



PRODUTO EDUCACIONAL

A Calculadora como Recurso Tecnológico Educativo para o Fortalecimento e Consolidação do Pensamento Aritmético

Discente: Pedro Henrique Alves Justino dos Santos

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Rosa García Márquez

Rio de Janeiro
2025

RESUMO

Este produto educacional apresenta um conjunto de dez atividades pedagógicas cuidadosamente elaboradas, voltadas para alunos do Ensino Fundamental II e do 1º ano do Ensino Médio, com foco na revisão de números inteiros, racionais e suas propriedades. O principal objetivo é apoiar os estudantes na consolidação das operações elementares e suas propriedades, combinando abordagens tradicionais com o uso da calculadora, além de revisar cálculos, fundamentos axiomáticos, e explorar limitações e possíveis erros associados a essa tecnologia. A proposta didática promove o aprendizado de conceitos matemáticos essenciais por meio de exercícios práticos, problemas contextualizados e a calculadora como ferramenta complementar. Apesar da percepção comum de que o uso da calculadora é intuitivo, observa-se que muitos estudantes enfrentam dificuldades tanto no manuseio adequado quanto na interpretação dos resultados, frequentemente devido a lacunas nos conceitos básicos, agravadas, sobretudo, durante a pandemia.

Palavras-Chave: Ferramentas tecnológicas no Ensino. Operações aritméticas elementares. Limitações da calculadora. Números racionais.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	6
ATIVIDADE 1	8
1.1. As calculadoras eletrônicas em aplicativos para smartphones:	9
ATIVIDADE 2	14
2.1. Primeiro Conjunto Numérico: Números naturais	14
2.2. O Segundo Conjunto Numérico: Números Inteiros	14
ATIVIDADE 3	18
3.1. A calculadora como ferramenta de Ensino:	18
3.2. Adição	19
3.3. Subtração:.....	22
3.4. Operações Inversas: Adição e Subtração	26
3.5. A Multiplicação:	26
3.6. O Conjunto dos Múltiplos de um Número Inteiro:	30
3.7. Verificando as Propriedades da Multiplicação:	32
3.8. O Sistema de Numeração Decimal	35
ATIVIDADE 4.....	36
4.1. A Relação Fundamental da Divisão (Divisão Euclidiana).....	37
4.2. Operações de Divisão: Exatas e Não Exatas.....	39
4.3. O cálculo do quociente decimal em uma divisão não exata.	40
4.4. Quociente no Visor da Calculadora:	41
4.5. As Palavras: Divisor, Divisível e Múltiplo de um Número Inteiro	43
4.6. Por que as calculadoras erram?	49
4.7. A Tecla “Fração”	50
4.8. Divisão com Resultados Iguais	52
4.9. Operações Inversas: Multiplicação e Divisão	54
4.10.O valor de uma expressão numérica	57

ATIVIDADE 5	60
5.1. Operações com números inteiros positivos e negativos.....	60
5.2. A revolução dos números positivos e negativos na humanidade.....	60
5.3. A representação dos números inteiros em uma reta numérica.....	61
5.4. O módulo ou valor absoluto de um número inteiro	63
5.5. O oposto de um número inteiro e a tecla $+/-$	65
5.6. O Cálculo do Oposto de um Número Inteiro	66
5.7. Comparação de Números Inteiros (Noção Geométrica)	69
5.8. A eliminação dos parênteses:	71
5.9. A operação de adição com números inteiros	72
5.10. A operação de subtração com números inteiros.....	73
5.11. A operação de multiplicação com números inteiros:	74
5.12. A operação de divisão com números inteiros: $\pm a \div \pm b$	75
5.13. A comparação de números inteiros através de operações aritméticas.	77
5.14. O conceito de números opostos aplicados em equações e demonstrações matemáticas.	80
ATIVIDADE 6	81
6.1. O Conjunto dos Números Racionais	81
6.2. Conversão entre representações decimal e fracionária de números racionais	84
6.3. Dízimas periódicas simples com parte inteira igual a zero.	85
6.4 Dízimas periódicas simples com parte inteira diferente de zero	86
6.4. A reta numérica dos números racionais	86
6.5. Comparação de números racionais	88
6.6. Operações com frações	93
ATIVIDADE 7	102
7.1. Estudo de erros nas aproximações numéricas.....	102
7.2. Análise dos Erros em Números Aproximados	103

ATIVIDADE 8	110
8.1. Inverso multiplicativo de forma contextualizada	110
8.2. Resolução de equações do 1º grau a uma incógnita.....	112
ATIVIDADE 9	112
9.1. Análise do gráfico da função: $y = a/x$ e suas implicações.....	112
9.2. Estudo da variação de y em função de x a partir dos dados tabelados.....	118
9.3. O curioso caso das dízimas periódicas iguais a inteiros:	121
ATIVIDADE 10	124
10.1. Decimal exato ou dízima periódica?	124
10.2. Divisão de Números: Calculadora, GeoGebra e ChatGPT em Comparação	125
ANEXO A: Tabuadas da adição, subtração e multiplicação.	137
REFERÊNCIAS	139

INTRODUÇÃO

Muitos alunos do Ensino Básico enfrentam dificuldades com operações aritméticas básicas, o que compromete sua compreensão de conteúdos mais avançados. Segundo Carvalho *et al.* (2004), essas dificuldades estão frequentemente relacionadas a falhas na aprendizagem inicial e à ausência de estratégias pedagógicas adequadas.

Durante séculos, esses conteúdos foram ensinados nas escolas para capacitar os indivíduos a resolverem problemas do dia a dia. Quem poderia imaginar que o surgimento de calculadoras capazes de realizar cálculos complexos em frações de segundo tornaria possível que uma pessoa sem escolaridade realizasse cálculos ensinados durante anos no ensino primário? Por volta dos anos de 1970, atendentes brasileiros de uma loja de vestuário, por exemplo, faziam os cálculos mentalmente ou rapidamente escrevendo-os em um pedaço de papel. As calculadoras portáteis estavam surgindo no mercado, mas eram muito caras. Era necessário memorizar tabuadas e dominar os algoritmos de adição, subtração, multiplicação e divisão – uma aptidão necessária para vender e para comprar algo sem ser enganado por pessoas mal-intencionadas. Atualmente, o uso da calculadora eletrônica tornou-se uma prática cotidiana, especialmente entre profissionais do comércio, como os vendedores. Esse recurso tecnológico é amplamente utilizado para a realização de cálculos básicos, contribuindo significativamente para a agilidade no atendimento ao cliente e para o aumento da produtividade no ambiente de trabalho.

A introdução dessa máquina no cotidiano comercial representou uma verdadeira revolução, ao permitir maior eficiência nos processos operacionais e ao reduzir consideravelmente o tempo necessário para executar tarefas numéricas. Além disso, a eficácia do uso da calculadora eletrônica está na precisão dos resultados obtidos, minimizando erros e proporcionando maior confiabilidade nas transações. Sem dúvida, trata-se de uma ferramenta que transformou a dinâmica do trabalho comercial, otimizando recursos e elevando a qualidade dos serviços prestados.

Este caderno de atividades tem como propósito apresentar uma proposta pedagógica composta por 10 lições voltadas à revisão de conteúdo do Ensino Fundamental II, especialmente elaboradas para alunos do 1º ano do Ensino Médio. A temática abordada está alinhada à Base Nacional Comum Curricular (BNCC), inserindo-se no eixo de Números e Álgebra — com ênfase no estudo do conjunto dos números racionais.

O objetivo central é reforçar os conhecimentos essenciais que servirão de base para o prosseguimento dos estudos no Ensino Médio, promovendo a consolidação do pensamento

aritmético, uma etapa em que muitos alunos ainda apresentam lacunas, intensificadas pelo período da pandemia.

Para tornar a revisão mais eficiente e próxima da realidade dos estudantes, as atividades propõem o uso da calculadora como ferramenta pedagógica. Além de otimizar o tempo, essa prática busca aproximar os alunos do uso consciente e produtivo da tecnologia no processo de aprendizagem matemática.

Ao final das 10 atividades, espera-se que os estudantes estejam mais seguros em relação aos conteúdos revistos, com os pré-requisitos necessários para avançar nos estudos da matemática de forma mais sólida e autônoma.

O trabalho enfatiza a importância da compreensão das definições e propriedades das operações, promovendo uma introdução gradual às suas generalizações. Essa abordagem visa proporcionar ao aluno subsídios para a compreensão de algumas demonstrações matemáticas — aspecto ainda pouco explorado no Ensino Básico. Pretende-se, ainda, estabelecer uma relação entre as atividades desenvolvidas e o entendimento do funcionamento das teclas de uma calculadora, favorecendo o uso consciente e pedagógico desse recurso tecnológico, conforme defendem autores como Lorenzato (2006), que destaca o valor didático dos instrumentos tecnológicos no processo de aprendizagem matemática.

Este produto educacional está estruturado em dez atividades. A primeira atividade apresenta um vídeo sobre a história das calculadoras eletrônicas, exibindo diferentes modelos, no qual cada aluno deve identificar sua calculadora ou smartphone. Na segunda atividade, revisam-se os conjuntos numéricos dos números naturais e inteiros. Na terceira atividade, exploram-se as operações de adição, subtração e multiplicação. Na quarta atividade, aborda-se a divisão entre números inteiros. Na quinta, os inteiros negativos são incorporados nas explicações teóricas e são introduzidas as regras operatórias adaptadas aos inteiros negativos, que nas atividades de 1 a 4, não foram usados como operandos, apareceram apenas como resultados de certas operações. Na 6ª atividade o conjunto dos números racionais é definido e estruturado de tal forma que o aluno possa compreender as operações e suas propriedades. Nesse momento, é enfatizada a visão geométrica da representação dos números na reta. Da atividade 6 em diante, utiliza-se uma abordagem voltada as aplicações dos números racionais em diversos contextos, e aborda-se conceitos como aproximação de números, o cálculo do erro absoluto e relativo, uma ideia intuitiva que entre dois números inteiros consecutivos há infinitos números, uma ideia de limite da função do inverso de um número, quando este se aproxima de zero. Relaciona-se também ao inverso de um número inteiro à técnicas de resolução de equações. Por fim, na atividade 10, investiga-se como determinar se um número obtido pela

divisão não exata de inteiros é um número decimal exato ou dízima periódica. As investigações utilizam o aplicativo de calculadora nativa de um smartphone e o Geogebra. Gera-se também uma reflexão sobre o uso da inteligência artificial e que ela não é totalmente confiável na resolução de problemas matemáticos. Como máquina de cálculos, a IA possui também limitações. Tal reflexão visa despertar o aluno para estudar Matemática, que seu estudo é mais do que realizar cálculos no papel, mas sim saber o porque dos resultados desses cálculos estarem corretos ou não para resolver os seus problemas.

ATIVIDADE 1

Conhecendo as calculadoras eletrônicas

A atividade visa explorar os tipos de calculadoras eletrônicas, suas funcionalidades e aplicações nos contextos educacional e comercial, promovendo reflexão sobre seu uso consciente. Busca estimular discussão sobre prós e contras do uso de calculadoras no ensino de Matemática, incentivando o pensamento reflexivo e a argumentação. Destaca que o uso de calculadoras amplia o aprendizado se integrado a uma prática pedagógica intencional.

Questionamentos

- Por que é importante dominar o uso da calculadora?
- O que é uma calculadora e como ela funciona?
- Você sabe quais são as diferenças entre os modelos de calculadora?
- Você costuma consultar as especificações técnicas de uma calculadora para escolhê-la de acordo com as suas necessidades.

Documentário: A revolução tecnológica do Japão – Guerra das calculadoras. Disponível em: www.youtube.com/watch?v=22hu1bEsDGw&t=22s&ab_channel=DantasCl%C3%ADstenes

Exemplos de Calculadoras Portáteis:

Figura 1: Calculadoras Portáteis: (a) Classe CLA-402. (b) Casio Fx-991LAX. (c) HP 50G. (d) HP12C



Fonte: Fotografias do autor, 2025.

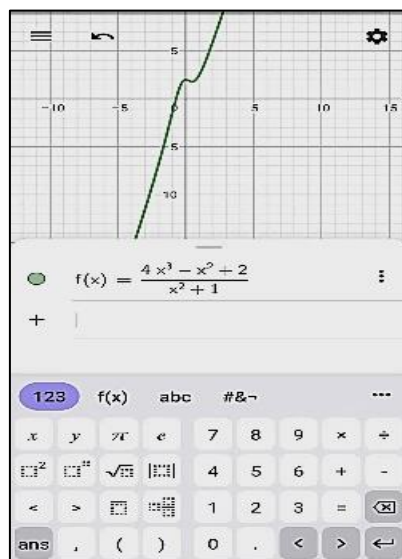
1.1.As calculadoras eletrônicas em aplicativos para smartphones:

Com o avanço da tecnologia digital, os smartphones passaram a incorporar diversas funcionalidades que antes estavam restritas a dispositivos eletrônicos específicos (Drubscky, 2025). Um exemplo marcante é a presença de **aplicativos de calculadora**, que transformaram o celular em uma ferramenta multifuncional para realização de cálculos matemáticos, desde os mais simples até os mais complexos.

Os sistemas operacionais móveis, como o **Android**, já vêm com um aplicativo nativo de calculadora, conhecido como **calculadora padrão**. Este aplicativo realiza operações aritméticas básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão), mas também oferece recursos adicionais, como cálculo de porcentagem, raiz quadrada, uso de parênteses, operações com frações e funções trigonométricas em modo científico. Em muitos aparelhos, o usuário pode alternar entre o modo simples e o modo científico apenas ao girar a tela do dispositivo.

Além da calculadora padrão, há aplicativos educacionais mais sofisticados, como a **Calculadora Gráfica GeoGebra**, amplamente utilizada em contextos escolares e acadêmicos. Esta ferramenta gratuita permite representar graficamente funções, resolver equações, manipular variáveis e visualizar relações algébricas e geométricas de forma dinâmica e interativa. A GeoGebra é particularmente útil para o ensino e aprendizagem de Matemática, pois integra cálculo simbólico (CAS), gráficos, geometria e estatística em um único ambiente visual.

Figura 2: Calculadora Gráfica Geogebra



Fonte: O autor, 2025

Quando comparadas às **calculadoras portáteis tradicionais**, como a Sharp EL-531, os aplicativos de smartphone oferecem maior flexibilidade, interface mais amigável e recursos visuais mais avançados. No entanto, as calculadoras portáteis ainda mantêm sua relevância, especialmente em avaliações escolares ou concursos que restringem o uso de celulares. Além disso, sua simplicidade e foco exclusivo em cálculos reduzem distrações e garantem maior autonomia de uso em ambientes formais.

Dessa forma, o uso de aplicativos de calculadora em smartphones amplia as possibilidades de ensino, aprendizagem e resolução de problemas matemáticos no cotidiano, sem substituir totalmente os dispositivos portáteis, mas funcionando como uma alternativa poderosa e acessível.

Calculadoras básicas dos smartphones

- Os smartphones possuem uma calculadora científica nativa no seu sistema operacional.
- Elas são gratuitas não precisando pagar por um aplicativo.
- Ao saber trabalhar com elas, você entenderá o funcionamento de outras calculadoras eletrônicas portáteis ou de outros aplicativos.
- Neste caderno as atividades propostas serão baseadas no modelo de calculadora padrão do smartphone Samsung S22.

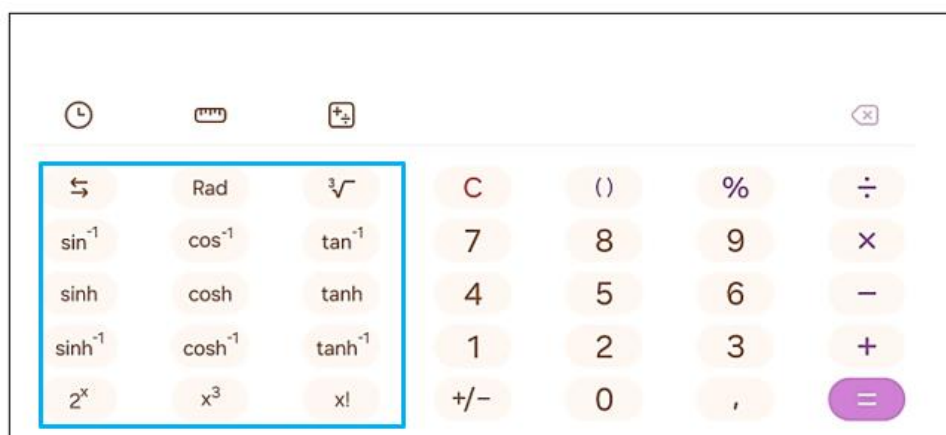
Figura 3: Calculadora padrão de um smartphone. (a) Básica (b) Científica.



Fonte: O Autor, 2025

A Tecla $\boxed{\leftarrow}$: Na calculadora de um smartphone Samsung, ela serve para expandir as opções da calculadora científica, como se observe a figura abaixo. Há as teclas das funções inversas das funções trigonométricas *sen*, *cos* e *tg*, as funções hiperbólicas e as suas inversas, a tecla de potências com base 2, a tecla para o cálculo de potências com expoente 3 (o cubo de um número) e a tecla do fatorial de um número. Na calculadora do smartphone Iphone, a tecla que possui essa mesma função é a tecla $\boxed{2^{nd}}$ e, na calculadora nativa do smartphone da Motorola, a tecla é $\boxed{INV}$. Na figura a seguir, está ilustrada em azul as teclas adicionais acionadas pela tecla $\boxed{\leftarrow}$ numa calculadora nativa de um smartphone da Samsung.

Figura 4: Calculadora Científica-acionamento da tecla $\boxed{\leftarrow}$



Fonte: O autor, 2025

Exercícios Propostos

1) Qual é o número máximo de dígitos que pode aparecer no visor da sua calculadora?

2) Quais são as funções das teclas abaixo? Caso a sua calculadora não tenha as teclas com as simbologias abaixo, que são encontradas no smartphone Samsung, procure no modelo da sua calculadora, as teclas que permitem conversão de unidades de medidas e a tecla de exibição do histórico dos cálculos efetuados, o qual está relacionado a capacidade da calculadora de guardar dados na sua memória.

a) A tecla 'C': _____

b) A tecla 'Régua': _____

c) A tecla 'Relógio': _____

d) A tecla 'Vírgula': _____

Curiosidade: Na notação de números decimais, é comum utilizar a vírgula como símbolo separador entre a parte inteira e a parte decimal de um número que está na sua representação decimal. No entanto, em alguns países, como os Estados Unidos, usa-se o ponto para essa mesma função. Por exemplo, nos EUA, mil dólares são representados como \$1,000.00; já no Brasil, mil reais são escritos como R\$ 1.000,00. Portanto, ao observar um ponto na sua calculadora, saiba que a configuração do aparelho pode estar interpretando esse ponto como uma vírgula decimal. Nesse contexto de representação de números na forma decimal, é necessário ficar atento que os números inteiros possuem zeros na parte decimal. Os números que possuem parte decimal com algum dígito diferente de zero, são aqueles que possuem parte inteira e a parte decimal corresponde a frações do inteiro.

- 3) Digite o número decimal que tem 1 na sua parte inteira e números 2 na sua parte decimal. Digite o número 2 após a vírgula até onde a sua calculadora permitir. Escreva aqui quantos números “2” você conseguiu colocar na parte decimal desse número. _____
-
- 4) Digite os valores $R\$ 1.237,50 + R\$ 2.954,00$ na calculadora do seu smartphone. Qual é o resultado dessa adição? _____
- 5) Se tirarmos os zeros finais das partes decimais dos números acima, teremos a expressão $1.237,5 + 2.954$. Você acha que o resultado será o mesmo da adição do exercício anterior? Justifique a sua resposta. _____.
- 6) Digite os números abaixo na calculadora do seu smartphone, tecle “=” e anote os resultados encontrados no visor da calculadora. A calculadora retirou zero de algum desses números? Crie uma argumentação para o seu professor explicando se os valores exibidos no visor da calculadora são iguais aos números digitados.
- a) 15,000 b) 15,200 c) 15,20 d) 15,02 e) 15,020 f) 15,002

ATIVIDADE 2

Nesta atividade será realizada uma breve revisão dos conjuntos numéricos dos números naturais e inteiros, que são subconjuntos dos números racionais. Dentre esses tópicos são abordados os seguintes tópicos: o conceito de variável, os símbolos de pertinência de conjuntos, conceito de número positivo, negativo e zero. Os símbolos de igualdade e desigualdade utilizados para comparar dois números.

2.1. Primeiro Conjunto Numérico: Números naturais

Símbolo do Conjunto	Nome do Conjunto	Representação	Observações
$\mathbb{N}$	Conjunto dos Números Naturais	$\{0,1,2,3, \dots\}$	Seus primeiros ¹ elementos são: 0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9. Estes dígitos são a base das teclas nas calculadoras para inserir outros números.

A expressão “número inteiro” nos remete, à primeira vista, à ideia de números que não possuem parte decimal; na verdade existe parte decimal e seus dígitos são todos zeros. Na Matemática existe um conjunto numérico chamado de conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), que inclui o zero, números inteiros positivos e os números inteiros negativos.

2.2. O Segundo Conjunto Numérico: Números Inteiros

Símbolo do Conjunto	Nome do Conjunto	Representação	Observações
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos Números Inteiros	$\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	Nesse conjunto aparecem os números inteiros positivos e negativos.

Neste trabalho, salvo indicação em contrário, o termo "número inteiro" refere-se a um número pertencente ao conjunto $\mathbb{Z}$.

¹ O conjunto dos números naturais pode ser definido começando por zero ou pelo um. As atividades desta dissertação estão fundamentadas no conjunto dos números naturais começando pelo zero. Esta forma de definição é usual nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio utilizadas atualmente nos colégios brasileiros.

Subconjuntos do conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$

Símbolo do Conjunto	Nome do Conjunto	Representação	Observações
$\mathbb{Z}^*$	Conjunto dos Números Inteiros não nulos	$\{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$	Nesse conjunto aparecem todos os números inteiros, exceto o zero.
$\mathbb{Z}_+^*$	Conjunto dos Números Inteiros positivos	$\{1, 2, 3, \dots\}$	Nesse conjunto aparecem os números inteiros maiores do que zero.
$\mathbb{Z}_-^*$	Conjunto dos Números Inteiros negativos	$\{\dots, -3, -2, -1\}$	Nesse conjunto aparecem os números inteiros menores do que zero.
$\mathbb{Z}_+$	Conjunto dos Números Inteiros Não Negativos	$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$	Nesse conjunto aparecem o zero e os números inteiros positivos.
$\mathbb{Z}_-$	Conjunto dos Números Inteiros Não Positivos	$\{\dots, -3, -2, -1, 0\}$	Nesse conjunto aparecem o zero e os números inteiros negativos.

Exercícios Propostos

7) Responda:

- Quais são os dez primeiros números naturais?
- Apresente a sequência dos 10 primeiros números naturais
- Liste a sequência dos 10 primeiros números naturais.
- Enumere uma sequência de 10 números inteiros, começando do -4 e seguindo em ordem crescente.
- Represente o conjunto dos números naturais usando a representação por enumeração.
- Represente o conjunto dos números inteiros usando a representação por enumeração.
- Qual é o símbolo do conjunto dos *números naturais*?
- Qual é o símbolo do conjunto dos *números inteiros*?
- Represente o conjunto dos *números naturais* usando a reta numérica.
- Represente o conjunto dos *números inteiros* usando a reta numérica.

8) O número 5 é um *número natural* e um *número inteiro*. Sabemos que podemos representar esse fato simbolicamente usando o símbolo $\in$ (pertence à) e os símbolos de conjuntos numéricos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$.

a) 5 é um número inteiro Notação: _____

b) 5 é um número natural Notação: _____

9) Para representar um número natural ou inteiro, podemos usar uma letra do alfabeto, chamada **variável**, que simboliza um valor numérico. Para especificar que essa variável pertence a um conjunto, como os números naturais ($\mathbb{N}$) ou inteiros ($\mathbb{Z}$), usamos o símbolo de pertinência ($\in$). O valor exato da variável pode ser determinado por meio de equações, inequações ou contexto matemático.

a) x é um número inteiro Notação: _____

b) x é um número natural Notação: _____

Observação: Para dizermos que um número não pertence a um dado conjunto numérico, escrevemos ao lado desse número o símbolo " $\notin$ " (não pertence à) e o símbolo desse conjunto numérico.

10) Complete as lacunas abaixo usando as palavras: ‘negativo’, ‘positivo’ ou ‘zero’.

Considerando x como um *número inteiro* ($x \in \mathbb{Z}$) podemos afirmar que:

Ou x é um número _____ ou x é um número _____ ou x é o _____.

11) Analise as sentenças abaixo e, considerando $x \in \mathbb{N}$, determine um valor possível para x caso existir. Caso contrário, risque o campo " $x =$ " e escreva na linha da resposta "não há números naturais que satisfaçam essa propriedade."

a) $x > 0$ Lê-se: x é maior do que zero. Exemplo: $x = 14$

b) $x = 0$ Lê-se: _____ Exemplo: $x =$ _____

c) $x < 0$ Lê-se: _____ Exemplo: $x =$ _____

12) Faça a leitura das sentenças abaixo e, considerando $y \in \mathbb{Z}$, obtenha um valor possível para y .

a) $y > 5$ Lê-se: _____ Exemplo: $y =$ _____

b) $y = 5$ Lê-se: _____ Exemplo: $y =$ _____

c) $y < 5$ Lê-se: _____ Exemplo: $y =$ _____

13) Escreva se as sentenças são verdadeiras (V) ou falsas (F):

a) (V) $5 > 0$

f) () $-5 > 0$

b) () $5 = 0$

g) () $-5 = 0$

c) () $5 < 0$

h) () $-5 < 0$

d) () $5 \in \mathbb{N}$

i) () $-5 \in \mathbb{N}$

e) () $5 \notin \mathbb{Z}$

j) () $-5 \notin \mathbb{Z}$.

ATIVIDADE 3

Operações com os Números Inteiros

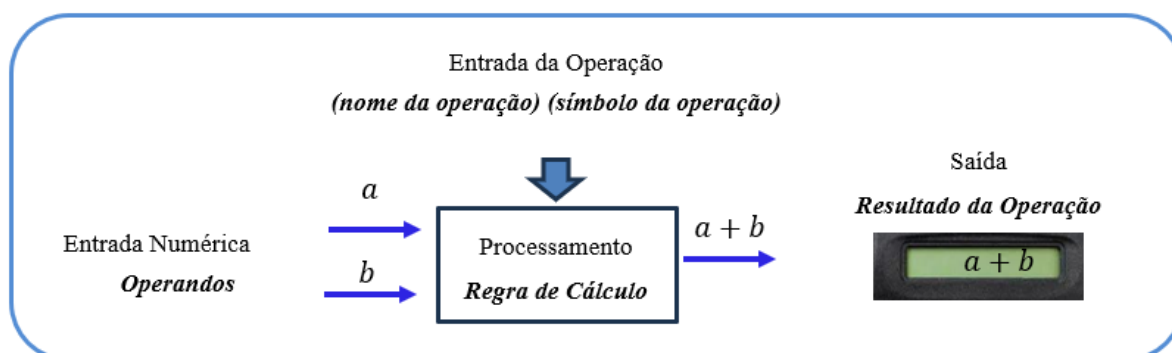
Nesta atividade serão apresentadas as definições formais dessas operações, bem como suas principais propriedades. Busca-se, neste primeiro momento, proporcionar ao aluno uma reflexão sobre os caminhos lógicos utilizados por programadores no desenvolvimento das funções básicas das calculadoras eletrônicas, por meio do estudo da teoria dos conjuntos numéricos que fundamenta o funcionamento das teclas operacionais. Nesse contexto, o aluno aprenderá mais sobre o uso das variáveis em expressões algébricas envolvendo as operações elementares: adição, subtração e multiplicação. Os operandos inteiros utilizados nos exercícios dessa atividade pertencem ao conjunto $\mathbb{Z}_+$. Quando os números inteiros negativos aparecerem nessa lição aparecerão nos resultados da operação de subtração. As operações com inteiros abrangendo os inteiros negativos como operandos será abordada na atividade 5 deste trabalho.

3.1. A calculadora como ferramenta de Ensino:

A calculadora é um dispositivo eletrônico desenvolvido para realizar cálculos matemáticos. Para isso, ela utiliza um chip eletrônico que contém uma programação específica capaz de executar essas operações, aliada a uma interface composta por teclado e visor. O teclado permite inserir números, operadores e funções, enquanto a tela exibe os resultados calculados pela calculadora, enquanto o visor exibe os resultados processados internamente pela calculadora. Para realizar, por exemplo, a adição de dois números, o usuário deve digitar o primeiro valor, pressionar a tecla correspondente à operação de adição, inserir o segundo valor e, por fim, pressionar a tecla “=” para visualizar o resultado no visor.

Cada tecla do teclado possui um símbolo padronizado que representa uma função específica. A escolha da operação desejada é feita por meio desse símbolo convencional.

Figura 5: Representação Esquemática do Processo de Calcular



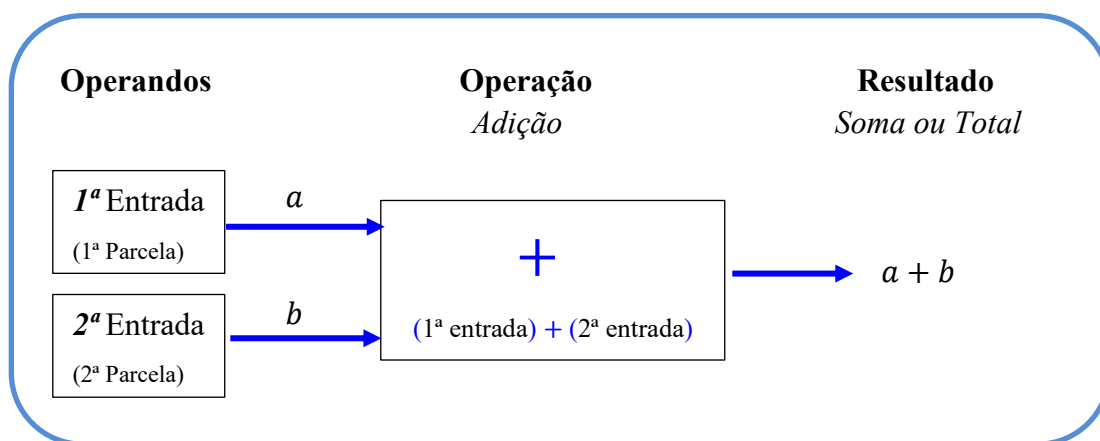
A caixa retangular (Fig. 11), chamada de bloco, representa uma operação matemática que associa números segundo regras definidas para gerar um resultado. Esse bloco corresponde ao processamento dos dados inseridos pelo usuário no teclado da calculadora.

As calculadoras contêm um microprocessador realiza o processamento dos cálculos. Ele contém um algoritmo, ou seja, uma sequência finita de instruções que define a execução das operações. Esse algoritmo está implementado por meio de um código de programação, permitindo que os dados inseridos pelo usuário sejam interpretados e processados corretamente, gerando o resultado da operação desejada.

3.2. Adição

Na Fig. 13, é apresentado um diagrama de blocos da operação de adição, mostrando os termos na operação de adição.

Figura 6: Diagrama de Blocos da operação de Adição



Exemplo: Represente e efetue a adição: $8 + 6$.

1º Passo: Armar

$$\begin{array}{r} 8 \\ + 6 \\ \hline ? \end{array}$$

2º Passo: Efetuar

$$\begin{array}{r} 8 \\ + 6 \\ \hline 14 \end{array}$$

Diagrama de identificação das partes da operação:

- 1ª parcela: aponta para o número 8.
- 2ª parcela: aponta para o número 6.
- Soma ou Total: aponta para o resultado 14.

❖ As leituras da expressão: $8 + 6$. Leitura principal: “Oito mais seis”. Outras formas possíveis: “a soma de oito com seis”, “o total de oito e seis” e “oito somado com seis”.

Observações:

1) Os termos de uma operação matemática referem-se aos nomes dados aos números e resultados em diferentes operações.

2) No diagrama acima foram apresentados dois valores na entrada, mas poder-se-ia 3 ou mais números sendo somados.

14) Calcule o valor de $5 + \blacksquare$ substituindo o valor de $\blacksquare$ por 0,1,2,3,4,5 e 6 nesta ordem. Siga os padrões a partir dos cálculos apresentados.

	FORMA 1	FORMA 2
5 + ■	$5 + \boxed{0} = 5$	$5 + \boxed{0} = 5$
	$5 + \boxed{1} = 6$	$5 + \boxed{1} = (5) + 1$
	$5 + \boxed{2} = 6 + 1 = 7$	$5 + \boxed{2} = (5 + 1) + 1$
	$5 + \boxed{} = \underline{\hspace{2cm}}$	$5 + \boxed{} = \underline{\hspace{2cm}}$
	$5 + \boxed{} = \underline{\hspace{2cm}}$	$5 + \boxed{} = \underline{\hspace{2cm}}$
	$5 + \boxed{} = \underline{\hspace{2cm}}$	$5 + \boxed{} = \underline{\hspace{2cm}}$
	$5 + \boxed{} = \underline{\hspace{2cm}}$	$5 + \boxed{} = \underline{\hspace{2cm}}$

15) Calcule $5 + 8$ com o auxílio de uma calculadora usando apenas as teclas ‘5’, ‘+’ e ‘1’?

Observação: Incrementar um número significa aumentá-lo em uma unidade, ou seja, *somar 1* ao valor inicial. Essa ideia de incrementar é extremamente importante na programação da tecla da adição nas calculadoras.

$$5 + 3 = ((5) + 1) + 1 + 1$$

- 16) Complete a tabela² considerando o cálculo $(Entrada\ 1) + (Entrada\ 2)$.

Tabela 1: Tabela da Operação de Adição

+		ENTRADA 2										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ENTRADA 1	0					4						
	1					5						
	2					6						
	3					7						
	4					8						
	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	6					10						
	7					11						
	8					12						
	9					13						
	10					14						

- 17) Mostrar que dados dois números inteiros quaisquer x e y , considerando que $x = y$, logo $x + y$ é um número par.

Verificando as Propriedades da Adição

Sejam a , b e c números inteiros quaisquer, valem as seguintes propriedades.

 Propriedade Comutativa da Adição: $a + b = b + a$

 Propriedade do Elemento Neutro Aditivo: $a + 0 = a$

 Propriedade Associativa da Adição: $(a + b) + c = a + (b + c)$

² Para aprofundar o estudo sobre a organização das tabuadas da adição, subtração e multiplicação em tabelas, recomenda-se a obra *Álgebra Moderna* (DOMINGUES; IEZZI, 2003, p.124-131), na qual os autores apresentam o conceito de “tábua de uma operação” e demonstram como se podem visualizar propriedades operatórias, tais como a associatividade, a comutatividade, a presença do elemento neutro, bem como a identificação de elementos simetrizáveis e regulares.

18) Identifique quais são as propriedades da adição envolvidas abaixo e verifique a veracidade dessas igualdades.

a) $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$

b) $2 + 3 = 3 + 2$

19) Complete a tabela abaixo.

a	$a + 0$	Resultado
0		
1	$1 + 0$	1
2		
3		
k		

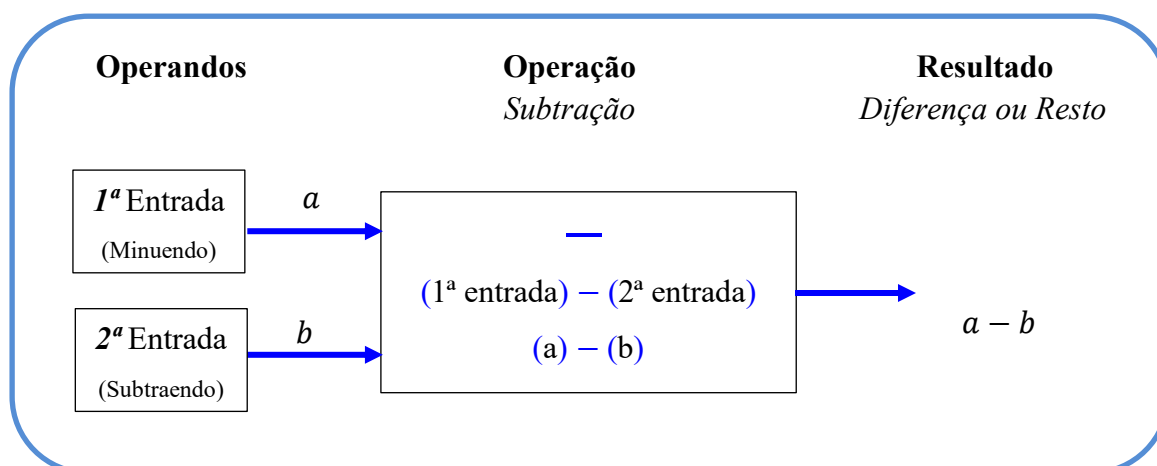
Comentário: Expressão Algébrica e Expressão Numérica

$a + 0$ é uma **expressão algébrica**, pois existe uma variável. Ao substituírmos a variável a pelo seu valor numérico correspondente; neste exemplo, $a = 1$, obtivemos uma **expressão numérica** (sem variáveis), que é $1 + 0$. Como não há mais “letras” podemos usar as operações básicas e calcular o valor final (resultado dessa expressão numérica).

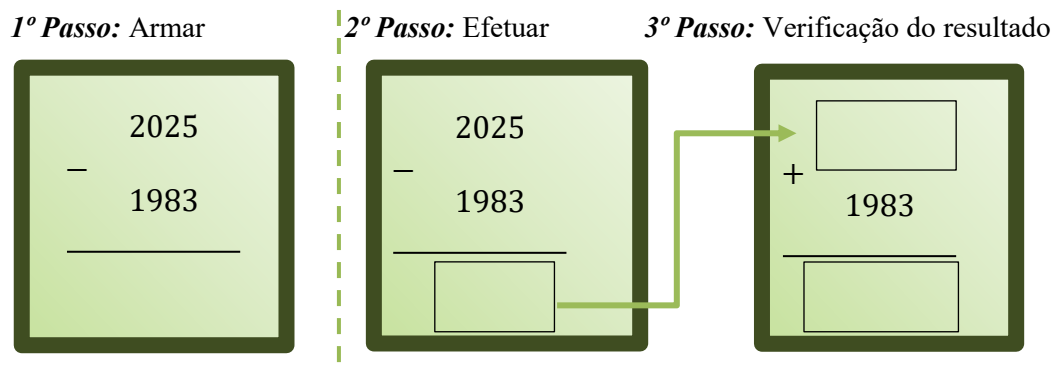
3.3. Subtração:

Os termos na operação de subtração são explicados na Fig. 10.

Figura 7: Diagrama de Blocos da operação de Subtração



- 20) A seguir encontra-se a ilustração do *passo a passo* para a operação de subtração até a verificação do seu resultado. Faça os cálculos preenchendo os retângulos abaixo.



$2025 - 1983 = 42$ Lê-se: A *diferença* entre 2025 e 1983 é igual a 42.

- ❖ As leituras da expressão: $8 - 3$. Leitura principal: “oito menos três”. Outras formas possíveis: “a diferença entre oito e três”, “subtração de três de oito” e “oito subtraído de três”.

Comentário: Sua idade no ano de 2025.

Uma pessoa que nasceu em 1983 fará 42 anos em 2025. A relação entre a idade de uma pessoa em determinado ano a partir da sua data de nascimento é dada pela fórmula:

$$(Ano\ atual) - (Data\ de\ nascimento)$$

- 21) Calcule o valor de $5 - \blacksquare$ substituindo o valor de $\blacksquare$ por 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 nesta ordem. Siga os padrões a partir dos cálculos apresentados.

	FORMA 1	FORMA 2
	$5 - \boxed{0} = 5$	$5 - \boxed{0} = 5$
	$5 - \boxed{1} = (5) - 1 = 4$	$5 - \boxed{1} = (5) - 1$
	$5 - \boxed{2} = (4) - 1 = 3 = 3$	$5 - \boxed{2} = (5 - 1) - 1$
$5 - \blacksquare$	$5 - \square = \underline{\hspace{2cm}}$	$5 - \square = \underline{\hspace{2cm}}$
	$5 - \square = \underline{\hspace{2cm}}$	$5 - \square = \underline{\hspace{2cm}}$
	$5 - \square = \underline{\hspace{2cm}}$	$5 - \square = \underline{\hspace{2cm}}$
	$5 - \square = \underline{\hspace{2cm}}$	$5 - \square = \underline{\hspace{2cm}}$

- 22) Complete a tabela considerando o cálculo $(Entrada\ 1) - (Entrada\ 2)$.

Tabela 2: Tabela da Operação de Subtração

-		ENTRADA 2										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ENTRADA 1	0					-4						
	1					-3						
	2					-2						
	3					-1						
	4					0						
	5	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
	6					2						
	7					2						
	8					4						
	9					5						
	10					6						

- 23) Calcule $8 - 5$ com o auxílio de uma calculadora usando apenas as teclas '8', '-' e '1'?

Observação: **Decrementar** um número significa diminuí-lo em uma unidade, ou seja, *subtrair 1* do valor inicial. Essa ideia de decrementar é extremamente importante na programação da tecla de subtração nas calculadoras.

$$5 - 3 = (((5) - 1) - 1) - 1$$



A Propriedade do Elemento Neutro da Subtração

Seja a um número inteiro qualquer, vale a propriedade.

$$a - 0 = a$$

24) Complete as lacunas a partir das palavras abaixo:

MENOR – MAIOR – ZERO – POSITIVO -

- a) Um número inteiro *positivo* é _____ do que zero.
- b) Um número inteiro *negativo* é _____ do que zero.
- c) O número inteiro _____ não é um número positivo e nem negativo.
- d) Se tirarmos uma *quantidade* de uma outra *maior* do que ela, o resultado será um número inteiro _____.
- e) Se tirarmos uma *quantidade* de uma outra *menor* do que ela, o resultado será um número inteiro _____.
- f) Se tirarmos uma *quantidade* de uma outra *igual* a ela, o resultado será o número inteiro _____.
- 25) Considere $a = 4$, $b = 3$ e $c = 1$ nas igualdades abaixo. Indique quais delas são verdadeiras ou falsas para esses valores das variáveis fornecidos.
- a) () $(a - b) - c = a - (b - c)$
- b) () $a - b = b - a$
- c) () $a - b = -(b - a)$

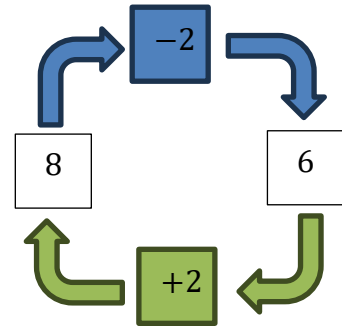
Comentário: O fato de que a substituição de determinados valores para as variáveis a , b e c resulte em uma igualdade verdadeira não implica que essa relação seja válida em todos os casos. Para afirmar sua validade geral, é necessária uma demonstração matemática rigorosa. Por outro lado, se for possível encontrar ao menos um conjunto de valores numéricos para a , b e c que torne a igualdade falsa, esse único exemplo já é suficiente para provar que a igualdade não é verdadeira de forma geral. Tais exemplos, nos quais se escolhem valores específicos das variáveis a fim de evidenciar a falsidade de uma proposição, recebem o nome de [contraexemplos](#).

3.4. Operações Inversas: Adição e Subtração

Enunciado: Sejam a , b , e c números inteiros quaisquer, então

$$a - b = c \Leftrightarrow c + b = a$$

Exemplo: $\boxed{8} - \boxed{2} = \boxed{6} \Leftrightarrow \boxed{6} + \boxed{2} = \boxed{8}$



Adicionar 2 unidades

26) Uma pessoa tem 8 moedas de um real num cofre. Ela retira duas moedas, logo ficam ____ moedas no cofre. No dia seguinte, ela ganha 2 moedas e adiciona nesse cofre, portanto ela terá _____ moedas no cofre.

27) Complete os espaços vazios:

Dica: Utilize o raciocínio da operação inversa quando tiver dificuldade de encontrar o número desconhecido.

- a) $\boxed{10} - \boxed{6} = \boxed{}$ c) $\boxed{} - \boxed{6} = \boxed{10}$ e) $\boxed{} - \boxed{6} = \boxed{-10}$
 b) $\boxed{10} - \boxed{} = \boxed{6}$ d) $\boxed{} - \boxed{6} = \boxed{0}$ f) $\boxed{6} - \boxed{} = \boxed{10}$

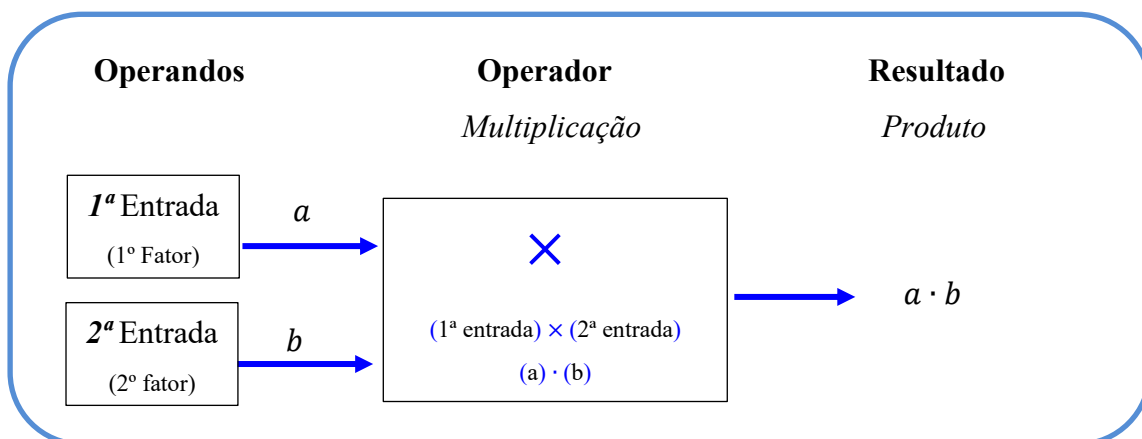
28) Complete os quadrados com os valores corretos, considere que cada bloco representa a operação que deve ser realizada com o número que está na entrada do bloco.

- a) $8 \rightarrow \boxed{+1} \rightarrow \boxed{+1} \rightarrow \boxed{?}$ b) $8 \rightarrow \boxed{-1} \rightarrow \boxed{+1} \rightarrow \boxed{?}$

3.5. A Multiplicação:

Na Fig. 14 é apresentado um diagrama de blocos da operação de multiplicação e os termos envolvidos.

Figura 8: Diagrama de Blocos da operação de Multiplicação



Observações:

- 1) No diagrama acima foram apresentados dois valores na entrada, mas poder-se-ia ter 3 ou mais números sendo multiplicados.
- 2) Além do símbolo “ $\times$ ”, a multiplicação pode ser representada pelo símbolo de ponto “ $\cdot$ ”.
- 3) É muito comum nas expressões com variáveis ser usado o símbolo “ $\cdot$ ” para que não se confunda o símbolo “ $\times$ ” com a variável x .

Exemplo: Realize o produto de: 3×4 .

1º Passo: Armar a operação

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 4 \\ \hline ? \end{array}$$

2º Passo: Efetuar a operação

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 4 \\ \hline 12 \end{array}$$

1º Fator

2º Fator

Produto

❖ As leituras da expressão: 3×4 . Leitura principal: “três vezes quatro”. Outras formas possíveis: “três multiplicado por quatro” e “o produto de três por quatro”.

- 29) Calcule o valor de $2 \cdot \blacksquare$ substituindo o valor de $\blacksquare$ por 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 nesta ordem. Siga os padrões a partir dos cálculos apresentados.

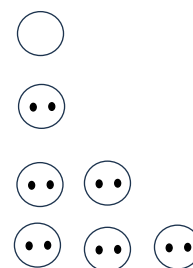
FORMA 1

$2 \cdot \blacksquare$	$2 \cdot \boxed{0} = 0$ $2 \cdot \boxed{1} = 2$ $2 \cdot \boxed{2} = (2) + 2 = 4$ $2 \cdot \boxed{3} = (4) + 2 = 6$ $2 \cdot \boxed{} = \underline{\hspace{2cm}}$ $2 \cdot \boxed{} = \underline{\hspace{2cm}}$ $2 \cdot \boxed{6} = \underline{\hspace{2cm}}$
------------------------	--

FORMA 2

$$\begin{array}{l} 2 \cdot \boxed{0} = 0 \\ 2 \cdot \boxed{1} = 2 \\ 2 \cdot \boxed{2} = (2) + 2 \\ 2 \cdot \boxed{3} = (2 + 2) + 2 \\ 2 \cdot \boxed{} = \underline{\hspace{2cm}} \\ 2 \cdot \boxed{} = \underline{\hspace{2cm}} \\ 2 \cdot \boxed{} = \underline{\hspace{2cm}} \end{array}$$

FORMA 3



O Pensamento Matemático: Somar parcelas iguais

A soma de parcelas iguais pode ser representada através da operação de multiplicação entre dois números, o *primeiro fator* é o número que se repete e o *segundo fator* indica quantas vezes esse número se repete.

- 30) Calcule o valor de $3 \cdot \blacksquare$ substituindo o valor de $\blacksquare$ por 0,1,2,3,4,5 e 6 nesta ordem. Siga os padrões.

	FORMA 1	FORMA 2	FORMA 3
$3 \cdot \blacksquare$	$3 \cdot \boxed{0} = 0$	$3 \cdot \boxed{0} = 0$	
	$3 \cdot \boxed{1} = 3$	$3 \cdot \boxed{1} = 3$	
	$3 \cdot \boxed{2} = (3) + 3 = 6$	$3 \cdot \boxed{2} = (3) + 3$	
	$3 \cdot \boxed{3} = (6) + 3 = 9$	$3 \cdot \boxed{3}$	
	$3 \cdot \square = \underline{\hspace{2cm}}$	$3 \cdot \square = \underline{\hspace{2cm}}$	
	$3 \cdot \square = \underline{\hspace{2cm}}$	$3 \cdot \square = \underline{\hspace{2cm}}$	
	$3 \cdot \square = \underline{\hspace{2cm}}$	$3 \cdot \square = \underline{\hspace{2cm}}$	

❖ **Tabuada Pictórica.** O número correspondente ao *segundo fator* indicará a quantidade de círculos. O *primeiro fator* indicará quantos elementos teremos em cada um desses círculos. Macete: $2 \cdot 3$ (2 pontos 3), (“2 pontos em 3 círculos”).

- 31) Como se realiza a operação $2 \cdot 8$ na calculadora usando apenas as teclas ‘2’ e ‘+’ ?

Observações:

1) Quando temos uma certa quantidade de pessoas e as organizamos em grupos com o mesmo número de integrantes, isso facilita a contagem total. Por exemplo, um professor de Educação Física separou seus alunos em grupos de 4 pessoas. Para saber a quantidade total de alunos, basta que ele conheça o número de grupos e a quantidade de pessoas em cada um. Se, por outro lado, houvesse 8 grupos com 4 alunos e 1 grupo com apenas 3, o raciocínio da multiplicação (número de grupos $\times$ número de pessoas por grupo) não poderia ser aplicado diretamente, já que os grupos não teriam todos a mesma quantidade de integrantes.

2) Da mesma forma, quando um confeitheiro prepara docinhos para uma festa e os organiza em uma bandeja, formando uma distribuição retangular — com fileiras contendo a mesma quantidade de docinhos — ele está facilitando a contagem. Caso esqueça o total de docinhos preparados, basta multiplicar o número de fileiras pela quantidade de docinhos em cada uma.

32) Complete a tabela considerando o cálculo $(Entrada\ 1) \cdot (Entrada\ 2)$.

Tabela 3: Tabela da Operação de Multiplicação

		ENTRADA 2										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ENTRADA 1	0					0						
	1					4						
	2					8						
	3					12						
	4					16						
	5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
	6					24						
	7					28						
	8					32						
	9					36						
	10					40						

33) Quantas operações de multiplicação você realizou na tabela acima? _____.

34) Comente se você consegue enxergar algum padrão de repetição nessa tabela, se sim, qual ou quais? Coloque as suas respostas no seu caderno.

35) Qual é o valor da expressão abaixo? Qual número se repetiu? Quantas vezes o n^o se repetiu? É possível usar a tecla de multiplicação para encontrar o valor dessa expressão?

$$2025 + 2025 + 2025 + 2025 + 2025 + 2025 + 2025 + 2025 + 2025 + 2025 + 2025$$

3.6. O Conjunto dos Múltiplos de um Número Inteiro:

Você sabia que ...

- ...Todo número inteiro multiplicado por 2 gera um *múltiplo de 2*?
- ...Todos os *múltiplos de 2* terminam em 0,2,4,6 ou 8?
- ...Todos os *múltiplos de 2* são números pares?
- ...O conjunto $\{\dots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$ é o conjunto dos *múltiplos de 2* incluindo aqueles que são inteiros negativos?

36) Complete a tabela abaixo:

Se →	■ = 0	■ = 1	■ = 2	■ = 3	■ = 4	■ = 5
$2 \cdot \blacksquare$	0		4			

Observação: Os múltiplos de 2 apresentados na tabela acima foram obtidos ao multiplicar o número 2 pelos números naturais, a partir do zero. Observa-se que esses valores correspondem aos seis primeiros resultados da tabuada da multiplicação do 2.

O Conjunto dos múltiplos de um número natural:

Para representar o conjunto dos múltiplos de 2, procedemos da seguinte forma: escrevemos $M(2)$, abrimos chaves e listamos os primeiros elementos desse conjunto, que são obtidos ao multiplicar 2 pelos números naturais. Em seguida, acrescentamos reticências para indicar a continuidade e fechamos as chaves. Assim, temos: $M(2) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$. O último múltiplo de 2 indicado é o 10, mas, como se trata de um conjunto infinito, as reticências são necessárias para representar que a sequência continua indefinidamente.

37) Determine os conjuntos de múltiplos abaixo iniciando cada um deles com os seus 5 primeiros múltiplos. Considere $a \in \mathbb{N}$.

- | | |
|-------------------|-------------------|
| a) $M(0) =$ _____ | d) $M(3) =$ _____ |
| b) $M(1) =$ _____ | e) $M(4) =$ _____ |
| c) $M(2) =$ _____ | f) $M(a) =$ _____ |

- 38) Complete a tabela para encontrar os valores y sabendo-se que $y = 6 \cdot x$ e $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$?

x	$y = 6 \cdot x$	y
0		
1	$y = 6 \cdot 1$	6
2		
3		
4		

Observações:

- 1) A igualdade $y = 6 \cdot x$ pode ser vista como uma fórmula matemática para encontrar o valor de y a partir do valor de x .
- 2) Observe que o enunciado da questão forneceu os valores de x que serão usados para descobrir os valores de y .
- 3) Na tabela, a primeira coluna apresenta os valores de x que serão usados para descobrir os valores de y , a segunda coluna, é a que temos a fórmula para descobrir os valores de y e a terceira coluna está reservada a indicação dos respectivos valores de y .

- 39) Siga o modelo e escreva uma leitura para as expressões abaixo.

- a) $2 \cdot x$ Leitura: O dobro de x ou o dobro de um número.
- b) $3 \cdot x$ Leitura: _____
- c) $4 \cdot x$ Leitura: _____
- d) $5 \cdot x$ Leitura: _____
- e) $6 \cdot x$ Leitura: _____

3.7. Verificando as Propriedades da Multiplicação:

Sejam a , b e c números inteiros quaisquer, valem as seguintes propriedades.

 Propriedade Associativa da Multiplicação:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Exemplo: $2 \cdot (3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4$

 Propriedade Comutativa da Multiplicação

40) Prove que $2 \cdot 5 = 5 \cdot 2$ usando a definição de multiplicação.

41) Escreva o enunciado da *propriedade comutativa* da multiplicação?

42) Como podemos generalizar a *propriedade comutativa* da multiplicação de inteiros usando variáveis?

43) Como podemos visualizar a propriedade comutativa da multiplicação pela tabela das tabuadas da multiplicação do exercício 32?

A Propriedade do Elemento Neutro Multiplicativo

44) Complete o quadro abaixo.

$0 \cdot 1 = \underline{\hspace{2cm}}$
$1 \cdot 1 = \underline{\hspace{2cm}}$
$2 \cdot 1 = \underline{\hspace{2cm}}$
$3 \cdot 1 = \underline{\hspace{2cm}}$
$4 \cdot 1 = \underline{\hspace{2cm}}$
$5 \cdot 1 = \underline{\hspace{2cm}}$
$x \cdot 1 = \underline{\hspace{2cm}}, \text{ onde } x \in \mathbb{N}.$

Escreva o enunciado da propriedade do elemento neutro da multiplicação?

Propriedade Distributiva da Multiplicação em Relação à Adição

Enunciado: Sejam a , b e c números inteiros quaisquer, a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição estabelece que:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Exemplo: $3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$

45) Use a calculadora e verifique qual é o valor da expressão:

a) $3 \cdot (4 + 5)$

b) $3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$

c) $3 \cdot 4 + 5$

Observações:

1) Numa expressão numérica onde há parênteses, primeiro resolvemos o que se encontra dentro dos parênteses.

2) Numa expressão numérica sem parênteses, contendo somente as operações de adição e multiplicação, primeiro efetua-se a multiplicação e depois, a operação de adição.

46) A igualdade $3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 5$ é verdadeira? Justifique a sua resposta.

47) Siga o modelo colocando os produtos na forma de soma.

	O Produto de um número inteiro por x	Resultado	A relação entre o produto e o resultado em função de x
a)	$1 \cdot x$	x	$1 \cdot x = x$
b)	$2 \cdot x$	$x + x$	$2 \cdot x = x + x$
c)	$3 \cdot x$		
d)	$2025 \cdot x$	$x + x + \cdots + x$ (2025 parcelas)	
e)	$n \cdot x$		

Observe que, ao multiplicarmos um número inteiro por x , esse produto pode ser representado como uma soma, na qual o termo x se repete tantas vezes quanto o valor do número inteiro utilizado na multiplicação. Quando esse número inteiro é muito grande para ser escrito explicitamente, ou mesmo quando se trata de um valor desconhecido, costuma-se recorrer a uma forma abreviada de notação: escrevem-se os primeiros e os últimos termos da soma, separados por reticências entre sinais de adição, de modo a indicar a continuidade da repetição. Além disso, é comum explicitar, abaixo ou ao lado da expressão, o número de parcelas, isto é, a quantidade de vezes que o termo x se repete, correspondendo ao valor do número inteiro considerado.

48) Demonstre que a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição é verdadeira para os valores numéricos de a indicados em cada item abaixo e considerando b e c números naturais quaisquer.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

a) $a = 0 \implies 0 \cdot (b + c) = 0 = 0 \cdot b + 0 \cdot c$

b) $a = 1 \implies$

c) $a = 2 \implies 2 \cdot (b + c) = (b + c) + (b + c) = b + b + c + c = 2b + 2c$

d) $a = 3 \implies$

e) Considerando $a = n$, onde $n \in \mathbb{N}$, mostre que vale a igualdade: $n \cdot (b + c) = n \cdot b + n \cdot c$.

3.8. O Sistema de Numeração Decimal

O *sistema de numeração decimal* organiza as quantidades em agrupamentos de 10, onde 10 unidades formam 1 dezena, 10 dezenas formam 1 centena, 10 centenas formam 1 milhar, e assim sucessivamente. Usando a base 10, cada ordem é 10 vezes maior que a anterior.

Classe dos bilhões			Classe dos milhões			Classe dos milhares			Classe das unidades simples		
12 ^a ordem	11 ^a ordem	10 ^a ordem	9 ^a ordem	8 ^a ordem	7 ^a ordem	6 ^a ordem	5 ^a ordem	4 ^a ordem	3 ^a ordem	2 ^a ordem	1 ^a ordem
Centenas de bilhão	Dezenas de bilhão	Unidades de bilhão	Centenas de milhão	Dezenas de milhão	Unidades de milhão	Centenas de milhar	Dezenas de milhar	Unidades de milhar	Centenas	Dezenas	Unidades

49) Considere o número 3459. Complete a tabela abaixo.

	Dígito	Nome da Ordem	Nº de unidades em cada grupo	Valor Absoluto	Valor Relativo
a)	6				
b)	5	dezenas	10 unidades	5	50
c)	4				
d)	3				

O **valor relativo** de um dígito em um número é obtido multiplicando-se seu valor absoluto (ou seja, o próprio algarismo) pelo valor da ordem posicional que ele ocupa. Em outras palavras, o valor relativo de um dígito depende tanto do número que ele representa quanto da posição que ocupa dentro do número.

50) Ao decompor o numeral 3456 em uma adição que considera o *valor relativo* de cada dígito, obtemos: $3456 = 3000 + 400 + 50 + 6$. Cada parcela dessa adição representa o produto entre o valor absoluto do dígito e o valor posicional correspondente à sua ordem. Assim, podemos reescrever a decomposição evidenciando esse produto. Complete os quadradinhos abaixo levando em consideração as instruções acima.

$$3456 = 3 \cdot \boxed{} + 4 \cdot \boxed{} + 5 \cdot \boxed{} + 6$$

Observação: Essa forma de decomposição expressa *a estrutura do número* de acordo com o sistema de numeração decimal, no qual cada dígito ocupa uma ordem (unidade, dezena, centena, milhar etc.) e seu valor relativo depende dessa posição.

- 51) A partir de um total de 3.456 pessoas, quantos grupos de 10 pessoas podem ser formados? Existe algum grupo com menos de 10 pessoas? Justifique suas respostas com cálculos detalhados.

ATIVIDADE 4

A operação de divisão

A operação de divisão ocupa um papel central neste trabalho. Nesta atividade, propõem-se exercícios que visam consolidar o pensamento aritmético envolvendo as quatro operações elementares. Para isso, apresentam-se nesta seção atividades graduais que possibilitam ao estudante revisar conteúdos relacionados à definição da operação de divisão, às suas propriedades operatórias e a conceitos fundamentais, como a divisibilidade. Além disso, busca-se enfatizar a compreensão de que o quociente entre dois inteiros, sendo o divisor diferente de zero, nem sempre resulta em um número inteiro.

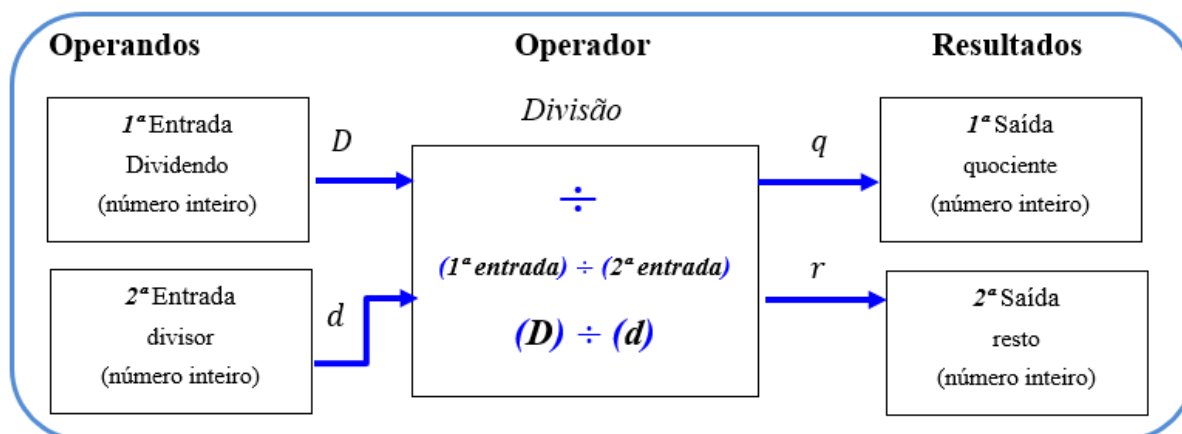
Os alunos serão incentivados a realizar divisões tanto manualmente quanto com o auxílio da calculadora, a fim de comparar os resultados encontrados no visor da máquina com aqueles obtidos usando os algoritmos tradicionais “no papel”. Esse processo tem como objetivo criar um espaço de descobertas acerca das limitações computacionais das calculadoras eletrônicas, estimulando o desenvolvimento do senso crítico dos estudantes para que sejam capazes de compreender e interpretar tais resultados em diferentes contextos do cotidiano. É introduzida a partir da atividade 4 o conceito de tecla de fração da calculadora, para que ele relacione a fração como um número, obtido pelo quociente; mas também, a verificar que números decimais exatos e dízimas periódicas podem ser gerados através do quociente entre dois inteiros.

Por fim, propõem-se exercícios que incluem pequenas demonstrações matemáticas, nas quais os estudantes utilizam a relação fundamental da divisão para investigar e comprovar em quais situações a divisão de certos números inteiros resulta em decimais exatos.

A atividade começa com a definição de divisão e sua relação fundamental. Em seguida, exploram-se os resultados de divisões, obtidos por calculadoras ou cálculos manuais. Por fim,

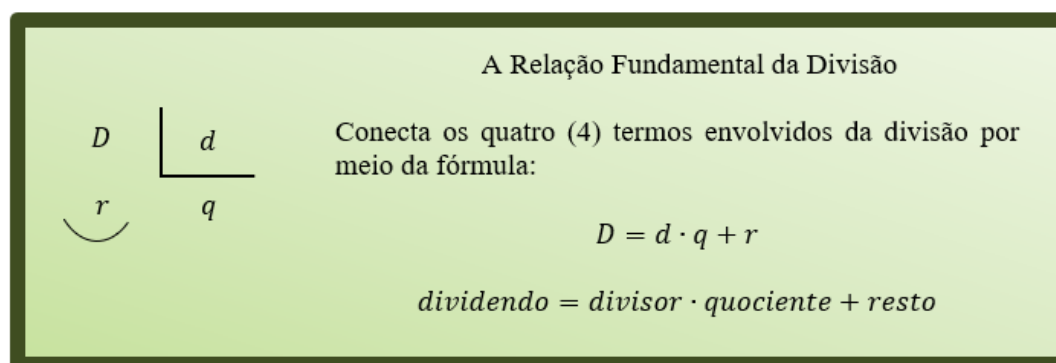
define-se a fração como o quociente de dois números inteiros, ajudando o aluno a compreender essa relação. Os termos na operação da divisão são apresentados na Fig. 15.

Figura 9: Diagrama de Blocos da operação de Divisão para quociente inteiro



4.1.A Relação Fundamental da Divisão (Divisão Euclidiana)

Enunciado: Dados inteiros d e D com $d \neq 0$, existem inteiros q e r tais que $D = d \cdot q + r$ e $0 \leq r < |d|$. Além disso, q e r são unicamente determinados pelas condições acima.



52) Leia o enunciado da Relação Fundamental da Divisão e extraia as seguintes informações:

- A sentença matemática que relaciona os quatro termos da divisão.
- Como se lê: $0 \leq r < |d|$?
- O enunciado acima restringe o valor do divisor?
- Ao dividirmos dois números inteiros, onde o segundo é diferente de zero sempre haverá resultados para a divisão do primeiro número pelo segundo número?

Exemplo: Organize e efetue: $9 \div 5$ e verifique, pela Relação Fundamental da Divisão, se os resultados encontrados (quociente e resto) realmente satisfazem a essa relação.

“A Prova Real da Divisão”: Processo de verificação dos resultados encontrados pela divisão.

1	(quociente)
× 5	(divisor)
—	
5	
+ 4	(resto)
—	
9	(dividendo)

Observações:

- 1) A operação de divisão possui dois resultados: quociente e resto. Já as operações de adição, subtração e multiplicação possuem apenas um resultado respectivamente denominados de soma, diferença e produto.
- 2) Neste trabalho de dissertação convencionou-se usar letras minúsculas do nosso alfabeto para representar as variáveis; no caso da denotação do dividendo e do divisor, escolheu-se usar a mesma letra para facilitar o entendimento diferenciando-as em maiúscula e minúscula conforme ilustrado no quadro acima.
- 3) Nas linguagens de programação o símbolo usado para “dividir” é uma barra inclinada “/”.

53) Insira nos espaços abaixo os nomes que se encontram no quadro abaixo.

Dividendo ■ Divisor ■ Quociente ■ Resto

- ❖ As leituras da expressão: $8 \div 4$. Leitura principal: “oito dividido por quatro”. Outras formas possíveis: “Oito por quatro”, “o quociente entre 8 e 4”, e “divisão de oito por quatro”.

4.2. Operações de Divisão: Exatas e Não Exatas

- 54) Observe as operações de divisão abaixo. Identifique as que são divisões exatas (DE) e as que são divisões não exatas (DNE).

(a)	(b)	(c)	(d)
$\begin{array}{r} 9 \overline{) 5} \\ 4 \\ \hline 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 10 \overline{) 5} \\ 0 \\ \hline 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 18 \overline{) 5} \\ 3 \\ \hline 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0 \overline{) 5} \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}$

- 55) Utilize a Relação Fundamental da Divisão e verifique se os resultados encontrados na questão anterior estão corretos. Faça esse exercício mentalmente.
- 56) Quais são os **restos** possíveis quando dividimos um nº inteiro diferente de zero por 5? Comente a sua resposta. _____
- 57) Realize as seguintes operações utilizando com e sem o auxílio de uma calculadora. Anote os resultados encontrados no visor nos campos abaixo.

a) $8 \div 2$

Visor da calculadora

b) $18 \div 4$

Visor da calculadora

c) $8 \div 6$

Visor da calculadora

58) Os resultados das divisões que apareceram no visor da calculadora sempre correspondem aos quocientes que você encontrou no exercício 57? Destaque as operações de divisão em que o resultado do divisor na calculadora coincide com o quociente da divisão.

59) Obtenha os mesmos resultados que apareceram no visor da calculadora através dos cálculos no papel.

a) $8 \div 5$

Visor da calculadora



$$\begin{array}{r} 8 \quad | \quad 5 \\ 3 \quad \underline{} \\ 1 \end{array}$$

b) $8 \div 6$

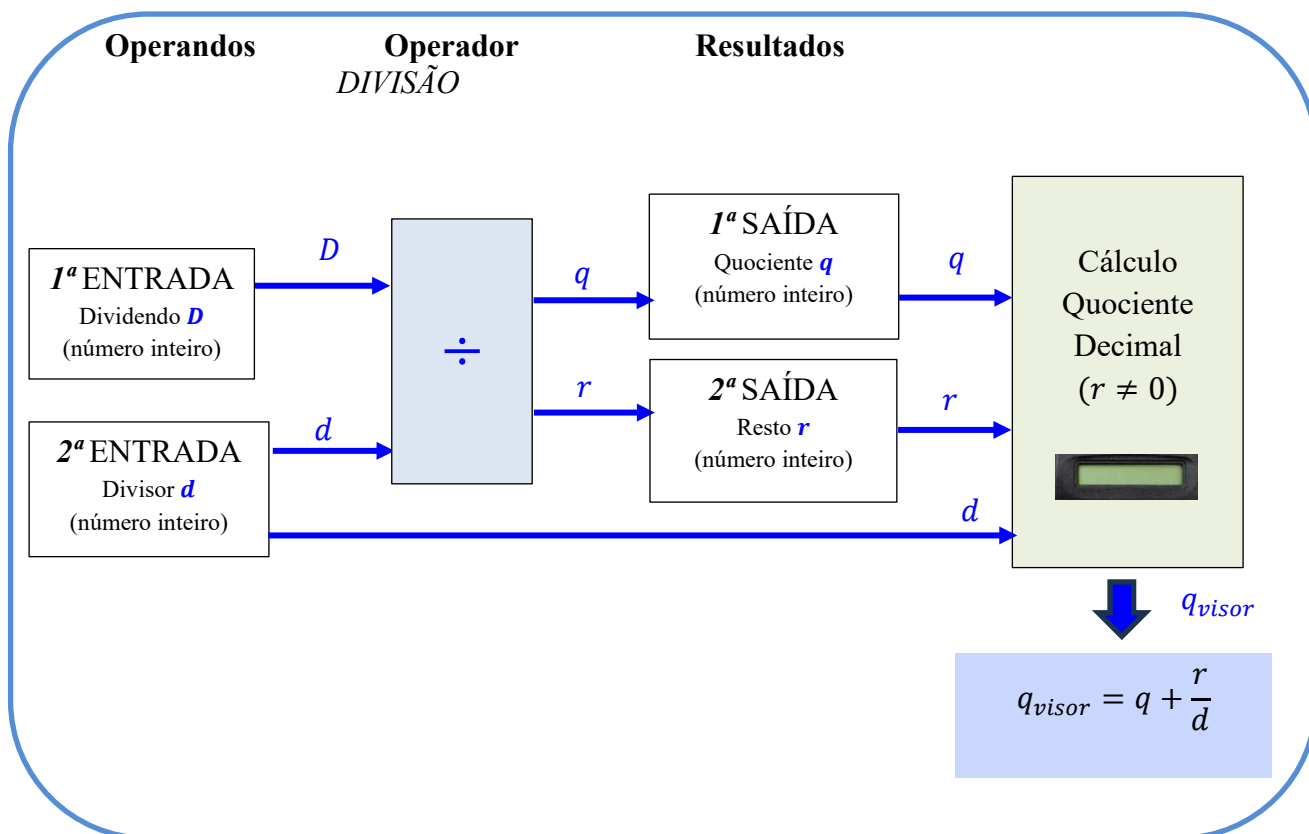
Visor da calculadora



$$\begin{array}{r} 8 \quad | \quad 6 \\ 2 \quad \underline{} \\ 1 \end{array}$$

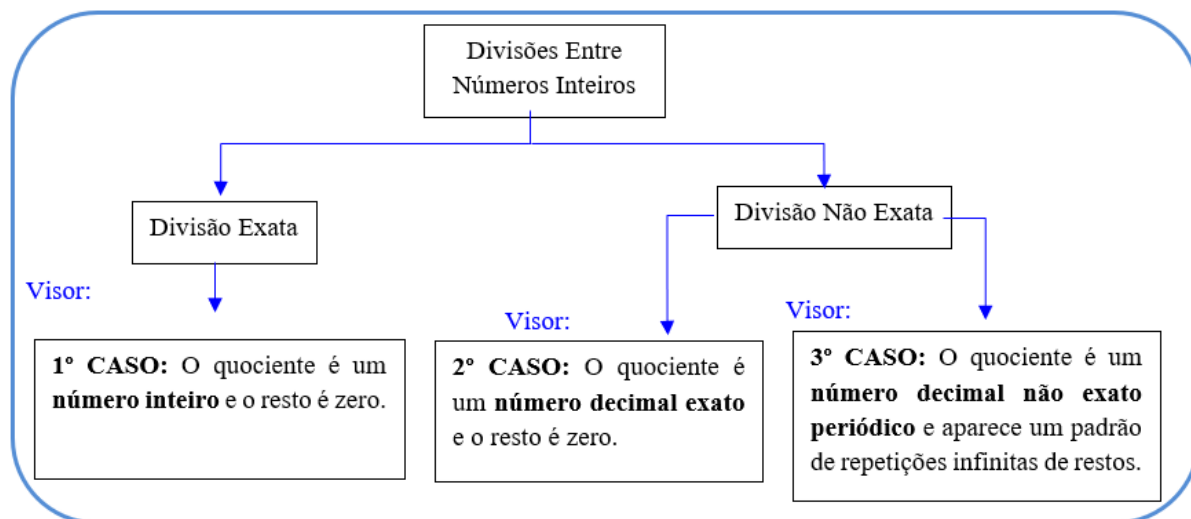
4.3. O cálculo do quociente decimal em uma divisão não exata.

Figura 10: Diagrama de Blocos na Operação de Divisão, Quocientes Inteiros e Decimais



Observação: Para diferenciar o quociente inteiro do quociente decimal, usa-se a notação de variável com um subscrito nominal (q_{visor}). Num texto matemático, mais formal, essa diferenciação poderia ser visualizada como q para um quociente inteiro e q' para o quociente decimal, por exemplo.

Figura 11: Classificação das divisões com inteiros



4.4. Quociente no Visor da Calculadora:

Exercício: Quando dividimos um número inteiro D por outro número inteiro d ($d \neq 0$), a calculadora mostra no visor o quociente $\frac{D}{d}$. Sabemos que, pela relação fundamental da divisão, todo número inteiro D pode ser escrito assim:

$$D = d \cdot q + r,$$

Onde q é o quociente inteiro e r é o resto da divisão, com $0 \leq r < |d|$.

Usando essa relação para escrever a fórmula que mostra o valor do quociente $\frac{D}{d}$ exibido na calculadora em função de q , r e d .

Resolução:

Desejamos encontrar o valor de $D \div d$, isto é $\frac{D}{d}$ a partir da relação abaixo.

$$D = d \cdot q + r$$

1º PASSO: Para encontrar o valor de $\frac{D}{d}$, como $d \neq 0$, dividimos ambos os membros da igualdade acima pelo divisor d , prosseguindo assim, teremos:

$$\frac{D}{d} = \frac{d \cdot q + r}{d}$$

Observação: Neste primeiro passo, utilizamos uma propriedade da igualdade que diz que ao dividir ambos os membros de uma igualdade por um valor inteiro diferente de zero essa igualdade não se altera.

2º PASSO: Observe que o numerador da fração do 2º membro possui um sinal de +. Usando uma propriedade das frações, podemos transformar uma fração que possui uma soma no seu numerador em duas frações, de tal forma que ambas as frações resultantes possuam o mesmo denominador e que os seus numeradores sejam as parcelas no numerador o qual separamos.

$$\frac{D}{d} = \frac{d \cdot q}{d} + \frac{r}{d}$$

3º PASSO: Pelas propriedades das frações, podemos colocar o valor do quociente (q) na frente do quociente $\frac{d}{d}$. Desta forma, teremos:

$$\frac{D}{d} = q \cdot \frac{d}{d} + \frac{r}{d}$$

Como $\frac{d}{d} = 1$, teremos:

$$\frac{D}{d} = q \cdot 1 + \frac{r}{d}$$

Como $q \cdot 1 = q$, teremos:

$$\frac{D}{d} = q + \frac{r}{d}$$

Observações: A variável q é a **parte inteira** do número representado no visor da calculadora e o quociente $\frac{r}{d}$ corresponde ao valor da **parte decimal** que aparecerá no visor da calculadora ao lado da parte inteira q .

Propriedades usadas no exercício de demonstração:

$$a = b \Rightarrow \frac{a}{k} = \frac{b}{k}$$

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$\frac{k \cdot a}{b} = k \cdot \frac{a}{b}$$

4.5. As Palavras: Divisor, Divisível e Múltiplo de um Número Inteiro

60) Complete as lacunas a partir das palavras abaixo:

É múltiplo / não é múltiplo
É divisível / não é divisível
É divisor / não é divisor

$$\begin{array}{r} 10 \overline{) 5} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) 5} \\ 4 \end{array}$$

- a) 10 _____ de 5.
 b) 10 é divisível por 5.
 c) 5 _____ de 10.

- d) 9 _____ de 5.
 e) 9 _____ por 5.
 f) 5 _____ de 9.

Os tipos de números decimais e as suas representações em uma calculadora.

O quociente entre dois números inteiros em divisões não exatas resulta em decimais exatos ou dízimas periódicas. As calculadoras possuem limitações para lidar, por exemplo, com números com infinitas casas decimais.

Nesse percurso, serão introduzidos brevemente conceitos como número exato, número aproximado e erro de aproximação decorrente do uso da calculadora na divisão de inteiros. Além disso, em consonância com as orientações da BNCC, também serão propostas atividades que envolvem o cálculo mental envolvendo a divisão.

- 61) Complete cada tabuada da divisão abaixo com o auxílio das dicas de cálculo mental de divisões por 2, 4, 5, 8, 9 e 10. Utilize também uma calculadora para conferir os seus resultados quando você julgar necessário; em seguida, faça o preenchimento do quadro à direita interpretando qual é a representação correta de cada número. Identifique os resultados como INT (números inteiros), DE (decimais exatos) e DP (dízimas periódicas).

Dicas de Cálculo Mental nas divisões por 2, 4, 5, 8 e 10.		Sequência das operações
$x \div 2$	A metade de x .	$x \div 2$
$x \div 4$	A metade da metade de x	$x \div 4 = (x \div 2) \div 2$
$x \div 8$	A metade da metade da metade de x	$x \div 8 = ((x \div 2) \div 2) \div 2$

$x \div 10$	Anda a vírgula uma casa para a esquerda.	$x \div 10$
$x \div 5$	Dobra o valor de x e divide o resultado por 10.	$x \div 5 = (x \cdot 2) \div 10$

Resultados encontrados no visor da calculadora

Valores reais dessas operações

Tabuada do 10	$10 \div 1 =$	$10 \div 1 =$	
	$10 \div 2 = 5$	$10 \div 2 = 5$	INT
	$10 \div 3 = 3,3333333333$	$10 \div 3 = 3,333... \text{ ou } 3,\overline{3}$	DP
	$10 \div 4 = 2,5$	$10 \div 4 = 2,5$	DE
	$10 \div 5 =$	$10 \div 5 =$	
	$10 \div 6 = 1,6666666667$	$10 \div 6 = 1,666... \text{ ou } 1,\overline{6}$	DP
	$10 \div 7 =$	$10 \div 7 =$	
	$10 \div 8 =$	$10 \div 8 =$	
	$10 \div 9 = 1,1111111111$	$10 \div 9 = 1,111... \text{ ou } 1,\overline{1}$	DP
	$10 \div 10 =$	$10 \div 10 =$	
Tabuada do 9	$9 \div 1 =$	$9 \div 1 =$	
	$9 \div 2 =$	$9 \div 2 =$	
	$9 \div 3 =$	$9 \div 3 =$	
	$9 \div 4 =$	$9 \div 4 =$	
	$9 \div 5 =$	$9 \div 5 =$	
	$9 \div 6 =$	$9 \div 6 =$	
	$9 \div 7 = 1,2857142857$	$9 \div 7 =$	
	$9 \div 8 =$	$9 \div 8 =$	
	$9 \div 9 =$	$9 \div 9 =$	
	$9 \div 10 =$	$9 \div 10 =$	

Tabuada do 8

$$\begin{array}{l} 8 \div 1 = \\ 8 \div 2 = \\ 8 \div 3 = 2,6666666667 \\ 8 \div 4 = \\ 8 \div 5 = \\ 8 \div 6 = 1,3333333333 \\ 8 \div 7 = 1,1428571429 \\ 8 \div 8 = \\ 8 \div 9 = 0,8888888889 \\ 8 \div 10 = \end{array}$$



$$\begin{array}{l} 8 \div 1 = \\ 8 \div 2 = \\ 8 \div 3 = \\ 8 \div 4 = \\ 8 \div 5 = \\ 8 \div 6 = \\ 8 \div 7 = \\ 8 \div 8 = \\ 8 \div 9 = \\ 8 \div 10 = \end{array}$$

Tabuada do 7

$$\begin{array}{l} 7 \div 1 = \\ 7 \div 2 = \\ 7 \div 3 = 2,3333333333 \\ 7 \div 4 = \\ 7 \div 5 = \\ 7 \div 6 = 1,1666666667 \\ 7 \div 7 = \\ 7 \div 8 = \\ 7 \div 9 = 0,7777777778 \\ 7 \div 10 = \end{array}$$



$$\begin{array}{l} 7 \div 1 = \\ 7 \div 2 = \\ 7 \div 3 = \\ 7 \div 4 = \\ 7 \div 5 = \\ 7 \div 6 = \\ 7 \div 7 = \\ 7 \div 8 = \\ 7 \div 9 = \\ 7 \div 10 = \end{array}$$

Tabuada do 6

$$\begin{array}{l} 6 \div 1 = \\ 6 \div 2 = \\ 6 \div 3 = \\ 6 \div 4 = \\ 6 \div 5 = \\ 6 \div 6 = \\ 6 \div 7 = 0,851428571 \\ 6 \div 8 = \\ 6 \div 9 = 0,6666666667 \\ 6 \div 10 = \end{array}$$



$$\begin{array}{l} 6 \div 1 = \\ 6 \div 2 = \\ 6 \div 3 = \\ 6 \div 4 = \\ 6 \div 5 = \\ 6 \div 6 = \\ 6 \div 7 = \\ 6 \div 8 = \\ 6 \div 9 = \\ 6 \div 10 = \end{array}$$

Tabuada do 5

$$\begin{array}{l} 5 \div 1 = \\ 5 \div 2 = \\ 5 \div 3 = 1,6666666667 \\ 5 \div 4 = \\ 5 \div 5 = \\ 5 \div 6 = 0,8333333333 \\ 5 \div 7 = 0,7142857143 \\ 5 \div 8 = \\ 5 \div 9 = 0,5555555556 \\ 5 \div 10 = \end{array}$$



$$\begin{array}{l} 5 \div 1 = \\ 5 \div 2 = \\ 5 \div 3 = \\ 5 \div 4 = \\ 5 \div 5 = \\ 5 \div 6 = \\ 5 \div 7 = \\ 5 \div 8 = \\ 5 \div 9 = \\ 5 \div 10 = \end{array}$$

Tabuada do 4

$$\begin{array}{l} 4 \div 1 = \\ 4 \div 2 = \\ 4 \div 3 = 1,3333333333 \\ 4 \div 4 = \\ 4 \div 5 = \\ 4 \div 6 = 0,6666666667 \\ 4 \div 7 = 0,5714285714 \\ 4 \div 8 = \\ 4 \div 9 = 0,4444444444 \\ 4 \div 10 = \end{array}$$



$$\begin{array}{l} 4 \div 1 = \\ 4 \div 2 = \\ 4 \div 3 = \\ 4 \div 4 = \\ 4 \div 5 = \\ 4 \div 6 = \\ 4 \div 7 = \\ 4 \div 8 = \\ 4 \div 9 = \\ 4 \div 10 = \end{array}$$

Tabuada do 3

$$\begin{array}{l} 3 \div 1 = \\ 3 \div 2 = \\ 3 \div 3 = \\ 3 \div 4 = \\ 3 \div 5 = \\ 3 \div 6 = \\ 3 \div 7 = 0,4285714286 \\ 3 \div 8 = \\ 3 \div 9 = 0,3333333333 \\ 3 \div 10 = \end{array}$$



$$\begin{array}{l} 3 \div 1 = \\ 3 \div 2 = \\ 3 \div 3 = \\ 3 \div 4 = \\ 3 \div 5 = \\ 3 \div 6 = \\ 3 \div 7 = \\ 3 \div 8 = \\ 3 \div 9 = \\ 3 \div 10 = \end{array}$$

Tabuada do 2

$2 \div 1 =$
 $2 \div 2 =$
 $2 \div 3 = 0,6666666667$
 $2 \div 4 =$
 $2 \div 5 =$
 $2 \div 6 = 0,3333333333$
 $2 \div 7 = 0,2857142857$
 $2 \div 8 =$
 $2 \div 9 = 0,2222222222$
 $2 \div 10 =$



$2 \div 1 =$
 $2 \div 2 =$
 $2 \div 3 =$
 $2 \div 4 =$
 $2 \div 5 =$
 $2 \div 6 =$
 $2 \div 7 =$
 $2 \div 8 =$
 $2 \div 9 =$
 $2 \div 10 =$

Tabuada do 1

$1 \div 1 =$
 $1 \div 2 =$
 $1 \div 3 = 0,3333333333$
 $1 \div 4 =$
 $1 \div 5 =$
 $1 \div 6 = 0,1666666667$
 $1 \div 7 = 0,1428571429$
 $1 \div 8 =$
 $1 \div 9 = 0,1111111111$
 $1 \div 10 =$



$1 \div 1 =$
 $1 \div 2 =$
 $1 \div 3 =$
 $1 \div 4 =$
 $1 \div 5 =$
 $1 \div 6 =$
 $1 \div 7 =$
 $1 \div 8 =$
 $1 \div 9 =$
 $1 \div 10 =$

Tabuada do 0

$0 \div 0 =$
 $0 \div 1 =$
 $0 \div 2 =$
 $0 \div 3 =$
 $0 \div 4 =$
 $0 \div 5 =$
 $0 \div 6 =$
 $0 \div 7 =$
 $0 \div 8 =$
 $0 \div 9 =$
 $0 \div 10 =$



$0 \div 0 =$
 $0 \div 1 =$
 $0 \div 2 =$
 $0 \div 3 =$
 $0 \div 4 =$
 $0 \div 5 =$
 $0 \div 6 =$
 $0 \div 7 =$
 $0 \div 8 =$
 $0 \div 9 =$
 $0 \div 10 =$

62) Responda as questões a seguir baseado nas tabuadas da divisão do exercício anterior.

a) As divisões por quais números inteiros resultaram em *números decimais exatos*?

Resposta: _____.

b) As divisões por quais números inteiros resultaram em *dízimas periódicas*?

Resposta: _____.

c) Quais operações resultaram em *dízimas periódicas compostas*?

Resposta: _____.

d) Ao dividir um número inteiro não nulo por outro número inteiro não nulo de valor absoluto menor, o resultado da divisão é sempre maior que 1 ou menor que 1? Justifique sua resposta.

Resposta: _____.

Comentários sobre as discrepâncias nos resultados obtidos nas calculadoras:

- A calculadora nativa no smartphone Samsung Galaxy S22 apresentou todos os números decimais exatos com no máximo 10 casas decimais.
- A maioria das calculadoras exibe até 12 dígitos em suas telas. Assim, resultados de expressões matemáticas com números decimais que excedem esse limite são ajustados pelo algoritmo da calculadora, exibindo um valor aproximado em vez do valor exato.
- Quando o resultado exato de uma operação, como uma divisão entre números inteiros positivos, é um decimal que excede a capacidade de exibição da calculadora, obtemos um valor aproximado. O erro absoluto é calculado por

$$E_{\text{absoluto}} = |\text{VALOR}_{\text{exato}} - \text{VALOR}_{\text{aproximado}}|$$

- Embora as calculadoras gerem erros de aproximação, esses são geralmente muito pequenos e desprezíveis em operações matemáticas do dia a dia
- No preenchimento das tabelas acima ficou claro que certas operações cujos resultados exatos são *dízimas periódicas*, apareceram nas calculadoras um número decimal exato e o último dígito não corresponde a um valor do período.

4.6. Por que as calculadoras erram?

Sandra Renz Pacheco(2007) discute em seu artigo os tipos de erros que podem ocorrer no uso de calculadoras; dentre eles estão os erros de truncamento e arredondamento.

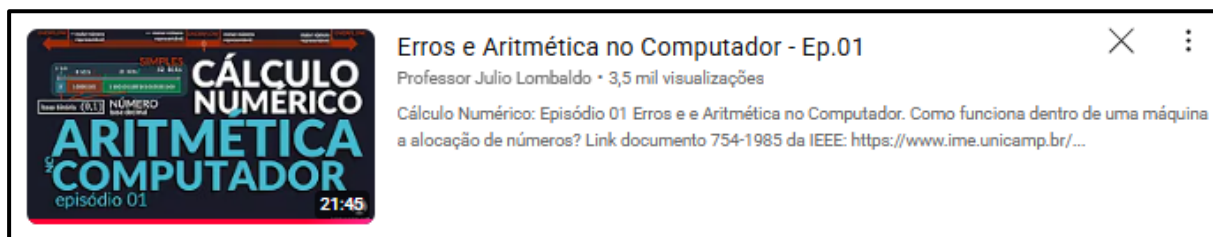
Para a resolução dos modelos matemáticos é necessário fazer aproximações. Tais aproximações podem gerar os chamados erros de truncamento e os erros de arredondamento. Os erros de truncamento são aqueles cometidos quando se substitui qualquer processo infinito por um processo finito. [...]. Já os erros de arredondamento surgem quando se trabalha com calculadoras digitais ou computadores para representar números pertencentes ao campo dos reais, [...]. (RENZ PACHECO,2007)

A calculadora trabalha com um sistema de representação de números no seu visor denominado de **Aritmética de Ponto Flutuante**. E essa representação possui limitações. Por exemplo, ao efetuar $2 \div 3$ em uma calculadora, que é um número real cuja representação decimal é 0,666 ..., temos que o visor da calculadora aparecerá um número limitado de casas decimais. Conforme visto no exercício anterior, $2 \div 3 = 0,6666666667$. Faça a leitura do emprego deste símbolo em $2 \div 3 = 0,6666666667$ como o resultado obtido pela calculadora após teclar “=”. Matematicamente falando, ao saber que esse número é uma aproximação do *valor exato*, a simbologia correta seria $2 \div 3 \approx 0,6666666667$; a leitura desta sentença é: $2 \div 3$ é *aproximadamente igual a* 0,6666666667. Para usar o símbolo de igualdade, neste caso, é necessário apresentar o valor exato; isto é: $2 \div 3 = 0,666 \dots$

No caso das dízimas periódicas, cabe ressaltar que esse processo de arredondamento, às vezes deixará o último dígito exibido no visor da calculadora igual ao período da dízima, mas isso não significa que o valor do visor é uma dízima periódica. Por exemplo, ao digitar a expressão ‘ $2 \div 9$ ’ na calculadora e, em seguida, teclar “=”, o resultado que aparece no visor é 0,6666666666; portanto, deduz-se, pelo visor que: $2 \div 9 = 0,6666666666$, que sabe-se que também é uma aproximação de 0,666

No vídeo *Erros e Aritmética no Computador – Ep.01* (PROFESSOR JÚLIO LOMBALDO,2022), o professor Júlio cita no seu vídeo o documento IEEE Std 754-1985, conhecido como Norma IEEE 754, que tem como finalidade estabelecer um padrão internacional para a aritmética em ponto flutuante em computadores e calculadoras digitais. Este documento define regras para representar e manipular números reais em formato binário e decimal de forma uniforme em todas as máquinas de calcular, e traz informações sobre arredondamentos, erros de aproximação, situações de *overflow* (estouro superior), *underflow*

(valores muito próximos de zero), divisão por zero e resultados indefinidos (NaN – Not a Number) envolvendo essas máquinas.



Fonte: (PROFESSOR JÚLIO LOMBALDO,2022)

4.7. A Tecla “Fração”

Visando ampliar o conhecimento dos estudantes sobre a calculadora científica, será apresentada a “tecla de fração”, que possibilita obter o quociente entre dois inteiros colocando-os na forma de fração. A partir dessa exploração, pretende-se que os alunos associem os números decimais exatos e as dízimas periódicas às frações, compreendendo-os como expressões do quociente entre inteiros — ideia que se articula diretamente à definição de número racional.

Você sabia que a fração pode ser vista como uma divisão?

Em algumas calculadoras existe a tecla fração. Verificaremos o que aparecerá no visor da calculadora após usarmos essa tecla.

Figura 12: A tecla de fração numa calculadora científica portátil. Casio



Algumas calculadoras não possuem essa tecla disponível. Na Matemática a fração pode ser interpretada de várias formas diferentes.

Quiz: Qual é a ideia de fração associada a tecla de fração da calculadora?

() **1ª ideia:** fração como parte/todo() **3ª ideia:** fração de uma quantidade

() **2ª ideia:** fração como razão (X) **4ª ideia:** fração como quociente

Para trabalhar com frações na calculadora, usaremos a **4ª ideia de fração**: fração como quociente.

A tecla de fração está relacionada ao que chamamos de **número fracionário**.

Definição: Sejam a e b dois números inteiros, com $b \neq 0$. Define-se a fração a por b , denotada por:

$$\frac{a}{b} \text{ ou } a \div b$$

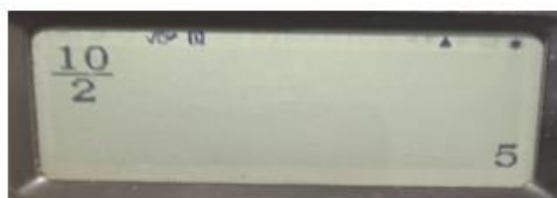
Isto é, como a representação da divisão de a por b , onde a é o numerador e b é o denominador.

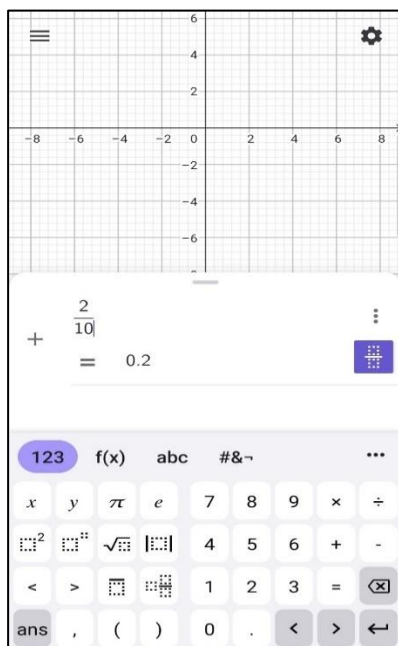
Leitura de um Número Fracionário:

Exemplo 1: $\frac{10}{2} = 5$ Lê-se: O quociente entre 10 e 2 é igual a 5. (Fig. 18).

Exemplo 2: $\frac{2}{10} = 0,2$ Lê-se: O quociente entre 2 e 10 é igual a 0,2.

Figura 13: Visor com as respostas





Comentários:

- 1) Algumas calculadoras como o Geogebra, se você digitar $8 \div 5$, aparecerá no seu visor, $\frac{8}{5}$. Isto é, a notação na forma de fração.
- 2) Não existe a tecla de fração nas calculadoras portáteis mais simples.
- 3) O Geogebra não possui a tecla “DEL” ou “AC”; usa-se, ao invés disso, o recurso *touchscreen* dos smartphones; e o ícone dos “três pontinhos” para deletar resultados.
- 4) O Geogebra possui uma tecla de número misto.

Como o número fracionário representa o quociente entre dois números inteiros, logo podemos ter como resultados: números inteiros, decimais exatos ou dízimas periódicas; conforme observamos nas tabuadas da divisão de inteiros.

4.8. Divisão com Resultados Iguais

Você sabia que... existem operações de divisão em que o quociente e o resto são iguais?

- 63) Determine as divisões que produzem os resultados indicados em cada item abaixo. Dica: Consulte as tabuadas de divisão que você preencheu. Caso sobrem retângulos, crie outras operações de divisão que gerem o mesmo resultado.

a) $\boxed{?} \div \boxed{?} = 2$

2 ÷ 1					
-------	--	--	--	--	--

b) $\boxed{?} \div \boxed{?} = 1,5$

3 ÷ 2					
-------	--	--	--	--	--

c) $\boxed{?} \div \boxed{?} = 0,5$

1 ÷ 2					
-------	--	--	--	--	--

d) $\boxed{?} \div \boxed{?} = 0,333 \dots$

$3 \div 9$					
------------	--	--	--	--	--

Você sabia que para obter operações de divisão que possuem o mesmo resultado basta escolhermos um número inteiro diferente de zero para multiplicar pelo dividendo e o divisor?

64) Siga os seguintes passos:

a) Encontre o valor de $6 \div 2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

b) Multiplique o dividendo e o divisor por 5.

c) Como fica a nova expressão? $\boxed{} \div \boxed{}$

d) Em seguida, divida os valores na ordem que aparecem. Qual é o resultado da divisão após essas multiplicações? $\underline{\hspace{2cm}}$.

e) **Conclusão:** $6 \div 2 = \boxed{} \div \boxed{}$. Escrevendo na forma de números fracionários, temos: $\frac{6}{2} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$.

65) As operações $5 \div 4$ e $10 \div 8$ geram o mesmo resultado no visor da calculadora? Justifique a sua resposta.

Propriedade: Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ dois **números fracionários**, eles são iguais, se e somente se, vale a sentença abaixo.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Exercícios:

66) Verifique se as igualdades abaixo são verdadeiras ou falsas.

a) $(\quad) \quad \frac{5}{4} = \frac{10}{8}$

c) $(\quad) \quad \frac{5}{10} = \frac{10}{5}$

$$b) () \quad \frac{2}{10} = \frac{6}{10}$$

$$d) () \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{10}{20}$$

Você sabia que para obter operações de divisão que possuem o mesmo resultado podemos dividir o dividendo e o divisor por um mesmo número desde que esse número escolhido seja diferente de zero?

67) Siga os seguintes **passos**:

- a) Encontre o valor de $4 \div 8 = \underline{\hspace{2cm}}$.
- b) Divida o dividendo e o divisor por 2.
- c) Como fica a nova expressão? $\square \div \square$
- d) Em seguida, divida os valores na ordem que aparecem. Qual é o resultado da divisão após essas multiplicações? $\underline{\hspace{2cm}}$.
- e) **Conclusão:** $4 \div 8 = \square \div \square$. Escrevendo na forma de números fracionários, temos: $\frac{4}{8} = \frac{\square}{\square}$.

Observações:

1) Embora possamos dividir o 4 e 8 por qualquer número inteiro, diferente de zero (aqui estamos admitindo que a divisão pode resultar em decimal), vamos escolher aquele ou aqueles números que são divisores comuns de 4 e 8 (para que a divisão possa ser um resultado inteiro.) Por exemplo, 2 e o 4.

2) Ao *multiplicar* ou *dividir* ambos os termos do número fracionário $\left(\frac{4}{8}\right)$ pelo número 1 teremos que $\frac{4}{8} = \frac{4}{8}$.

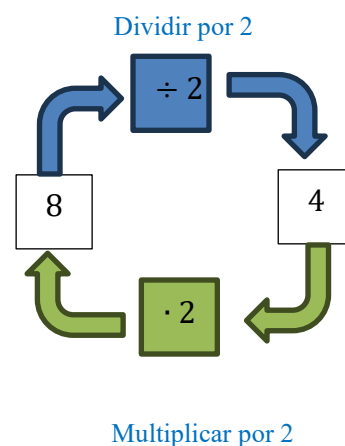
3) Há infinitos pares de números inteiros cujos quocientes são iguais a $\frac{4}{8}$.

4.9. Operações Inversas: Multiplicação e Divisão

Enunciado: Sejam a e b números inteiros, onde b é diferente de zero e tal que $a \div b$ é uma divisão exata. É possível relacionar os valores de a , b e c conforme a equivalência abaixo.

$$a \div b = c \Leftrightarrow c \cdot b = a$$

Exemplo: $\boxed{8} \div \boxed{2} = \boxed{4} \Leftrightarrow \boxed{4} \cdot \boxed{2} = \boxed{8}$



Observação: Para verificar se o resultado de uma operação de divisão está correto, pode-se usar o raciocínio da operação inversa.

68) Qual é o número desconhecido?

a) $\boxed{40} \div \boxed{10} = \boxed{?}$

e) $\boxed{40} \div \boxed{?} = \boxed{1}$

b) $\boxed{40} \div \boxed{4} = \boxed{10}$

f) $\boxed{?} \div \boxed{40} = \boxed{0}$

c) $\boxed{?} \div \boxed{40} = \boxed{10}$

g) $\boxed{40} \div \boxed{?} = \boxed{5}$

d) $\boxed{?} \div \boxed{40} = \boxed{5}$

69) Como encontrar o resto de uma divisão de inteiros utilizando o resultado do visor?

Exemplo: Por que os números decimais obtidos pela divisão de um número inteiro diferente de zero por 5 sempre serão decimais exatos?

Solução: Ao dividirmos qualquer número inteiro por 5, os resultados possíveis para os seus restos são: 0,1,2,3 e 4. Utilizando a fórmula, $q_{decimal} = q_{inteiro} + \frac{r}{d}$, podemos determinar se as divisões não exatas por 5 sempre serão números decimais exatos bastando calcular o resultado de $\frac{r}{d}$. De fato, tomando todas as possibilidades de $\frac{r}{d}$, verificamos que $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$ são números decimais exatos. Logo, $q_{decimal} = q_{inteiro} + decimal\ exato$, que não pode resultar em dízima periódica.

70) Por que os números decimais obtidos pelas divisões de um número inteiro diferente de zero por 2,4,5,8 e 10 são sempre decimais exatos?

Observação: O método utilizado para resolver esse tipo de problema é relativamente simples, mas quando os divisores são números elevados, como 83, esse jeito de pensar, apesar de correto, se torna inviável. Na atividade 10 (ver Produto Educacional no apêndice) há uma sugestão de resolução desse problema utilizando uma técnica mais simples e rápida.

71) Resolva as divisões abaixo utilizando a tecla de subtração da calculadora. Anote o quociente inteiro e o resto de cada operação.

a) $12 \div 3$

b) $20 \div 4$

c) $15 \div 4$

d) $9 \div 2$

72) Considerando a divisão de inteiros, é possível garantir que divisões não exatas por 3, 6, 7 e 9 sempre resultarão em dízimas periódicas? Comente a sua resposta.

73) Complete os quadros 1 e 2 abaixo. Em seguida, responda as questões.

12 34 **Quadro 1:** Propriedade

do Elemento Neutro

$$0 \div 1 = \underline{\quad}$$

$$1 \div 1 = \underline{\quad}$$

$$2 \div 1 = \underline{\quad}$$

$$3 \div 1 = \underline{\quad}$$

$$4 \div 1 = \underline{\quad}$$

Considerando x um número inteiro qualquer, podemos afirmar que:

$$x \div 1 = \underline{\quad}$$

Usando a notação de número fracionário, temos:

$$\frac{x}{1} = \underline{\quad}$$

12 34 **Quadro 2:** Um número dividido

por ele mesmo

$$0 \div 0 = \underline{\quad}$$

$$1 \div 1 = \underline{\quad}$$

$$2 \div 2 = \underline{\quad}$$

$$3 \div 3 = \underline{\quad}$$

$$4 \div 4 = \underline{\quad}$$

Considerando x um número inteiro qualquer diferente de zero, podemos afirmar que:

$$x \div x = \underline{\quad}$$

Usando a notação de número fracionário, temos:

$$\frac{x}{x} = \underline{\quad}$$

a) A propriedade comutativa é válida para a operação de divisão? _____

b) O elemento neutro da divisão é 1? _____

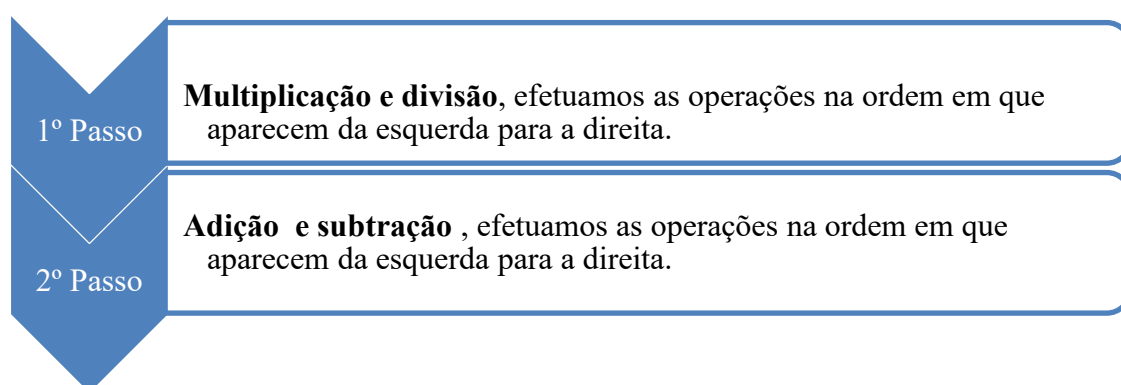
c) Use a Relação Fundamental da Divisão e verifique se os valores encontrados para

$\frac{x}{1}$ e $\frac{x}{x}$ estão corretos.

4.10. O valor de uma expressão numérica

Uma expressão numérica é uma combinação de números e operações matemáticas, podendo aparecer com ou sem os sinais de associação: parênteses, colchetes e chaves. A sequência com que as operações aritméticas aparecem na expressão numérica, bem como os sinais de associação, interferem no resultado. Segue a seguir a regra geral para determinação do valor numérico de uma expressão numérica.

A regra geral para calcular o valor de uma expressão segue a seguinte ordem de resolução:



- ❖ A hierarquia de agrupamento dos *sinais de associação*: 1º lugar: (); 2º lugar: [] e, em 3º lugar, { }.

É importante destacar que **multiplicação não tem prioridade sobre a divisão**, assim como **adição não tem prioridade sobre a subtração**. O critério é sempre a leitura da esquerda para a direita dentro do mesmo nível de operação.

Expressões numéricas com DUAS operações aritméticas

74) Realize os cálculos abaixo manualmente e, em seguida, use uma calculadora para verificar a correção dos resultados, inserindo os dados no teclado e observando o resultado na tela.

a) $8 + 4 + 2 = \underline{\quad}$.

e) $10 \times 5 \div 2 = \underline{\quad}$.

b) $8 - 4 - 2 = \underline{\quad}$.

f) $10 \div 5 \times 2 = \underline{\quad}$.

c) $8 \times 4 \times 2 = \underline{\quad}$.

g) $10 + 5 - 2 = \underline{\quad}$.

d) $8 \div 4 \div 2 = \underline{\quad}$.

h) $10 - 5 + 2 = \underline{\quad}$.

Expressões numéricas com as 4 operações aritméticas, sem sinais de associação:

Exemplo 1: Qual é o valor da expressão?

$$\begin{aligned}
 & 8 + 12 \div 4 \times 2 - 3 \\
 &= 8 + 12 \div 4 \times 2 - 3 \\
 &= 8 + 3 \times 2 - 3 \\
 &= 8 + 3 \times 2 - 3 \\
 &= 8 + 6 - 3 \\
 &= 8 + 6 - 3 \\
 &= 14 - 3 \\
 &= 11
 \end{aligned}$$

Exemplo 2: Coloque os sinais de associação na expressão abaixo indicando a ordem correta dos cálculos.

$$\begin{aligned}
 & 8 + 12 \div 4 \times 2 - 3 \\
 &= 8 + (12 \div 4) \times 2 - 3 \\
 &= 8 + [(12 \div 4) \times 2] - 3 \\
 &= \{8 + [(12 \div 4) \times 2]\} - 3
 \end{aligned}$$

Observação: Na calculadora padrão do smartphone não há teclas de colchetes e chaves. Esse não é um problema, pois pode-se utilizar as teclas parênteses no lugar delas. Num código de programação é muito comum o programador usar só os parênteses. Para estabelecimento da ordem de resolução dos cálculos na ausência dos colchetes e chaves, a regra é começa-se a determinar o valor da expressão resolvendo as expressões dentro dos parênteses mais interno da expressão até chegar aos parênteses externos.

Exemplo: Resolva a expressão numérica abaixo com o auxílio de uma calculadora.

$$\{8 + [(12 \div 4) \times 2]\} - 3$$

Solução: Inserimos a expressão correspondente a de cima substituindo os símbolos de colchetes e chaves por parênteses.

$$(8 + ((12 \div 4) \times 2)) - 3$$

75) Verdadeiro ou Falso? Considere a , b e c inteiros positivos.

- i. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + c$ ()
- ii. $(a \div b) \div c = a \div (b \div c)$ ()
- iii. $a \div (b + c) = a \div b + a \div c$ ()
- iv. $(b + c) \div a = b \div a + c \div a$ ()

v. $a \div (b \cdot c) = (a \div b) \div c$ ()

vi. $a \div (b \cdot c) = a \div b \cdot c$ ().

ATIVIDADE 5

5.1. Operações com números inteiros positivos e negativos

Nesta atividade, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com inteiros são estudadas incluindo os inteiros negativos como operandos. Objetiva-se utilizar a definição de multiplicação e da propriedade das operações inversas, para ensinar como as regras de cálculo foram adaptadas com a inclusão dos números negativos – as regras dos sinais. Além disso, define-se a subtração de números inteiros como a adição de um número ao seu oposto, a qual culmina no entendimento que a diferença entre dois números inteiros quaisquer é um número inteiro. Introduz-se uma breve reflexão sobre os usos dos números negativos e positivos em problemas do cotidiano, de forma conscientizar o aluno sobre a relevância de estudar o assunto. Quanto ao uso da calculadora, são apresentadas as funções das teclas: “módulo” e “+/-”. Aspectos geométricos quanto a localização de pontos na reta numérica é mais evidenciada nessa atividade, bem como as visualizações geométricas dos conceitos de módulo e números opostos entre si. Quanto a comparação de números inteiros, apresenta-se estrategicamente uma alternativa de fazer essa comparação usando as teclas das calculadoras de forma que o aluno possa associar a noção de comparação entre inteiros (relação de ordem :maior do que) com as operações de subtração e divisão. Nas atividades, o uso dos parênteses ficará mais frequente. Aborda-se a importância do uso dos parênteses em certos tipos de expressões numéricas, aqui usadas também num contexto de separação de sinais de números (positivo e/ou negativo) com os sinais dos símbolos das operações - a tecla de parênteses da calculadora nesse sentido será usada para comprovar essas ideias de como a presença ou ausência dos parênteses podem afetar os cálculos de determinadas expressões.

5.2. A revolução dos números positivos e negativos na humanidade

Os números são criações abstratas da mente humana, mas com enorme impacto prático. Desde que começaram a ser registrados, transformaram profundamente as civilizações, pois tornaram as relações sociais, econômicas e culturais mais organizadas. A matemática, nesse sentido, pode ser compreendida como uma linguagem própria, em que os números funcionam como seu alfabeto. Para dominar essa linguagem, estudamos os diferentes conjuntos numéricos e suas regras, uma estrutura de conhecimento que é ensinada em praticamente todas as culturas.

É importante lembrar que a matemática que utilizamos hoje não nasceu de uma única tradição: ela é resultado da contribuição de diversos povos e civilizações ao longo da história. Esse patrimônio coletivo possibilitou avanços em áreas como a Física e a Química e influenciou até mesmo a forma como registramos o tempo histórico, ao utilizar os números negativos para marcar os períodos “antes” e “depois de Cristo” em uma linha do tempo.

No cotidiano, os números são indispensáveis. Com eles, comunicamos nossa idade, registramos documentos de identidade, controlamos saldos bancários, contamos pessoas em uma sala ou medimos temperaturas ao redor do mundo. Sem compreender o significado dos números — sejam positivos ou negativos —, não seríamos capazes de interpretar fusos horários, variações climáticas ou a indicação de estar acima ou abaixo do nível do mar. Basta pensar em uma situação prática: ao viajar, se a previsão do tempo indicar 20°C , logo entendemos que o clima será agradável; mas se aparecer o símbolo “-” ao lado, como em -20°C , sabemos que será necessário enfrentar um frio rigoroso.

Esses exemplos mostram que o conhecimento dos números e das operações entre eles não apenas resolve questões simples do dia a dia, mas também fundamenta a resolução de problemas mais complexos. É difícil imaginar a vida sem compreender, por exemplo, os números negativos.

O estudo dos conjuntos numéricos começa com os **números naturais**, que têm origem na contagem. Em alguns contextos, considera-se o número 1 como ponto inicial; em outros, o zero. De qualquer modo, quando os matemáticos ampliaram esse conjunto para incluir os números situados antes do zero, surgiram os **inteiros negativos**, que foram representados pelo sinal de menos (-). Essa convenção simbólica passou a indicar oposição, ausência ou direção contrária, enriquecendo a linguagem matemática e permitindo novas aplicações, como na medição de temperaturas, na representação de altitudes ou no controle de saldos financeiros.

5.3. A representação dos números inteiros em uma reta numérica

A ideia de representar os números inteiros numa reta numérica surgiu como uma forma visual de organizar os números e entender suas relações de ordem, distância e operações.

A reta numérica permite visualizar os números inteiros como pontos igualmente espaçados, com o zero ao centro, os positivos à direita e os negativos à esquerda. Essa disposição facilita a compreensão de conceitos como adição, subtração, valor absoluto e simetria, além de fornecer uma base para o desenvolvimento da álgebra — ramo da matemática

que utiliza letras e símbolos para representar e resolver problemas numéricos — e da análise matemática, área que estuda as variações e comportamentos das funções, sendo fundamental para entender temas como limites, gráficos, crescimento e decrescimento de quantidades, além de ser a base do cálculo que aparece no final do Ensino Médio e em cursos superiores.

A construção da reta numérica do conjunto dos números inteiros:

76) Siga o passo a passo abaixo para construir a reta numérica dos números inteiros:

1º Passo – marcação da origem da reta numérica: Traçamos uma reta horizontal e no seu centro, marcamos um ponto que será a *origem*. Vamos escolher a letra O para representar a **origem**. A este ponto associaremos o número zero. Coloque a letra O acima no ponto, e o número 0 abaixo deste ponto.

2º Passo – marcação dos pontos dos números inteiros positivos: Refaça o desenho da reta acima no espaço abaixo e, adicione um ponto à direita da Origem, chame esse ponto de X. A essa distância entre os pontos O e X chamamos de **unidade**. Abaixo do ponto X, marcamos o número +1. Escolhendo a mesma unidade, após o ponto de +1, marcamos o ponto de +2 e assim sucessivamente. Marque até o ponto do número +3. Acima dos pontos de +2 e +3, escolha alguma letra para o ponto. Deve ser maiúscula sempre, por convenção, letras maiúsculas representam pontos na reta.

3º Passo – marcação dos pontos dos números inteiros negativos: Refaça o desenho da reta acima no espaço abaixo e, adicione um ponto à esquerda da origem os pontos referentes a -1, -2 e -3. Considere que a mesma unidade de medida usada para os intervalos dos positivos, deverá ser a mesma para os intervalos dos números negativos.

Observações:

- 1) Entre dois números inteiros consecutivos não há números inteiros.
- 2) O intervalo entre dois números inteiros possui números decimais.
- 3) Embora o número -100 ou +100 não apareçam indicados na reta que foi desenhada no exercício anterior, isso não significa que eles não façam parte da reta.
- 4) Um outro nome para reta numérica é a reta graduada. Em algumas situações do nosso dia a dia, a reta numérica ou graduada aparece constantemente. Por exemplo, a trena usada para

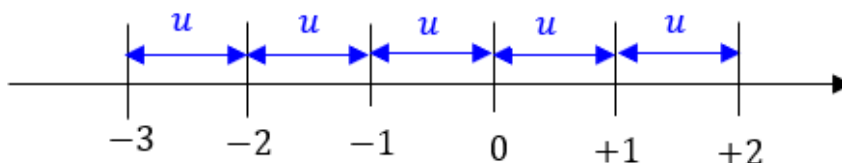
medir comprimentos, nos lembra a reta dos naturais. A escala de um termômetro não digital de parede, nos lembra a reta numérica dos inteiros.

5.4. O módulo ou valor absoluto de um número inteiro

Nesta seção, objetiva-se introduzir o conceito de **módulo de um número inteiro**. Inicialmente é apresentada a reta numérica dos números inteiros, buscando a consolidação da ideia de associação de um número a um ponto da reta e, vice-versa. Em seguida, considera-se a distância de pontos dessa reta até o ponto que está situado o número zero. Considerando que um número é positivo, quando este está localizado sobre um ponto localizado à direita do zero, e que o número é negativo, quando está associado a um ponto que está à esquerda do zero, fica claro, que não faz sentido associar ao conceito de módulo de um número a uma quantidade positiva ou negativa. Esse conceito é tão importante, que até uma tecla na calculadora científica há para ele, a qual estudaremos como usá-la.

Enunciado: O **módulo ou valor absoluto** de um número inteiro a é denotado por $|a|$, e é a distância entre o ponto que representa esse número na reta numérica e a origem (zero). Para qualquer $a \neq 0$, o módulo $|a|$ é sempre um número positivo (Dante, 2019).

Figura 14: A reta numérica dos números inteiros e unidade de medida.



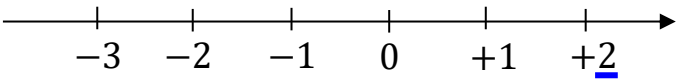
77) Complete as lacunas abaixo completando a frase: “A distância entre os pontos correspondentes aos números é de ____ unidades. Logo, o módulo de é igual a ____.”:

- a) $+2$ e 0 é de ____ unidades. Logo, o módulo de $+2$ é igual a ____.
- b) -2 e 0 é de ____ unidades. Logo, o módulo de -2 é igual a ____.
- c) 0 e 0 é de ____ unidades. Logo, o módulo de -2 é igual a ____.

78) Completar a tabela abaixo.

	Expressão (Linguagem falada)	Notação Matemática do módulo de um número	Resultado	Leitura
a)	O módulo de 5			
b)	O módulo de −5			
c)	O módulo de +5	+ 5	5	O módulo de +5 é 5.
d)	O módulo de 0			

79) Sublinhe os módulos dos números inteiros que estão indicados na reta numérica abaixo.



A definição do módulo de um número inteiro:

Enunciado: Define-se o valor absoluto de um elemento $a \in \mathbb{Z}$ como sendo,

$$|a| = \begin{cases} a & \text{para } a \geq 0 \\ -a & \text{para } a < 0 \end{cases}$$

Assim, $|a| \geq 0$, para todo $a \in \mathbb{Z}$ e que vale a igualdade se e somente se $a = 0$ (Hefez, 2024)

Exemplo 1: O módulo de +5 é denotado como | + 5 |. Como o número no inteiro dos “ | | ” é positivo, logo | +5 | = +5 = 5.

Exemplo 2: O módulo de −5 é denotado como | − 5 |. Como o número no inteiro dos “ | | ” é negativo, logo | −5 | = −(−5) = +5 = 5.

Exemplo 3: O módulo de 0 é denotado como | 0 |. Como o número no inteiro dos “ | | ” é zero, logo | 0 | = 0.

Aprendendo a função da tecla " $|x|$ "

- O objetivo desta tecla é retirar o *sinal de número* de um número qualquer.

1º PASSO: Ative o modo calculadora científica, para aparecer essa tecla.

2º PASSO: Clicar na tecla $|x|$. Aparecerá no visor:

Visor: $abs($

3º PASSO: Insira o número no qual será aplicado o módulo. Por exemplo, +7.

Visor: $abs(+7$

4º PASSO: Clicar na tecla $()$.

Visor: $abs(+7)$

5º PASSO: Clicar na tecla $=$.

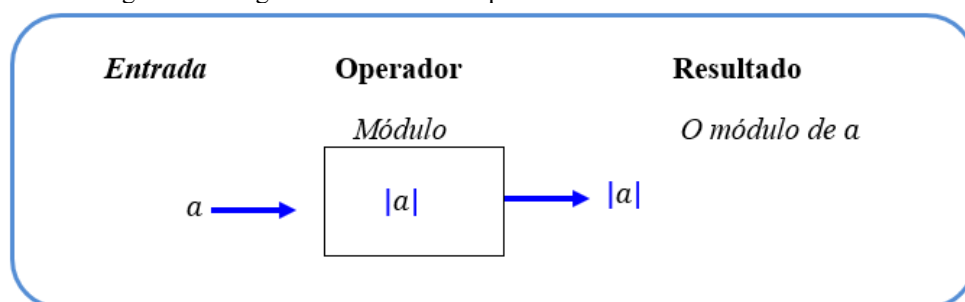
Visor: 7

Verificando na calculadora: O cálculo do módulo

80) Calcule o módulo de -7 usando uma calculadora.

O bloco da tecla do módulo de um número

Figura 15: Diagrama de Blocos do operador “o módulo de um nº inteiro”.



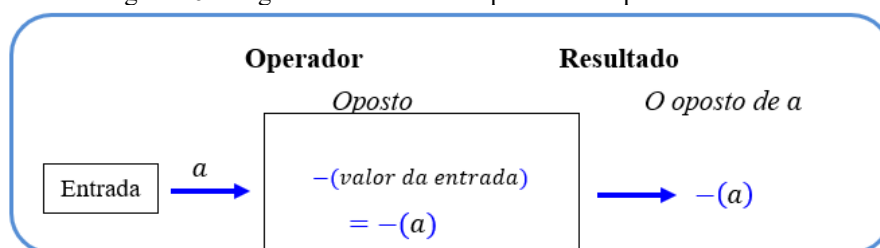
5.5. O oposto de um número inteiro e a tecla $+/-$

Objetiva-se nesta seção uma revisão do conceito de número oposto (ou simétrico) no conjunto dos números inteiros, com o apoio de explicações teóricas, exemplos ilustrativos e atividades práticas. Os exercícios propostos poderão ser resolvidos manualmente, sem o uso da calculadora, ou com o auxílio desse recurso tecnológico, favorecendo tanto a compreensão conceitual quanto a aplicação prática dos conteúdos abordados.

Será apresentado o uso de uma tecla específica da calculadora, destinada à alteração do sinal de um número. Essa tecla permite obter rapidamente o número oposto de um valor e é útil na inserção de expressões numéricas que envolvem números inteiros. Além disso, ao longo do estudo das operações com inteiros, serão exploradas diferentes estratégias para determinar o número oposto. Também será exemplificado o uso desse conceito no contexto da resolução e do balanceamento de equações do 1º grau com uma incógnita.

5.6. O Cálculo do Oposto de um Número Inteiro

Figura 16: Diagrama de Blocos do operador “o oposto de um nº inteiro”.

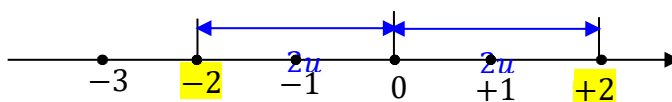


O operador oposto e a sua notação.	Leitura
$-(\blacksquare)$	Lê-se: O oposto de $\blacksquare$ é menos $-\blacksquare$.

Definição de números opostos

Enunciado: Dois números inteiros a e b são chamados de opostos quando possuem o mesmo módulo, ou seja $|a| = |b|$, mas apresentam sinais contrários; isto é, na reta numérica, esses números estão equidistantes da origem e se localizam em lados opostos.

Figura 19: Indicação da simetria entre os pontos que estão localizados os números -2 e $+2$ em relação à origem



Exemplo: Os números -2 e $+2$ são *números opostos*, conforme observamos na Fig. 19, eles possuem *sinais contrários* (um é positivo e o outro é negativo) e os *mesmos módulos*: $|+2| = |-2| = 2$ e ambos são equidistantes da origem.

81) Completar a tabela abaixo.

	Expressão (Linguagem falada)	Notação Matemática do oposto de um número	Resultado	Leitura
a)	O oposto de 5			
b)	O oposto de -5			
c)	O oposto de $+5$	$-(+5)$		O oposto de $+5$ é 5.
d)	O oposto de 0			

Observações:

- 1) O oposto de um número inteiro *positivo* é um número inteiro *negativo*, e vice-versa. O oposto de zero é zero.
- 2) O uso dos parênteses foi obrigatório em dois casos acima: no cálculo dos opostos de números positivos que aparecem o sinal de $+$ e dos números negativos.
- 3) O oposto de um número pode ser denominado de o *inverso aditivo* desse número.

Aprendendo a função da tecla “+/-“

- O símbolo dessa tecla indica uma conversão de $+$ para $-$, e vice-versa.
- Para fazer essa operação de mudança de sinal a calculadora faz uma operação aritmética. Nesta seção, você aprenderá uma programação para transformar um número positivo em um número negativo, e vice-versa.

1º PASSO: Clicar em $\boxed{+/-}$. Aparecerá no visor: $(-$

Aparecerá no visor um parêntese aberto “(“, o sinal de “-“ ao seu lado e o *cursor piscando* ao lado do “-“ para o usuário *inserir um valor*.

2º PASSO: Clicar em $\boxed{+}$. Aparecerá no visor: $(+$

Como era de se esperar, o sinal de $-$ transformou-se em $+$.

- 82) Siga o passo a passo abaixo na calculadora do seu smartphone. Digitar os *números*: (-7) , $(+7)$, $+7$ e -7 .

Exercício	Tutorial	Tecla Especial	Sequência de comandos	Resultado no visor
a) Digitar: (-7)	1º tutorial	$\boxed{+/-}$	$\boxed{+/-} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow \boxed{()}$	(-7)
	2º tutorial	$\boxed{+/-}$	$\boxed{()} \rightarrow \boxed{-} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow \boxed{()}$	(-7)
b) Digitar: $(+7)$	1º tutorial	$\boxed{()}$	$\boxed{+/-} \rightarrow \boxed{+} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow \boxed{()}. $	$(+7)$
	2º tutorial	$\boxed{()}$	$\boxed{()} \rightarrow \boxed{+} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow \boxed{()}$	$(+7)$
c) Digitar: -7	1º tutorial	-	1º PASSO: Digite (-7) ; 2º PASSO: Delete os parênteses para deixar o número -7 sozinho.	-7
d) Digitar: $+7$	1º tutorial	-	1º PASSO: Digite $(+7)$; 2º PASSO: Delete os parênteses para deixar o número $+7$ sozinho.	$+7$

- 83) Verifique o valor de $-(-7)$ na calculadora do seu smartphone.

Solução: $\boxed{+/-} \rightarrow \boxed{()} \rightarrow \boxed{(-)} \rightarrow \boxed{7} \rightarrow \boxed{()} \rightarrow$ Delete o primeiro parêntese $\rightarrow \boxed{(=)}$

- 84) Usando a tecla $\boxed{+/-}$ da calculadora, obtenha o que se pede: Coloque a sua resposta conforme o exemplo resolvido.

	Cálculo	Sequência de comandos na calculadora	Resultado do Display
a)	O oposto de 7	$\boxed{7} \rightarrow \boxed{+/-} \rightarrow \boxed{()} \rightarrow \boxed{(=)}$	
b)	O oposto de -7		
c)	O oposto do oposto de 7		

5.7. Comparação de Números Inteiros (Noção Geométrica)

Comparar dois números inteiros, envolve verificar se eles são iguais ou diferentes; e, no caso de serem diferentes, determina-se qual deles é o maior ou o menor em relação ao outro.

85) Assinale com um “X” a afirmação verdadeira.

- a) $(\quad)$ 2 é maior do que 3. b) $(\quad)$ 2 é menor do que 3. c) $(\quad)$ 2 é igual a 3

Lei da Tricotomia:

Dados dois números inteiros a e b , podemos afirmar que
ou $a = b$ ou $a > b$ ou $a < b$

86) Como se lê as sentenças abaixo?

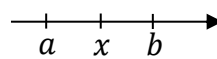
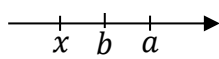
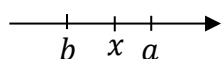
- a) $a < x > b$ Leitura: _____
 b) $a < x < b$ Leitura: _____
 c) $a < x$ Leitura: _____
 d) $x < a$ Leitura: _____

87) Considerando a marcação dos números inteiros a , b e x na reta numérica em uma reta numérica, assinale a alternativa que onde $a < x < b$.

(A)

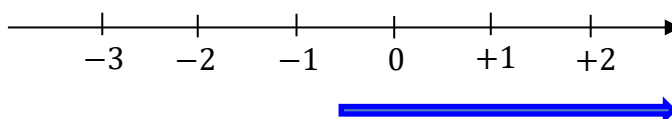
(B)

(C)



A comparação de números inteiros

Dois números inteiros podem ser comparados por meio da posição relativa deles na reta numérica (o que está mais à direita é maior).



Observações:

Sentido de crescimento

•A reta numérica é orientada para a direita. Há uma “setinha” que aparece ao final do traço da reta. Este é o sentido de crescimento dos números.

•O *sucessor* de um número inteiro está uma unidade à direita desse número; ele é obtido somando uma unidade a esse número.

•O *antecessor* de um número inteiro está uma unidade à esquerda desse número; ele é obtido subtraindo uma unidade a esse número.

88) Complete as frases com os números inteiros adequados. Considere $x \in \mathbb{Z}$ para resolver o item (d).

- a) O antecessor de $+1$ é _____ e o sucessor de $+1$ é _____.
- b) O antecessor de 0 é _____ e o sucessor de 0 é _____.
- c) O antecessor de -1 é _____ e o sucessor de -1 é _____.
- d) O antecessor de x é _____ e o sucessor de x é _____.

89) Complete as lacunas com as palavras adequadas. Opções de palavras: “MENOR, MAIOR, IGUAL, IGUAIS, DIFERENTE, DIFERENTES”.

- a) Todo número positivo é _____ do que zero. Exemplo: _____
- b) Todo número negativo é _____ do que zero. Exemplo: _____
- c) Dois números opostos são _____ entre si. Exemplo: _____
- d) Um número positivo é _____ do que um número negativo. Exemplo: _____

90) Complete as lacunas escrevendo $<$ (menor do que), $>$ (maior do que) ou $=$ (igual a).
Propositalmente, na coluna de “notação” foi invertida a ordem dos números em alguns itens.

	Escrita por extenso.	Notação
a)	$+8$ e 8 são números _____.	$+8$ _____ 1 .
b)	$+3$ é maior do que 1 .	$+3$ $>$ 1 .
c)	-13 é _____ do que $+10$.	$+10$ _____ -13 .
d)	4 é _____ do que -3 .	-3 _____ -1 .
e)	-99 é _____ do que -1 .	-99 _____ -1 .

Regra para comparação de números inteiros de mesmo sinal

Considerando o princípio de comparação de ordenação dos números inteiros (quando mais a direita na reta numérica, maior será o número) pode-se entender o porquê dos exemplos abaixo serem verdadeiros.

Exemplo 1: $+2024 > +50$ **Justificativa:** $+2024$ está a direita de $+50$.

Exemplo 2: $-2024 < -50$ **Justificativa:** -2024 está à esquerda de -50 .

91) Represente a reta numérica dos inteiros indicando localizando os números de -4 até $+5$.

E responda as questões a seguir:

- a) Quais são os módulos de -2 , -3 e -4 ? _____
- b) Quais são os módulos de $+2$, $+3$ e $+4$? _____
- c) É correto afirmar que $-3 < -2 < -1$? _____
- d) É correto afirmar que $+3 < +2 < +1$? _____

92) V(verdadeiro) ou F(falso)?

- a) () Dados dois números inteiros *positivos*, o maior dentre eles é aquele que possui o *maior módulo*.
- b) () Dados dois números inteiros *negativos*, o maior dentre eles é aquele que possui o *menor módulo*.

5.8. A eliminação dos parênteses:

O uso dos parênteses nas expressões numéricas em $\mathbb{N}$ tinha como única função: ordenar os cálculos nas expressões. Aqui, no estudo do conjunto dos números inteiros, o uso dos parênteses possui uma função adicional a esta. Em $\mathbb{Z}$, admite-se duas coisas: o sinal de $+$ pode aparecer como sinal de número positivo e como sinal da operação de adição; e o sinal de $-$ pode aparecer como sinal de número negativo e como o sinal da operação de subtração. Portanto, quando deseja-se somar ou subtrair um número inteiro positivo ou negativo, é necessário que na expressão seja usado parênteses para que os sinais das operações ($+$ e $-$) não fiquem “colados” com os sinais de números ($+$ e $-$). Este é o sentido do uso dos parênteses

na formação das expressões numéricas. A regra a seguir ensina como eliminar esses parênteses. Nesse primeiro momento, o sinal $-$ na frente de um número positivo ou negativo, tem o sentido de calcular o oposto de um número. Já, o sinal de $+$ na frente dos parênteses, será interpretado com o comportamento oposto ao de colocar o sinal de $-$ na frente dos parênteses.

1º CASO: Sinais Iguais	2º CASO: Sinais Diferentes
Eliminamos os parênteses trocando os sinais iguais pelo sinal $+$	Eliminamos os parênteses trocando os sinais diferentes pelo sinal $-$
$+(+■) = +■$	$-(+■) = -■$
$-(-■) = +■$	$+(-■) = -■$

Comentários:

Observe na tabela ao lado que quando o sinal $-$ precede os parênteses, o resultado da eliminação dos parênteses, é o oposto do número no interior dos parênteses. Já, se os parênteses forem antecidos pelo sinal $+$, o resultado da eliminação dos parênteses será o número que está dentro dos parênteses.

93) Calcule o valor das expressões:

a) $-(+8) = \underline{\hspace{2cm}}$ b) $-(-7) = \underline{\hspace{2cm}}$ c) $+(-2) = \underline{\hspace{2cm}}$ d) $+(+1) = \underline{\hspace{2cm}}$

5.9. A operação de adição com números inteiros

94) Calcule os valores das expressões a seguir.

a) $+3 - 4 = \underline{\hspace{2cm}}$ f) $+3 + 0 = \underline{\hspace{2cm}}$

b) $+3 - 3 = \underline{\hspace{2cm}}$ g) $+3 + 1 = \underline{\hspace{2cm}}$

c) $+3 - 2 = \underline{\hspace{2cm}}$ h) $+3 + 2 = \underline{\hspace{2cm}}$

d) $+3 - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$ i) $+3 + 3 = \underline{\hspace{2cm}}$

e) $+3 - 0 = \underline{\hspace{2cm}}$ j) $+3 + 4 = \underline{\hspace{2cm}}$

Existem diversas formas de resolver expressões do tipo $\pm a \pm b$. Uma delas é o raciocínio “andando na reta”, onde o primeiro número representa a localização de uma pessoa na reta numérica e o segundo número indica a movimentação que a pessoa fará nessa reta, os sinais (deste segundo valor) indicam o sentido de deslocamento: + (deslocamento para a direita e – (deslocamento para à esquerda); e, o módulo desse segundo número, representa quantas unidades dessa reta a pessoa se deslocará. O resultado dessa operação é a posição final dessa pessoa após a movimentação.

As expressões do tipo $(\pm a) + (\pm b)$:

95) Calcule os valores das expressões a seguir.

- | | |
|---|---|
| a) $(+3) + (-4) = +3 - 4 = -1$ | f) $(+3) + (0) = \underline{\hspace{2cm}}$ |
| b) $(+3) + (-3) = \underline{\hspace{2cm}}$ | g) $(+3) + (+1) = \underline{\hspace{2cm}}$ |
| c) $(+3) + (-2) = \underline{\hspace{2cm}}$ | h) $(+3) + (+2) = \underline{\hspace{2cm}}$ |
| d) $(+3) + (-1) = \underline{\hspace{2cm}}$ | i) $(+3) + (+3) = \underline{\hspace{2cm}}$ |
| e) $(+3) + (0) = \underline{\hspace{2cm}}$ | j) $(+3) + (+4) = \underline{\hspace{2cm}}$ |

5.10. A operação de subtração com números inteiros

Definição: Para todo a e b números inteiros, a diferença entre a e b é igual a soma de a com o oposto de b . $a - b = a + (-b)$ Esta igualdade indica que a subtração com números inteiros, pode ser calculada a partir da operação de adição.

96) Calcule os valores das expressões a seguir.

- | | |
|---|---|
| a) $(+3) - (-4) = (+3) + (+4) = +7$ | f) $(+3) - (0) = \underline{\hspace{2cm}}$ |
| b) $(+3) - (-3) = \underline{\hspace{2cm}}$ | g) $(+3) - (+1) = \underline{\hspace{2cm}}$ |

c) $(+3) - (-2) = \underline{\hspace{2cm}}$

h) $(+3) - (+2) = \underline{\hspace{2cm}}$

d) $(+3) - (-1) = \underline{\hspace{2cm}}$

i) $(+3) - (+3) = \underline{\hspace{2cm}}$

e) $(+3) - (0) = \underline{\hspace{2cm}}$

j) $(+3) - (+4) = \underline{\hspace{2cm}}$

5.11. A operação de multiplicação com números inteiros:

A tabela a seguir mostra como obter os valores dos produtos de dois inteiros quaisquer usando a definição de multiplicação com inteiros positivos, e a definição do oposto de um número.

1º CASO Dois números positivos	2º CASO		3º CASO
	Números com sinais contrários		Dois números negativos
$(+) \cdot (+)$	$(+) \cdot (-)$	$(-) \cdot (+)$	$(-) \cdot (-)$
$(+2) \cdot (+3)$	$(+2) \cdot (-3)$	$(-2) \cdot (+3)$	$(-2) \cdot (-3)$
$(+2) \cdot (+3)$ $= (2) \cdot (3)$ $= 2 \cdot 3$ $= 6$	$(+2) \cdot (-3)$ $= (2) \cdot (-3)$ $= 2 \cdot (-3)$ $= (-3) \cdot 2$ $= (-3) + (-3)$ $= -6$	$(-2) \cdot (+3)$ $= (-2) \cdot (3)$ $= (-2) \cdot 3$ $= (-2) + (-2)$ $+ (-2)$ $= -6$	$(-2) \cdot (-3)$ $= -[2 \cdot (-3)]$ $= -[-6]$ $= +6$

Observações:

- 1) Nos dois primeiros casos acima, há um número positivo, o que nos permite aplicar diretamente a definição de multiplicação para números naturais.
- 2) No 1º e 2º casos, constatamos que $(+2) \cdot (-3)$ e $(-2) \cdot (+3)$ possuem os mesmos resultados, já que os fatores possuem módulos iguais, diferindo apenas do sinal.

3) No 3º caso, para multiplicar dois números negativos, podemos colocar em evidência o sinal de “-” do 1º fator e dentro dos colchetes colocar o 1º fator positivo multiplicado pelo 2º fator negativo. Desta forma, resolvemos o que está dentro dos colchetes e aplicamos trocamos o sinal do resultado encontrado dentro dos parênteses, o que resulta em um número positivo.

Regra dos Sinais da Multiplicação

Sinais Iguais

Dados a e b números inteiros quaisquer,

$$(+a) \cdot (+b) = +(a \cdot b)$$

$$(-a) \cdot (-b) = +(a \cdot b)$$

Sinais Contrários

Dados a e b números inteiros quaisquer,

$$(+a) \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

$$(-a) \cdot (+b) = -(a \cdot b)$$

97) Calcule os valores das expressões a seguir.

a) $(+3) \cdot (-4) = -(3 \cdot 4) = -12$

f) $(-8) \cdot (+9) = \underline{\hspace{2cm}}$

b) $(-3) \cdot (+3) = \underline{\hspace{2cm}}$

g) $-8 \cdot (-9) = \underline{\hspace{2cm}}$

c) $(+8) \cdot (-1) = \underline{\hspace{2cm}}$

h) $+8 \cdot (-9) = \underline{\hspace{2cm}}$

d) $(-6) \cdot (-1) = \underline{\hspace{2cm}}$

i) $(+10) \cdot (+10) = \underline{\hspace{2cm}}$

e) $(-3) \cdot (0) = \underline{\hspace{2cm}}$

j) $(-1) \cdot (+4) = \underline{\hspace{2cm}}$

98) Verifique $(-a) \cdot (b) = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ para $a = 4$ e $b = -7$.

5.12. A operação de divisão com números inteiros: $(\pm a) \div (\pm b)$

99) Encontre o valor desconhecido, aplicando a propriedade da relação inversa (multiplicação e divisão). Em seguida, procure deduzir a regra dos sinais da divisão pelos seus resultados.

- a) $(+8) \div (+2) = \boxed{?} \Rightarrow \boxed{?} \cdot (+2) = (+8) \Rightarrow \boxed{?} = +4$
 b) $(+8) \div (-2) = \boxed{?} \Rightarrow \underline{\hspace{2cm}} \Rightarrow \boxed{?} = \underline{\hspace{2cm}} + 4$
 c) $(-8) \div (+2) = \boxed{?} \Rightarrow \underline{\hspace{2cm}} \Rightarrow \boxed{?} = \underline{\hspace{2cm}} + 4$
 d) $(-8) \div (-2) = \boxed{?} \Rightarrow \underline{\hspace{2cm}} \Rightarrow \boxed{?} = \underline{\hspace{2cm}} + 4$

Quadro da *Regra dos Sinais* da Divisão

Sinais Iguais:

Dados a e b números inteiros quaisquer,

$$(+a) \div (+b) = +(a \div b)$$

$$(-a) \div (-b) = +(a \div b)$$

Sinais Contrários:

Dados a e b números inteiros quaisquer,

$$(+a) \div (-b) = -(a \div b)$$

$$(-a) \div (+b) = -(a \div b)$$

100) Calcule os valores das expressões a seguir.

- a) $(+10) \div (-2) = -5$ f) $(+3) \div (+3) = \underline{\hspace{2cm}}$
 b) $(+10) \div (+1) = \underline{\hspace{2cm}}$ g) $(-6) \div (+3) = \underline{\hspace{2cm}}$
 c) $(0) \div (-1) = \underline{\hspace{2cm}}$ h) $(+6) \div (-3) = \underline{\hspace{2cm}}$
 d) $(-2) \div (+10) = \underline{\hspace{2cm}}$ i) $(-3) \div (-4) = \underline{\hspace{2cm}}$
 e) $(+3) \div (-3) = \underline{\hspace{2cm}}$ j) $(+3) \div (+4) = \underline{\hspace{2cm}}$

Quadro da *Regra dos Sinais* da Divisão (numa outra perspectiva)

Sinais Diferentes

Dados a e b números inteiros, onde b é diferente de zero, vale a relação a seguir.

$$(-a) \div (b) = a \div (-b) = -(a \div b)$$

Notação de fração: $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

Sinais Iguais

Dados a e b números inteiros, onde b é diferente de zero, vale a relação a seguir.

$$(-a) \div (-b) = +(a \div b)$$

Notação de fração: $\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$

5.13. A comparação de números inteiros através de operações aritméticas.

Você sabia que.... é possível usar a calculadora para saber se 6 é menor ou maior do que determinado número?

1ª Estratégia: Tecla da subtração

Essa estratégia está associada ao conceito de diferença entre dois números. Por meio dela, é possível não apenas verificar se um número é maior, menor ou igual a outro, mas também identificar quantas unidades os separam, ou seja, quantas unidades um número excede ou é inferior ao outro.

Crítérios para a comparação usando -

Dados a e b dois números inteiros quaisquer.

1º caso	2º caso	3º caso
$a - b = 0 \Rightarrow a = b$	$a - b > 0 \Rightarrow a > b$	$a - b < 0 \Rightarrow a < b$

2ª Estratégia: Tecla da Divisão

Essa estratégia está relacionada ao conceito de *razão* entre dois números. Por meio dela, é possível não apenas comparar se um número é maior, menor ou igual a outro, mas também determinar quantas vezes um número é maior ou menor em relação ao outro.

Critérios para a comparação usando $\div$

1º Estudo: O quociente entre números positivos.

101) Sejam a e b números inteiros não negativos, com $b \neq 0$.

1º caso	2º caso
$\frac{a}{b} = 0 \Rightarrow a = 0$	$0 < \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow 0 < a < b$
3º caso	4º caso
$\frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$	$\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow a > b > 0$

Escolha valores para a e b em cada caso acima, considerando a e b dois números inteiros positivos.

2º Estudo: O quociente entre números positivos

102) É possível que dois números inteiros negativos simultaneamente satisfaçam algum caso do quadro do exercício anterior? Se sim, mostre, de acordo com a sua intuição, como seriam os valores de $\boxed{?}$.

Sejam a e b números *inteiros negativos*, com $b \neq 0$.

1º caso	2º caso
$\frac{a}{b} = 0 \Rightarrow \boxed{?}$	$0 < \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \boxed{?}$
3º caso	4º caso
$\frac{a}{b} = 1 \Rightarrow \boxed{?}$	$\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \boxed{?}$

- 103) Encontre valores para as variáveis que foram as frações abaixo de tal forma que elas estejam no intervalo indicado na reta. Considere a reta abaixo a reta dos números racionais.



- 104) Como seria o critério para comparar dois números inteiros pela divisão quando os quocientes são números negativos?

1º caso	2º caso	3º caso
$\frac{a}{b} < -1 \Rightarrow \boxed{?}$	$\frac{a}{b} = -1 \Rightarrow \boxed{?}$	$-1 < \frac{a}{b} < 0 \Rightarrow \boxed{?}$

- 105) Complete a tabela.

	Pergunta	Resposta	Comparação Pela Diferença	Comparação Pelo Quociente
a)	6 é maior do que 2?	() SIM () NÃO	$6 - 2 = 4$	$\frac{6}{2} = 3$
b)	2 é maior do que 6?	() SIM () NÃO		
c)	-5 é maior do que -8?	() SIM () NÃO		
d)	-5 é menor do que +8?	() SIM () NÃO		
e)	-18 é maior do que -9?	() SIM () NÃO		
f)	-9 é maior do que +8?	() SIM () NÃO		
f)	-1 é maior do que +1?	() SIM () NÃO		
g)	0 é maior do que +1?	() SIM () NÃO		

Comentários: Usar a razão para comparar dois números inteiros ajuda os alunos a desenvolverem o raciocínio proporcional e a compreenderem relações multiplicativas entre grandezas, inclusive em situações de variação direta e inversa. Ela é muito utilizada na Geometria Plana, onde calcula-se a razão entre dois segmentos de reta, e assim, pode-se comparar os tamanhos desses segmentos.

5.14. O conceito de números opostos aplicados em equações e demonstrações matemáticas.

A definição de números opostos (*numa outra perspectiva*)

Definição: Para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe $a' \in \mathbb{Z}$ tal que $a + a' = 0$. Denominamos esse a' como o oposto de a . O valor de $a' = -a$. Portanto, O *oposto* ou *simétrico* de um número inteiro é o valor que somado com esse número é igual a zero.

A ideia do número oposto na resolução de equações do 1º grau com uma incógnita através do método do balanceamento.

106) Resolva a equação $a + x = 0$ considerando a uma constante inteira e x a incógnita da equação.

Solução:

$$a + x = 0$$

$$x + a = 0$$

$$x + a + (-a) = 0 + (-a)$$

$$x + [a + (-a)] = 0 + (-a)$$

$$x + 0 = -a$$

$$x = -a$$

Portanto, x é o oposto de a .

Solução: $S = \{-a\}$

A ideia do número oposto em outros tipos de demonstrações:

107) Provar que $-0 = 0$.

Solução: Como $0 \in \mathbb{Z}$, logo existe $0' \in \mathbb{Z}$ tal que $0 + 0' = 0$. Por definição, $0'$ é o oposto de 0. O valor de $0' = -0$. Por outro lado, pela propriedade do elemento neutro da adição, se $0 + 0' = 0$, logo $0' = 0$. Logo, como $0' = -0$ e $0' = 0$, temos que $-0 = 0$.

A expressão " $-b$ " :

1ª Interpretação:	2ª Interpretação:
$-b = 0 - b$	$-b = -1 \cdot b$
O oposto de b é igual a diferença entre 0 e b .	O oposto de b é igual ao produto de -1 por b .
Exemplo: $-4 = 0 - 4$	Exemplo: $-4 = (-1) \cdot 4$

Observação: Para calcular o oposto de x , basta multiplicar x por -1 .

ATIVIDADE 6

6.1. O Conjunto dos Números Racionais

Nesta atividade é apresentado o conceito de número racional oferecendo fundamentos teóricos que possibilitam aos estudantes desenvolverem a capacidade de resolver situações-problema envolvendo números decimais exatos, dízimas periódicas e as frações formadas por números inteiros.

Ao longo desta atividade, busca-se aprofundar a compreensão do aluno sobre a relação entre o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números racionais, evidenciando as conexões e ampliações conceituais que ocorrem nessa transição. Além disso, introduz-se o estudo da **avaliação dos erros** decorrentes da aproximação numérica de um número, promovendo uma reflexão crítica sobre a precisão dos valores utilizados em contextos matemáticos e aplicados.

A propriedade do fechamento em um conjunto numérico

Definição: Dizemos que um conjunto numérico é **fechado** para uma operação se, ao realizar essa operação entre quaisquer dois elementos do conjunto, o resultado também pertence a esse conjunto. (Adaptado de: HUNGERFORD, Thomas W. Algebra. Springer-Berlag, 1974)

Exemplo: A operação de adição é fechada em $\mathbb{N}$, isto é, se $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$, então $a + b \in \mathbb{N}$.

Operação	Operações com fechamento em $\mathbb{N}$	Operações com fechamento em $\mathbb{Z}$
Adição	✓ Sim	✓ Sim
Subtração	✗ Não	✓ Sim
Multiplicação	✓ Sim	✓ Sim
Divisão	✗ Não	✗ Não

As operações de subtração e divisão não são fechadas em $\mathbb{N}$

Se $a = 2$ e $b = 5$, então $a - b = -3 \notin \mathbb{N}$.

Se $a = 3$ e $b = 2$, então $a \div b = 1,5 \notin \mathbb{N}$.

A operação de divisão não é fechada em $\mathbb{Z}$

Se $a = 3$ e $b = 2$, então $a \div b = 1,5 \notin \mathbb{Z}$.

Você sabia que o fato do resultado da divisão entre dois números inteiros nem sempre ser um número inteiro está relacionado à definição do conjunto dos números racionais? Esse conjunto, representado pela letra $\mathbb{Q}$, foi estruturado para assegurar que a **propriedade do fechamento** também fosse válida para a operação de divisão entre inteiros (com exceção da divisão por zero), garantindo, assim, que o resultado dessa operação pertença ao próprio conjunto dos racionais.

Operação	Operações com fechamento em $\mathbb{N}$	Operações com fechamento em $\mathbb{Z}$	Operações com fechamento em $\mathbb{Q}$
Adição	✓ Sim	✓ Sim	✓ Sim
Subtração	✗ Não	✓ Sim	✓ Sim
Multiplicação	✓ Sim	✓ Sim	✓ Sim
Divisão	✗ Não	✗ Não	✓ Sim

O conjunto dos números racionais

Símbolo do Conjunto	Nome do Conjunto	Definição	Observações
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos Números Racionais	$\left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$	Nesse conjunto aparecem: ✓ As frações com quocientes inteiros, onde o segundo termo é diferente de zero; ✓ Os números inteiros (positivos, negativos e zero); ✓ Os números decimais exatos (positivos e negativos); ✓ As dízimas periódicas (positivas e negativas).

Exemplos:

- (1) $\frac{1}{5}$ é um n° racional, pois $1 \in \mathbb{Z}$ e $5 \in \mathbb{Z}^*$. (4) -3 é um número racional, pois $-3 = \frac{-6}{2}$.
 (2) $\frac{-4}{7}$ é um n° racional, pois $-4 \in \mathbb{Z}$ e $7 \in \mathbb{Z}^*$. (5) $0,25$ é um número racional, pois $0,25 = \frac{1}{4}$.
 (3) $\frac{5}{0}$ não é um n° racional, pois $0 \notin \mathbb{Z}^*$. (6) $0,555\dots$ é um número racional, pois $0,555\dots = \frac{5}{9}$.

Você sabia que existem infinitos pares de números inteiros cujos quocientes são iguais a um determinado número racional? Por exemplo, o número 5 pode ser escrito na forma de fração como $\frac{10}{2}$, $\frac{25}{5}$ e $\frac{5}{1}$.

Observações:

- 1) A expressão $\frac{a}{b}$ representa o quociente entre dois números inteiros a e b (com $b \neq 0$). Esse quociente pode resultar em um número inteiro, um decimal exato ou uma dízima periódica, o que caracteriza esses elementos como pertencentes ao conjunto dos números racionais. Além disso, esses resultados podem ser positivos ou negativos, uma vez que a divisão entre inteiros com sinais opostos também é possível dentro desse conjunto.
- 2) Vale destacar que o número zero também é considerado um número racional, pois pode ser representado como uma fração na forma $\frac{0}{b}$, com $b \neq 0$, o que satisfaz a definição de número racional.
- 3) Para provar que um determinado número é racional, é necessário encontrar dois inteiros, cujo quociente resulte nesse valor.
- 4) Existem alguns métodos práticos que permitem representar números da forma decimal para a forma fracionária.

6.2. Conversão entre representações decimal e fracionária de números racionais**(I) Números inteiros: Da representação decimal para a representação em fração**

A forma mais simples de passar a representação inteira de um número racional para a sua representação fracionária, é colocando 1 abaixo dele.

Exemplo: Transformar os números inteiros indicados no conjunto abaixo em fração.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Colocando os números inteiros na forma de fração, temos:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -\frac{3}{1}, -\frac{2}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{0}{1}, +\frac{1}{1}, +\frac{2}{1}, +\frac{3}{1}, \dots\}$$

(II) Números decimais exatos: Da representação decimal para a representação em fração

A forma mais simples de representar um número decimal exato na sua forma fracionária é colocando esse número na forma de *fração decimal*³.

³ Fração decimal é um tipo especial de fração cujo denominador é uma potência de 10, ou seja, **10, 100, 1000, 10000**, etc.

Exemplo: Transformar os números abaixo em fração decimal.

a) $0,2 = \frac{2}{10}$

b) $1,25 = \frac{125}{100}$

c) $12,398 = \frac{12398}{1000}$

Exercício de Verificação. Use a sua calculadora dividindo os termos de cada **fração decimal** para verificar as igualdades acima.

Regra Prática: Elimine a vírgula do número decimal, formando o numerador da fração. O denominador desta fração será “10” para números com uma casa decimal, “100” para números com duas casas decimais, “1000” para números com três casas decimais e assim por diante.

Observação: Essa regra está baseada no seguinte raciocínio: Se um número possui uma casa decimal, devemos multiplicá-lo e dividi-lo por 10. Se um número possui duas casas decimais, devemos multiplicá-lo e dividi-lo por 100.

(III) As dízimas periódicas: Da representação decimal para a representação em fração

Uma **dízima periódica simples** é um número decimal infinito e periódico, em que logo após a vírgula, aparece uma sequência de algarismos que se repete indefinidamente.

Uma **dízima periódica composta** é um número decimal infinito e periódico, em que os algarismos que se repetem não vêm imediatamente após a vírgula, ou seja, há uma **parte não periódica** entre a vírgula e o início da repetição.

6.3. Dízimas periódicas simples com parte inteira igual a zero.

Regra Prática: O numerador da fração desejada será o período da dízima. O denominador da fração desejada será 9 para uma dízima que possui um dígito no período, será 99 para uma dízima que possuir dois dígitos no período, será 999 para uma dízima que possuir três dígitos no período, e assim por diante.

Dízima Periódica Simples com período A	Dízima Periódica Simples com período AB	Dízima Periódica Simples com período ABC
$0,AAA \dots = \frac{A}{9}$	$0,ABABAA \dots = \frac{AB}{99}$	$0,ABCABCABC \dots = \frac{ABC}{999}$
$0,777 \dots = \frac{7}{9}$	$0,252525 \dots = \frac{25}{99}$	$0,108108108 \dots = \frac{108}{999}$

 Use a sua calculadora dividindo os termos de cada **fração geratriz**⁴ para verificar as igualdades acima.

6.4 Dízimas periódicas simples com parte inteira diferente de zero

Regra Prática: Somamos a parte inteira da dízima com a fração geratriz da parte decimal.

Exemplo: Transformar 1,555 ... em fração decimal.

$$1,555 \dots = 1 + 0,555 \dots = 1 + \frac{5}{9} = \frac{14}{9}$$

Resultado: $1,555 \dots = \frac{14}{9}$

108) Determine um par de números inteiros cujo quociente seja igual ao valor fornecido.

a) $2 = \frac{\square}{\square}$

d) $-6 = \frac{\square}{\square}$

b) $1,8 = \frac{\square}{\square}$

e) $-0,25 = \frac{\square}{\square}$

c) $0,777 \dots = \frac{\square}{\square}$

f) $-1,777 \dots = \frac{\square}{\square}$

Observação: Há um método geral e sistemático para determinar as frações geratrizes de dízimas periódicas, sejam elas simples ou compostas. Embora esse procedimento não seja o foco desta atividade, é importante o seu estudo. No *YouTube* há diversos vídeos sobre esse tema que podem ser localizados utilizando como palavras-chave: “Frações Geratrizes de Dízimas Periódicas”.

6.4. A reta numérica dos números racionais

Diferentemente da reta dos números inteiros, na reta dos números racionais, há pontos entre dois inteiros que estão associados a números racionais (na representação decimal, estes pontos representarão os números decimais exatos e as dízimas periódicas).

⁴ Fração geratriz é a fração que gera (ou representa) um número decimal exato ou periódico.

A localização de números decimais exatos com UMA casa decimal na reta numérica entre dois números inteiros consecutivos.

- 109) Represente a reta numérica dos racionais, indicando nela os números inteiros 0 e 1; e os números decimais exatos com uma casa decimal entre 0 e 1.
- 110) Represente a reta numérica dos racionais, indicando nela os números inteiros -1 e 0; e os números decimais exatos com uma casa decimal entre -1 e 0.

A localização de números decimais exatos com DUAS casas decimais na reta numérica

- 111) Trace uma linha horizontal de 15 cm de comprimento. Sobre essa linha, marque o ponto do número 1,1 a uma distância de 10cm do ponto do número 1,2. Divida o intervalo entre 1,1 e 1,2 em 10 partes iguais. Em seguida, marque os números decimais exatos que possuem duas casas decimais neste intervalo.

O módulo ou valor absoluto de um número racional

Definição: O *módulo* ou *valor absoluto* de um número racional $\frac{a}{b}$ é denotado por $\left|\frac{a}{b}\right|$. Ele representa a distância entre o ponto da reta que está situado o número $\frac{a}{b}$ até a origem da reta.

O oposto ou simétrico de um número racional

Definição: O *oposto* ou *simétrico* de um número racional $\frac{a}{b}$ é o valor que somado com esse número é igual a zero. Portanto, o oposto de $\frac{a}{b}$ é $-\frac{a}{b}$.

Observação: O oposto ou simétrico de um número racional é conhecido mais formalmente como o **inverso aditivo**.

A Lei da Tricotomia para os números racionais: Dados os números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, onde $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b, d \in \mathbb{Z}^*$. Apenas um dos casos abaixo é verdadeiro:

1º CASO	2º CASO	3º CASO
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

6.5. Comparação de números racionais

Para comparar dois números racionais na forma de fração usando a calculadora, podemos comparar os quocientes correspondentes a cada fração. O visor da calculadora exibirá esses resultados na representação decimal. Os quocientes na representação podem ser *números inteiros* ou *números decimais*.

Casos possíveis, dados dois números racionais, podem aparecer:

- A comparação entre dois *números inteiros*;
- A comparação entre dois *números decimais*;
- A comparação entre *frações*;
- A comparação entre números na representação decimal: números inteiros com números decimais;
- A comparação entre um número na forma decimal com frações.

Como todos os números racionais podem ser colocados na forma de fração, onde o segundo termo é diferente de zero, logo, no estudo do conjunto dos números racionais os cálculos com frações são essenciais.

- Inicialmente, vamos aprender a *comparar* dois números racionais na *forma de fração*.

- Será necessário, nesse primeiro momento, revisar o assunto frações⁵, conforme é estudado no 6º ano, onde os seus termos são números inteiros positivos. Caso você tenha facilidade nesse tópico, faça direto os exercícios.

Frações equivalentes (possuem o mesmo quociente)

Propriedade: Sejam os números $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, onde a, b, c e d são números inteiros positivos.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Exemplo 1: $\frac{5}{4}$ e $\frac{10}{8}$ são frações equivalentes, pois $5 \cdot 8 = 40$ e $10 \cdot 4 = 40$. Portanto, $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$.

Exemplo 2: $\frac{1}{4}$ e $\frac{10}{8}$ não são frações equivalentes, pois $1 \cdot 8 = 8$ e $10 \cdot 4 = 40$. Portanto, $\frac{1}{4} \neq \frac{10}{8}$.

112) Verifique com uma calculadora que $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$ e que $\frac{1}{4} \neq \frac{10}{8}$.

Como obter frações equivalentes a partir de uma fração.

Para obter frações equivalentes a uma dada fração, podemos usar a propriedade abaixo.

Propriedade: Dados $a \in \mathbb{Z}_+^*$ e $b \in \mathbb{Z}_+^*$ e $k \in \mathbb{Z}^*$ e tomando um número inteiro positivo $k \neq 0$, temos que:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$$

Multiplicando-se o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número inteiro k diferente de zero, obtém-se uma *fração equivalente* à original.

No estudo das frações, observa-se que existem infinitas frações equivalentes a uma dada fração.

⁵ Segundo pesquisas feitas nesse trabalho de dissertação com alunos de 1º ano do Ensino Médio, mais do que a metade dos alunos disseram que possuem muita dificuldade no assunto operações com frações.

Simplificação de frações e a forma irredutível de uma fração

Simplificar uma fração significa reduzir os seus números (numerador e denominador) a uma forma mais simples, sem alterar o seu valor, através da divisão por um número que seja um divisor comum de ambos.

Propriedade: Dados a e b dois números inteiros positivos e k um divisor comum de a e de b .

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

Dividindo o numerador e o denominador da fração $\frac{a}{b}$ por um mesmo número inteiro k , que é um divisor comum de a e de b , diferente de zero, obtém-se uma **fração equivalente** à original. Se $k \neq 1$, logo a fração obtida será uma fração com termos reduzidos.

Quando o máximo divisor comum entre os termos de uma fração é 1, dizemos que esta fração está na **forma irredutível**.

Observação: É muito comum que as respostas de muitos exercícios sejam deixadas na forma de fração irredutível.

Exemplo: A *forma irredutível* da fração $\frac{10}{8}$ é obtida dividindo os seus termos por 2.

$$\frac{10}{8} = \frac{10 \div 2}{8 \div 2} = \frac{5}{4}$$

Como não existe divisores comuns além do 1 para os termos da fração $\frac{5}{4}$, logo essa fração é dita estar na **forma irredutível**.

Redução de duas frações ao mesmo denominador

Como reduzir duas frações a um mesmo denominador?

Sejam as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, onde a, b, c e d são números inteiros positivos podemos fazer com essas duas frações tenham o mesmo denominador (reduzir as frações ao mesmo denominador) seguindo o método abaixo:

[1º Passo] multiplicamos ambos os termos da fração $\frac{a}{b}$ pelo denominador da fração $\frac{c}{d}$, que é o “ d ”. Em seguida, multiplicamos separadamente a fração $\frac{c}{d}$ pelo denominador da outra fração que é o número “ b ”.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \quad e \quad \frac{c}{d} = \frac{c \cdot b}{d \cdot b}$$

Como $b \cdot d = d \cdot b$, logo as frações equivalentes encontradas possuem o mesmo denominador.

Portanto, como $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c \cdot b}{b \cdot d}$,

[2º Passo] obtidas as frações equivalentes a $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ com o mesmo denominador, temos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, os numeradores das respectivas frações equivalentes forem iguais, isto é, $a \cdot d = c \cdot b$. No caso de os numeradores serem diferentes, para saber qual é a maior

Exemplo: Compare as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{10}{8}$ utilizando o método de redução de frações ao mesmo denominador.

Solução: Multiplicamos os termos da fração $\frac{1}{4}$ por 8, que é o denominador da outra fração, temos:

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 8}{4 \cdot 8} = \frac{8}{32}$$

Multiplicamos os termos da fração $\frac{10}{8}$ por 4, que é o denominador da outra fração, temos:

$$\frac{10}{8} = \frac{10 \cdot 4}{8 \cdot 4} = \frac{40}{32}$$

Comparando as duas frações equivalentes, temos que a fração $\frac{40}{32}$ é maior do que a fração $\frac{8}{32}$.

Portanto, podemos escrever: $\frac{40}{32} > \frac{8}{32}$ ou $\frac{10}{8} > \frac{1}{4}$.

113) Compare as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{10}{8}$ utilizando a comparação desses quocientes na forma decimal.

Método de comparação de frações (usando a operação de subtração⁶) e uma Calculadora.

Como obter o valor de $\frac{9}{3} - \frac{8}{4}$ usando uma calculadora?

Solução: Para encontrar o valor da expressão $\frac{9}{3} - \frac{8}{4}$ na calculadora, basta inserirmos a expressão $(9 \div 3) - (8 \div 4)$ e clicarmos em [=].

$$\frac{9}{3} - \frac{8}{4} = 3 - 2 = 1$$

Em geral, dadas as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, considerando que a, b, c e d sejam números inteiros positivos, para obter o valor da diferença entre essas frações **usando uma calculadora**, utiliza-se as teclas de parênteses, de divisão e a tecla de subtração.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = (a \div b) - (c \div d)$$

Considerando esse procedimento seja feito utilizando uma calculadora, é necessário usarmos a ideia de fração como quociente, logo usaremos a *tecla de divisão* para entrar com as frações na calculadora.

Para saber se a *primeira* fração é maior do que a *segunda*, basta verificarmos o sinal do resultado da diferença entre essas frações encontrado no visor da calculadora. Observe os casos possíveis no quadro a seguir:

Comparação de frações pela operação de subtração		
1º CASO	2º CASO	3º CASO
O resultado <i>é negativo</i> .	O resultado <i>é zero</i> .	O resultado <i>é positivo</i> .
$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} > 0 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

⁶ A comparação de dois números racionais usando a operação de subtração será utilizada mais a frente no estudo do cálculo do erro absoluto.

Exemplo 1: $\frac{9}{3} - \frac{8}{4} = (9 \div 3) - (8 \div 4) = 1$, que é um número positivo. Portanto, $\frac{9}{3} > \frac{8}{4}$.

Exemplo 2: $\frac{1}{8} - \frac{1}{4} = (1 \div 8) - (1 \div 4) = -0,125$, que é um número negativo.

Portanto, $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$.

114) Compare as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{10}{8}$ utilizando a comparação pelo método da diferença entre esses valores. Use a calculadora.

115) Compare os pares de frações a seguir usando os símbolos $<$, $>$ ou $=$. Justifique as suas respostas através de um dos métodos de comparação de frações ensinados até aqui.

a) $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{4}$ b) $\frac{3}{4}$ $\frac{6}{8}$ c) $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{8}$

6.6. Operações com frações

Dadas as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, onde a, b, c e d são números inteiros positivos

Operações com frações		
Adição de Frações	Subtração de Frações	Multiplicação de Frações
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

6.7. Operações com números racionais – Adição, Subtração e Multiplicação

Comentários gerais sobre os números racionais, as operações com racionais e as propriedades operatórias.

- O conjunto dos números inteiros é um subconjunto do conjunto dos números racionais.
- O conjunto $\mathbb{Q}$ herda todas as propriedades operatórias que estudamos no conjunto $\mathbb{Z}$ adaptadas para números fracionários.

- Observe que a fórmula da adição de frações e da subtração são semelhantes. Isso já era esperado, pois a diferença entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ é igual à soma de $\frac{a}{b}$ com o oposto de $\frac{c}{d}$. Ou seja, $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right) + \left(-\frac{c}{d}\right)$, portanto, podemos deduzir a fórmula da subtração de duas frações, a partir da fórmula da adição de frações.
- No conjunto dos números racionais é válida a **propriedade do inverso aditivo e a do inverso multiplicativo**⁷ de um número racional. A operação de divisão definida em $\mathbb{Q}$ está baseada no conceito de inverso multiplicativo.

Propriedade do Inverso Aditivo em $\mathbb{Q}$. Na adição de números racionais existe uma propriedade chamada **inverso aditivo**. Essa propriedade diz o seguinte: Todo número racional possui um outro número que, ao ser adicionado a ele resulta no número 0. Esse “outro número” é chamado de inverso aditivo, oposto ou simétrico desse número.

Seja x um número racional.

- ❖ O inverso aditivo, oposto ou simétrico de x é $-x$.
- ❖ Todo número somado ao seu oposto (inverso aditivo) é igual a 0.

$$x + (-x) = 0$$

Seja $\frac{a}{b}$ um número racional, o oposto de $\frac{a}{b}$ é $-\frac{a}{b}$.

A propriedade do inverso multiplicativo: Na multiplicação de números racionais, existe uma propriedade chamada **inverso multiplicativo**. Essa propriedade diz o seguinte: Todo número racional diferente de zero possui um outro número que, ao ser multiplicado por ele, resulta no número 1. Esse “outro número” é chamado de inverso multiplicativo.

⁷ É comum no Ensino Básico que o termo “inverso aditivo de um número” seja apresentado como “oposto” ou “simétrico” de um número. Da mesma forma, o “inverso multiplicativo” de um número racional costuma ser referido simplesmente como “inverso”. Por isso, quando se utiliza apenas a palavra “inverso” de um número, geralmente está se fazendo referência ao **inverso multiplicativo**.

Seja x um número racional *diferente de zero*,

O inverso de x é $\frac{1}{x}$.

Todo número diferente de zero multiplicado pelo seu inverso é igual a 1.

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

Notação: O inverso de x pode ser representado como x^{-1} .

Obs.: Seja $\frac{a}{b}$ um número racional diferente de zero, o inverso de $\frac{a}{b}$ é $\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

Observação: Existe uma tecla na calculadora relacionada ao *inverso multiplicativo* de um número, como pode ser observada na Fig. 23.

Figura 17: A tecla do inverso multiplicativo em uma calculadora nativa de um smartphone



116) Calcule os inversos dos números a seguir usando uma calculadora:

- a) 4 b) $\frac{1}{4}$ c) $-\frac{2}{5}$ d) 0,5

Operações com números racionais – Divisão:

É possível definir a divisão de dois números inteiros a partir da propriedade do inverso multiplicativo dos racionais.

Definição da divisão de inteiros

Dados a e $b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$. Temos que:

$$a \div b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

Leitura: O *quociente* entre a e b é igual ao *produto* de a pelo *inverso* de b .

Por que o raciocínio acima é possível?

Dado $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Tem-se que $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Considere a como $\frac{a}{1}$. Sabendo-se que b é um número inteiro, consequentemente, b é um número racional; logo, existe um inverso para b e este inverso é $\frac{1}{b}$. Multiplicando a na sua forma $\frac{a}{1}$ pelo inverso de b , temos que $\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. Essa última igualdade relaciona o quociente entre a e b como o produto de a pelo inverso de b .

Definição da divisão de racionais

Dados $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ números racionais, onde a, b, c e d são números inteiros e b, c e d são diferentes de zero.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Leitura: O *quociente* entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ é igual ao *produto* de $\frac{a}{b}$ pelo *inverso* de $\frac{c}{d}$.

117) Complete as tabelas a seguir.

Frações com *denominadores iguais*

	Operação com duas frações	Resposta na forma de fração irredutível	Resposta da coluna anterior na forma decimal	Resposta obtida pela calculadora do smartphone
a)	$\frac{3}{4} + \frac{15}{4}$			

b)	$\frac{3}{4} - \frac{15}{4}$			
c)	$\frac{3}{4} \cdot \frac{15}{4}$			
d)	$\frac{3}{4} \div \frac{15}{4}$			

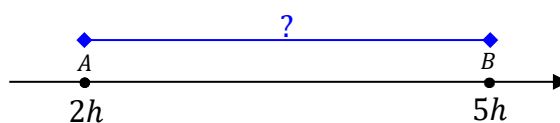
Frações com denominadores diferentes

	Operação com duas frações	Resposta na forma de fração irredutível	Resposta da coluna anterior na forma decimal	Resposta obtida pela calculadora do smartphone
e)	$\frac{3}{4} + \frac{15}{10}$			
f)	$\frac{3}{4} - \frac{15}{10}$			
g)	$\frac{3}{4} \cdot \frac{15}{10}$			
h)	$\frac{3}{4} \div \frac{15}{10}$			

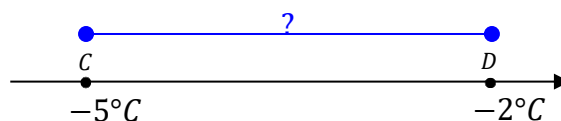
6.8 Cálculo da Distância entre dois Pontos na Reta Numérica com Números Racionais

A medida da distância entre dois pontos da reta numérica do conjunto dos racionais conhecidos os números correspondentes a cada ponto.

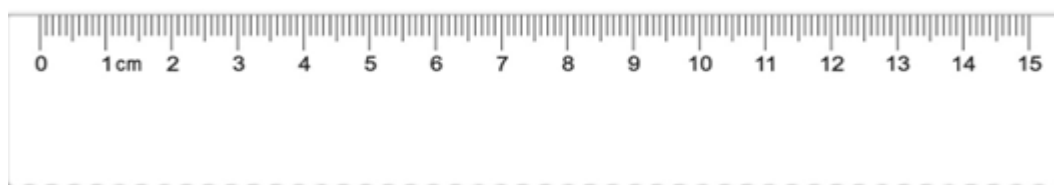
118) Calcule a distância do ponto A ao ponto B observando a reta abaixo. Considere as marcações de tempo nessa reta cujas medidas são dadas em horas.



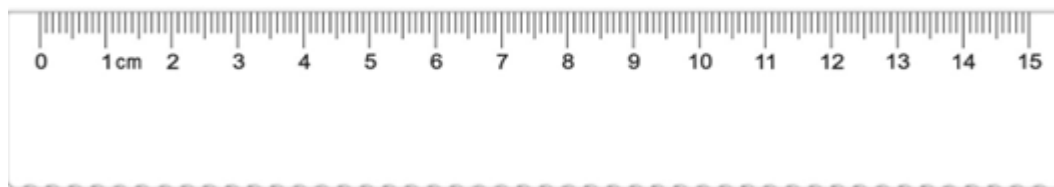
- 119) Calcula a distância do ponto C ao ponto D observando a reta abaixo. Considere as marcações de temperatura nessa reta cujas medidas são dadas em graus Celsius.



- 120) Artur e Diana mediram o comprimento dos seus smartphones. Artur mediu o seu aparelho partir do traço da régua cuja marcação é 0 cm. Já Diana, mediu o tamanho do seu smartphone a partir de 2 cm.
- 121) Sabendo-se que Artur encontrou uma medida de 10 cm, faça o desenho da linha da borda desse aparelho (do segmento de reta) na régua abaixo.



- 122) Sabendo-se que Diana encontrou uma medida de 12 cm, faça o desenho da linha da borda desse aparelho (do segmento de reta) na régua abaixo.

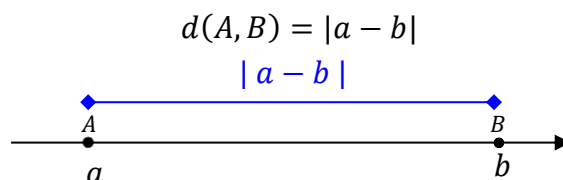


Observações:

- (1) Os tamanhos dos segmentos geralmente são medidos a partir do ponto de origem, cuja marcação é 0 cm, pois isso facilita a leitura das medições das linhas. Nestes casos, o tamanho de um segmento medido a partir de 0cm corresponderá a leitura do número que está abaixo do traço que coincide com o ponto da outra extremidade desse segmento de reta.
- (2) Se quisermos medir um segmento a partir do ponto (1 cm) não poderemos dizer que a medida do segmento medido corresponderá a leitura do ponto, mas é possível efetuar a medida, considerando o cálculo da distância entre dois pontos quaisquer que será enunciada a seguir.
- (3) Nem sempre podemos medir a medida do intervalo entre dois pontos olhando uma figura, mas é possível medir o intervalo, sabendo as marcações numéricas correspondentes as extremidades do segmento que está sendo medido.

Fórmula da distância entre dois pontos de uma reta a partir dos valores numéricos correspondentes a esses pontos.

Definição: Dados dois números inteiros a e b quaisquer, situados respectivamente sobre os pontos A e B de uma reta numérica, a distância entre os pontos A e B , indicada por $d(A, B)$, pode ser obtida pelo cálculo do módulo da diferença entre esses dois números.



Observações:

- 1) Os pontos são entes matemáticos representados por letras maiúsculas; já os números correspondentes a cada um desses pontos da reta, são representados por letras minúsculas.
- 2) Para saber o valor da distância entre os pontos, usamos nos cálculos apenas as marcações numéricas de cada ponto, por isso, essa fórmula vale para qualquer letra; inclusive para situações como, a própria régua, onde não aparece letras dos pontos, mas, sim, o valor numérico do ponto.

123) Assinale com “X” a resposta correta.

- | | | |
|--|---------|---------|
| a) A distância de A a B é igual a distância de B a A ? | () SIM | () NÃO |
| b) $ 5 - 2 = 2 - 5 $? | () SIM | () NÃO |
| c) $ 5 - 0 = 5$? | () SIM | () NÃO |
| d) $ -5 - 0 = 5$? | () SIM | () NÃO |

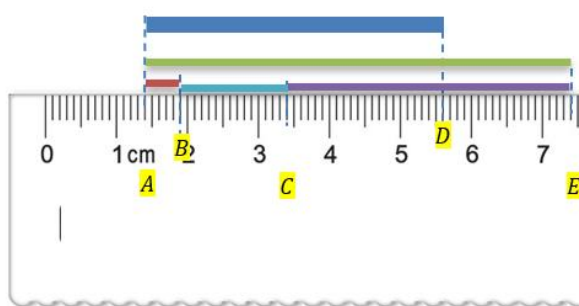
Comentário: A definição de módulo de um número racional x

Dados dois números inteiros 0 e x quaisquer, situados respectivamente sobre os pontos O e P de uma reta numérica. Ao aplicarmos a fórmula da distância, temos:

$$d(P, O) = |x - 0| = |x|$$

Isso significa que para calcular o módulo de um número x , seja ele positivo ou negativo, basta contar quantas unidades ele dista do zero. Ou seja, o módulo, será o próprio número sem o sinal + ou -.

124) Observe a figura abaixo e preencha as duas tabelas a seguir.



Uma régua graduada em cm.

Ponto	Marcação da Régua (cm)
A	
B	
C	2 cm
D	
E	

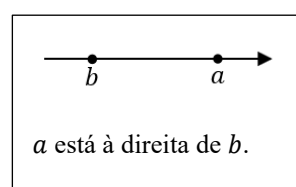
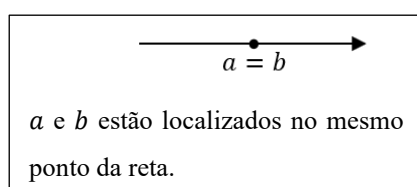
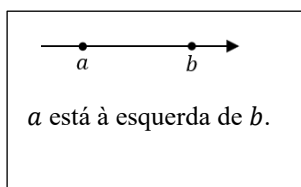
	Cor do segmento	Notação do segmento	Fórmula da distância entre dois pontos	A medida desse segmento é de:
a)	Verde	$\overline{AE}$	$d(A, E) = 0 - 6 = -6 = 6$	6 cm
b)	Azul Escuro			
c)	Vermelho			
d)	Azul Claro			
e)	Lilás			

A visualização geométrica da lei da tricotomia para $|a - b|$

Dados dois números racionais a e b , somente uma das visualizações geométricas das posições desses números na reta numérica é verdadeira. Observe essas possibilidades e a **visualização geométrica de $|a - b|$** :

$$a < b \quad a = b$$

$$a > b$$



125) Considere dois números racionais a e b , representados respectivamente pelos pontos A e B em uma reta numérica. Analise as alternativas a seguir e assinale com um “X” aquela em que os pontos A e B estão mais próximos um do outro. Dica: Quanto menor o valor de $|a - b|$, mais próximos estão os pontos na reta.

- | | |
|-------------------------------|---------------------------------|
| (A) $d(A, B) = a - b = 1$ | (C) $d(A, B) = a - b = 0,01$ |
| (B) $d(A, B) = a - b = 0,1$ | (D) $d(A, B) = a - b = 0,001$ |

126) Considere dois números racionais a e b , representados respectivamente pelos pontos A e B em uma reta numérica. Analise as alternativas a seguir e assinale com um “X” aquela em que os pontos A e B estão mais próximos um do outro.

- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| (A) $a = -2$ e $b = 3$ | (C) $a = -4$ e $b = 2$ |
| (B) $a = 1,5$ e $b = 2,1$ | (D) $a = 0$ e $b = 3,2$ |

ATIVIDADE 7

7.1. Estudo de erros nas aproximações numéricas

Em diversas situações cotidianas, é comum nos depararmos com números que não representam valores exatos, mas sim aproximações. Esse fenômeno ocorre tanto em atividades simples do dia a dia quanto em cálculos matemáticos mais complexos. Por exemplo, ao abastecer um veículo com R\$ 47,87, o valor final registrado pode ser arredondado para R\$ 47,90 ou R\$ 47,80, devido à ausência⁸ de moedas de 1 centavo e 5 centavos no caixa. Esse tipo de ajuste reflete uma necessidade prática: nem sempre é possível operar com precisão absoluta.

Na Matemática, essa mesma ideia se aplica quando lidamos com certos números, como π , $\sqrt{2}$, ou com dízimas periódicas geradas por frações como $\frac{1}{3}$ ou $\frac{14}{23}$. Esses números, por apresentarem infinitas casas decimais, não podem ser totalmente representados em cálculos manuais ou até mesmo em calculadoras, exigindo, portanto, o uso de aproximações.

A atividade a seguir tem como objetivo introduzir o estudo da mensuração dos erros decorrentes das aproximações numéricas e, a partir dessa abordagem, estimular o desenvolvimento do raciocínio crítico dos alunos em relação ao uso consciente da calculadora. Busca-se, assim, capacitá-los a interpretar adequadamente os resultados obtidos e compreender as limitações inerentes à representação numérica nos visores desses dispositivos.

O que são Números Aproximados? Nem sempre é possível representar um número com todos os seus algarismos decimais, seja por limitação do espaço, tempo de cálculo ou por necessidade prática. Quando usamos apenas parte dos algarismos de um número, dizemos que estamos utilizando uma **aproximação** para esse número. O símbolo mais comum e padronizado para indicar aproximação na matemática é o “ $\approx$ ” (é aproximadamente igual a). Os símbolos “ $\cong$ ” e “ $\simeq$ ” são vistos em alguns textos de matemática para esse fim também.

Observações:

(1) Ao longo desse texto, a variável x representará o **valor exato** de um número e $\bar{x}$ um **valor aproximado** de x . Portanto, $\bar{x} \approx x$.

⁸ As moedas de 1 centavo ainda existem. Elas não são mais produzidas no Brasil desde 2005 devido ao alto custo de produção e baixa circulação. Apesar de não serem mais fabricadas, elas ainda são consideradas legais e válidas como meio de pagamento, embora sua presença em transações seja rara. O Banco Central do Brasil não determinou o recolhimento dessas moedas.

(2) O *número exato* é aquele que representa o valor inteiro ou completo de uma grandeza. O *número aproximado* é aquele utilizado para representar o número exato.

127) Complete a tabela abaixo com o auxílio da calculadora padrão de um smartphone e da calculadora do aplicativo Geogebra. Em seguida, compare se os resultados encontrados são iguais. Se forem diferentes, qual deles está com o resultado mais correto no seu ponto de vista?

Números	Resultado do Visor da Calculadora		Os resultados encontrados em ambas as calculadoras são iguais?
	Calculadora Padrão do Smartphone	Calculadora do Geogebra	
a) π			
b) $\sqrt{2}$			
c) $\frac{22}{7}$			
d) $\frac{17}{12}$			

Exemplos: A seguir são apresentados alguns *valores aproximados* para certos números decimais com infinitas casas decimais.

a) $\pi \approx 3,14$ b) $\sqrt{2} \approx 1,41$ c) $\frac{1}{3} \approx 0,333$

Observação: Os valores das aproximações acima são *suficientemente próximos*⁹ para muitos usos práticos.

7.2. Análise dos Erros em Números Aproximados

⁹ Em Topologia, que é uma área da Matemática, a ideia de “pontos suficientemente próximos” está ligada aos conceitos de conjuntos abertos e vizinhanças. Ao dizer que dois pontos estão suficientemente próximos, nesse contexto topológico, significa que existe uma vizinhança de um ponto que também contém o outro ponto.

a) Erro Absoluto

É a diferença entre o **valor exato** e o **valor aproximado**.

$$\text{Erro absoluto} = | \text{valor exato} - \text{valor aproximado} |$$

Definição do Erro Absoluto. Dado o número racional x . Seja $\bar{x}$ uma aproximação para o valor de x , representando o erro absoluto por E_{abs} , temos que:

$$E_{abs} = |x - \bar{x}|$$

b) Erro Relativo

É o erro absoluto em relação ao valor exato. Indica o “tamanho” do erro proporcionalmente ao número analisado.

$$\text{Erro relativo} = \frac{\text{erro absoluto}}{\text{valor exato}}$$

Definição do Erro Relativo. Dado o número racional x . Seja $\bar{x}$ uma aproximação para o valor de x , representando o erro relativo por E_{rel} , temos que:

$$E_{rel} = \frac{E_{abs}}{x} \quad \text{ou} \quad E_{rel} = \frac{|x - \bar{x}|}{x}$$

Para obter o *Erro percentual*, basta multiplicar o erro relativo por 100%.

O truncamento e o arredondamento de um número decimal: Pode ser de duas formas práticas para se obter uma aproximação de um número é por meio do truncamento ou do arredondamento desse número.

Truncamento

O que significa **truncar** um número? Truncar um número significa eliminar as suas casas decimais a partir de uma certa posição, sem fazer arredondamento. Ou seja, corta-se o número na casa desejada e descarta-se o restante.

Exemplo 1: Truncando o número **8,746** na segunda casa decimal: Resultado: **8,74**

Exemplo 2: Truncando o número **5,987** na primeira casa decimal: Resultado: **5,9**

Exemplo 3: Truncando o número **3,999** na parte inteira: Resultado: **3**

Arredondamento

O que significa **arredondar** um número? Arredondar um número significa substituir esse número por outro mais simples ou mais curto, que seja *aproximadamente* igual ao original, de acordo com uma regra definida. O objetivo é facilitar os cálculos ou a leitura de valores, especialmente quando não se precisa de tanta precisão.

Regra de arredondamento:

Para arredondar um número a uma certa **casa decimal**, você deve observar o **dígito seguinte** (à direita): Se esse dígito for **menor que 5**, **mantém-se** o último dígito desejado. Se for **5 ou maior**, **aumenta-se em 1** o último dígito desejado.

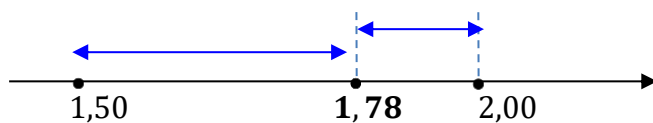
Exemplo: Complete a tabela fazendo o arredondamento dos números fornecidos para uma casa decimal.

	Número	Arredondamento para uma casa decimal
a)	6,47	6,5
b)	3,14	3,1
c)	6,47	6,5
d)	8,999	9,0

128) Qual é a diferença entre truncar o número 5,678 para duas casas decimais e arredondar esse mesmo valor para duas casas decimais?

	Número	Truncamento		Arredondamento	
		para uma casa decimal	para duas casas decimais	para uma casa decimal	para duas casas decimais
a)	5,670				
b)	5,674				
c)	5,675				
d)	5,676				

Números aproximados por falta ou por excesso



Exemplo: Em relação ao número 1,78 (valor exato), o número **1,50** é um número aproximado por falta em relação a 1,78.

$$E_{abs} = |x - \bar{x}| = |1,78 - 1,50| = |0,28| = 0,28$$

O número **2,00** é um número aproximado por excesso em relação a 1,78.

$$E_{abs} = |x - \bar{x}| = |1,78 - 2,00| = |-0,22| = 0,22$$

Contextualização de aproximações numéricas aplicados a compras num mercado

Ao pensar em dinheiro, considerando R\$ 1,78 o preço de uma mercadoria, e a pessoa tendo pago R\$ 1,50 no caixa, o erro de aproximação cometido foi de R\$ 0,28 para menos. Considerando R\$ 1,78 o preço de uma mercadoria, e a pessoa tendo pago R\$ 2,00 no caixa, o erro de aproximação cometido foi de R\$ 0,22 para mais.

Definição: Um número aproximado $\bar{x}$ do valor exato x é um número que difere ligeiramente do número exato. Se $\bar{x} > x$, dizemos que $\bar{x}$ é uma *aproximação por excesso*. Se $\bar{x} < x$, dizemos que $\bar{x}$ é uma *aproximação por falta*.

Exemplo de estudo dos erros nas medições de grandezas físicas

Nos contextos de medição de grandezas, por exemplo, ao medir a massa de um objeto, a qual chamaremos aqui do nome *peso*, usa-se uma balança. Nenhuma balança fornece o peso exato de uma pessoa, pois todo instrumento de medição possui limitações estruturais e depende de fatores externos para a sua operação, fazendo que suas medições não sejam exatas. Portanto, a balança fornecerá um valor aproximado para o seu peso.

Suponhamos que você subiu na balança e leu no seu visor 83,5 kg. Supondo-se que a margem de erro dessa balança seja de 0,2 kg para mais ou para menos, isso significa que seu peso exato está entre 83,3 kg e 83,7 kg.

$$\text{Valor mínimo do peso} < \text{valor do peso exato} < \text{Valor máximo do peso}$$

$$\text{Valor mínimo} = \text{Valor leitura} - \text{Valor da margem de erro} = 83,5 \text{ kg} - 0,2 \text{ kg} = 83,3 \text{ kg}$$

$$\text{Valor máximo} = \text{Valor leitura} + \text{Valor da margem de erro} = 83,5 \text{ kg} + 0,2 \text{ kg} = 83,7 \text{ kg}$$

Logo,

$$83,3 \text{ kg} < \text{valor do peso exato} < 83,7 \text{ kg}$$

Suponhamos que o fabricante de uma balança estipule erro máximo ($E_{m\acute{a}x}$). Isso significa que a diferença entre o peso real (peso exato) da pessoa e o peso medido pela balança não podem ultrapassar um valor de erro específico. $|x - \bar{x}| < E_{m\acute{a}x}$.

Logo, $\bar{x} - E_{m\acute{a}x} < x < \bar{x} + E_{m\acute{a}x}$.

Assim como é impossível medir com total exatidão o peso de uma pessoa, também não é possível realizar certos cálculos com exatidão em uma calculadora. No entanto, em muitas aplicações práticas, os erros de aproximação são desprezíveis.

Exercícios Propostos

129) Complete a tabela:

	Número	Truncamento		Arredondamento	
		para uma casa decimal	para duas casas decimais	para uma casa decimal	para duas casas decimais
a)	4,786				
b)	9,5231				
c)	7,804				
d)	0,9999				

130) Faça as divisões abaixo em uma calculadora e complete a tabela abaixo:

	Número	Os cinco primeiros dígitos são:	Truncamento na terceira casa decimal	Arredondamento na terceira casa decimal.
a)	$10 \div 3$			
b)	$22 \div 7$			
c)	$7 \div 6$			
d)	$2 \div 11$			

131) Exemplifique uma situação em que é mais adequado *arredondar* um número e outra em que é mais adequado *truncar* esse número para uma casa decimal?

132) Um supermercado vende maçãs a R\$ 7,996 o quilo. Por uma questão de etiqueta e visualização para o cliente, o preço será arredondado para apresentar duas casas decimais. Qual será o valor exibido na etiqueta?

133) **Pesquise:** as calculadoras científicas possuem alguma tecla especial usada para aproximações numéricas? Qual comando no *Excel* usado para fazer a aproximação numérica de um valor?

134) Complete a tabela abaixo.

Obtenção de $\bar{x}$

(a) Arredondando 4,784 para duas casas decimais;

(b) Arredondando 4,784 para uma casa decimal;

(c) Arredondando 4,784 para um número inteiro.

Dados:		Resposta: Aproximação por falta ou por excesso?	Calcule:		
Número exato	Valor aproximado		Erro absoluto	Erro relativo	Erro relativo percentual
x	$\bar{x}$		$ x - \bar{x} $	$\frac{ x - \bar{x} }{x}$	$\frac{ x - \bar{x} }{x} \cdot 100\%$
a) 4,784					
b) 4,784					
c) 4,784					

135) Complete a tabela abaixo.

Obtenção de $\bar{y}$

(a) Truncar 4,784 a partir da 2ª casa decimal;

(b) Truncar 4,784 a partir da 1ª casa decimal;

(c) Truncar 4,784 a partir da parte inteira;

Dados:		Resposta: Aproximação por falta ou por excesso?	Calcule:		
Número exato	Valor aproximado		Erro absoluto	Erro relativo	Erro relativo percentual
y	$\bar{y}$		$ y - \bar{y} $	$\frac{ y - \bar{y} }{y}$	$\frac{ y - \bar{y} }{y} \cdot 100\%$
a) 4,786					
b) 4,786					
c) 4,786					

136) **Desafio:** Resolva o exercício acima através do aplicativo do Excel ou aplicativo similar.

ATIVIDADE 8

8.1. Inverso multiplicativo de forma contextualizada

O conceito de inverso multiplicativo é uma ferramenta fundamental na Matemática e está presente em diversas situações do cotidiano escolar, especialmente no estudo dos números racionais e das equações. Nesta atividade, os alunos serão convidados a explorar diferentes aplicações desse conceito, aprofundando sua compreensão por meio do uso da calculadora e da resolução de problemas. Inicialmente, será abordado o uso da tecla de inverso (ou tecla “ $1/x$ ”) presente nas calculadoras, que permite realizar divisões de forma alternativa e eficiente. Ao invés de digitar uma divisão como $a \div b$, o aluno poderá usar a multiplicação de a pelo inverso de b , isto é, $a \cdot \frac{1}{b}$, reforçando a ideia de que dividir por um número é o mesmo que multiplicar pelo seu inverso. Outro ponto a ser explorado é a observação de que, ao calcular os inversos dos números inteiros maiores do que 1, como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ..., percebemos que existem infinitos números racionais entre 0 e 1. Essa ideia amplia a noção de densidade dos racionais na reta numérica e contribui para o desenvolvimento de um pensamento mais abstrato e crítico por parte dos alunos. Por fim, será trabalhada a utilidade do inverso multiplicativo na resolução de equações do 1º grau com uma incógnita, sobretudo em situações em que o coeficiente da variável precisa ser “eliminado” para isolar a incógnita. Nesses casos, multiplicar ambos os membros da equação pelo inverso do coeficiente é uma estratégia eficiente e conceitualmente fundamentada.

A divisão de inteiros com a tecla de inverso “ $1/x$ ”

Você sabia que ... através da tecla “o inverso multiplicativo de um número não nulo” podemos dividir dois números inteiros sem usar a tecla de divisão?

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

Lê-se: O quociente entre a e b é igual ao produto/ de a pelo inverso de b .

137) Preencha a tabela abaixo com o auxílio da tecla inverso da calculadora.

	O inverso de 2 é:	O inverso de 4 é:	O inverso de 5 é:	O inverso de 8 é:	O inverso de 10 é:
a) Representação <i>fracionária</i>		$\frac{1}{4}$			
b) Representação <i>decimal</i>		0,25			

138) Ordene as os inversos de 2, 4, 5, 8 e 10 representados na *forma de fração* em ordem crescente.

Ordem crescente					
--------------------	--	--	--	--	--

139) Ordene as os inversos de 2, 4, 5, 8 e 10 representados na *forma decimal* em ordem crescente.

Ordem crescente					
--------------------	--	--	--	--	--

140) O que aconteceu na tabela acima com os valores de $\frac{1}{x}$ à medida o valor de x aumentava: o valor de $\frac{1}{x}$ aumentou ou diminuiu? À medida que o valor de $\frac{1}{x}$ diminui, esses valores estão se aproximando de qual número inteiro?

A quantidade de números racionais entre dois n^{os} inteiros consecutivos

141) Represente os números $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$ na reta numérica.

142) Quantos números racionais existem no intervalo 0 e 1? Justifique sua resposta explorando o comportamento de $1/x$ à medida que os valores de x aumentam, considerando $x > 1$, e relacione isso à densidade dos números racionais nesse intervalo.

8.2. Resolução de equações do 1º grau a uma incógnita

Você sabia que ... através da propriedade do inverso multiplicativo de um número podemos resolver equações do 1º grau a uma incógnita usando a relação abaixo?

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

Lê-se: Um número diferente de zero multiplicado pelo seu inverso multiplicativo é igual a 1.

- 143) Resolva a equação do primeiro grau na incógnita x abaixo considerando que a e b são números inteiros e a é diferente de zero.

$$a \cdot x = b$$

- 144) Resolva a equação do primeiro grau na incógnita x abaixo considerando que a , b e c são números inteiros e a é diferente de zero.

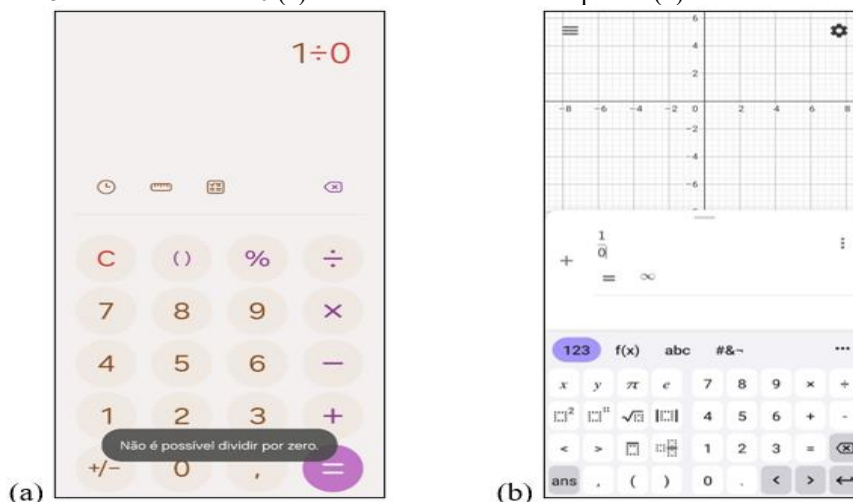
$$a \cdot x + b = c$$

ATIVIDADE 9

9.1. Análise do gráfico da função: $y = a/x$ e suas implicações

A divisão por zero não é possível. Segundo a relação fundamental da divisão (ou divisão euclidiana), uma divisão entre dois números inteiros só é possível quando o divisor é diferente de zero. Por isso, as calculadoras exibem, nesses casos, mensagens de erro. Eis alguns exemplos encontrados nos visores de smartphones ou calculadoras portáteis simples: “erro”, “indefinido” ou “não é possível dividir por zero”. Contudo, algo inesperado surgiu em sala de aula: um aluno encontrou que 1 dividido por zero é igual a ∞ . Nesta lição, será investigado o porquê do resultado aparecer “ ∞ ” nos visores de algumas calculadoras.

Figura 18: Resultados de $1 \div 0$ (a) Calculadora de um smartphone (b) calculadora Geogebra



Neste contexto, busca-se, nesta atividade, responder a esta pergunta através do estudo do inverso de um número inteiro qualquer diferente de zero. Esta atividade está centrada no estudo do inverso de um número inteiro, e dos seus usos na Matemática. A calculadora gráfica Geogebra terá um papel muito importante. A partir de atividades guiadas no Geogebra, buscase o entendimento de noções como relações entre grandezas inversas e o comportamento inversamente proporcional entre x e y na relação $y = \frac{a}{x}$, onde a é uma constante inteira.

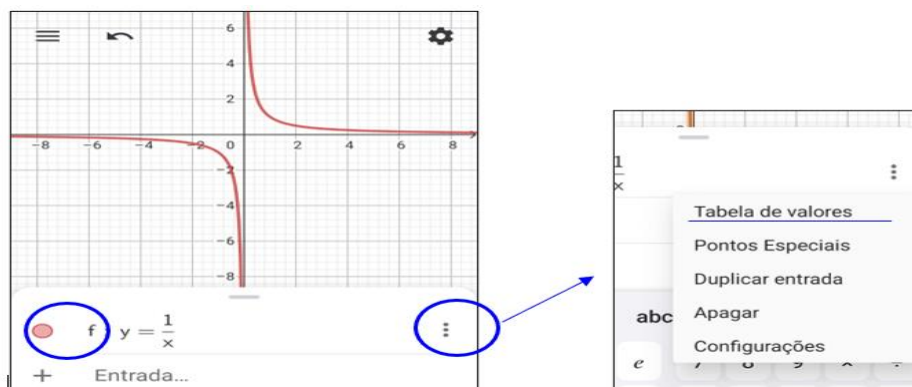
Exercícios Propostos no Geogebra

145) Siga os passos a seguir para plotar a função $y = \frac{1}{x}$ no Geogebra.

- Abra o aplicativo “Calculadora Gráfica Geogebra”;
- Clique nas teclas da calculadora conforme a sequência abaixo.

$$\boxed{y} \rightarrow \boxed{=}\rightarrow \boxed{1} \rightarrow \boxed{\div} \rightarrow \boxed{x} \rightarrow \boxed{\leftarrow}$$

Figura 19: Gráfico da função $y=1/x$ gerada pelo Geogebra.



Comentário: O gráfico da função será o conjunto de pontos (x, y) que pertencem a função. Após a inserção dos comandos de plotagem¹⁰, o gráfico será exibido com uma cor e um nome para a função. Observe o círculo azul da figura acima que indica a cor do gráfico e o nome da função que foram gerados pelo Geogebra.

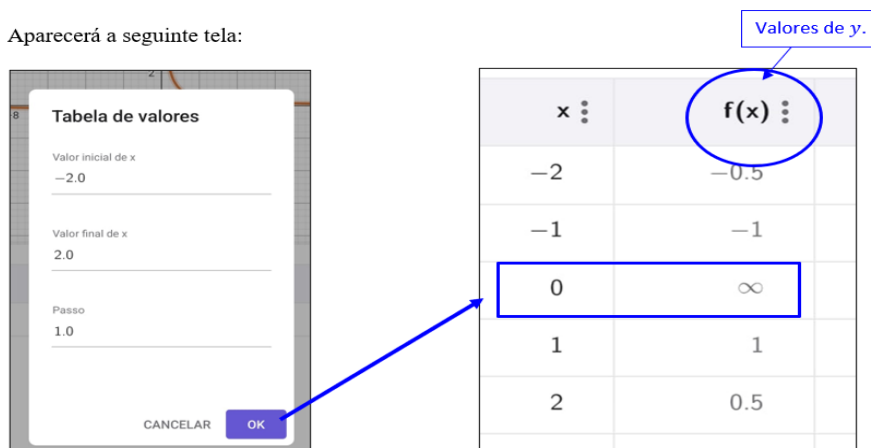
Análise da tabela de valores de x e y gerada automaticamente pelo Geogebra

Após entrar com a plotagem de $y = \frac{1}{x}$ no Geogebra, podemos acessar, pelo aplicativo a *tabela* correspondente a esta função. Uma função pode ser observada pelo seu gráfico ou por uma tabela de valores a qual relaciona a variável dependente(y), com a variável independente (x) através da lei de formação da função ($y=1/x$).

Clique nos três pontinhos. Escolha a opção “tabela de valores”.

Figura 20: (a) Janela para ajustar os limites de x . (b) Tabela de valores de x e de $y=f(x)$.

Aparecerá a seguinte tela:



¹⁰ Plotar significa criar uma representação visual de dados em um sistema de coordenadas, geralmente em duas ou três dimensões

Comentários:

1) Clicando em “OK”, aparecerá a janela “TABELA DE VALORES”, onde pode-se configurar o valor inicial e o valor final de x que aparecerá na tabela, os quais serão calculados os respectivos valores de y . Também é possível configurar o “passo”. O passo indica como os valores de x vão aumentando a partir do valor inicial de x escolhido. Por exemplo, no caso das figuras ilustradas acima, o **passo é 1**, o que significa que após o primeiro valor de x , que é o -2 , os seguintes valores de x serão somados de 1 em 1 até se chegar ao valor final de x , que está configurado como 2.

2) Para mudar as configurações dos valores inicial e final de x e o passo, podemos clicar nos três pontinhos que aparecem ao lado do x , conforme ilustra a figura a seguir:

Figura 21: Opções de edição da tabela.

Clicando nesses “três pontinhos” obtemos as seguintes opções:

- EDITAR
- ELIMINAR COLUMNA
- IMPORTAR DADOS
- ESTATÍSTICAS

x ⋮	$f(x)$ ⋮
-2	-0.5
-1	-1
0	∞
1	1
2	0.5

O menu de opções acessado pelo ícone de três pontos na coluna x contém:

- Editar
- Eliminar Columna
- Importar dados
- x Estatísticas

Observações:

1) Clique em “Editar”, caso deseje configurar novamente a “tabela de valores de x e y ”. Os demais comandos: “Eliminar Columna”, “Importar Dados” e “Estatística” não temos o objetivo de usar nesse momento, contudo você poderá explorar esse aplicativo fantástico para conhecer mais as suas funcionalidades.

2) Ao clicar numa célula da coluna do x é possível inserir valores ou apagando um valor de x já existente na célula, ou clicando em uma célula em branco.

Criação de tabelas de pontos x e y no Geogebra: Explorando o comportamento da função $f(x) = 1/x$ em torno do ponto $x = 0$.

1º Estudo: Comportamento da função $y = 1/x$ para valores de x positivos que se aproximam do zero pela direita e pela esquerda.

146) Complete as tabelas abaixo usando sua calculadora do smartphone.

Figura 22: Valores de x aproximando-se de zero (a) pela direita (b) pela esquerda.

(a)	x	$y = \frac{1}{x}$	y
	1		
	0,1	$y = \frac{1}{0,1}$	10
	0,01		
	0,001		
	0,0001		

(b)	x	$y = \frac{1}{x}$	y
	-1		
	-0,1	$y = \frac{1}{-0,1}$	-10
	-0,01		
	-0,001		
	-0,0001		

Comentário: Embora o preenchimento dessa tabela seja mais fácil usando a calculadora padrão com a função inverso, o tutorial a seguir, indicará como completar essas tabelas.

147) Criando uma tabela de valores de x e y manualmente pelo Geogebra

- Abra o aplicativo Geogebra. Aparecerá a tela da Fig 29;
- Clique no canto inferior direito da tela que apareceu, a opção “Planilha de Cálculos” – Fig. 29.

Figura 23: (a) Tela inicial do aplicativo Geogebra e (b) Ferramentas do Geogebra.

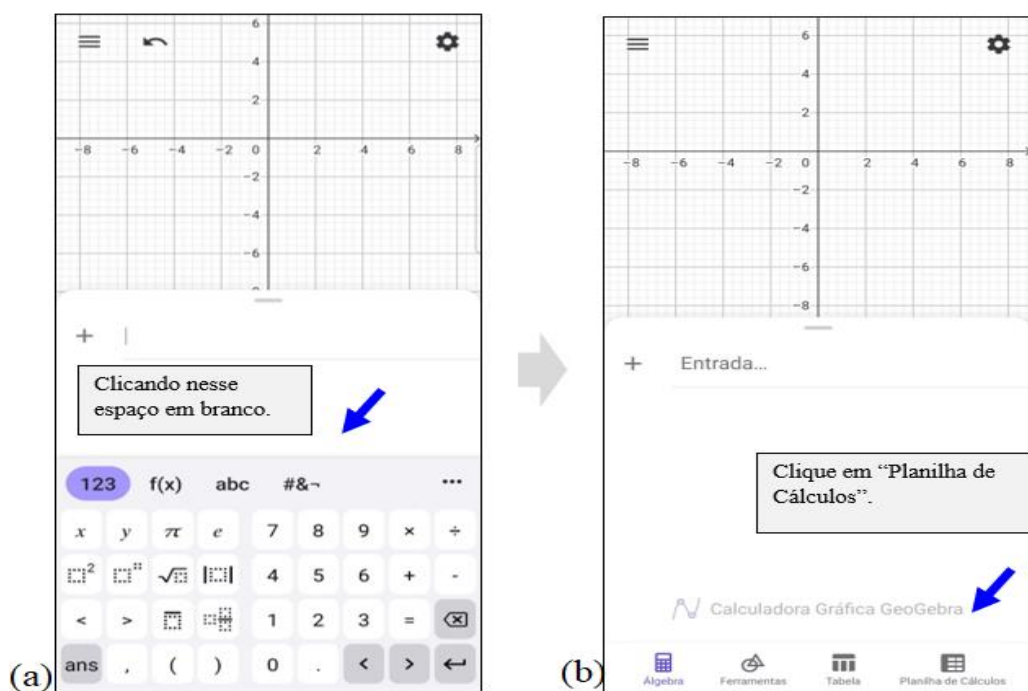
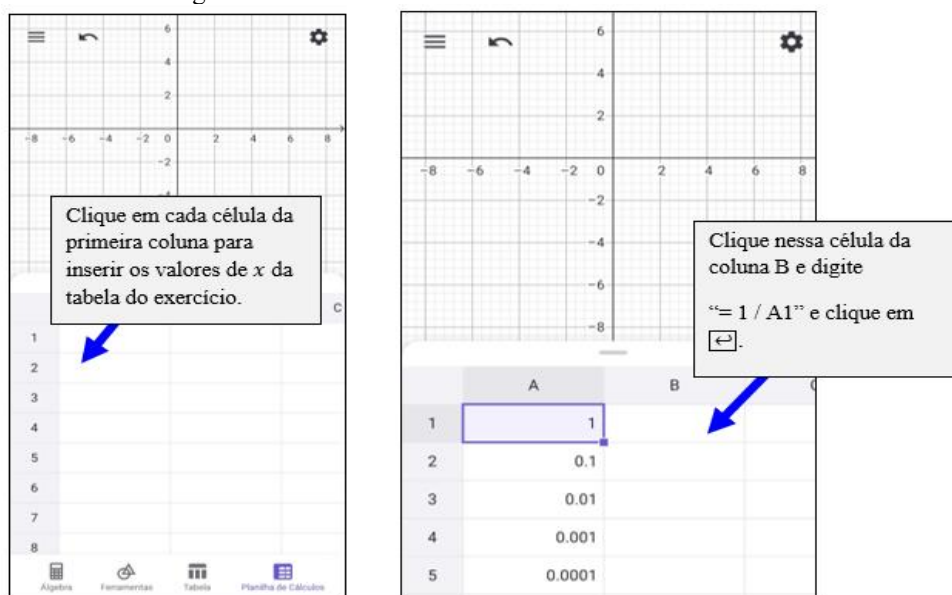


Figura 24: Inserindo valores de x na "Planilha de Cálculos".



Atenção! Para digitar na célula alguns símbolos você precisará trabalhar com os menus acima do teclado da calculadora que permitem inserir letras etc.

Figura 25: Configurando as células que calculam os valores de y

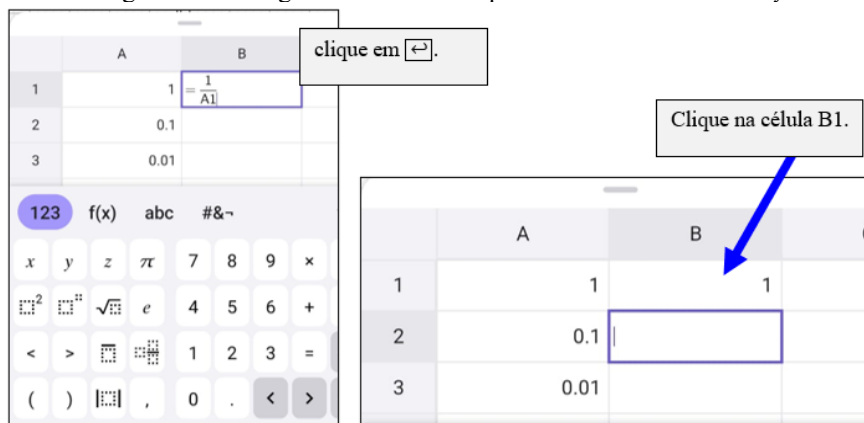


Figura 26: Seleccionando uma célula com uma fórmula definida

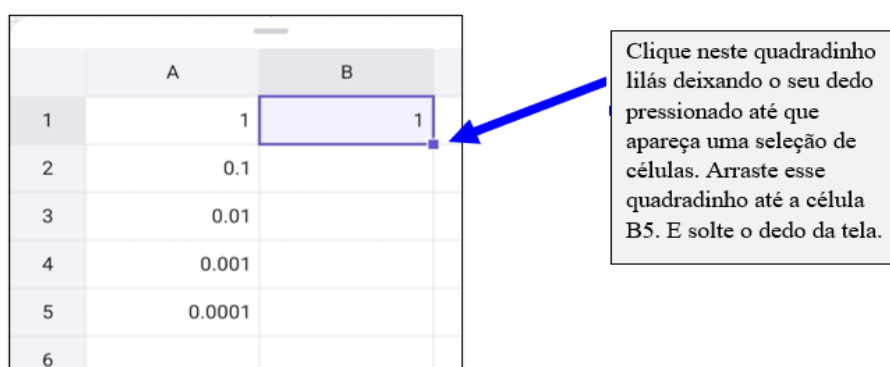
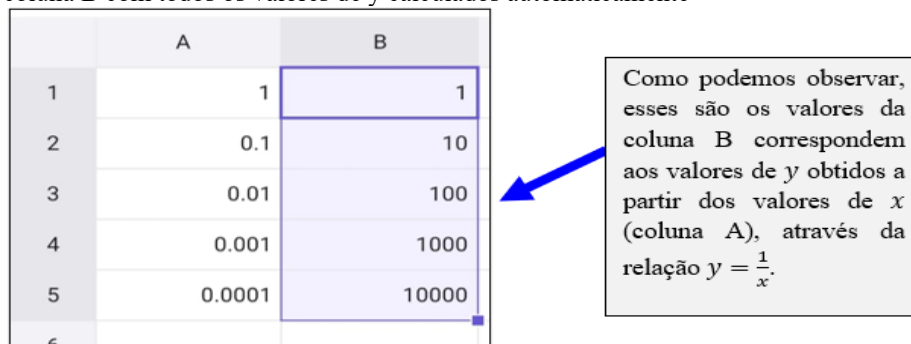


Figura 27: A coluna B com todos os valores de y calculados automaticamente



9.2. Estudo da variação de y em função de x a partir dos dados tabelados

Análise da variação de y a partir dos valores de x , quando x tende a zero pela direita

Observa-se, na tabela, que à medida que os valores de x vão diminuindo sucessivamente em uma razão de 10 (ou seja, a cada passo x se torna 10 vezes menor do que o anterior), eles se aproximam cada vez mais do zero. Ao mesmo tempo, os valores correspondentes de y aumentam em uma razão de 10, ou seja, tornam-se 10 vezes maiores a cada passo. Esse comportamento faz com que a sequência de valores de y cresça rapidamente, atingindo números cada vez mais elevados.

Análise da variação de y a partir dos valores de x , quando x tende a zero pela esquerda

Para completar a tabela de $y = \frac{1}{x}$, onde os valores de x tendem a zero pela esquerda, vamos usar a mesma planilha que utilizamos recentemente no Geogebra, pois o que difere uma da outra é o sinal de " - " de x . As células de x serão editadas através do passo a passo a seguir.

Figura 28: Editando uma célula com novos valores de x

1º) Selecione a célula desejada e clique no botão de cursor, sentido para esquerda.

2º) Ao clicar nesse cursor, você poderá selecionar a posição para inserir o sinal de negativo no número. Clique no sinal “-“, e em seguida clique no botão para prosseguir para a próxima célula.

Após essas inclusões do sinal de “-“, a coluna com os respectivos valores de y já estará atualizada.

Figura 29: Valores de $f(x)=y; x<0$

	A	B
1	-1	-1
2	-0.1	-10
3	-0.01	-100
4	-0.001	-1000
5	-0.0001	-10000
6		

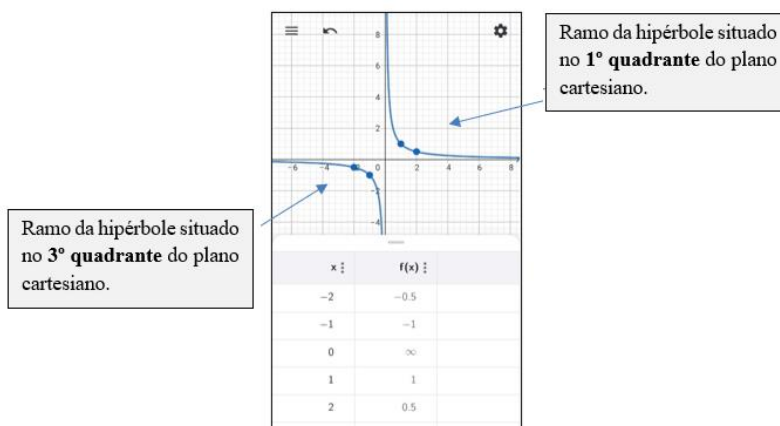
Análise da variação de y a partir dos valores de x , quando x tende a zero pela esquerda

Observa-se que à medida que os valores de x vão **aumentando** sucessivamente em uma razão de 10 (ou seja, a cada passo x se torna 10 vezes **maior** do que o anterior), eles se **afastam** cada vez mais do zero. Ao mesmo tempo, os valores correspondentes de y **diminuem** em uma razão de 10, ou seja, tornam-se 10 vezes **menores** a cada passo. Esse comportamento faz com que a sequência de valores de y **diminua** rapidamente, atingindo números cada vez **menores** .

Análise do gráfico da função $y = \frac{1}{x}$

O gráfico da função $y = \frac{1}{x}$ é chamado de *hipérbole equilátera*. Podemos observar que existe um ramo da hipérbole no 1º quadrante do plano cartesiano, e o outro ramo dessa hipérbole no 3º quadrante desse plano cartesiano.

Figura 30: Hipérbole equilátera



✚ No 1º quadrante, observa-se que à medida que os valores de x vão se aproximando de zero, os valores de y vão crescendo de forma muito rápida, de tal forma que parece que a hipérbole (linha azul) toca o eixo dos y , contudo ela se aproxima cada vez mais do eixo de y , mas nunca tocará o eixo do y . Portanto, à medida que x se aproxima do zero pela direita, os valores de y estão indo para o infinito (positivo).

✚ No 3º quadrante, observa-se que à medida que os valores de x vão se aproximando de zero pela esquerda, os valores de y vão diminuindo de forma muito rápida, de tal forma que parece que a hipérbole (linha azul) toca o eixo dos y , contudo ela se aproxima cada vez mais do eixo de y , mas nunca tocará o eixo do y . Portanto, à medida que x se aproxima do zero pela esquerda, os valores de y estão indo para o infinito (negativo).

Um contexto em que a aproximação por zero também vai ao infinito:

O número de imagens (n) formado por dois espelhos planos, que formam um ângulo α entre si é obtido pela fórmula:

$$n = \frac{360^\circ}{\alpha} - 1$$

Quando esses espelhos estão paralelos entre si, o ângulo α é zero. Mas, se fosse considerado zero nessa substituição, não haveria como fazer o cálculo, já que divisão por zero é indefinida. Mas, ao analisar-se o ângulo α se aproximando de 0° (zero grau), o resultado da divisão se aproxima do infinito, indicando um número muito grande de imagens. Portanto, neste contexto, a divisão por zero, está ligado a ideia de limite no estudo de funções.

Figura 31: Infinitas imagens formadas entre dois espelhos paralelos



Fonte: <https://brasilescola.uol.com.br/fisica/espelhos-paralelos.htm>

9.3. O curioso caso das dízimas periódicas iguais a inteiros:

Afirmção: $0,999... = 1$

Demonstração: A dízima periódica $0,999...$ está escrita na sua representação decimal. Portanto, podemos escrevê-la numa soma considerando o valor posicional de cada um de seus dígitos.

$$0,999... = 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 ...$$

Ou ainda, podemos escrever:

$$0,999... = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} ...$$

Considerando n um número natural maior do que ou igual a 1 e denotando por S_n , o valor da soma dos termos até a posição n , temos:

S_n	$= a_1 + a_2 + \dots + a_n$	Parcelas na forma de fração	Parcelas na forma decimal
S_1	$= a_1$	$= \frac{9}{10}$	$= 0,9$
S_2	$= a_1 + a_2$	$= \frac{9}{10} + \frac{9}{100}$	$= 0,9 + 0,09 = 0,99$
S_3	$= a_1 + a_2 + a_3$	$= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000}$	$= 0,9 + 0,09 + 0,009 = 0,999$
S_4	$= a_1 + a_2 + a_3 + a_4$	$= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000}$	$= 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009$ $= 0,9999$

À medida que é acrescida uma casa decimal com o dígito 9 cada vez mais próximo esse número estará do número 1.

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

a_1 : é o primeiro termo;
 q : é a razão da PG, onde $|q| < 1$.
 S : é a soma dos termos da PG infinita.

Essa **soma** é conhecida na matemática como **série geométrica**, pois é a soma de termos de uma progressão geométrica (PG), que é uma sequência numérica onde cada termo é obtido multiplicando o termo anterior por um mesmo número.

$$S = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} \dots$$

Essa progressão geométrica é infinita, o seu primeiro termo é $\frac{9}{10}$ e a sua razão é $\frac{1}{10}$.

Através dessa informação, podemos utilizar a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita, já que a razão dessa PG é $\frac{1}{10}$, que satisfaz a uma condição necessária que é da razão da PG ser um valor em módulo entre 0 e 1.

Na série acima, temos $a_1 = 0,9$ e $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{9}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{9}{100} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{10}$. Substituindo esses valores na fórmula da soma dos termos de uma PG infinita, temos:

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{0,9}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{0,9}{1 - 0,1} = \frac{0,9}{0,9} = 1$$

Portanto, $0,999 \dots = 1$.

Como se chega à fórmula da *PG infinita* a partir da fórmula da *PG finita*? A fórmula do **termo geral** da *PG* permite encontrar o valor de qualquer termo da *PG* conhecendo algumas informações n (posição do termo na sequência), a_1 (o valor do primeiro termo) e q (razão da *PG*).

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

A fórmula da soma dos termos de uma **PG finita** é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Quando q é um número entre 0 e 1 ou entre 0 e -1 , essa *PG* **converge** para um valor S . À medida que n cresce, a soma S_n converge para o valor S .

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Vamos usar o Geogebra para visualizar que q^n converge para zero, quando $|q| < 1$.

Tomando o valor de $q = 0,1$, que é a razão relacionada a série da nossa dízima (0,999...), podemos descobrir que o valor desse q^n tende a zero, à medida que n tende ao infinito. Complete a tabela abaixo usando a calculadora do smartphone e a tecla de potência x^y .

Tabela 4: Valores de q^n , onde $q = 0,1$.

n	$y = 0,1^n$	y
1	$y = 0,1^1$	0,1
2	$y = 0,1^2$	0,01
3	$y = 0,1^3$	0,001
4	$y = 0,1^4$	0,0001
10	$y = 0,1^{10}$	0,0000000001

Como q^n está se aproximando de zero à medida que n tende ao infinito, logo, podemos substituir q^n por zero dentro dos parênteses do numerador da fração.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Substituindo q^n por zero, temos:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} \Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 \cdot (-1)}{q - 1} \Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-a_1}{q - 1}$$

Multiplicando ambos os termos da fração $\frac{-a_1}{q-1}$ por -1 , temos: $\frac{a_1}{-(q-1)} = \frac{a_1}{1-q}$

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

ATIVIDADE 10

10.1. Decimal exato ou dízima periódica?

É possível saber se uma divisão de inteiros resulta em um número decimal exato, uma dízima periódica ou um número decimal não exato e não periódico apenas consultando o visor da calculadora? Essa questão é mais profunda do que aparenta, pois envolve o reconhecimento da natureza dos números racionais e irracionais, além do entendimento das limitações técnicas dos dispositivos eletrônicos. Ao realizar uma operação de divisão, a calculadora fornece uma representação decimal do quociente, porém, essa representação é finita e, muitas vezes, truncada ou arredondada. Assim, o visor da máquina pode não revelar, de forma evidente, se o número é uma dízima periódica ou um decimal exato, o que pode gerar interpretações equivocadas para uma pessoa que não sabe da existência de números decimais que possuem infinitas casas decimais, ou até mesmo que possui um número finito de casas decimais, contudo que não pode ser observado pelo visor de uma calculadora, já que a mesma, tem limitações exibição de resultados.

Propõe-se uma revisão teórica guiada com exemplos e exercícios de forma que o aluno possa compreender a técnica que será usada para classificar se os resultados da divisão entre dois inteiros é um decimal exato ou dízima periódica independente do uso da calculadora. Também se propõe uma reflexão de formas alternativas para a investigação dos resultados de uma calculadora através de softwares matemáticos como o Maple. E reflete-se aqui que o uso da Inteligência Artificial deve sempre ser usá-lo de forma reflexiva, pois esta pode errar no processamento e apresentação de resultados matemáticos.

10.2. Divisão de Números: Calculadora, GeoGebra e ChatGPT em Comparação

A calculadora nativa de um smartphone

- 148) Calcule $2014 \div 83$ usando a calculadora do seu smartphone. Em seguida, verificar e se é possível determinar se esse resultado é um decimal exato, dízima periódica ou decimal não exato através do visor da calculadora.

Figura 32: Calculadora do Android



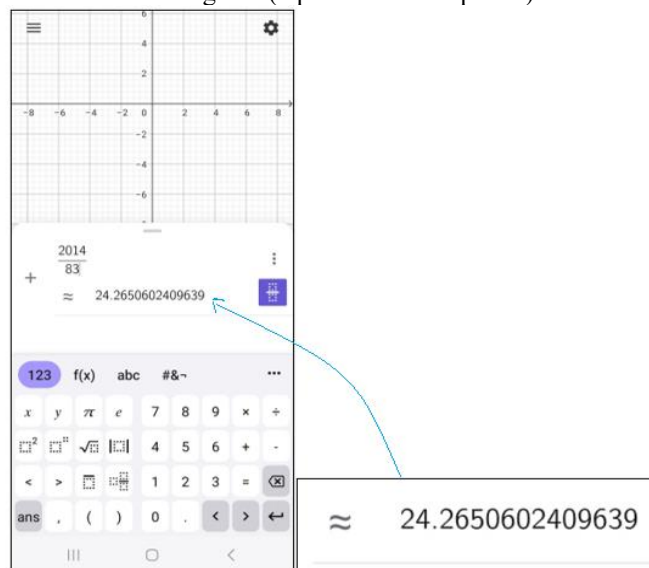
Resposta: O resultado encontrado pela calculadora foi 24,265060241.

O Display exibe um *número decimal exato*, contudo, $2024 \div 83$ é uma dízima periódica, pois 83 é um número primo. Logo, o resultado do Display é uma aproximação do valor real desse número e o último algarismo 1 é duvidoso.

A calculadora do Geogebra

- 149) Calcule $2014 \div 83$ usando a calculadora gráfica Geogebra. Em seguida, verificar e se é possível determinar se esse resultado é um decimal exato, dízima periódica ou decimal não exato através do visor da calculadora. **Observação:** Faça esse exercício no seu smartphone.

Figura 33: Calculadora do Geogebra (Aplicativo Smartphone)



Resposta: O resultado encontrado pela calculadora Geogebra foi 24,2650602409639.

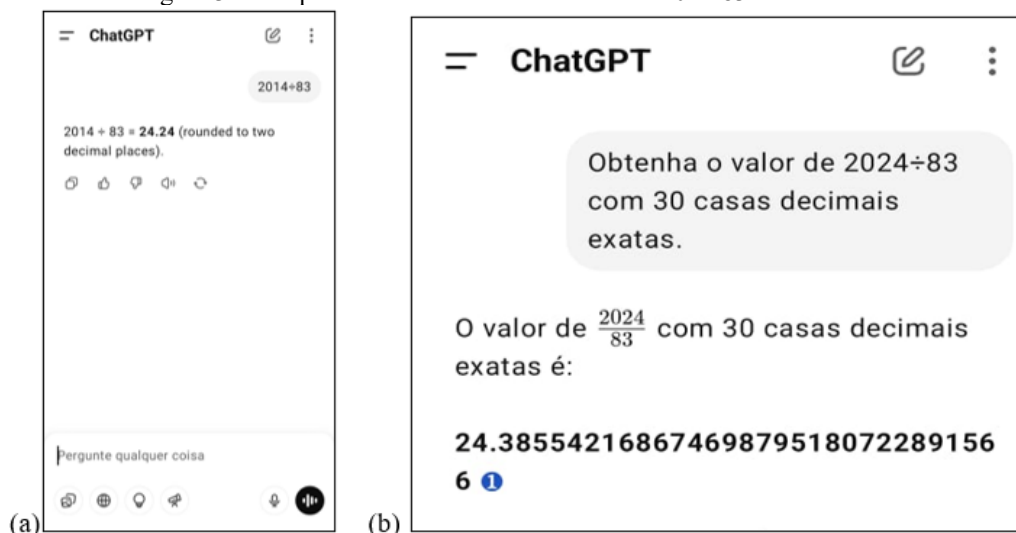
O visor exibe um *número decimal exato*, contudo, $2024 \div 83$ é uma *dízima periódica*, pois 83 é um número primo. Logo, o resultado do visor é uma aproximação do valor real desse número e o último algarismo 9 é duvidoso. Observe que o visor da calculadora Geogebra exibe mais casas decimais comparado a calculadora do smartphone.

ChatGPT como Ferramenta de Cálculo: Dividindo Números

150) Verifique se os resultados das pesquisas a seguir no aplicativo **ChatGPT** (versão smartphone) estão de acordo com os resultados encontrados na calculadora padrão do smartphone e a do aplicativo Geogebra.

- Qual é o valor de $2014 \div 83$?
- Obtenha o resultado de $2014 \div 83$ com 30 casas decimais exatas.
- $2014 \div 83$ é um número decimal exato ou uma *dízima periódica*?
- Qual é o período da *dízima periódica* obtida por $2014 \div 83$?

Resoluções

Figura 34: Pesquisa dos resultados da divisão de $2024/83$ no ChatGPT

Resposta: a) Inicialmente, o ChatGPT, apresentou o resultado da pesquisa $2014 \div 83$ com uma aproximação de duas casas decimais.

Resposta: b) Em seguida, pesquisou-se por “obtenha o valor de $2014 \div 83$ com 30 casas decimais exatas.” O aplicativo exibiu diversas casas decimais, contudo ainda assim, não daria para saber se o número era um decimal exato ou periódico. Cabe salientar, que descartamos que esse resultado é um número irracional (número que não é racional), já que toda a divisão de inteiros, onde o segundo é diferente de zero é um número racional.

A Divisão de 2014 por 83 no ChatGPT: Um Olhar sobre o Algoritmo Utilizado

Figura 35:Resultado da divisão de $2014 \div 83$ com 30 casas decimais exatas.

24.385542168674698795180722891566
6 ⓘ

O ChatGPT apresentou nessa pesquisa, um ponto de exclamação azul. A partir desse ponto de exclamação, a inteligência artificial permitiu visualizar o código de programação que foi utilizado para realizar essa operação.

Figura 36: Algoritmo do ChatGPT para calcular $2014 \div 83$ com 30 casas decimais exatas.

×

Resultado do código

```
# Set precision to 35 digits
to ensure 30 exact decimal
places
getcontext().prec = 35

# Perform the division with
high precision
numerator = Decimal('2024')
denominator = Decimal('83')
result = numerator /
denominator

# Format result to 30 decimal
places
formatted_result =
format(result, '.30f')
formatted_result
```

Analisando essas 30 casas decimais, ainda não é possível saber se o resultado tenderá a um número decimal exato ou uma dízima periódica, já que não é possível ver um padrão de repetição nas casas decimais.

Sendo assim, foi proposta uma pergunta ao ChatGPT neste sentido de perguntá-lo se o resultado da operação é um número decimal exato ou dízima periódica.

Figura 37: Pesquisas no ChatGPT sobre a periodicidade da dízima obtida por uma divisão

geral, se o resultado de uma divisão é um número decimal exato. Esse tipo de análise torna-se especialmente relevante em casos mais complexos, como na divisão de 2014 por 83, em que o número exibido no visor da calculadora não permite, à primeira vista, reconhecer a natureza do resultado. Nesta atividade é apresentada uma sequência didática de métodos que culminarão ao entendimento do critério geral, capaz de esclarecer definitivamente se o resultado será um decimal exato ou não.

Bases Conceituais para a Compreensão do Tema (Parte I)

- Número Decimal Exato

Definição: Um *número decimal exato* é um número racional cuja representação decimal possui um número finito de casas decimais.

- Fração Decimal¹¹

Definição: Chamamos de *frações decimais* aquelas que tem denominadores iguais a 10, 100, 1000, etc., ou seja, potências de 10. (DANTE, 2012)

- A relação entre o nº decimal exato e a fração decimal

“Todo número decimal exato pode ser escrito na forma de uma fração com denominador 10, 100, 1000, etc., ou seja, uma fração decimal.” (DANTE, 2013)

151) Qual é a *fração decimal* correspondente a fração $\frac{7}{2}$?

Solução: Como $\frac{7}{2} = 3,5$ que é um nº decimal exato, logo, podemos encontrar a fração decimal correspondente através da regra estudada na seção 7.6.3 do Capítulo 7.

Logo, $\frac{7}{2} = 3,5 = \frac{35}{10}$

¹¹ Embora muitos autores definam frações decimais como aquelas cujo denominador é uma potência de base 10, poucos fazem referência explícita à natureza do numerador. No entanto, observa-se que em todos os exemplos apresentados nas obras de Dante (2001) e Ripoll et al. (2011), os numeradores são sempre inteiros, o que reforça a compreensão de que frações decimais representam a divisão de um número inteiro por 10, 100, 1000 etc.

Você sabia que.... há casos em que a divisão de dois inteiros é um número decimal exato, mas isso não fica claro no visor da calculadora, pois este número decimal possui um número de casas decimais maior do que a capacidade máxima de dígitos que o visor pode mostrar ou da capacidade de cálculo da máquina?

Suponhamos que você tenha uma fração cuja representação decimal não seja possível descobrir pelo resultado exibido no visor da calculadora se é um decimal exato ou dízima periódica, como foi estudado com a divisão $2024 \div 83$. Nestes casos, quando não sabemos se o número é decimal exato, podemos pensar no seguinte:

1º Método de Investigação: Comparando a fração desejada, com frações decimais com um numerador desconhecido.

152) Encontre o valor de x usando uma calculadora. Considere que esse valor deve ser inteiro para que a fração decimal esteja definida. Verifique se esse valor é um número inteiro ou decimal.

a) $\frac{2031}{40} = \frac{x}{10}$

b) $\frac{2031}{40} = \frac{x}{100}$

c) $\frac{2031}{40} = \frac{x}{1000}$

Se encontrarmos um valor de x inteiro em uma das igualdades acima, isso significará que a fração que terá o x inteiro é uma **fração decimal** e, portanto, a fração equivalente a ela, será um número decimal exato.

Conclusão do 1º método: Esse método de determinar se uma fração é equivalente a uma fração decimal pode ser demorado em alguns contextos, pois, dependendo dos valores numéricos, os cálculos seriam mais trabalhosos. Observe que foi necessário fazer duas operações aritméticas: primeiro a multiplicação e, em seguida, uma divisão. Portanto, esse primeiro método nem sempre é uma boa opção para saber se a divisão será um decimal exato.

Uso das propriedades de equivalência de frações:

Considerando n_1 , n_2 , d_1 e d_2 números inteiros, com d_1 e d_2 diferentes de zero, vale a propriedade a seguir.

$$\frac{n_1}{d_1} = \frac{n_2}{d_2} \Rightarrow n_2 = \frac{n_1 \cdot d_2}{d_1}$$

Observações:

- 1) A propriedade da equivalência de frações possibilita a determinação de um termo dessa igualdade a partir dos demais.
- 2) As variáveis escolhidas para os termos das frações, foram escolhidas **propositalmente**¹² com a letra do nome da posição ("n" para numerador e "d" para denotar "denominador"). Também foi atribuído um número subscrito para cada letra (em particular, o número "1" representa os termos da *primeira fração*, isto é, n_1 é o numerador da primeira fração e d_1 é o denominador da primeira fração).
- 3) Observe que para encontrar o valor de n_2 (o numerador da segunda fração) foram necessárias apenas duas operações: multiplicar dois valores e, em seguida, dividir esse resultado por outro valor.
- 4) Considerando que o enunciado parte do princípio de que os quatro termos são números inteiros, então o valor desejado para o termo desconhecido n_2 também deverá ser um número inteiro. Caso n_1 , d_1 e d_2 sejam números inteiros e o n_2 não seja um número inteiro, conclui-se a equação não terá solução segundo os dados do enunciado; mas, caso esse valor não seja um número inteiro, essa igualdade seria válida caso o enunciado dissesse que d_2 poderia ser um número racional qualquer.

¹² A utilização de variáveis representadas por letras acompanhadas de índices numéricos (como a_1, a_2, a_n) oferece aos alunos do Ensino Médio a oportunidade de conhecer formas mais elaboradas de notação algébrica, muitas vezes ausentes nos livros didáticos do Ensino Fundamental e mesmo do Ensino Médio. Embora essa forma de representação seja pouco explorada nesses materiais, ela ganha relevância no contexto das orientações da BNCC (2018), que valoriza o desenvolvimento do pensamento computacional. Nesse cenário, o uso de variáveis indexadas está fortemente associado à ideia de sequências, à identificação de posições específicas em expressões algébricas — como em termos de frações —, bem como à generalização de estruturas algébricas mais complexas, como **polinômios**, e **matrizes**, nas quais cada elemento é denotado por índices duplos, como a_{ij} , indicando sua posição na linha i e na coluna j . Esse tipo de notação contribui para ampliar a compreensão do aluno sobre padrões matemáticos, organização estrutural e representação algorítmica.

2º Método de Investigação: Dividindo a *potência de base 10* do denominador da fração decimal pelo primeiro denominador (divisor) e verificando se essa divisão é exata.

Exemplo 1: $54 \div 125$ é um número decimal exato?

Resposta: Sim. Pois o número 1000 dividido por 125 é uma divisão exata, cujo resultado é um número inteiro. Ou seja, 125 é um divisor de 1000.

Para justificar esse resultado, aplicaremos novamente o método utilizado anteriormente para determinar o valor de x e verificar se ele é um número inteiro.

$$\frac{54}{125} = \frac{x}{1000} \Rightarrow x = \frac{54 \cdot 1000}{125} = 54 \cdot \frac{1000}{125} = 54 \cdot 8 = 432 \Rightarrow x = 432 \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{432}{1000}$$

Observe, que foi possível encontrar um valor inteiro para x , porque o fator

$$\frac{1000}{125} (1000 \div 125)$$

é um *valor inteiro*, isto é, 1000 é um múltiplo de 125; ou, em outras palavras, 125 é um divisor de 1000. Observe que 1000 é o denominador da fração decimal, que dividido pelo denominador da primeira fração resulta num resultado inteiro.

Conclusão do 2º método: Para que a divisão $54 \div 125$ resulte em um número decimal exato, é necessário que o divisor dessa operação (125) seja um divisor de uma potência de base 10. E, neste caso, concluiu-se 125 é um divisor de 1000. Observe que 125 não tem chances de ser divisor de 10 e nem de 100, pois é um número maior do que 10 e 100. Caso a divisão não fosse exata, verificaríamos se 125 seria divisível por outras potências de base 10 como 10000, 100000 etc.

3º Método de Investigação: Verificando se o divisor da operação de divisão desejada é um divisor de uma potência de base 10 (10,100,1000 etc.).

O conjunto dos divisores de 10, 100, 1000, etc.

$$D(10) = \{1,2,5,10\}$$

$$D(100) = \{1,2,4,5,10,20,25,50,100\}$$

$$D(1000) = \{1,2,4,5,8,10,20,25,40,50,100,125,200,250,500,1000\}$$

No exercício que foi feito na *atividade 4* (divisão de inteiros) desse TCC, provou-se que divisões não exatas cujos divisores são 2,4,5,8 e 10 são sempre decimais exatos por um caminho diferente do que será citado aqui. Perceba que esses números são divisores de potências de base 10.

153) Considerando os conjuntos dos divisores de 10, 100 e 1000, escreva em cada quadro abaixo os números que são divisores de 10, 100 e/ou 1000.

2	4	5	8	10
É divisor de 10, 100 e 1000	É divisor de 100 e 1000.			

154) Siga o padrão a seguir, fatorando os números abaixo em fatores primos recursivamente.

- a) $10 = 2 \cdot 5$
- b) $100 = 10 \cdot 10 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$
- c) $1000 = 100 \cdot 10 = (2^2 \cdot 5^2) \cdot (2 \cdot 5) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
- d) $10000 =$
- e) $100000 =$

Observações:

(1) Observe que 8 é um divisor de 1000, mas não é de 100. É necessário ter pelo menos três fatores iguais a 2 na fatoração de um número para que ele seja múltiplo de 8.

(2) Todos os divisores de 10, 100, 1000, 10000 etc. possuem na sua fatoração em primos somente o fator 2 e 5 ou apenas o fator 2 ou apenas o fator 5.

Conclusão do 3º método: Para que a divisão $54 \div 125$ resulte em um número decimal exato, é necessário que a fatoração do divisor (125) em números primos possua somente o fator 2 e 5 ou apenas o fator 2 ou apenas o fator 5. Neste caso, $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$, o que comprova que a divisão de $54 \div 125$ é equivalente a uma fração decimal e, portanto, a divisão resulta em um número decimal exato.

O 3º método acima, está associado ao teste padrão para verificar se uma divisão de inteiros resulta em um decimal exato ou dízima periódica. O professor Dante, em seu livro

“Um número racional admite representação decimal exata se, e somente se, na sua **forma irredutível**, o denominador possui como fatores primos apenas 2 e/ou 5” (DANTE, 2013)

Observação: Para aplicar o método acima é necessário que a fração correspondente a divisão seja uma fração irredutível. E, de fato, $\frac{54}{125}$ é uma fração irredutível e, por isso, fatoramos o 125.

Exemplo: $3 \div 6$ é um decimal exato ou dízima periódica?

Observe que se você fatorar o número 6, terá $6 = 2 \cdot 3$, que tem um fator que não é 5. Logo, parece que $3 \div 6$ é uma dízima periódica, mas não é. Observe $3 \div 6 = \frac{3}{6}$. Como ambos os termos da fração são múltiplos de 3, logo podemos simplificar essa fração dividindo os seus termos por 3. Daí teremos que $3 \div 6 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 1 \div 2$. Como o divisor 2 é um número primo e ele satisfaz ao critério da divisão ser decimal exato.

Refazendo os exemplos anteriores.

- $2031 \div 40$ é um **número decimal exato**, pois $\frac{2031}{40}$ é uma fração irredutível e 40 possui uma forma fatorada igual a $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$.
- $54 \div 125$ é um **número decimal exato**, pois $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$ só possui o número 5 na sua forma fatorada.
- $40 \div 54$ é uma **dízima periódica**, pois $\frac{40}{54} = \frac{20}{27}$ e $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$.

Bases Conceituais para a Compreensão do Tema (Parte II)

Número primo: “Chama-se número primo todo número maior que 1 que tem apenas dois divisores distintos: o número 1 e ele mesmo.” (DANTE, 2001, p. 104)

Número composto: “Número composto é todo número maior que 1 que possui mais de dois divisores.” (DANTE, 2001, p. 104)

Os 25 primeiros números primos: Os números primos menores do que 100 podem ser obtidos através de um método chamado de Crivo de Eratóstenes.

Figura 39: O crivo de Eratóstenes e os Números Primos menores que 100 – Habilidades da BNCC

Crivo de Eratóstenes

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 e 97 são os únicos números primos menores que 100.

Por que o número dois (2) é o único número primo par?
 Porque qualquer outro número par teria pelo menos 2 divisores, o número 1, o número 2 (por ser par) e também o próprio número.

O Crivo de Eratóstenes e os Números Primos menores que 100 - Habilidades da BNCC

Estudando Matemática
18,6 mil inscritos

Inscrição

212

Compartilhar

Fonte: Videoaula do Youtube acessada em 17 de julho de 2025 pelo website: <https://youtu.be/WItXIskJJo0>

Fração Irredutível: Dados dois números inteiros a e b , A fração $\frac{a}{b}$ é *irredutível* se o a e b forem números primos entre si. Isso ocorre quando $\text{mdc}(a, b) = 1$. Lembre-se que dizer que o máximo divisor comum de dois inteiros é 1, significa que os conjuntos de divisores $D(a)$ e $D(b)$ só possuem um divisor comum, que é o número 1.

- 155) O quociente entre dois números primos sempre será uma dízima periódica? Justifique a sua resposta.
- 156) Por que os números decimais obtidos pelas divisões de um número inteiro diferente de zero por 2,4,5,8 e 10 são sempre decimais exatos?
- 157) Considerando a divisão de inteiros, é possível garantir que divisões não exatas por 3, 6, 7 e 9 sempre resultarão em dízimas periódicas? Comente a sua resposta.

Resolução do exercício principal dessa lição:

O resultado de $2024 \div 83$ na calculadora do smartphone é uma *dízima periódica*?

Solução: Sim. Como 83 é um número primo 2024 não é divisível por 83 a fração está na forma irredutível. Como 83 é um número primo, não pode ser fatorado em primos. Portanto, seguindo o critério de ter apenas números primos 2 e/ou 5 para ser decimal exato, logo $2024 \div 83$ resulta numa *dízima periódica*.

ANEXO A: Tabuadas da adição, subtração e multiplicação.

+		ENTRADA 2										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ENTRADA 1	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

—		ENTRADA 2										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ENTRADA 1	0	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10
	1	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
	2	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
	3	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
	4	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
	5	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
	6	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
	7	7	6	5	4	2	2	1	0	-1	-2	-3
	8	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2
	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1
	10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

×		ENTRADA 2										
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ENTRADA 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
	3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
	4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
	5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
	6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
	7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
	8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
	9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
	10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

REFERÊNCIAS

BORBA, Marcelo C.; VILLARREAL, Mônica. *Tecnologias digitais e reconfiguração do conhecimento em matemática*. Campinas, SP: Papirus, 2005.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 22 jun. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: 24 jun. 2025.

BURTON, D. M. *The History of Mathematics: An Introduction*. McGraw-Hill. 2011.

CARVALHO, J. A. et al. *Dificuldades na aprendizagem de matemática: um olhar psicopedagógico*. São Paulo: Avercamp, 2004.

CORRIENNA Abdul Talib; Hassan Aliyu; Rainer Zawadzki; Marlina Ali. *Developing student's computational thinking through graphic calculator in STEAM education*. AIP Conference Proceedings 2184, 030003 (2019).

DANTE, Luiz Roberto. *Teláris Essencial – Matemática – 9º ano*, São Paulo. Editora Ática, 2019.

DRUBSCKY, Luiza. *Mobile UX: guia definitivo 2025*. UXCam, 26 fev. 2025. Disponível em: <https://uxcam.com/br/blog/mobile-ux/>. Acesso em: 25 jun. 2025.

FGV Projetos. *Estudo de avaliação da política industrial da Zona Franca de Manaus*. Rio de Janeiro: FGV Projetos, 2018. Disponível em: <https://bibliotecadigital.fgv.br/dspace/handle/10438/24694>. Acesso em: 24 jun. 2025.

HEFEZ, Abramo. *Curso de Álgebra, Volume 1*. 6ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2024.

LIBÂNEO, José Carlos. *Didática*. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

LORENZATO, Sérgio. *Calculadora na sala de aula: proposta para o ensino de matemática no ensino fundamental e médio*. Campinas: Autores Associados, 2006.

LORENZATO, Sérgio. *Calculadora na sala de aula: e agora?*. Campinas: Autores Associados, 2006. (Coleção Didática da Matemática).

MOURA, Ronaldo Rogério de Freitas. *Educação matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 1996.

SUFRAMA. História da Zona Franca de Manaus. Manaus: Superintendência da Zona Franca de Manaus, [s.d.]. Disponível em: <https://www.gov.br/suframa>. Acesso em: 24 jun. 2025.

SANTOS, Leidiane da Silva. *A Zona Franca de Manaus e o Polo Industrial de Manaus: os limites do modelo de desenvolvimento regional*. 2014. 103 f. Dissertação (Mestrado em Sociedade e Cultura na Amazônia) – Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2014. Disponível em: <https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/5216>. Acesso em: 24 jun. 2025.