

Trigonometria no Desmos em aula online e/ou presencial

Uma proposta de ambiência

Mateus Ágape Guerrão Lourenço

Marcelo Almeida Bairral



PPGEdu**CIMAT**

Resumo

O presente artigo surge a partir de uma pesquisa realizada no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Inicialmente é feita uma discussão sobre o uso de tecnologias digitais aliado ao ensino de matemática. Em seguida, o texto dedica-se a ambientar o leitor no espaço virtual conhecido como Desmos Sala de Aula, que faz parte da plataforma Desmos e permite a criação de atividades para sala de aula. Ao destacar algumas funcionalidades do Desmos Sala de Aula, espera-se contribuir para a formação continuada de professores de matemática bem como para a expansão de recursos tecnológicos que podem ser fortes ferramentas para a área de Ensino de Matemática. Finaliza-se apresentando a proposta de atividades no Desmos Sala de Aula, que foi aplicada em uma turma de Ensino de Matemática II do curso de Licenciatura em Matemática da UFRRJ.

Palavras-chave: tecnologias digitais; ensino de matemática; Desmos Sala de Aula; formação continuada.

Sumário

01. Introdução	3
02. Navegação na plataforma Desmos	4
03. As Tarefas	10
04. Dos Conceitos de Trigonometria	24
05. Considerações Finais	49
06. Referências	50

01. Introdução

Como já é notório, os recursos digitais são cada vez mais utilizados no ensino de matemática. Em uma sociedade que está cada vez mais munida das mais diversas tecnologias de informação e comunicação, no âmbito escolar não seria diferente. Nesse sentido, buscamos encontrar caminhos, contextualizando tais considerações sobre o ensino de matemática com o apoio de tecnologias digitais. Para tal, definimos como objetivos apresentar uma ambiência na plataforma Desmos¹, especificamente na área denominada Desmos Sala de Aula, com o foco na formação de professores de matemática; destacar suas funcionalidades; e propor uma sequência de tarefas para o ensino de trigonometria, a fim de contribuir para o ensino de matemática com o uso de tecnologias digitais.

Para dissertar sobre o ensino e aprendizagem mediante o uso de tecnologias digitais, devemos definir que um ambiente virtual com potencial de aprendizagem necessita proporcionar trocas entre os indivíduos com a finalidade de construir determinado conhecimento. Desde que a sua utilização proporciona interação entre determinado grupo, a construção de certo conhecimento por meio de certas atividades é um objetivo comum (Bairral, 2018).

As tecnologias digitais inseridas no contexto de ensino e aprendizagem determinam uma série de mudanças na prática pedagógica, as quais o professor deve desempenhar. Valente (1999, p. 12) afirma:

Deve-se criar condições para que o professor saiba recontextualizar o aprendizado e a experiência vividas durante a sua formação, para a sua realidade de sala de aula compatibilizando as necessidades de seus alunos e os objetivos pedagógicos que se dispõe a atingir.

Nesse contexto, constatamos que essas mudanças devem ser consideradas, já que se relacionam diretamente com a forma como se aprende e o modo como a informação trafega.

Trata-se de uma pesquisa qualitativa e de campo, contextualizada em uma turma de Ensino de Matemática II da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ) e realizada com oito educandos.

¹ A plataforma Desmos pode ser acessada em: <https://www.desmos.com/?lang=pt-BR>

02. Navegação na plataforma Desmos

Inicialmente convém ao leitor ser orientado sobre algumas funcionalidades da plataforma. Ela consiste em uma plataforma que possui recursos voltados para o ensino de matemática, como a calculadora gráfica, a calculadora científica, a calculadora das quatro operações, a calculadora de matrizes, a ferramenta de geometria e uma calculadora 3D.

Todos os seus recursos são gratuitos em sua totalidade e de livre utilização pelo professor. É possível também fazer o acesso por meio do smartphone e do tablet, porém é mais recomendável utilizar tablets ou computadores de mesa, já que a visualização e algumas funcionalidades – ao usar o smartphone – podem ser prejudicadas em algumas atividades, de acordo com a própria plataforma Desmos. A Figura 1, a seguir, mostra a tela inicial da plataforma Desmos.

Figura 1: Tela Inicial



Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

Na tela inicial, o usuário deve descer o cursor e encontrar o ícone “Procurando Desmos Classroom?” – então, deve acessar como professor. A Figura 2 mostra o ícone mencionado.

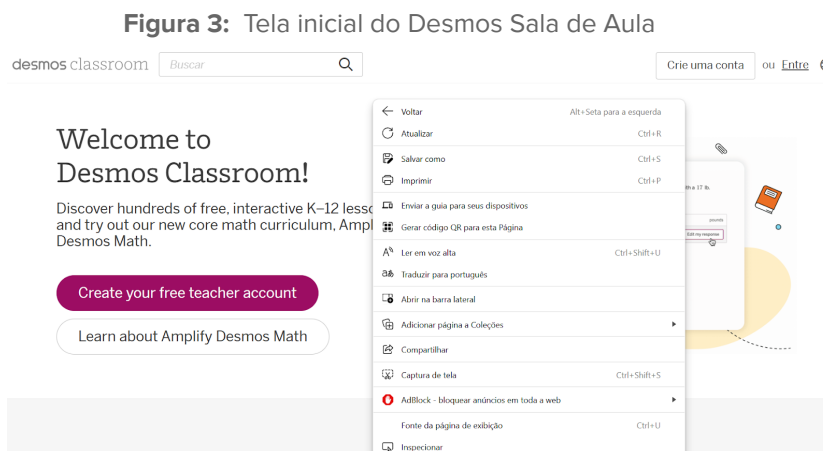
Figura 2: Desmos Sala de Aula



Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

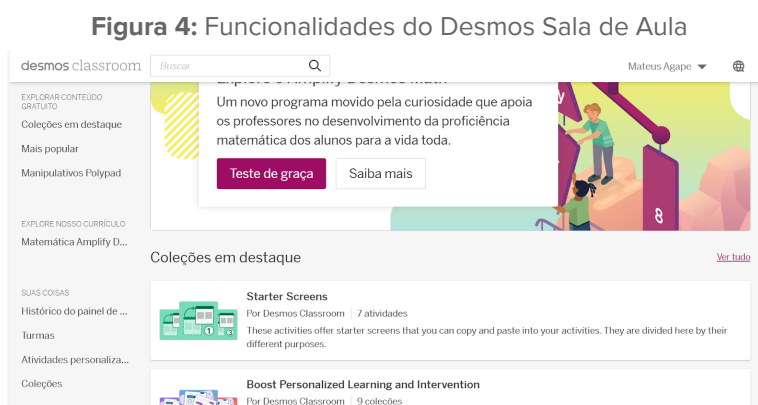
O usuário deve, então, clicar com o botão direito do *mouse* sobre a página, em uma região com a ausência de um *hiperlink*, para então selecionar a opção “Traduzir para o Português”, pois alguns recursos são apresentados em inglês.

Feito isso, o usuário deve clicar em “entrar” e acessar sua conta, utilizando sua conta Google. A Figura 3 mostra a tela inicial do Desmos Sala de Aula.



Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

Após fazer o acesso, o usuário será direcionado a uma tela que permitirá acessar conteúdos da plataforma – prontos e gratuitos –, explorar o currículo Desmos e acessar seus conteúdos criados e suas turmas. Assim, vamos apresentar cada uma dessas opções separadamente. A Figura 4 mostra as funcionalidades do Desmos Sala de Aula.



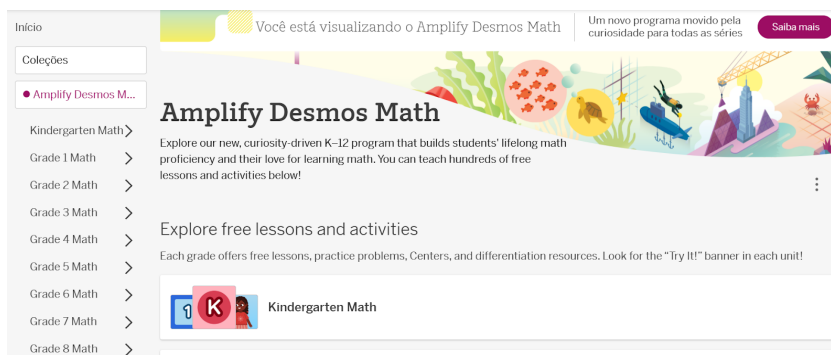
Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

Explorar Conteúdo Gratuito: Nesta seção, o usuário terá acesso às coleções em destaque, ou seja, atividades organizadas por ano de ensino ou por área da matemática, como cálculo, álgebra, funções e Polypads² manipuláveis.

Em “Mais popular”, terá os conteúdos mais utilizados pelos usuários do Desmos. E em “Manipulativos Polypad” contará com recursos que se assemelham aos materiais concretos, mas de forma digital.

Explore Nosso Currículo: A Figura 5, a seguir, mostra o Currículo Desmos

Figura 5: Currículo Desmos



Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

Nesse espaço, o Desmos prepara atividades alinhadas aos conteúdos de seu currículo, propondo sequências didáticas separadas em aulas para trabalhar cada conteúdo de cada série.

Avaliação, Criação e Feedback

A Figura 6 apresenta o histórico de painéis de controle.

Figura 6: Histórico dos painéis de controle

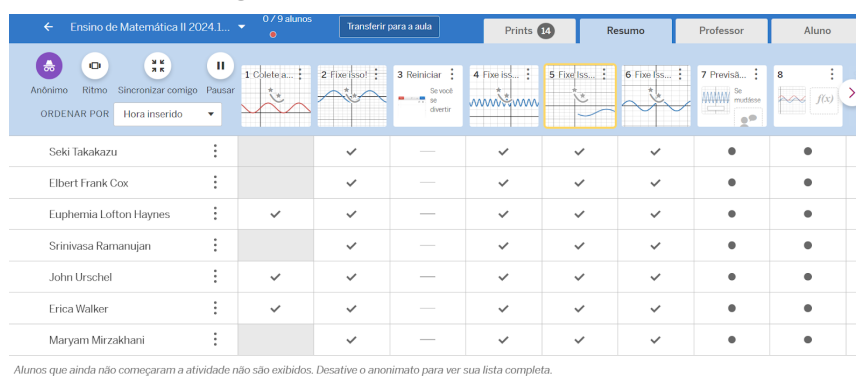
Histórico de painéis				Ver painéis arquivados
Filtrar por turma				
ATIVIDADE	SESSÕES	ALUNOS	DATA	
 Atividade 4	Ensino de Matemática II 2024.1	7 de 9	20 de mar. de 2024 às 16:17	Painel de controle ⋮
 Atividade 3	Ensino de Matemática II 2024.1	8 de 9	13 de mar. de 2024 às 10:09	Painel de controle ⋮
 Atividade 1	Ensino de Matemática II 2024.1 Pausado	8 de 9	29 de fev. de 2024 às 12:25	Painel de controle ⋮

² O Polypad pode ser acessado no link: <https://polypad.amplify.com/>

Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

No painel de controle, o usuário pode analisar o progresso dos estudantes, suas respostas e suas interações com a plataforma, referentes a atividades pausadas ou não. Nesse contexto, podemos afirmar que esse é o espaço destinado à avaliação e ao *feedback* dos processos cognitivos dos educandos. A Figura 7 mostra o painel de controle do Desmos.

Figura 7: Painel de controle do Desmos



Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

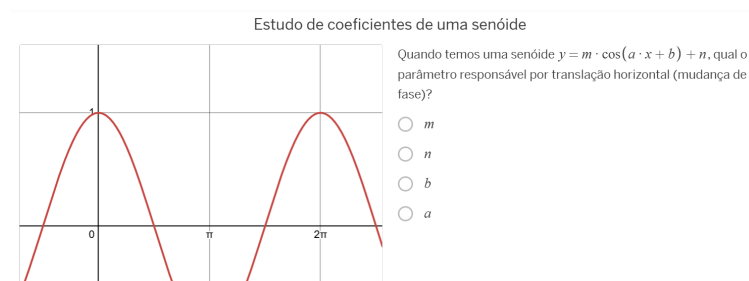
O painel de controle do Desmos é uma ferramenta da plataforma que permite ao professor acompanhar em tempo real o andamento das atividades realizadas pelos educandos.

Na aba Resumo, o professor tem acesso, de forma anônima ou não – basta ativar ou desativar o modo anônimo no canto superior esquerdo –, ao painel geral de todas as atividades, que permite saber quais alunos fizeram as atividades e quais atividades foram feitas. Na horizontal encontram-se as atividades organizadas em *slides*; na vertical, os nomes dos estudantes.

Na aba Aluno, o professor terá acesso às atividades direcionadas aos educandos.

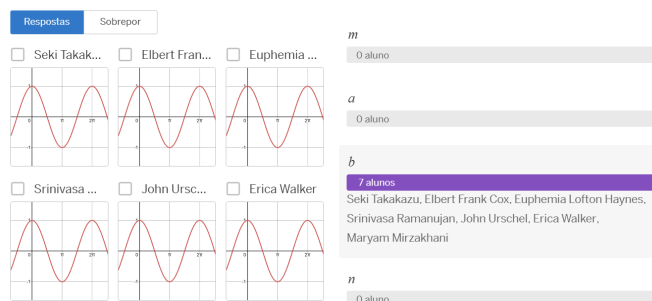
A Figura 8 mostra a aba Aluno do painel de controle. A Figura 9, em seguida, mostra a aba Professor.

Figura 8: Aba Aluno do painel de controle



Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

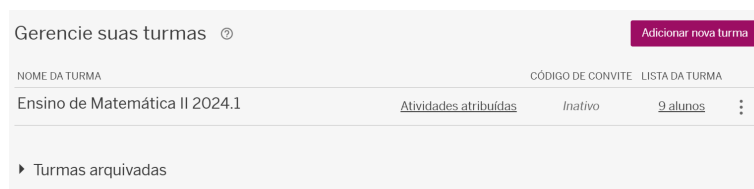
Figura 9: Aba Professor do painel de controle



Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

Na aba Professor, estarão as respostas dos educandos. Nela, o professor terá acesso à interação que cada aluno teve com a atividade, a manipulação que realizou, seu depoimento e a opção que selecionou. A Figura 10 mostra a área onde o professor pode acessar suas turmas cadastradas.

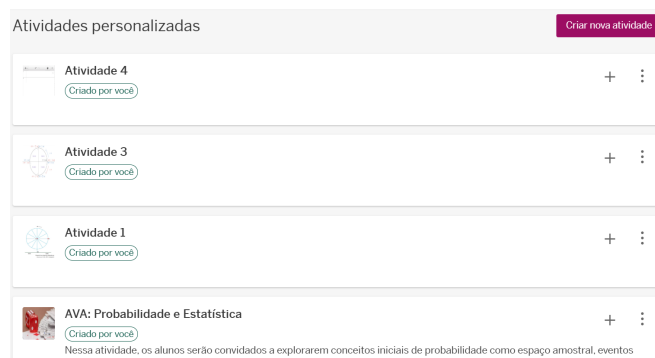
Figura 10: Turmas



Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

Na parte das turmas, o professor terá a possibilidade de adicionar uma turma, ver suas turmas existentes, os alunos que estão cadastrados em cada turma, adicionar novos alunos e verificar as atividades que foram atribuídas. Para adicionar uma nova turma, o professor tem a opção de importar uma turma do Google Classroom – para atribuir atividades conta-se também com essa integração. A Figura 11 mostra atividades personalizadas.

Figura 11: Atividades personalizadas



Fonte: elaborada pelo autor a partir do *site* Desmos

Atividades personalizadas são atividades construídas pelo usuário. Nessa aba, também é possível criar uma nova atividade. Esse recurso é de extrema relevância na plataforma e apresenta-se como um diferencial, juntamente com o painel de controle. A seguir faz-se necessária a exploração da aba de criação de novas atividades.

A aba de criação da plataforma Desmos conta com diversas ferramentas. Na Figura 12, a seguir, serão apresentados alguns de seus recursos. Primeiramente, podemos observar o botão “dicas do professor”. Por meio dele, o professor pode acrescentar dicas e orientações aos professores que utilizarão a atividade. Também é possível adicionar dicas aos estudantes e exemplos de respostas.

As atividades são construídas em um modelo semelhante a *slides* interativos – assim, cabe ao professor fazer a elaboração de cada *slide*, seguindo a ideia da aula que pretende criar.

Figura 12: Aba de criação Desmos Sala de Aula



Fonte: elaborada pelo autor a partir do site Desmos

No canto esquerdo da tela, observamos alguns dos recursos existentes. Nesse contexto, o professor pode criar atividades utilizando esses recursos. Existem infinitas possibilidades de criação, além da possibilidade de copiar e colar algum *slide* das atividades já existentes nas coleções da plataforma Desmos. Portanto, recomendamos que, como em qualquer ambiente pedagógico ou *software* educacional, o professor se permita explorar as opções, encontrando assim a melhor forma de incorporar o recurso digital às suas aulas.

03. As Tarefas

As tarefas aqui propostas foram desenvolvidas no contexto de uma dissertação de mestrado, que possui como produto final uma sequência de tarefas para uso de professores de matemática. Foram produzidas três tarefas, explicadas a seguir.

As tarefas propostas foram adaptações das atividades sugeridas por Cândido (2023). Ao trazermos as tarefas para o modelo presencial, conservamos as suas características mais interativas e manipulativas, acrescentando outras características interativas gamificadas disponíveis na própria plataforma Desmos.

Por fim, outro recurso mantido da pesquisa de Cândido foi o de utilizar questões do Enem sobre o assunto, porém elas foram diluídas ao longo dos encontros. Tal recurso

se torna interessante, visto que na prática dos futuros docentes esses exercícios serão comuns.

As tarefas estão disponíveis de forma pública e gratuita na plataforma Desmos.

A primeira tarefa tem como objetivo conhecer o público da pesquisa, no caso os estudantes de Licenciatura em Matemática matriculados na turma de Ensino de Matemática II da UFRRJ.

Inicialmente, os graduandos foram perguntados sobre seu nome, idade e período da graduação no qual se encontram. Os alunos foram questionados sobre sua participação em projetos, ao longo da graduação. Tal pergunta foi direcionada devido ao grande potencial de enriquecimento da prática docente que esses projetos possuem³ e está apresentada na Figura 13.

A segunda tarefa concentrou-se em uma sequência de atividades interativas que possuía construções interativas, juntamente com explicações teóricas dos conteúdos de ciclo trigonométrico e funções trigonométricas (seno e cosseno). Para a realização da atividade, os estudantes utilizaram unicamente *tablets*, já que a própria plataforma Desmos disponibiliza espaço apropriado para registrarem suas respostas.

A escolha dos *tablets*, como já dissemos, deu-se por conta da visualização mais clara das construções – a visualização foi prejudicada na primeira implementação, quando os estudantes utilizaram seus próprios *smartphones*. Após interagirem com essas construções, os alunos deveriam resolver tarefas – e podiam utilizar as próprias construções como material de apoio.

Para situar o leitor, a primeira página da tarefa consistia em uma explicação sobre o ciclo trigonométrico. Essas atividades mais explicativas vieram da necessidade – sinalizada pelos alunos participantes da pesquisa – de retomar os conteúdos formais relacionados aos estudos⁴.

³ A atividade pode ser acessada no endereço:
<https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/65d37088a720a7f67bceadfa?lang=pt-BR>

⁴ A atividade pode ser acessada no endereço:
<https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/65da2ddab46943738ae839aa?lang=pt-BR>

Por fim, a última atividade proposta é fruto de algumas tarefas interativas presentes na plataforma Desmos e foi alinhada com alguns recursos produzidos por Cândido. Foram propostas tarefas gamificadas e tarefas sobre a alteração dos parâmetros, caracterizando assim a implementação como mais prática do que a anterior. Inicialmente, os alunos deveriam resolver desafios gamificados retirados da própria plataforma para a implementação. A atividade consistia em alterar os parâmetros de uma função trigonométrica a fim de lançar bolas do alto para coletar estrelas. Mais adiante, neste artigo, apresentamos alguns dos desafios propostos nas tarefas do Desmos.

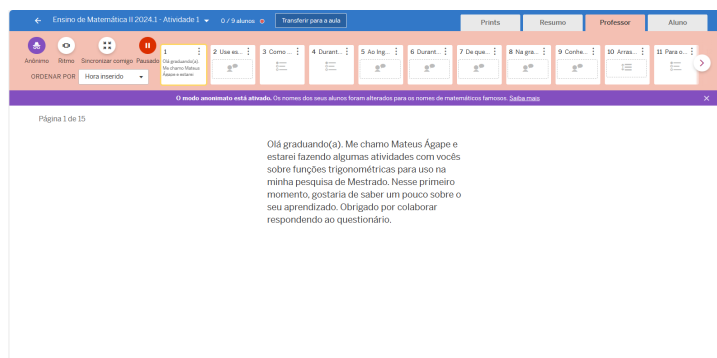
a. **DESIGN DA AMBIÊNCIA**

DO PERFIL DOS ESTUDANTES

Na primeira sequência de tarefas, os licenciandos foram convidados a acessar a plataforma Desmos a fim de se familiarizar com ela. Nesse momento, os alunos cumpriram a atividade de forma assíncrona com interações por meio do Whatsapp para instruções e soluções de dúvidas ou dificuldades de manuseio.

Inicialmente, os graduandos foram perguntados sobre seu nome, idade e período da graduação no qual se encontravam. No Quadro 1 serão apresentadas as respostas e os nomes fictícios – a fim de preservar a real identidade dos graduandos –, gerados pela própria plataforma Desmos.

Figura 13: Tela Inicial da Primeira atividade na plataforma



Fonte: elaborada pelo autor

Quadro 1: Idade dos educandos e período do curso

Nome	Idade (anos)	Período
Ami Radunskaya	26	7º
Abraham Nemeth	28	12º
Nalini Joshi	28	13º
Gladys West	29	6º
Erika Camacho	25	13º
Maryam Mirzakhani	27	13º
Karlie Noon	31	12º
MC Escher	24	10º

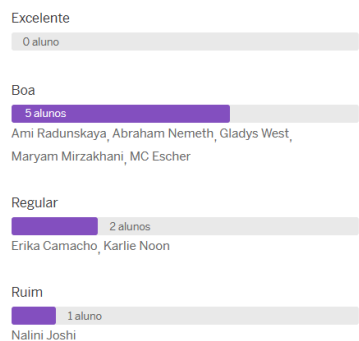
Fonte: elaborado pelo autor

Por meio dessas informações, podemos observar que todos os estudantes se encontram na etapa final da graduação, visto que a disciplina é uma disciplina alocada nos últimos períodos da graduação.

Em seguida, na Figura 14 mostramos as respostas dos alunos para a pergunta sobre o modo como avaliam sua trajetória acadêmica no ensino de matemática da educação básica.

Figura 14: Gráfico resultados trajetória acadêmica

Como você avalia sua trajetória na Matemática na educação básica?



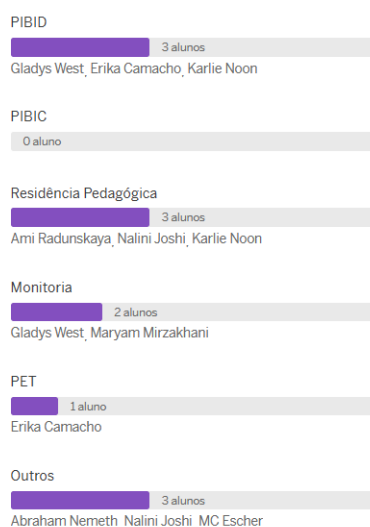
Fonte: elaborada pelo autor

Nessa análise, podemos ver que a maioria dos alunos (cinco alunos de oito no total) avalia que seu contato com a matemática foi bom.

Na Figura 15, organizamos as respostas dos alunos para a questão sobre sua participação em projetos, ao longo da graduação. Tal pergunta foi direcionada devido ao grande potencial de enriquecimento da prática docente que esses projetos possuem.

Figura 15: Gráfico resultados projetos acadêmicos

Durante o curso, participou de projetos? Selecione quais.



fonte: elaborado pelo autor

Foi possível observar a grande adesão dos alunos aos projetos de extensão e de docência. Em seguida os alunos descreveram como foi essa participação. Organizamos essas respostas no Quadro 2, a seguir.

Quadro 2: Depoimentos dos educandos referentes à participação em projetos

Durante o curso, participou de projetos? Caso tenha participado, descreva como contribuiu para sua formação.	
Nome	Resposta
Ami Radunskaya	No momento eu estou participando da Residência Pedagógica e este é o meu primeiro semestre na escola. Acredito que tem contribuído por poder acompanhar o professor e fazer o planejamento de algumas atividades que ele sugere para aplicarmos.
Abraham Nemeth	Não cheguei a participar de projetos da universidade, como aluno precisei dar aulas particulares e trabalhar aos finais de semana para poder complementar minha renda familiar e logo cedo tive que entrar para o mercado de trabalho.
Nalini Joshi	Foi simplesmente enriquecedor.
Gladys West	A monitoria foi fundamental para que eu percebesse que me sentia bem fazendo parte do aprendizado de outras pessoas Com o PIBID, tenho aprendido muito sobre os deveres e responsabilidades de um professor, e também sobre como é importante planejarmos bem nossa atuação dentro de sala de aula
Erika Camacho	PET me ajudou a desenvolver atividades e pensar como usá-las nas escolas, pibid está me ajudando a perder o medo da sala de aula, testar meus conhecimentos como professor
Maryam Mirzakhani	A monitoria a qual eu participei de maneira formal foi da disciplina de Desenho Técnico, do departamento de Arquitetura e Urbanismo, o que não tem diretamente a ver com o nosso curso, mas que posso afirmar com toda a certeza que muito me ajudou a melhorar minhas habilidades de ensino e aprendizagem, e posso dizer que a matemática me ajudou muito nessa disciplina. De maneira não oficial eu ofereci por conta própria, monitorias de Matemática 1 e 2, e Cálculo 1 para alguns alunos que apresentavam dificuldades nas disciplinas, alunos esses que eu acabei conhecendo durante as monitorias de Desenho

	Técnico.
Karli e Noon	Esses dois programas me permitiram desenvolver uma visão mais delicada em relação ao ensinar. Aprendi que há outras ferramentas úteis além do quadro e giz que podem contribuir para um bom entendimento.
MC Escher	Bolsista ProExt de Audiovisual. Para Matemática não muita coisa, mais para o meu trabalho atual onde tiro meu sustento

Fonte: elaborado pelo autor

Nessa etapa da pesquisa, foi possível constatar o modo como os projetos de extensão (PET) e de docência – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), Residência Pedagógica e Monitoria – contribuem para a formação inicial dos professores; e como o contato próximo com a rotina mais direta dos(as) professores(as) de matemática também possibilita que redescubram sua paixão por ensinar e contribuir para o aprendizado de terceiros.

A pergunta seguinte tinha como objetivo verificar as dificuldades dos alunos nas disciplinas de matemática da graduação. Ao serem questionados sobre a participação em projetos e a contribuição dessas ações, relataram que participaram de PIBID, Residência Pedagógica e PET – essas ações trazem em comum a aproximação dos licenciandos às práticas docentes. O Quadro 3 mostra os depoimentos dos educandos sobre as dificuldades nas disciplinas.

Quadro 3: Depoimentos dos educandos sobre as dificuldades nas disciplinas

Ao ingressar na graduação, quais foram as dificuldades encontradas no curso em relação às disciplinas? Escreva ou mande seu áudio.	
Nome	Resposta
Ami Radunskaya	Além de algumas dificuldades em matemática básica, acredito que por ter visto a matemática como "calcule isso" e ter sempre um padrão de resolução, existiram certas disciplinas que exigiram o contrário disso e tive dificuldade.

Abraham Nemeth	Acho que realmente o que foi mais difícil foi lidar com as regras de matemática básica no cálculo 1, saber como lidar com as equações em geral sem negligenciar os fundamentos.
Nalini Joshi	Como vim de escola pública, meu conhecimento era bem diferente dos meus colegas e isso acabou me deixando bastante frustrada.
Gladys West	Principalmente o fato de que todas as matérias demandam muito tempo de dedicação, o que dificultava o planejamento para o estudo das mesmas. Optei por puxar menos matérias por período para tentar equilibrar esse problema, mas nunca foi fácil.
Erika Camacho	Matemática básica , gráficos , muitas coisas eu não vi pois meu curso técnico era voltado para dança
Marjam Mirzakhani	Como eu disse anteriormente, ao entrar na universidade eu percebi que eu não sabia matemática básica, pelo menos não da maneira que eu achava que sabia, então as maiores dificuldades que encontrei no curso em relação às disciplinas, tinham relação direta com a matemática básica.
Karlie Noon	Não tive um ensino médio de muita qualidade, e só entrei na graduação 8 anos depois de me formar no ensino médio, sem nenhum cursinho preparatório ou algo do tipo. Então por esse motivo tenho muita insegurança mesmo com a matemática básica e isso influencia diretamente em muita coisa ao longo do curso.
MC Escher	As de educação foram muito boas e reflexivas de se fazer. Para realizá-las tínhamos que ler e estar bastante envolvido com a matéria, inclusive era um esforço dos professores. As matérias específicas foram num cenário completamente oposto. Algumas matérias com a maioria esmagadora de reprovados. (Me lembrou a matéria de Álgebra Linear B em que resultou em quase 90% da turma reprovada)

Fonte: elaborado pelo autor

Muitas defasagens surgem na fala dos alunos nesse momento – a grande maioria pode ser discutida com base no fenômeno da dupla descontinuidade, publicado por Félix Klein, em 1908. Nesse mesmo contexto, observamos

O referido pesquisador criticava os professores universitários que se preocupavam exclusivamente com a Matemática Acadêmica, sem considerarem as necessidades das escolas, e a Matemática Escolar. Klein identifica essa ruptura como uma dupla descontinuidade, que se estabelece na falta de conexão entre a Matemática aprendida na escola básica e a Matemática que determina os cursos de formação de professores (Rodrigues *et al.*, 2021, p. 193).

A dupla descontinuidade é uma realidade na formação inicial de professores e acaba gerando dificuldade nas disciplinas da graduação e até mesmo abandono do curso de graduação. Nos depoimentos, podemos verificar que os alunos entendem que na educação básica a matemática se dedicava a cálculos e reprodução de fórmulas, e na graduação o pensamento parece ser o oposto. Além disso, comentaram também sobre o fato de o tempo de dedicação e estudos para obter bom aproveitamento nas disciplinas ser diferente da educação básica.

Quando perguntados sobre as disciplinas que mais contribuíram para o exercício da profissão, os acadêmicos dissertam da forma como mostramos no Quadro 4, a seguir.

Quadro 4: Depoimentos dos educandos sobre experiências na graduação

Durante a Graduação quais experiências ou disciplinas mais contribuíram (ou contribuem) para o exercício da sua profissão? Escreva no quadro ou clique no ícone para mandar um áudio	
Nome	Resposta
Ami Radunskaya	As disciplinas de Lab I, Lab II, os NEPES e Didática, pois nelas vi algumas atividades que podem ser usadas como algo complementar a aula e exemplos de abordagem.
Abraham	Atualmente atuo como desenvolvedor, então as

Nemeth	disciplinas que mais contribuíram foram linguagem de programação, álgebra 1 e seus fundamentos de lógica, álgebra linear em seus fundamentos de vetores e matrizes, assim como os cálculos em geral, em especial o numérico.
Nalini Joshi	As de educação foram as que mais me encontrei e me encaixei.
Gladys West	Acredito que todas, pois cada uma me ensinou uma forma diferente de estudar matemática. Também gosto do aprofundamento político e das formas diferentes de ensinar matemática que as matérias da educação trazem.
Erika Camacho	As disciplinas de educação, desenvolvimentos
Maryam Mirzakhani	As disciplinas de NEPE, os LabMat e a disciplina de Ensino 1 contribuíram muitíssimo, além da monitoria, tanto a de matemática propriamente dita, quanto a de Desenho Técnico, que foi o que mais me ajudou a me comunicar com os alunos.
Karlie Noon	A disciplina de Didática 1, com a professora Adriana, pra mim foi a que mais conseguiu trazer uma questão mais humanizada. Aprendi a observar o lado humano do aluno, a questão de como o emocional influencia na aprendizagem. A professora fez uma espécie de "regressão" onde voltamos às lembranças da infância no ambiente escolar/familiar e pude associar minhas dificuldades e/ou qualidades a partir dessas lembranças.
MC Escher	Introdução à Estatística, Cálculo I, Álgebra I.

Fonte: elaborado pelo autor

De certa forma, o público-alvo da pesquisa está bem definido. Sendo assim, convém questionar os alunos daqui para frente sobre os objetivos da pesquisa. Como primeiro questionamento, está o uso de tecnologias digitais no ensino de matemática.

DO USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A seguir, no Quadro 5, apresentamos os depoimentos dos educandos sobre as contribuições das tecnologias digitais para o aprendizado de matemática.

Quadro 5: Depoimentos dos educandos sobre as contribuições das tecnologias digitais

De que forma você considera que as Tecnologias Digitais (Softwares, apps, programas, etc.) contribuem ou não para o seu aprendizado em Matemática? Escreva no quadro ou envie um áudio	
Nome	Resposta
Ami Radunskaya	Contribuem sim para o meu aprendizado em Matemática, pois dependendo do aplicativo ajuda na visualização de alguns conceitos, como por exemplo eu gosto de usar para visualização das formas geométricas.
Abraham Nemeth	Uma das maiores dificuldades e barreiras que tive era poder visualizar toda a álgebra que praticamos no dia a dia, então o uso de softwares foi importantíssimo para esse processo, acredito que a memória visual seja uma fato crucial para nós também, dessa forma poder entender como se comportam as funções em geral, com o auxílio do GeoGebra por exemplo, foi um divisor de águas em questão de sair do abstrato para o concreto.
Nalini Joshi	Com a Tecnologias tivemos um avanço muito satisfatório principalmente em geometria que podemos ver as figuras com mais riqueza e detalhes.
Gladys West	Me ajudam muito como ferramentas para estudo em si. Muitas vezes me pego conferindo gráficos no GeoGebra, consultando formas diferentes de resoluções de questões de matemática pura, etc.
Erika Camacho	Eu sou mt ruim em lidar com tecnologia, preferi-o mt mais um trabalho escrito ou algo assim
Mar	Eu acredito que as tecnologias digitais contribuem muito

yam Mirzakhani	para o aprendizado de matemática, e acredito que desde os anos iniciais elas deveriam ser implementadas nas aulas.
Karli e Noon	As tecnologias digitais por si só não podem trazer benefício algum, a não ser que sejam utilizadas de maneira coerente, com planejamento e objetivos definidos, considerado é claro, a realidade dos alunos.
MC Escher	Contribui mas tem que ser muito bem elaborado pois caso contrário, atrapalha mais do que ajudaria no sentido de aprendizado. A boa elaboração seria para agir de uma forma mais lúdica e esclarecedora onde certas perspectivas no quadro não seriam possíveis.

Fonte: elaborado pelo autor

Inicialmente, nas respostas sobre a utilização de tecnologias digitais no ensino de matemática, já emergem características como a visualização. Para os alunos, alguns aplicativos se mostraram de extrema importância para visualizarem gráficos, comportamentos de funções e formas geométricas; e compreenderem certos resultados e conceitos matemáticos. Por fim, vale destacar a fala de Karlie Noon, que ressalta a importância da intencionalidade alinhada à utilização de tecnologias digitais.

A seguir, no Quadro 6, mostramos os depoimentos dos educandos sobre o modo como as tecnologias digitais minimizam dificuldades.

Quadro 6: Depoimentos dos educandos sobre o modo como as tecnologias digitais minimizam dificuldades

Na graduação, quais disciplinas você acha que o uso de Tecnologias Digitais minimizam suas dificuldades de aprendizado? Caso queira, comente a partir de um conteúdo estudado.	
Nome	Resposta
Ami Radunskaya	As disciplinas de Tópicos de Geometria Espacial e Equações Diferenciais II, sendo esta última poderia ser usada para o estudo do comportamento de algumas soluções.
Abra	Apesar de ter tido disciplinas que aprofundaram bastante o uso

ham Nemeth	do GeoGebra para o ensino, a experiência que tive em cálculo numérico onde o professor transformava o conteúdo aprendido em códigos Python, foi simplesmente sensacional. Me senti estimulado e pude ver na prática que o conteúdo aprendido impactava diretamente meu dia a dia.
Nali ni Joshi	Com Tecnologias pude expressar mais meus conhecimentos.
Gladys West	Praticamente todas. Em topologia foi fundamental consultar diferentes fontes para descobrir propriedades que eu poderia usar para fazer as questões.
Erika Camacho	Nepe , geometria espacial , GeoGebra.
Maryam Mirzakhani	Acredito que sem o uso das Tecnologias Digitais, os cursos de Cálculos se tornem ainda mais complicados, principalmente a parte geométrica, apps como o GeoGebra por exemplo nos dão uma outra perspectiva a respeito de funções que em outro momento eram inimagináveis para a maioria dos alunos.
Karlie Noon	As tecnologias digitais me ajudaram bastante principalmente no modo de visualização de gráficos, observar comportamentos. Utilizei muito em Cálculo 2 e 3, foram indispensáveis para minha compreensão. Em Geometria Analítica poderia ter me ajudado, porém no início da graduação, quando cursei essa disciplina, não havia conhecido nenhuma dessas tecnologias digitais, tive certa dificuldade que poderia ter sido evitado com o uso do GeoGebra por exemplo
MC Escher	Cálculo I, II, III e IV Matemática Plana e Espacial Álgebra Linear A e B Função de Variável Complexa

Fonte: elaborado pelo autor

Sobre a utilização de tecnologias para minimizar as dificuldades de aprendizado, os alunos demonstram que diversas tecnologias são essenciais em sua trajetória acadêmica, tanto para fazer uma busca quanto para utilizar calculadoras gráficas e Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD).

Posteriormente, foram colocados em questão dois AGD – o GeoGebra e o Desmos –, ambos com os mesmos propósitos: uso de ferramentas de visualização, exploração e manipulação de objetos matemáticos. Porém, existem grandes diferenças entre os AGD citados, embora seus propósitos sejam semelhantes. Quando perguntados sobre o GeoGebra e o Desmos, os alunos forneceram as respostas organizadas no Quadro 7.

Quadro 7: Depoimentos dos educandos sobre experiências com o Desmos e o Geogebra

Conhece e já teve experiências com a plataforma Desmos? E com o GeoGebra? Comente.	
Nome	Resposta
Ami Radunskaya	Sim. Eu conheço as duas plataformas, mas o GeoGebra é a que mais utilizo nas disciplinas da graduação.
Abraham Nemeth	Como comentado anteriormente, tive ótimas experiências com o GeoGebra, mas ainda não conhecia a plataforma Desmos.
Nalini Joshi	Desmos ainda não.
Gladys West	Nunca tive com o Desmos. GeoGebra já tive bastante. Muitos professores e disciplinas utilizam o GeoGebra como ferramenta fundamental.
Erika Camacho	Só com GeoGebra
Maryam Mirzakhani	Conheço melhor o GeoGebra, a plataforma Desmos tive pouco contato em um período conturbado que acabei trancando, então acabei não fazendo muito proveito de suas funcionalidades.
Karlie Noon	Com a Desmos ainda não, nem conhecia. Já o GeoGebra usei, bastante em alguns momentos, excelente plataforma
MC Escher	Apenas GeoGebra, onde foi usado em todas as matérias da professora XXXX.

Fonte: elaborado pelo autor

Em relação ao uso do GeoGebra e do Desmos, a maioria dos alunos utiliza ou conhece o GeoGebra, por ser uma plataforma amplamente consolidada e popular. Já o Desmos é pouco conhecido pelos alunos e nenhum deles o utiliza com frequência. Esse

resultado torna oportuno que as atividades propostas sejam realizadas no Desmos, de forma que contribuam para a formação inicial de professores.

04. Dos Conceitos de Trigonometria

Nessa etapa, os participantes foram questionados sobre suas percepções de complexidade dos conteúdos e responderam a todas as questões para posterior análise. A Figura 16 mostra a atividade de ordenar conteúdos pelo grau de dificuldade.

Figura 16: Atividade na plataforma: ordenar conteúdos pelo grau de dificuldade

Arraste as sentenças para ordenar a lista abaixo da forma que achar melhor

MENOS COMPLEXO

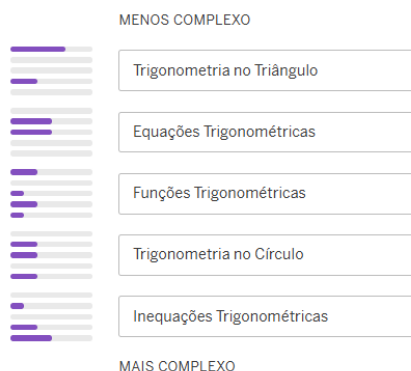
⋮	Trigonometria no Triângulo
⋮	Trigonometria no Círculo
⋮	Equações Trigonométricas
⋮	Inequações Trigonométricas
⋮	Funções Trigonométricas

MAIS COMPLEXO

Fonte: elaborado pelo autor

Na atividade seguinte, os alunos poderiam arrastar as fichas como achassem melhor, para ordenar os conteúdos do menos complexo ao mais complexo. Os resultados estão mostrados na Figura 17.

Figura 17: Resultados dos estudantes para a ordenação dos conteúdos



Fonte: elaborado pelo autor

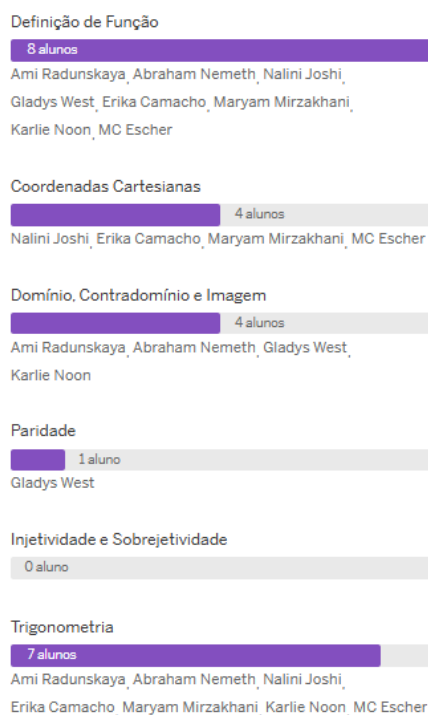
Observamos que, para conclusões iniciais, os estudantes acreditam que os conceitos de trigonometria no triângulo retângulo são menos complexos, de forma geral. Em seguida, as equações trigonométricas foram posicionadas entre a segunda e terceira posição. Em relação à trigonometria no círculo, foi evidenciado que houve um impasse sobre o referido conteúdo – alguns educandos alocaram a trigonometria na terceira, outros na quarta e outros, ainda, na quinta posição.

Por outro lado, a percepção dos licenciandos sobre os conceitos de funções trigonométricas – foco da pesquisa – e de inequações trigonométricas mostrou-se bastante dividida: há alunos que os julgam menos complexos entre os demais, mas também há alunos que afirmam que esses conteúdos são os mais complexos.

Sucedendo os questionamentos sobre os conceitos de trigonometria, os alunos também foram convidados a refletir sobre quais seriam os pré-requisitos para um estudante compreender bem os conceitos de funções trigonométricas, e os resultados estão dispostos na Figura 18.

Figura 18: Resultados dos educandos sobre conteúdos importantes

Para o estudo de Funções Trigonométricas, selecione APENAS TRÊS pré-requisitos que julga mais importante



Fonte: elaborada pelo autor

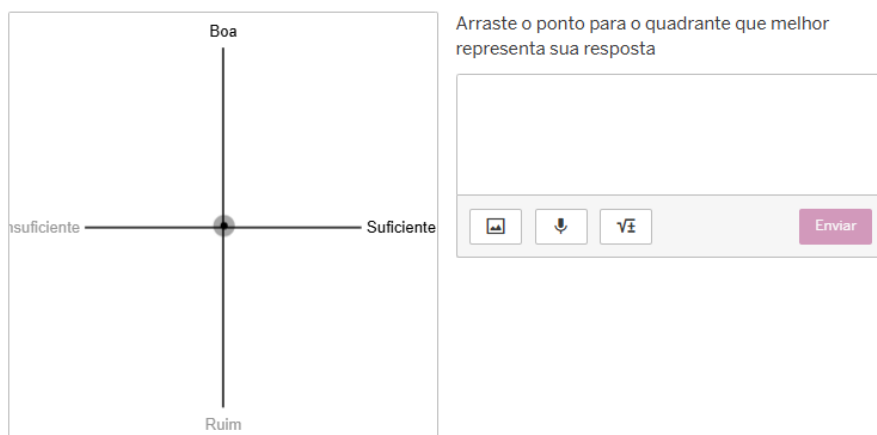
Ao visualizarmos os resultados, foi possível perceber que, como apontam os resultados de Vergilio (2023), para os participantes, o pré-requisito mais importante entre os demais seria conhecer a definição de função – de fato, para compreender o comportamento de qualquer função no campo da matemática, faz-se necessário compreender o conceito e a definição de função de maneira geral.

Em seguida, outro pré-requisito determinado como de maior importância foi compreender os conceitos de trigonometria. Por fim, como terceiro pré-requisito mais importante no estudo de funções trigonométricas, os alunos se dividiram entre o conhecimento das coordenadas cartesianas e a compreensão sobre domínio, contradomínio e imagem.

O levantamento seguinte teve o intuito de entender o modo como os participantes julgam seu próprio aprendizado em relação às funções trigonométricas.

Inicialmente os alunos deveriam manipular um ponto no plano cartesiano e posicioná-lo de acordo com sua resposta. A Figura 19 mostra o gráfico a ser manipulado pelos educandos.

Figura 19: Atividade – gráfico sobre a experiência acadêmica dos educandos



Fonte: elaborada pelo autor

Em seguida, os alunos registraram suas respostas escritas, que estão mostradas no Quadro 8, a seguir.

Quadro 8: Depoimentos dos educandos sobre seu grau de aprendizado de funções trigonométricas

Movendo o ponto entre os quadrantes, utilize o espaço abaixo para classificar o seu aprendizado sobre funções trigonométricas ($f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \tan(x)$). Você os julga suficientes, teve boas experiências? Comente no quadro.	
Nome	Resposta
Ami Radunskaya	Eu classifico meu aprendizado como suficiente.
Abraham Nemeth	Julgo minhas experiências mais suficientes do que boas, acredito que o medo da trigonometria vem realmente da matemática básica, onde a visualização do aprendizado sempre foi ruim tanto no ensino fundamental quanto no médio.

Nalini Joshi	Imparcial.
Gladys West	Não considero suficiente pois sempre me pego me embolando ou consultando materiais, mas me dou bem com o conteúdo em geral.
Erika Camacho	Ainda esqueço coisas básicas , porém consigo anotar e seguir
Maryam Mirzakhani	Julgo que meu aprendizado nas funções trigonométricas seja bem ruim e insuficiente, o pouco que sei posso dizer que aprendi na universidade, pois dificilmente tive algum contato com elas no ciclo básico. Percebo que ainda faço muita confusão com as 3 principais (com as outras então, nem se fala, hahahahaha) e por muitas vezes preciso recorrer ao círculo para conseguir me orientar melhor.
Karlie Noon	Não domino o assunto, então não considero meu aprendizado bom.
MC Escher	Aprendi depois de velho mas já tinha ideia de Trigonometria.

Fonte: elaborado pelo autor

Podemos relacionar o aprendizado como suficiente quando o participante de fato compreende os conceitos abordados na trigonometria, porém classificamos o aprendizado como bom ou ruim de forma afetiva, verificando se o aluno de fato gostou de se debruçar sobre os conteúdos e aprendê-los ou se sua transposição didática foi eficiente para sua aprendizagem na educação básica. Portanto, dizer se o aprendizado foi suficiente ou insuficiente é uma análise de desempenho, mas entender a experiência como boa ou ruim significa analisar se o aluno teve boas experiências do ponto de vista pessoal.

Dessa forma, cinco participantes localizaram o ponto no primeiro quadrante, ou seja, classificaram seu aprendizado como bom e suficiente. Uma estudante mostrou-se imparcial e fixou o ponto na origem. Por fim, um participante localizou o ponto no terceiro quadrante e outro no quarto quadrante, informando assim que suas

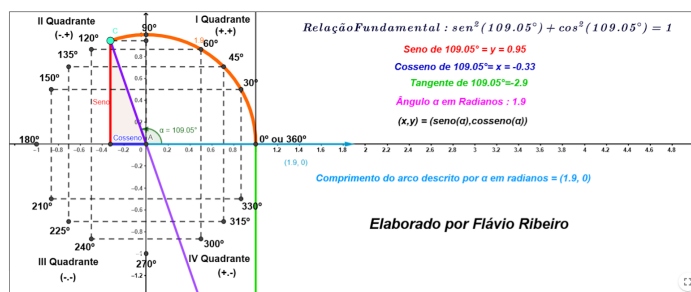
experiências foram ruins – porém uma foi classificada como ruim e suficiente e outra como ruim e insuficiente.

Para finalizar o primeiro encontro, os alunos deveriam solucionar três questões do Enem, a fim de observar o modo como esses conteúdos são exigidos na educação básica. As questões do Enem foram incorporadas em todos os encontros, com o objetivo de validar os conteúdos explorados.

Primeiro Encontro

Na **primeira implementação**, os participantes foram convidados a interagir com o *applet* intitulado “Atividade 1 - O ciclo trigonométrico”⁵, elaborado por Júnior (2018). Para a realização dessa atividade, os participantes contaram com folhas de papel ofício para registrar suas respostas; e com seus próprios *smartphones*, preferidos por eles, para manipular a construção. A Figura 12 mostra o *design* do primeiro *applet*.

Figura 12: *Design* do primeiro *applet* utilizado no GeoGebra



Fonte: Júnior (2018)

O *applet* possibilita que os participantes compreendam os conceitos explorados a partir da observação, da manipulação e do registro do que de fato está sendo alterado na construção. Assim, o objetivo da tarefa era que os estudantes, apenas deslizando o ponto azul sobre a circunferência trigonométrica, respondessem às tarefas propostas.

Quando questionados sobre o raio do ciclo trigonométrico ser unitário, os participantes fizeram os seguintes comentários:

⁵ Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/afF3rGeF#material/AeTdy8jX> Acesso em: 03/02/2024

Gladys West: *Sim, podemos observar que a borda do círculo passa no +1 e -1 nos dois eixos. Como o centro é na origem e a borda é sempre equidistante do centro, temos que o raio é 1.*

Karlie Noon: *Sim, $R = \cos(0)$*

MC Escher: *Considerando que o seno e cosseno dos ângulos representados no círculo só podem atingir seu valor máximo em 1, então o raio será unitário.*

A partir dessas observações, destacamos que o primeiro estudante tirou suas conclusões de forma visual, enquanto os dois outros estudantes utilizaram noções anteriores que possuíam sobre o conteúdo. Notamos uma certa preferência pelo conhecimento que já está estabelecido e assimilado na mente dos estudantes.

Em seguida, quando perguntados sobre a circunferência trigonométrica ser orientada, todos os participantes da pesquisa comentaram que o sentido positivo seria o anti-horário e o sentido negativo o horário. Também apresentaram que os eixos que representam numericamente o seno e o cosseno são respectivamente os eixos y e x; e observaram que o eixo que representa numericamente a tangente seria a reta $x=1$. Nesse ponto, verificamos que os estudantes possuem uma noção dos conteúdos explorados.

Quando indagados sobre o estudo de sinal do seno, do cosseno e da tangente, foi perceptível a utilização de tabelas pelos três estudantes – característica que pode ser destacada como um recurso útil quando estamos fazendo estudo de sinais ou funções. Apesar de a atividade ter sido realizada de maneira individual, com discussões e trocas entre os estudantes, nesse quesito os alunos não conversaram e ainda assim seguiram uma mesma estratégia de resolução. É possível concluir, inicialmente, que a tabela pode ser o recurso por meio do qual aprenderam esses conteúdos – além disso, a tabela também é um recurso que auxilia a organizar os pensamentos e ter uma visualização mais direta. No Quadro 9, mostramos um exemplo de tabela feita pelos estudantes.

Quadro 9: Exemplo de tabela feita pelos estudantes

Quadrantes	Seno	Cosseno	Tangente
1	+	+	+
2	+	-	-
3	-	-	+
4	-	+	-

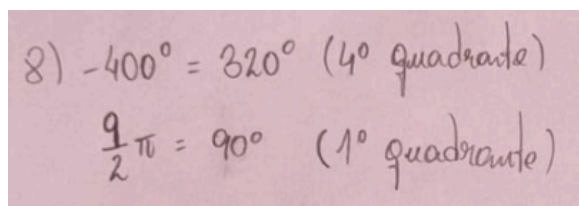
Fonte: elaborado pelo autor a partir dos registros dos educandos

Os participantes deveriam assinalar os ângulos marcados na circunferência, em radianos. Para executar essa tarefa, a proposta inicial seria que os alunos, apenas deslizando o ponto azul sobre os ângulos, constatassem que a marcação em azul da construção já apresentava os valores dos arcos em radianos – assim, eles deveriam apenas deslizar sobre os pontos e fazer os registros.

Dos estudantes observados, apenas um seguiu essa estratégia, utilizando o valor decimal aproximado dos ângulos em radianos. Os outros dois alunos utilizaram a notação com pi. Ambas as estratégias estão corretas, porém na segunda estratégia não foi utilizada a construção, mas sim conhecimentos prévios.

Em relação à localização de alguns ângulos e seus respectivos quadrantes, os alunos responderam da forma como aparece na Figura 13, na Figura 14 e na Figura 15, a seguir.

Figura 13: Resposta do aluno Gladys West



Handwritten student work on a pink background. It shows two calculations: $8) -400^\circ = 320^\circ$ (4º quadrante) and $\frac{9}{2}\pi = 90^\circ$ (1º quadrante).

Fonte: elaborada pelo autor

Figura 14: Resposta do aluno Karlie Noon

a) -400

b) $\frac{9\pi}{2} \cdot 180 = \frac{1620}{2} = 810^\circ$

4º quadrante

1º quadrante

90°

Fonte: elaborada pelo autor

Figura 15: Resposta do aluno MC Escher

8)

a) $-400^\circ = -(2\pi + 40) \therefore 360 - 40 = -320^\circ + 180 = 140^\circ \text{ } 2^\circ\text{Q}$

b) $\frac{9\pi}{2} \text{ rad } (810^\circ) = 4\pi + 90$

Fonte: elaborada pelo autor

De maneira mais direta, Gladys West chegou à conclusão de que os ângulos correspondiam a 320° e 90° respectivamente, pertencendo assim ao 4.º e ao 1.º quadrante. Karlie Noon seguiu por uma demonstração mais didática, desenhando o ciclo trigonométrico e chegando às mesmas conclusões. Por fim, MC Escher acabou cometendo alguns equívocos em seus cálculos, errando assim o primeiro item e acertando o segundo. Podemos observar também que o ângulo de 90° foi classificado como 2.º quadrante, a mesma discussão que emergiu anteriormente.

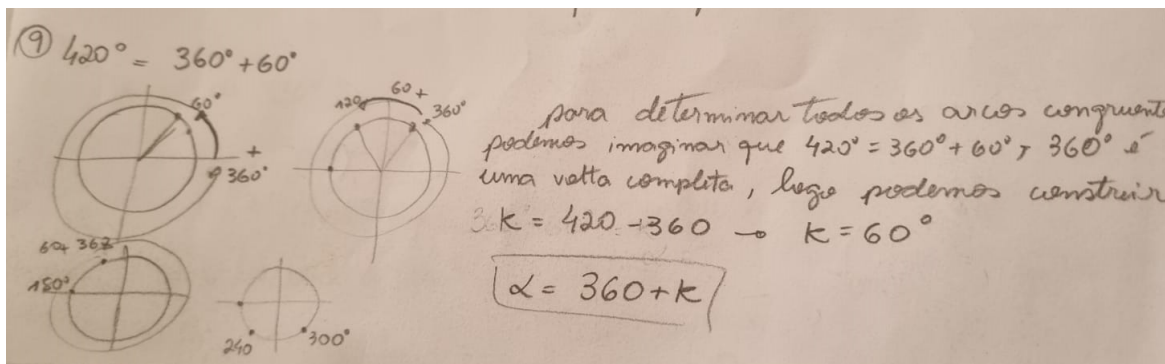
Para caminharmos para os objetivos desta pesquisa em relação à investigação dos eventos críticos, faz sentido destacarmos uma última percepção dos alunos sobre a seguinte solicitação: determinar os arcos congruentes a 420° . É o que está mostrado na Figura 16, na Figura 17 e na Figura 18.

Figura 16: Resposta do aluno Gladys West

9) $60^\circ + 2\pi K, K \in \mathbb{Z}$ ($420^\circ = 360^\circ + 60^\circ$, é o valor referente a $K=1$ [uma volta])

Fonte: elaborada pelo autor

Figura 17: Resposta do aluno Karlie Noon



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 18: Resposta do aluno MC Escher

Handwritten student work by MC Escher. It shows the equation:
$$9) 420^\circ = \frac{7\pi}{3} = \frac{7k\pi}{3}$$

Fonte: elaborada pelo autor

Quando solicitados a escrever expressões que generalizam um conjunto de ângulos congruentes, foi possível notar certa dificuldade por parte dos estudantes. Primeiro, é preciso tomar uma série de cuidados em relação à notação utilizada.

Gladys West concluiu que o ângulo 420° reduzido à primeira volta positiva equivale a 60° . Assim, na tentativa de generalizar essa ideia, ele determina que os ângulos congruentes devem respeitar a lei expressa por $60^\circ + 2k\pi$, com k inteiro. Para essa solução vale destacar o cuidado que se deve ter em relação a expressar ângulos em graus e em radianos em uma mesma expressão. Para não gerar essa confusão, é possível escrever 60° como $\pi/3$.

Já Karlie Noon propõe que o ângulo 420° nada mais é que $360^\circ + 60^\circ$ – assim, para construir uma generalização, ele pode considerar o ângulo 60° . Em seguida, esse aluno escreve a generalização $\alpha = 360 + k$. Essa é uma generalização possível para o

aluno entender o primeiro ângulo congruente após a primeira volta, porém ela não dá conta de todos os ângulos congruentes.

Por fim, MC Escher propõe o seguinte raciocínio: converter o ângulo de graus para radianos e em seguida multiplicar por k , sem situar ao leitor o significado de k .

Os estudantes compreenderam a pergunta e entenderam que os ângulos congruentes são aqueles obtidos ao completar $+360^\circ$ a partir da sua primeira determinação positiva.

Portanto, podemos inferir que a dificuldade por parte dos estudantes consiste na representação matemática desta generalização. Com o fim de sanar essas dificuldades, na implementação seguinte, os alunos tiveram contato justamente com a generalização dos arcos congruentes, de forma iterativa e interativa.

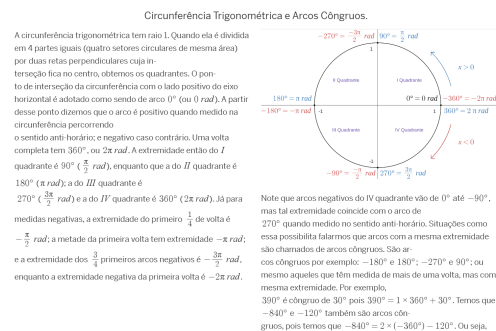
A seguir, esta pesquisa se dedica a descrever e destacar pontos importantes da segunda implementação, que aconteceu no Desmos Sala de Aula. Para adentrar no ambiente do Desmos, entre a primeira e a segunda implementação, aos alunos foram propostas as atividades criadas por Júnior (2018) por meio dos *applets*. Eles fizeram as atividades 2, 3, 4 e 5, que trabalhavam os conceitos de função seno, função cosseno e a alteração dos parâmetros delas.

A **segunda implementação** concentrou-se em uma sequência de atividades interativas, que possuíam construções interativas juntamente de explicações teóricas dos conteúdos de ciclo trigonométrico e funções trigonométricas (seno e cosseno). Para a realização da atividade, os estudantes utilizaram unicamente *tablets*, uma vez que a própria plataforma Desmos já disponibiliza espaço apropriado para registrarem suas respostas.

A escolha dos *tablets* se deu por conta da visualização mais clara das construções – a visualização foi prejudicada na primeira implementação, quando os estudantes utilizaram seus próprios *smartphones*. Após interagirem com essas construções, os alunos deveriam resolver tarefas e podiam utilizar as próprias construções como material de apoio.

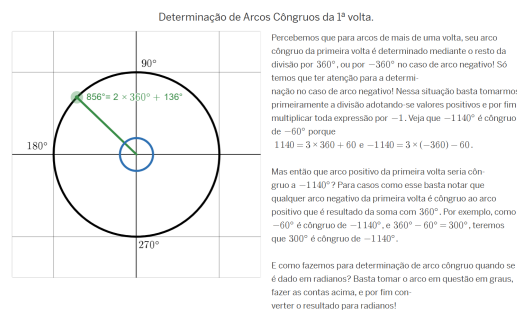
Para situar o leitor, a primeira página da tarefa consistia em uma explicação sobre o ciclo trigonométrico. A Figura 20, a seguir, mostra o *design* da segunda atividade na plataforma Desmos. A Figura 21 mostra a atividade de determinação de arcos realizada na plataforma Desmos.

Figura 20: *Design* da segunda atividade na plataforma Desmos



Fonte: Cândido (2023)⁶

Figura 21: Atividade na plataforma Desmos sobre determinação dos arcos



Fonte: Cândido (2023)

Essas atividades mais explicativas vieram da necessidade – sinalizada pelos alunos participantes da pesquisa – de retomar os conteúdos formais relacionados aos estudos.

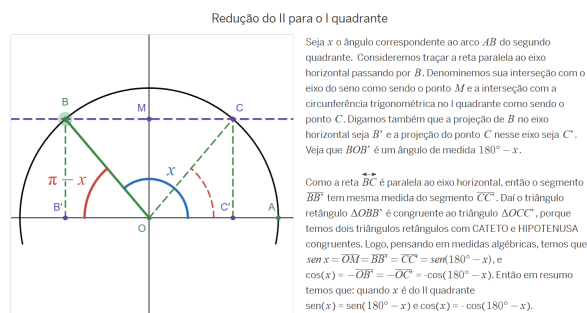
Essa próxima página mostra um exemplo de construções propostas de forma interativa. Além de ter acesso à explicação, o aluno é capaz de manipular o ponto sobre

⁶ As atividades apresentadas por Cândido (2023) em sua dissertação podem ser acessadas em: <https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/63bc3229b8c091975c778927?lang=pt-BR&collections=63bbfbab89f5f4e83f593e2f>

a circunferência a fim de entender o modo como são generalizados os ângulos em graus após a primeira volta completa.

Por fim, mostramos, na Figura 22, uma construção apresentada aos alunos sobre as reduções para o primeiro quadrante. Novamente os alunos podem manipular a construção e visualizar os ângulos do segundo quadrante e seus correspondentes no primeiro quadrante. Nesse momento, foi chamada a atenção para a possível variação do sinal nessa redução. Assim, o professor mediador deve estar atento às considerações que devem ser feitas para a melhor compreensão da atividade.

Figura 22: Atividade de redução do segundo para o primeiro quadrante



Fonte: Cândido (2023)

Além das construções interativas acerca dos conteúdos de ciclo trigonométrico, arcos côngruos e redução dos arcos para o primeiro quadrante, a atividade também trabalha os conteúdos de arcos notáveis da primeira volta positiva, finalizando com atividades avaliativas, mostradas na Figura 23 e na Figura 24.

Figura 23: Atividade expressões trigonométricas

Avalie o seu conhecimento a respeito dos conteúdos das páginas anteriores!

1 - O valor de $Y = \sin 90^\circ + \cos 360^\circ - \sin 270^\circ - \cos 180^\circ + \sin 180^\circ + \cos 90^\circ$ é:

- ☐ 1
- ☐ -1
- ☐ 2
- ☐ -2
- ☐ 4

Fonte: Cândido (2023)

Figura 24: Atividade expressões trigonométricas

2 - Encontre o valor de: $\cos 120^\circ + \sin 210^\circ$

- ☐ 1
- ☐ -1
- ☐ 0
- ☐ $\frac{1}{4}$
- ☐ $-\frac{1}{4}$

Fonte: Cândido (2023)

Nas atividades 1 e 2, mostradas na Figura 25 e na Figura 26, todos os alunos observados assinalaram a resposta correta, respectivamente, 4 e -1.

Figura 25: Atividade de multiplicação de arcos

3 - Qual o valor da expressão $\cos\left(\frac{35\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{-13\pi}{3}\right)$?

- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ $-\frac{1}{2}$
- ☐ 1
- ☐ $\frac{3}{4}$
- ☐ $-\frac{3}{4}$

Fonte: Cândido (2023)

Figura 26: Atividade de imagem da função

4 - Dada a função $f(x) = 3 - 2 \sin(2x)$, qual o valor de $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)$?

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 5

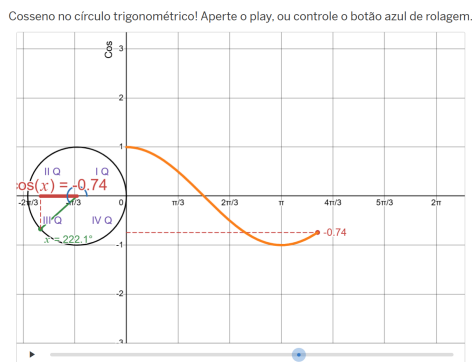
Fonte: Cândido (2023)

Na segunda metade da implementação em questão, o assunto abordado é o de funções trigonométricas, seguindo o mesmo modelo de construção. Nesse momento, os alunos foram colocados para interagir com construções sobre funções trigonométricas;

investigar seus aspectos periódicos, seu domínio, contradomínio e imagem; e efetuar quando necessário o cálculo de suas imagens ou seus pontos máximos e mínimos.

Além disso, para os educandos existem construções referentes aos parâmetros das funções trigonométricas – e, manipulando essas construções, eles podem verificar o modo como cada parâmetro é responsável por alterar a função em si. A Figura 27 mostra a atividade rastro da função cosseno.

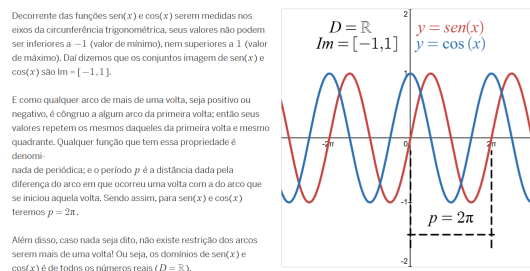
Figura 27: Atividade rastro da função cosseno



Fonte: Cândido (2023)

Inicialmente, os alunos são convidados a dar *play* no objeto de interação ou arrastá-lo para observar o modo como os valores do cosseno, calculados no ciclo trigonométrico, se projetam no eixo plano cartesiano, formando assim a função $f(x) = \cos(x)$ de forma contínua. A Figura 28 mostra a atividade com a explicação sobre o período das funções seno e cosseno.

Figura 28: Atividade com explicação sobre o período das funções seno e cosseno



Fonte: Cândido (2023)

Por conseguinte, são trabalhados a partir de considerações textuais com o apoio de imagens os conceitos de imagem, periodicidade e período das funções $f(x) = \sin(x)$

ou $f(x) = \cos(x)$, além de atividades avaliativas sobre os máximos e os mínimos e o período de funções derivadas da função seno e cosseno. A Figura 29 mostra a atividade para avaliação do máximo da função f ; a Figura 30 apresenta a atividade para avaliação do mínimo da função f ; a Figura 31 expõe a avaliação sobre o período da função f e a Figura 32 exhibe a avaliação sobre a imagem da função f .

Figura 29: Atividade Máximo da função f

Avalie o seu conhecimento a respeito dos conteúdos!

1 - Dada a função $f(x) = 5 - 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right)$, o máximo valor que ela tem é:

- ☐ 8
- ☐ 10
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4

Fonte: Cândido (2023)

Figura 30: Atividade mínimo da função f

2 - Com relação à função $f(x) = \frac{6}{2 + \cos(3x)}$, o mínimo valor que ela possui é:

- ☐ 4
- ☐ 8
- ☐ 6
- ☐ 3
- ☐ 2

Fonte: Cândido (2023)

Figura 31: Atividade período da função f

3 - Dada a função $f(x) = 5 - 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{3}\right)$, seu período é:

- ☐ 4
- ☐ 3
- ☐ 2
- ☐ 6
- ☐ 8

Fonte: Cândido (2023)

Figura 32: Atividade imagem da função f

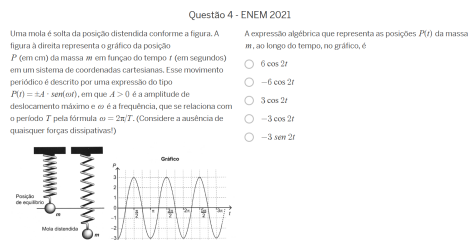
4 - Dada a função $f(x) = 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, qual o valor de x abaixo satisfaz $f(x) = \frac{5}{2}$?

- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{1}{3}$
- ☐ 0
- ☐ $\frac{1}{6}$
- ☐ $\frac{2}{3}$

Fonte: Cândido (2023)

Ao final das situações exploratórias e das tarefas envolvendo os conteúdos de imagem e domínio das funções trigonométricas seno e cosseno, apresentamos duas questões do Enem, para avaliar o que foi compreendido pelos estudantes. A primeira questão está mostrada na Figura 33; e a segunda, na Figura 34.

Figura 33: Atividade com a questão do Enem



Fonte: Cândido (2023)

Figura 34: Atividade com a questão do Enem

Questão 5 - ENEM 2015

Um técnico precisa consertar um termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T , em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função $T(h) = A + B \sin\left[\frac{\pi}{12}(h - 12)\right]$, sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite ($0 \leq h \leq 24$) e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26 °C, a mínima 18 °C, e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã.

Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

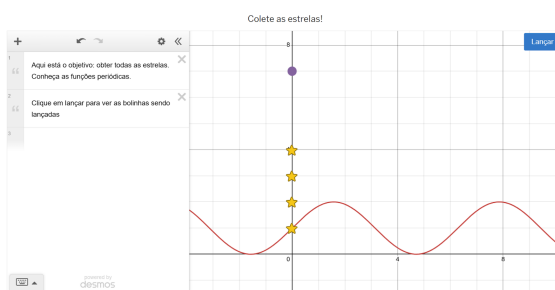
- ☐ $A = 26$ e $B = 8$
- ☐ $A = 22$ e $B = -4$
- ☐ $A = 18$ e $B = 8$
- ☐ $A = 26$ e $B = -8$
- ☐ $A = 22$ e $B = 4$

Fonte: Cândido (2023)

Em relação às questões do Enem, todos os estudantes acertaram a primeira. Já a segunda questão, dos sete estudantes que a responderam, três acertaram a resposta e outros dois erraram – assinalaram a alternativa correta, porém com sinal oposto.

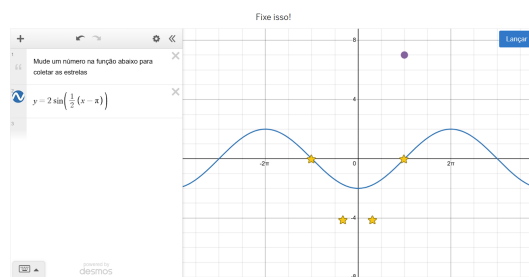
Na **terceira implementação**, foram propostas atividades gamificadas e atividades sobre a alteração dos parâmetros, caracterizando assim a implementação como mais prática do que a anterior. Inicialmente, os alunos deveriam resolver desafios gamificados retirados da própria plataforma para a implementação. A atividade consistia em alterar os parâmetros de uma função trigonométrica a fim de lançar bolas do alto para coletar estrelas. A Figura 35, a Figura 36, a Figura 37 e a Figura 38 apresentam alguns dos desafios propostos.

Figura 35: Atividade gamificada



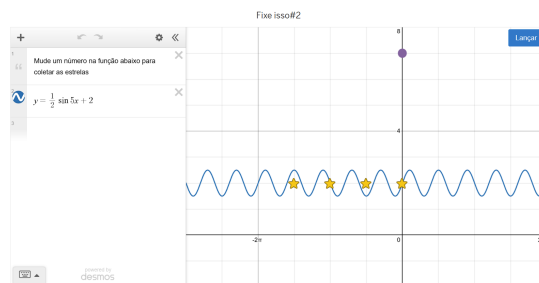
Fonte: Desmos

Figura 36: Atividade gamificada



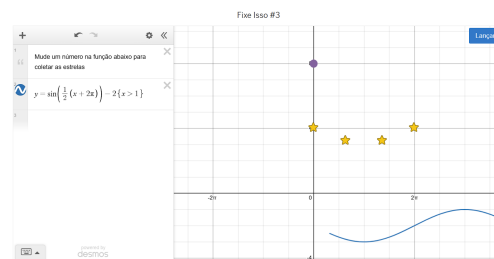
Fonte: Desmos

Figura 37: Atividade gamificada



Fonte: Desmos

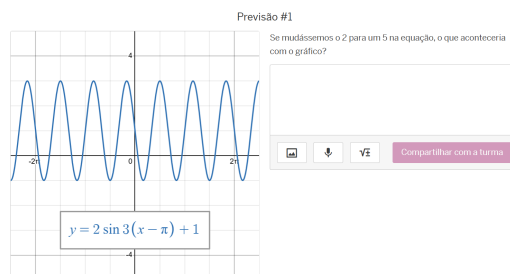
Figura 38: Atividade gamificada



Fonte: Desmos

Os alunos mostraram-se bastante interessados na resolução desses desafios. Durante a discussão final da terceira implementação, um aluno sugeriu uma alteração na sequência de atividades, de modo que os desafios fossem para o início dos encontros, pois, segundo ele, são desafios que despertam o interesse dos estudantes. Ainda segundo esse mesmo estudante, os alunos – mesmo que não compreendam ainda as funções trigonométricas seno e cosseno e a alteração de seus parâmetros – veem-se desafiados e engajados a participar da atividade devido a seus aspectos gamificados. A Figura 39 mostra uma atividade gamificada. Em seguida, apresentamos as respostas dos alunos.

Figura 39: Atividade gamificada



Fonte: Desmos

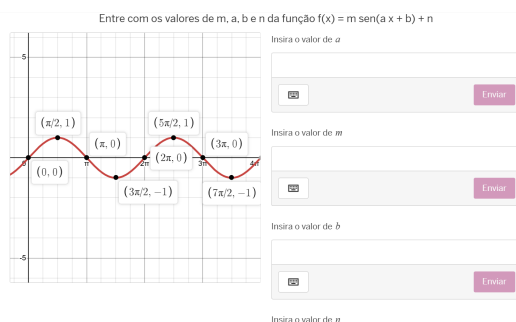
Gladys West: *Aumentaria o valor máximo e mínimo atingido pela função (de -1 a 3 para -4 a 6)*

Karlie Noon: *Vai aumentar a amplitude vertical da curva, os pontos de máximos e mínimos ficam mais distantes entre si.*

MC Escher: *Aumentaria a amplitude entre o máximo e mínimo.*

Ao observarmos as respostas desses alunos, podemos ver que o conceito da alteração desse parâmetro foi assimilado por eles. Alguns responderam de forma mais completa, porém todos entenderam quais seriam as implicações da alteração do parâmetro na função em questão. A Figura 40 mostra a atividade de alteração de parâmetros.

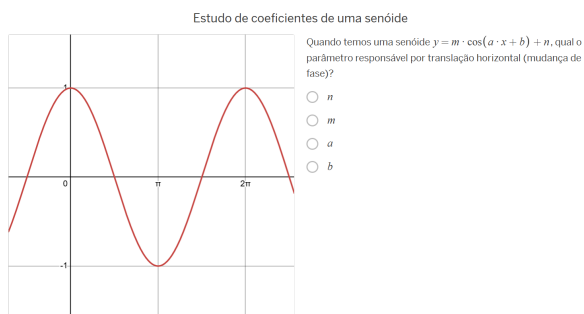
Figura 40: Atividade de alteração de parâmetros



Fonte: Cândido (2023)

Quando questionados sobre os coeficientes da função, a maioria dos alunos assinalou que os coeficientes a e m eram iguais a 1 e b e n eram iguais a zero. A Figura 41 mostra outra atividade de alteração de parâmetros.

Figura 41: Atividade de alteração de parâmetros



Fonte: Cândido (2023)

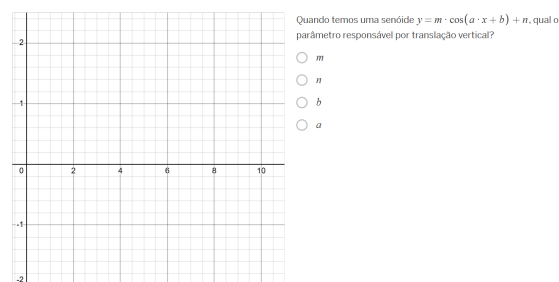
No estudo dos coeficientes da senoide, os alunos deveriam observar o gráfico da função e, em seguida, assinalar o parâmetro que era responsável pela translação horizontal. Nesse sentido, todos os alunos conseguiram chegar à conclusão de que o parâmetro b seria a resposta. Vejamos a seguir algumas respostas dos alunos.

Gladys West: O parâmetro b adiciona unidades ao valor de x , o que "adianta" ou "atrasa" o ciclo da cossenoide.

MC Escher: A letra b que faz essa função pois ela que vai decidir o primeiro ponto de origem da onda no eixo x . O aluno Karlie Noon assinalou a alternativa correta, porém não fez comentários sobre.

A partir dos comentários dos alunos, podemos observar que há o entendimento dos estudantes sobre a variação do parâmetro b . Ainda podemos observar que, intuitivamente, eles tendem a partir da construção da função $f(x) = \sin(x)$ para daí observarem como esse valor irá alterar a função original. Para realizarmos essas conjecturas, notamos então a importância da compreensão das funções originais e suas características. A Figura 42 mostra atividade de alteração de parâmetros.

Figura 42: Atividade de alteração de parâmetros



Fonte: Cândido (2023)

Em relação ao parâmetro responsável pela translação vertical, todos os alunos entendem que o coeficiente n seria a resposta, como aparece nas respostas apresentadas a seguir.

Gladys West: A função seno atinge apenas valores entre -1 e 1, e o parâmetro n altera o conjunto imagem da função para $[-1+n, 1+n]$.

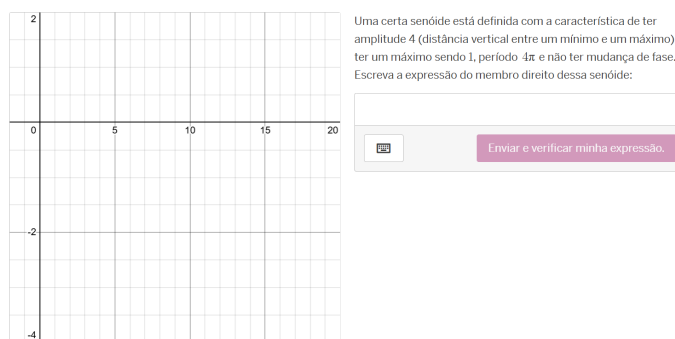
MC Escher: O parâmetro n mostrará onde a função cruzará o eixo y , determinando a amplitude dos ciclos.

O aluno Karlie Noon assinalou a alternativa correta, porém não fez comentários sobre sua resposta.

A partir desses depoimentos, podemos observar que o primeiro aluno partiu do fato de que a função canônica $f(x) = \cos(x)$ tem sua imagem limitada no intervalo fechado $[-1, 1]$. Então, a partir desse fato, ele concluiu que, como o parâmetro n estava somando unidades à função original, esse fato alteraria seus extremos, realizando assim uma translação vertical.

O segundo estudante chegou à sua resposta a partir de uma constatação mais visual: ele apresenta a ideia de que o parâmetro “ n ” irá alterar a interseção do gráfico com o eixo das ordenadas, porém acaba se equivocando quando afirma que isso determina a amplitude dos ciclos. A Figura 43 mostra uma atividade de alteração de parâmetros.

Figura 43: Atividade de alteração de parâmetros

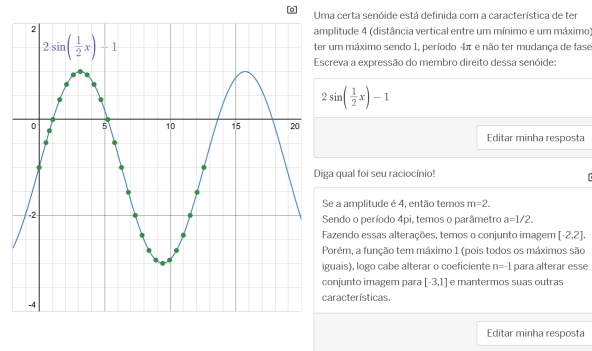


Fonte: Cândido (2023)

Na tarefa mostrada na Figura 43, os alunos deveriam encontrar a expressão que representa a senoide de acordo com as características enunciadas. Vejamos a resolução

dos alunos, na Figura 44, na Figura 45 e na Figura 46, seguidas pela transcrição das respostas.

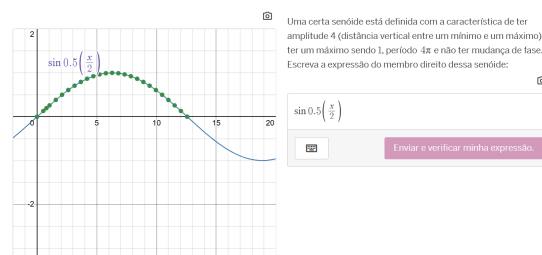
Figura 44: Resolução de Gladys West



Fonte: registro dos educandos

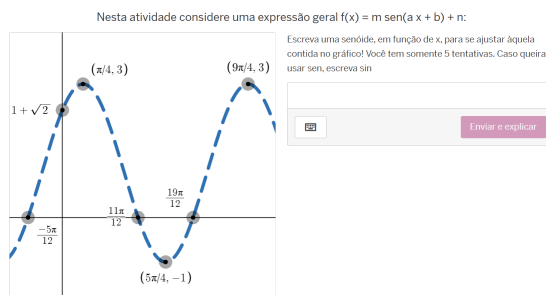
Gladys West: Se a amplitude é 4, então temos $m=2$. Sendo o período 4π , temos o parâmetro $a=1/2$. Fazendo essas alterações, temos o conjunto imagem $[-2,2]$. Porém, a função tem máximo 1 (pois todos os máximos são iguais), logo cabe alterar o coeficiente $n=-1$ para alterar esse conjunto imagem para $[-3,1]$ e mantermos suas outras características.

Figura 45: Resolução de Karlie Noon



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 46: Atividade: encontrar a senoide que intercepta os pontos



Fonte: Cândido (2023)

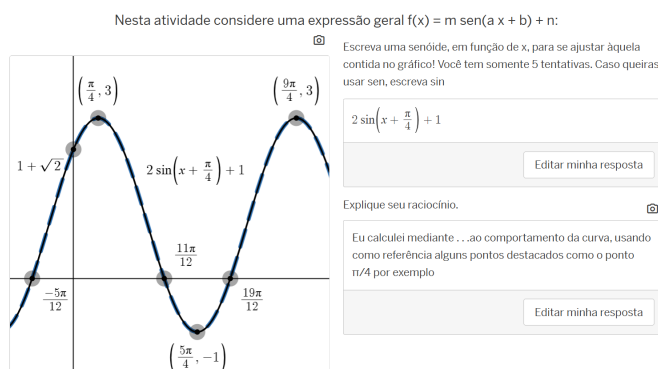
Gladys West: Não houve alteração no período da função, logo $a=1$. Temos que a função atinge seu máximo em $\pi/4$, sendo a função seno com máximo em $\pi/2$. Como $\pi/4 + \pi/4 = \pi/2$, tomamos $b=\pi/4$. Por último, temos que a amplitude é 4, logo temos $m=2$.

Karlie Noon: Eu calculei mediante ao comportamento da curva, usando como referência alguns pontos destacados como o ponto $\pi/4$ por exemplo.

MC Escher: Eu calculei mediante aos valores dados nos máximos e mínimos e onde eles batiam o eixo X no par ordenado.

A conclusão dos três licenciandos foi similar, embora tenham utilizado estratégias diferentes. A Figura 47 exhibe um exemplo da resolução dos estudantes.

Figura 47: Exemplo da resolução dos estudantes



Fonte: elaborada pelo autor

Nas duas últimas questões do Enem propostas como fixação dos conteúdos, os alunos acertaram em maioria a primeira – a segunda foi respondida de maneira correta por apenas dois estudantes. A Figura 48 e a Figura 49 mostram as atividades do Enem.

Figura 48: Atividade do Enem

Questão 6 - ENEM 2015

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra.

A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P , em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de Janeiro, $x = 2$ ao mês de Fevereiro e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de Dezembro.

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é:

- ☐ Junho
- ☐ Abril
- ☐ Julho
- ☐ Janeiro
- ☐ Outubro

Fonte: Cândido (2023)

Figura 49: Atividade do Enem

Questão 7 - ENEM 2010

Um satélite de comunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por

$$r(t) = \frac{5865}{1 + 0,15 \times \cos(0,06 t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para calcular o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores r , no apogeu e no perigeu, representado por S . O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de

- ☐ 11 730
- ☐ 5 865
- ☐ 10 965
- ☐ 12 765
- ☐ 12 000

Fonte: Cândido (2023)

05. Considerações Finais

Por meio desta pesquisa foi possível contribuir para o exercício docente com o apoio de tecnologias digitais de geometria dinâmica e interativa. A princípio foram exploradas algumas funcionalidades da plataforma Desmos, buscando assim dialogar com professores e futuros profissionais da educação matemática e instruí-los para manusearem esse recurso.

A plataforma Desmos mostrou-se um recurso com manuseio relativamente simples e o potencial de ser gratuita e intuitiva. Uma desvantagem da plataforma, mesmo com a tradução feita por intermédio do navegador, é a dificuldade de leitura de alguns recursos, visto que algumas partes estão em inglês. Porém, o ambiente do Desmos Sala de Aula apresenta inúmeras possibilidades de criação.

Como próximos passos da pesquisa, podemos destacar a importância do Painel de Controle vinculado ao Desmos, que necessita de uma exploração mais aprofundada. O ambiente mostrou-se bastante útil no que se refere à avaliação e progresso dos educandos, assim como feedback imediato. Uma possibilidade então é um aprofundamento maior nesse recurso do Desmos Sala de Aula.

Outro destaque importante é a integração com os recursos Polypad, incluídos na plataforma. Tais recursos, se integrados ao Desmos Sala de Aula, permitem trabalhar conteúdos que vão muito além das funções e da geometria. Sendo assim, é de grande importância que o estudo e a análise desse recurso sejam levados em consideração nos próximos passos da pesquisa.

06. Referências

BAIRRAL, Marcelo Almeida. Discurso, interação e aprendizagem: matemática em ambientes virtuais a distância. Seropédica: Edur, 2018. 122 p.

CÂNDIDO, José Valério Moreira. Sala invertida de funções trigonométricas usando a camada de computação do Desmos. 2023. 38 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Pará, Castanhal, 2023.

COLINVAUX, Dominique. Aprendizagem: as questões de sempre, a pesquisa e a docência. Ciência em Tela, Rio de Janeiro, v. 1, n. 1, p. 1-11, jan. 2008. Disponível em: <http://www.cienciaemtela.nutes.ufrj.br/index.html> Acesso em: 13 abr. 2025.

JUNIOR, F. R. S. Ensino de Funções Trigonométricas com applets. 2018. 96 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Centro de Ciência e Tecnologia. Laboratório de Ciências Matemáticas. Campos dos Goytacazes, RJ, 2018.

RODRIGUES, Márcio Urel; MACEDO, Ediel Pereira; SILVA, Luciano Duarte; GONÇALVES, William Vieira. Dupla descontinuidade contínua na formação inicial de professores de matemática: compreensões dos professores de matemática em serviço nas escolas da educação básica. Tangram - Revista de Educação Matemática, [S. l.], v. 5, n. 3, p. 189-224, 30 set. 2022. DOI: <http://dx.doi.org/10.30612/tangram.v5i3.12532>

VALENTE, José Armando. A informática na educação no Brasil: análise e contextualização histórica. In: VALENTE, José Armando. O computador na sociedade do conhecimento. Campinas: Nield/Unicamp, 1999. p. 1-13.