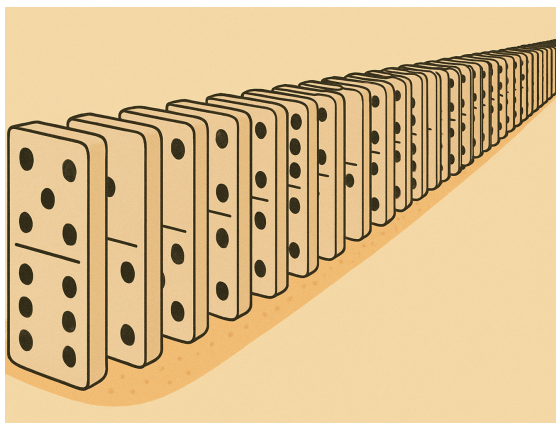
Situação 10: esse é um exemplo do processo de Moessner, que de fato produz os números quadrados. O artigo de Moessner⁵ é seguido por uma prova de Perron. Acredito que você consegue provar isso usando a forma de um número ímpar e indução.

A finalização deste momento se dá na conclusão: "A conclusão vale dentro e fora da matemática: NÃO DÁ PARA DIZER NADA ANALISANDO SÓ UNS POUCOS CASOS!"

⁴ GARDNER, M. Mathematical games: patterns in primes are a clue to the strong law of small numbers. **Sci. Amer**, v. 243, n. 6, p. 18, 1980.

⁵ MOESSNER, A. Eine Bemerkung über die Potenzen der natürlichen.. **Zahlen**. München, 1952. Sitzungsberichte: 1951,3.

Então, como podemos saber se alguma afirmação matemática é verdadeira? A Matemática é constituída por alguns métodos que são logicamente válidos para validá-las. Este material é sobre um desses métodos: o Princípio de Indução Matemática.



Vamos ilustrar esse método como o enfileiramento de peças de dominó⁶: Consideremos um enfileiramento perfeito de dominós, no qual se um deles cai para frente, então derruba o seguinte. Como exercício de imaginação, suponha que haja um encadeamento infinito de dominós. Nesse modelo, se o primeiro dominó for derrubado para frente, o que aconteceria?

Parece-nos que a resposta a esta pergunta é bem intuitiva: os outros dominós cairiam também, um por um. Caso contrário, se um determinado dominó ficasse de pé, digamos o de posição n (n maior do que 1), o dominó imediatamente anterior a este, o de posição $n - 1$, também teria ficado de pé, pois, se tivesse caído, por hipótese, derrubaria o que está logo a sua frente. Procedendo assim, reiteradas vezes, concluiríamos que o primeiro dominó não teria sido derrubado, um absurdo, já que inicialmente afirmamos que o primeiro dominó caiu para frente.

Portanto, não podemos supor que algum dominó vai ficar de pé. Isto se dá por que duas condições foram respeitadas: a primeira é que o primeiro dominó é derrubado e a segunda é que se um dominó cai então derruba o da frente. Repare que as duas condições podem ser associadas às duas fases de uma prova com o Princípio de Indução Matemática (caso base e hipótese de indução) e são igualmente necessárias, uma vez que, se apenas a primeira fosse verdade, nada nos garantiria que os demais dominós cairão, e se somente a segunda fosse verdade, o processo de queda dos dominós poderia jamais iniciar.

⁶ Esse exemplo está em Pereira (2013).

Atividade 2 – Problema dos Quadrados

Tempo previsto: 2 horas.

Objetivo: provar matematicamente a veracidade de um problema geométrico com auxílio da linguagem algébrica.

Público alvo: Ensino Médio.

Material: projetor.

O seguinte Problema dos Quadrados (Fomin et al., 2012) é uma motivação para a introdução do Princípio de Indução Matemática. Ele é uma aplicação simples da indução em um contexto geométrico. A apresentação da indução em geometria logo no início faz com que compreendamos que a indução não só reside em problemas aritméticos, como de costume.

Contemos uma anedota sobre a importância de utilizar os conhecimentos adquiridos na suas experiências com Matemática para formular afirmações. Esta tática está no livro *A Arte de Resolver Problemas*, de George Polya. Em uma das etapas para seu método de resolver problemas, a denominada “Estabelecimento de um Plano”, Polya diz que para resolver um problema, por vezes é possível recordar de um problema correlato (Polya, 1995, p. 5-6).

Se conseguirmos lembrar de um problema anteriormente resolvido que seja intimamente relacionado com o nosso, teremos tido muita sorte. Devemos fazer por merecer esta sorte e podemos merecê-la, aproveitando-a. (Polya, 1995, p. 6).



A anedota, inventada pelo professor Morgado do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), é a seguinte: havia um concurso para professor de Matemática e formou-se uma fila enorme para a vaga, pois o salário era muito bom. Uma banca de especialistas chamava um a um dos candidatos e fazia duas perguntas. A primeira

pergunta era: “caso você esteja em uma sala e tenha um balde cheio d'água no centro dela e uma lareira em um dos cantos, o que você faz para apagar o fogo da lareira?”.

Os candidatos respondiam que iam até o balde no centro da sala, levariam-o para o canto e despejariam a água no fogo. A segunda era: “caso você esteja em uma sala e tenha um balde cheio d'água num canto dela e uma lareira em outro canto, o que você faz para apagar o fogo da lareira?”. Os candidatos respondiam que iam até o balde no canto da sala, levariam-o para o outro canto e despejariam a água no fogo. Diversos candidatos foram dispensados por causa da resposta a esta pergunta. Um candidato acertou e foi contratado. Para o espanto dos outros, ele disse que ia até o balde no canto da sala, levaria-o para o centro e, dessa forma, ele estava situado no problema da primeira pergunta. Em linguagem coloquial, ele “caiu” no problema anterior.

Vejamos um problema parecido com esse do balde, somente que mais interessante. Antes, precisamos de uma definição: um triminó é um tipo de poliminó. “Um poliminó é um conjunto de quadrados encostados lado a lado” (Neto, 2016). Assim, um triminó é um poliminó com três quadrados (figura ao lado). O exemplo mais conhecido dos poliminós é o dominó, que tem dois quadrados.

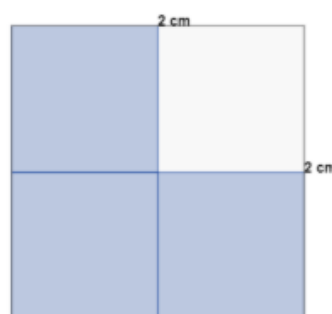
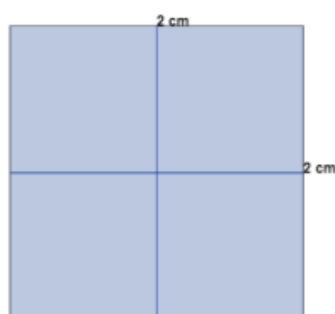


Problema dos quadrados: Foi retirado um quadradinho de um quadrado 16×16 de papel quadriculado. Prove que figura obtida por ser recortada em triminós.

Para resolver esse problema, começaremos por um problema mais fácil.

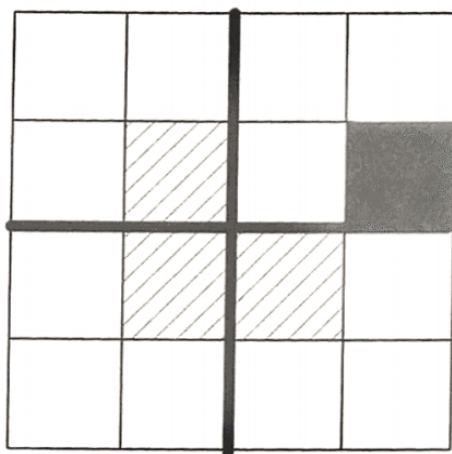
Problema 1: Foi retirado um quadradinho de um quadrado 2×2 de papel quadriculado. Prove que figura obtida por ser recortada em triminós.

O resultado é visualizado pela figura abaixo. À direita da figura, vê-se exatamente o lugar onde ficará o triminó. Portanto, foi provado ser possível resolver o Problema 1.



Problema 2: Foi retirado um quadradinho de um quadrado 4×4 de papel quadriculado. Prove que figura obtida por ser recortada em triminós.

O resultado é visualizado pela figura abaixo. Observamos, na solução geométrica, onde ficarão os triminós, caso retiremos o quadrado preto. Portanto, foi provado ser possível resolver o Problema 2. Outros casos são análogos, somente trasladando ou rotacionando os triminós.



Outra forma de interpretar o Problema 2 e a figura acima que o resolve é imaginar que o quadrado 4×4 é composto por quatro blocos com quadrados 2×2 , onde foi retirado um quadradinho hachurado. Sabemos que, ao se retirar um quadradinho (hachurado) de um quadrado 2×2 , podemos recortá-lo em triminós, pois já resolvemos o Problema 1. Unindo os três quadradinhos hachurados de três dos quatro quadrados 2×2 que compõem o quadrado 4×4 , formamos um triminó (no caso da Figura X, ao centro, uma escolha conveniente). Logo, um quadrado 4×4 pode ser recortado em triminós visto que essa tática da recorrência nos encaminha para a sua resolução.

Problema 3: Foi retirado um quadradinho de um quadrado 8×8 de papel quadriculado. Prove que figura obtida por ser recortada em triminós.

Façamos um exercício mental, abstraindo o que seria um quadrado 8×8 . Podemos imaginar que o quadrado 8×8 é composto por quatro blocos com quadrados 4×4 , onde foi retirado um quadradinho hachurado. Sabemos que, ao se retirar um quadradinho (hachurado) de um quadrado 4×4 , podemos recortá-lo em triminós, pois já resolvemos o Problema 2. Unindo os três quadradinhos hachurados de três dos quatro quadrados 4×4 que compõem o quadrado 8×8 , formamos um triminó (ao centro, uma escolha conveniente). Logo, um quadrado 8×8 pode ser recortado em triminós visto que essa tática da recorrência nos encaminha para a sua resolução.

Voltemos ao Problema dos quadrados, ou seja, o caso 16×16 . Estenderemos este problema construindo “pontes” a partir de questões semelhantes, porém mais simples.

Dividimos o quadrado 16×16 em quatro quadrados 8×8 . Um deles tem um quadradinho faltando. Acabamos de provar que ele pode ser recortado em “cantos” [triminós], certo? Então cortamos um “canto” no centro do quadrado grande e obtemos mais três quadrados 8×8 sem um quadradinho, logo eles podem ser recortados em “cantos”. É isso! (Fomin et al., 2012, p. 84).

Questão: poderíamos construir tais pontes mais uma vez, para problemas mais complicados? Ou seja, resolver os casos 32×32 , 64×64 , 128×128 , etc.?

Isso nos levaria a uma cadeia infinita de proposições sobre quadrados de tamanhos diferentes. Podemos dizer que demonstramos todos esses casos, isto é, o problema dos quadrados para o caso $2^n \times 2^n$ é verdadeiro?

Vamos rever o que fizemos:

1. provamos a primeira afirmação na cadeia sobre o quadrado 2×2 .
2. provamos a segunda proposição (4×4) a partir da anterior (2×2).
3. provamos a terceira proposição (8×8) a partir da anterior (4×4).
4. provamos a quarta proposição (16×16) a partir da anterior (8×8).

Seguindo esta cadeia provaremos qualquer das afirmações para quadrados $2^n \times 2^n$; portanto, todas elas são verdadeiras.

Então acabamos de provar uma série infinita de afirmações sobre a possibilidade de recortar quadrados em triminós. Agora vamos escrever todas essas proposições. Isso é possível?

Proposição (P_n): Um quadrado $2^n \times 2^n$ com um quadradinho faltando pode ser recortado em triminós.

O Problema 1 enunciado anteriormente pode ser reescrito na forma acima como P_1 , trocando 2×2 por $2^1 \times 2^1$ e assim por diante.

P_1 : Um quadrado $2^1 \times 2^1$ com um quadradinho faltando pode ser recortado em triminós.

P_2 : Um quadrado $2^2 \times 2^2$ com um quadradinho faltando pode ser recortado em triminós.

P_3 : Um quadrado $2^3 \times 2^3$ com um quadradinho faltando pode ser recortado em triminós.

E assim por diante. Tratamos de uma cadeia infinita de teoremas semelhantes. Primeiro demonstramos P_1 . Se P_1 for demonstrada, então P_2 será verdadeira. Se P_2 for demonstrada, então P_3 será verdadeira. E se P_n for demonstrada, então...

Teorema: Qualquer que seja o número natural n , se já demonstramos que o quadrado $2^n \times 2^n$ com um quadradinho faltando pode ser recortado em triminós, então o quadrado $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ com um quadradinho faltando também pode ser recortado em triminós.

Ideia de prova: Dividimos mentalmente o quadrado $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ em quatro quadrados $2^n \times 2^n$. Cada um desses se tiver um quadradinho faltando pode ser recortado em triminós, por hipótese. Então cortamos um triminó no centro do quadrado grande de modo que contenha um quadradinho de cada um dos outros três quadrados $2^n \times 2^n$. Depois disso, usamos a hipótese novamente!

Generalizando, temos que, quando provamos o teorema geral, provamos todas as proposições P_n . Por exemplo, para $n = 1$, obtemos a demonstração de que a possibilidade de recortar o quadrado 2×2 implica a possibilidade de recortar o quadrado 4×4 .

Seguindo o Princípio de Indução Matemática:

- Provamos a primeira proposição da série ($P_1: 2 \times 2$).
- Consideramos a proposição P_n (um quadrado $2^n \times 2^n$ com um quadradinho faltando pode ser recortado em triminós) como verdadeira.
- Deduzimos a segunda proposição da primeira, a terceira da segunda, etc. Este é o “passo indutivo”, abreviado pelo teorema geral. Como, passo a passo, podemos chegar a qualquer proposição a partir da base, todas elas são verdadeiras.

Por fim, apresentemos o Princípio de indução matemática:

Princípio de indução matemática: Suponha que para cada número natural n se tenha uma afirmativa P_n que satisfaça as seguintes propriedades: (i) P_1 é verdadeira; (ii) sempre que a afirmativa for válida para um número natural arbitrário $n = k$, ela será válida para o seu sucessor $n = k + 1$ (ou seja, P_k verdadeira implica P_{k+1} verdadeira). Então P_n é verdadeira para todo número natural n .

Podemos traduzir o primeiro item como “O primeiro dominó cai” e o segundo como “Se um dominó cair, ele derrubará o próximo” tal qual no exemplo dos dominós da aula passada.

Atividade 3 – Exercícios de Indução

Tempo previsto: 1 hora.

Objetivo: exercitar o Princípio de Indução Matemática em exercícios geométricos, aritméticos e algébricos, que mesclam Matemática Escolar e Acadêmica.

Público alvo: Ensino Médio.

Material: Lápis, borracha e materiais impressos.

Exercícios

Exercício 1: Prove por indução que, se $n \in \mathbb{N}$, então $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

Solução: Queremos mostrar que a propriedade $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ vale para todo natural n . Vamos provar pelo Princípio de Indução Matemática.

i) (Caso Base) Para $n = 1$, temos $1 = 1^2$. Logo, a propriedade é válida para $n = 1$.

ii) (Passo Indutivo) Suponha, por hipótese, que a propriedade é válida para $n = 2k$, com $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$ (hipótese de indução). Devemos provar que $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$ (repare que o próximo número ímpar depois de $2k - 1$ é $2k + 1$).

Temos que

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2(k + 1) - 1) &= 1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 2 - 1) \\ &= 1 + 3 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1) \\ &= k^2 + (2k + 1), \text{ por hipótese de indução} \\ &= (k + 1)^2. \end{aligned}$$

Logo, pelo princípio de Indução Matemática, a propriedade é válida para todo n número natural, como queríamos demonstrar.

Exercício 2: Encontre as leis gerais sugeridas e, em seguida, demonstre-as por indução:

a) $1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8}, \dots$

Solução: a lei geral é $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$.

Queremos mostrar que a propriedade $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$ vale para todo natural n .

Vamos provar pelo Princípio de Indução Matemática.

i) (Caso Base) Para $n = 1$, temos $1 + \frac{1}{2^1} = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2}$. Logo, a propriedade é válida para $n = 1$.

ii) (Passo Indutivo) Suponha, por hipótese, que a propriedade é válida para $n = k$, com $k \in \mathbb{N}$ e $k > 1$, ou seja, $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^k}$ (hipótese de indução). Devemos provar que $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{1}{2^{k+1}}$.

Temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} &= 2 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}, \text{ por hipótese de indução} \\ &= 2 + \left(-\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \right) \\ &= 2 + \left(\frac{-2+1}{2^{k+1}} \right) \\ &= 2 + \left(\frac{-1}{2^{k+1}} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, a propriedade é válida para todo n número natural, como queríamos demonstrar.

$$b) \quad 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}, \dots$$

$$\text{Solução: a lei geral é } \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

Queremos mostrar que a propriedade $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ vale para todo natural $n > 1$. Vamos provar pelo Princípio de Indução Matemática.

i) (Caso Base) Para $n = 2$, temos $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Logo, a propriedade é válida para $n = 2$.

ii) (Passo Indutivo) Suponha, por hipótese, que a propriedade é válida para $n = k$, com $k \in \mathbb{N}$ e $k > 2$, ou seja, $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}$ (hipótese de indução). Devemos provar que $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}$.

Temos que

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) &= \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right), \text{ por hipótese de indução} \\ &= \frac{1}{k}\left(\frac{k+1-1}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{k}\left(\frac{k}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, a propriedade é válida para todo $n > 1$ número natural, como queríamos demonstrar.

Exercício 3: Encontre o erro na seguinte “prova” de que em qualquer grupo com n pessoas, todas têm a mesma idade.

Se um grupo consiste de uma pessoa, todas têm a mesma idade.

Suponha que em um grupo com k pessoas, todas têm a mesma idade.

Sejam $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ as pessoas em um grupo com $k + 1$ pessoas.

Desde que as pessoas $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ e $a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ formam grupos com k pessoas, todas elas têm a mesma idade, por hipótese de indução.

Desde que a_2 está contido em cada um destes grupos, segue que todas as $k + 1$ pessoas $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+1}$ têm a mesma idade.

Solução: o erro é que a hipótese não diz que formar grupos com k pessoas implica que elas têm a mesma idade. A hipótese de indução diz que $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ têm a mesma idade.

Exercício 4: Encontre o erro na seguinte “prova” que garante $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = (n - 1)(n + 2)$, para todos os números naturais.

Se assumirmos que $2 + 4 + 6 + \dots + 2k = (k - 1)(k + 2)$ para algum k , então

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) = (k - 1)(k + 2) + 2(k + 1)$$

$$= k^2 + k - 2 + 2k + 2$$

$$= k(k + 3)$$

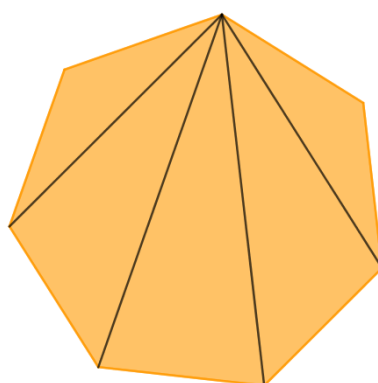
$$= [(k + 1) - 1][(k + 1) + 2]$$

o que significa que sendo verdadeiro para k é verdadeiro para $k + 1$ e, portanto, é verdadeiro para todos os naturais.

Solução: o erro é que faltou provar para o caso $n = 1$, o Caso Base: $2 \cdot 1 = 2 \neq (1 - 1)(1 + 2) = 0$. Logo, a proposição é falsa. Porém, para $n = 2$ temos que $2 \cdot 2 = 4 = (2 - 1)(2 + 2)$, portanto a propriedade é válida para todo n natural maior que 1.

Exercício 5: Use indução matemática para provar que todo polígono convexo com n lados tem o valor $(n - 2)180^\circ$ para soma de seus ângulos internos.

Solução: desenhos podem ajudar nesta demonstração. Eles nos mostram que um polígono pode ser dividido em $n - 2$ triângulos, cada qual tendo a soma dos ângulos internos igual a 180° , de onde vem essa lei geral. A figura abaixo exibe um polígono de 7 lados dividido em 5 ($= 7 - 2$) triângulos.

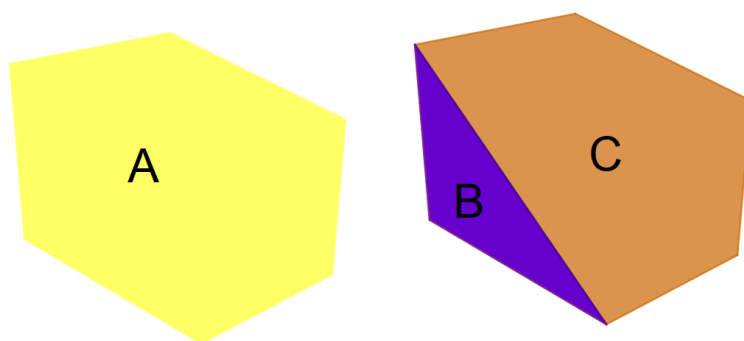


Queremos mostrar que a propriedade “todo polígono convexo com n lados tem o valor $(n - 2)180^\circ$ para soma de seus ângulos internos” vale para todo natural $n \geq 3$, já que um polígono deve ter pelo menos três lados. Vamos provar pelo Princípio de Indução Matemática.

i) (Caso Base) Para $n = 3$, temos $(3 - 2)180^\circ = 180^\circ$ que sabemos ser verdade para o triângulo. Logo, a propriedade é válida para $n = 3$.

ii) (Passo Indutivo) Suponha, por hipótese, que a propriedade é válida para $n = k$, com $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $(k - 2)180^\circ$ é a soma de seus ângulos internos de um polígono com k lados (hipótese de indução). Devemos provar que $(k - 1)180^\circ$ é a soma de seus ângulos internos de um polígono com $k + 1$ lados

Considere um polígono com $k + 1$ lados. Seja A esse polígono arbitrário com $k + 1$ lados. Tome quaisquer três vértices consecutivos desse polígono e desenhe uma linha do primeiro ao terceiro, como mostrado na figura abaixo. Isso o dividirá em dois polígonos, B e C, com 3 lados e com k lados, respectivamente.



A soma dos ângulos internos de A é igual a soma dos ângulos internos de B e soma dos ângulos internos de C. O polígono com k lados (C) tem soma dos ângulos internos igual a $(k - 2)180^\circ$ e o triângulo (B) tem soma dos ângulos internos igual a 180° . Adicionando os dois, temos que $(k - 2)180^\circ + 180^\circ = (k - 1)180^\circ$.

Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, a propriedade é válida para todo $n \geq 3$ número natural, como queríamos demonstrar.

Exercício 6: O que há de errado na demonstração a seguir? Afirmação: Todos os números inteiros positivos são ímpares.

Prova por indução: o primeiro inteiro positivo, 1, é ímpar.

Além disso, se os k primeiros inteiros forem ímpares, então $k + 1 = (k - 1) + 2 = \text{ímpar} + \text{ímpar} = \text{ímpar}$.

Solução: o erro é que existem números pares alternados com ímpares no conjunto dos números naturais.

Atividade 4 – Torre de Hanói

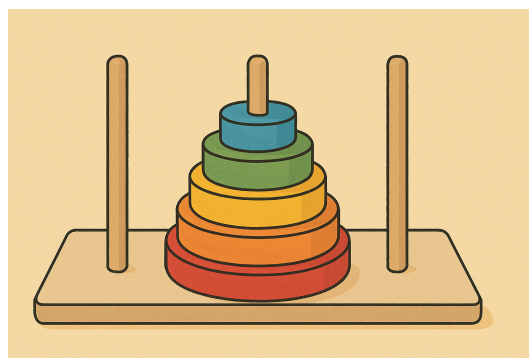
Tempo previsto: 1 hora.

Objetivo: exercitar o Princípio de Indução Matemática em um jogo físico.

Público alvo: Ensino Médio.

Material: torres de Hanói.

A Torre de Hanói tem sido tradicionalmente considerada como um procedimento para avaliação da capacidade de memória de trabalho, e principalmente de planejamento e solução de problemas.



O quebra-cabeça foi divulgado pela primeira vez no Ocidente pelo matemático francês Édouard Lucas (1842-1891). Ele teve inspiração de uma lenda para construir o jogo das Torres em 1883. Já seu nome foi inspirado na torre símbolo da cidade de Hanói, capital do Vietnã.

Existem várias lendas a respeito da origem do jogo, a mais conhecida diz respeito a um templo, situado no centro do universo. Diz-se que Brahma supostamente havia criado uma torre com 64 discos de ouro e três estacas de diamante equilibradas sobre uma plataforma de latão. Brahma ordenara os sacerdotes que movessem todos os discos de uma estaca para outra seguindo suas instruções. Segundo a lenda, quando todos os discos forem transferidos, o templo desmoronaria e chegaria o fim dos tempos.

Regras do jogo Torre de Hanói:

- Mover apenas um disco por vez.
- Nunca colocar um disco maior por cima de um disco menor.

O objetivo é passar todos os discos de uma estaca para outra qualquer, usando uma das estacas como auxiliar.

Solução: É interessante observar que o número mínimo de movimentos para conseguir transferir todos os discos da primeira estaca à outra é $2^n - 1$, sendo n número de discos.

Logo:

- Para solucionar um Hanói de 4 discos, são necessários pelo menos 10 movimentos.
- Para solucionar um Hanói de 7 discos, são necessários pelo menos 127 movimentos.
- Para solucionar um Hanói de 10 discos, são necessários pelo menos 32.787 movimentos.

A prova dessa afirmação pode ser feita por Indução:

i) (Caso base) para $n = 1$, ou seja, 1 disco, temos $2^1 - 1 = 1$ movimento transfere o disco para outra estaca, logo a afirmação é válida.

ii) (Passo indutivo) suponha que, para $n = k > 1$, a afirmação seja válida, ou seja, o número mínimo de movimentos para movimentar os discos segundo as regras explicitadas é $2^k - 1$. Vamos mostrar que o resultado vale para $n = k + 1$. Considere uma Torre de Hanói com $k + 1$ discos. Para transferir todos os discos para outra estaca, precisamos que:

- 1) o k discos menores passem para outra estaca (por exemplo, a segunda), e isso pode ser feito com o número mínimo de movimentos $2^k - 1$, por hipótese de indução, a fim de movermos o maior disco para outra estaca (por exemplo, a terceira);
- 2) o disco maior deve passar para outra estaca (por exemplo, a terceira), e isso pode ser feito com 1 movimento;
- 3) o k discos menores passem para a estaca onde se encontra o disco maior (por exemplo, a terceira). E isso pode ser feito com o número mínimo de movimentos $2^k - 1$, por hipótese de indução.

Esses três passos totalizam $(2^k - 1) + 1 + (2^k - 1) = 2 \times 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$ como número mínimo de movimentos para que $k + 1$ discos passem para outra estaca, como queríamos demonstrar. Logo, pelo Princípio de Indução Matemática, a afirmação é válida para todo n natural.

É interessante notar que essa prova por indução também é um passo a passo para a resolução da Torre de Hanói para qualquer número de discos, já que está provado.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.

FOMIN, D. et al.. **Círculos Matemáticos: A Experiência Russa**. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

GUY, R. K. The strong law of small numbers. **The American Mathematical Monthly**, v. 95, n. 8, p. 697-712, 1988.

PEREIRA, P. C. A. **O Princípio da Indução Finita**: Uma abordagem no Ensino Médio. 2013. 46 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: interciência, v. 2, 1995.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In: **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Springer Netherlands, 1991, p. 3-21.