



Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB

Campus Reitor Edgard Santos

Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias

Mestrado Profissional em Matemática



PROFMAT

Laboratório de Matemática: Um Espaço para Aprender e Transformar.

Produto Educacional decorrente de
Dissertação do Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional –
PROFMAT. A dissertação está disponível
em: [\[link\]](#)

Orientador: Prof. Dr. Vinicius Souza
Bittencourt

Barreiras – BA

2024

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Sólidos Geométricos (1)	7
Figura 2: Sólidos Geométricos e suas planificações (1)	7
Figura 3: Sólidos Geométricos (2)	7
Figura 4: Sólidos Geométricos e suas planificações (2)	8
Figura 5: Quadrados e triângulo de madeira	10
Figura 6: Quadrado e triângulos de madeira	10
Figura 7: Pastilhas de vidro comprovando o teorema de Pitágoras no terno (3, 4 e 5)	11
Figura 8: Um disco inteiro e duas metades de um disco	14
Figura 9: Diferentes frações que compõem um disco inteiro.....	14
Figura 10: Frações diferentes de um disco que resultam na mesma fração do disco.	15
Figura 11: Discos de frações mostrando a soma de frações.....	16
Figura 12: Torre de Hanói.....	18
Figura 13: Prisma reto de base triangular regular.	21
Figura 14: Prisma da Figura 12 desmontado em três pirâmides de mesmo volume.	21
Figura 15: Cone e Cilindro de mesma base e mesma altura.....	25
Figura 16: Material Dourado.....	28

Sumário

1. Introdução	4
2. Justificativa.....	5
3. Objetivos	6
4. Aplicação Prática.....	7
4.1 Planificação dos Sólidos Geométricos	7
4.2 Uma Demonstração do Teorema de Pitágoras	10
4.3 Discos de Frações no Laboratório de Matemática	14
4.4 Torre de Hanói no Laboratório de Matemática	18
4.5 Relação entre o Volume de um Prisma Triangular e Três Pirâmides no Laboratório de Matemática.....	21
4.6 Relação entre o Volume de um Cone e um Cilindro no Laboratório de Matemática	25
4.7 Utilização do Material Dourado no Laboratório de Matemática	28
Considerações Finais.....	34
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	35

1. Introdução

A utilização de recursos concretos e práticos no ensino da Matemática pode ser uma ferramenta essencial para a compreensão de conceitos que, muitas vezes, são abstratos e de difícil assimilação pelos alunos. O laboratório de Matemática surge como um espaço dinâmico e interativo, onde os estudantes podem vivenciar a Matemática de forma lúdica e significativa, por meio de materiais manipuláveis e atividades práticas. Esse ambiente não só torna o aprendizado mais atrativo, mas contribui para o desenvolvimento de habilidades cognitivas, como o raciocínio lógico, a criatividade e a resolução de problemas.

Vivemos em uma era em que a educação precisa se reinventar, buscando metodologias que dialoguem com as necessidades dos alunos. O Laboratório de Matemática se apresenta como uma proposta inovadora, capaz de diversificar as experiências educacionais e promover uma aprendizagem mais contextualizada. Por meio de materiais como sólidos geométricos, discos de frações, material dourado e outros recursos, os alunos têm a oportunidade de explorar conceitos matemáticos de forma concreta, construindo seu conhecimento de maneira autônoma e colaborativa.

Este produto educacional, intitulado de: “**Laboratório de Matemática: Um Espaço para Aprender e Transformar**”, é resultado da dissertação de mestrado profissional intitulada: “**A POTENCIALIDADE DO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA COMO FERRAMENTA DE ENSINO: Uma Estratégia de Intervenção Pedagógica em São Gonçalo do Gurguéia e Gilbués – PI**”, de autoria de **Edy Carlos Barbosa Rodrigues**, orientado pelo Professor Dr. **Vinicius Souza Bittencourt**. A proposta apresentada visa fornecer um guia prático para a implementação de um laboratório de matemática nas escolas, destacando a importância dos materiais manipuláveis e sua aplicação no processo de ensino-aprendizagem.

Ao longo deste produto educacional, serão apresentados os objetivos do Laboratório, a descrição detalhada dos materiais e suas aplicações práticas, além de orientações sobre a estruturação do espaço físico e a gestão dos recursos. Espera-se que este projeto inspire gestores públicos e educadores a investir na criação de Laboratórios de Matemática, transformando o ensino da disciplina em uma experiência enriquecedora e significativa para os alunos.

2. Justificativa

A implementação de um Laboratório de Matemática nas escolas é uma iniciativa que visa democratizar o acesso a recursos pedagógicos de qualidade, permitindo que estudantes de diferentes realidades socioeconômicas tenham a oportunidade de explorar a matemática de maneira prática e envolvente. Por meio de materiais manipuláveis, os alunos podem visualizar e experimentar conceitos que, muitas vezes, são de difícil compreensão apenas por meio de aulas expositivas.

Além disso, o Laboratório de Matemática contribui para a formação integral dos estudantes, desenvolvendo não apenas habilidades cognitivas, mas também sociais e emocionais. Ao trabalhar em grupo, os alunos aprendem a colaborar, comunicar-se e resolver conflitos, competências essenciais para a vida em sociedade.

Para que o laboratório funcione de maneira eficiente, é essencial um espaço físico adequado, com dimensões que permitam a movimentação dos alunos e o armazenamento organizado dos materiais. Inspirado em laboratórios já implementados em outras instituições, como o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) “Márcia Augusta Crosara”, localizado na Sala 1F-129 do campus Santa Mônica da Universidade Federal de Uberlândia (disponível em: <http://ime.ufu.br/unidades/laboratorio/laboratorio-de-ensino-matematica>), sugere-se um espaço de 40 m² a 60 m², capaz de acomodar até 30 alunos confortavelmente. Esse ambiente deve contar com mesas coletivas, prateleiras para organização dos materiais, quadro branco e equipamentos multimídia, como projetor e computador, garantindo uma infraestrutura completa para o desenvolvimento das atividades.

A implementação desse Laboratório não requer investimentos exorbitantes, mas sim um planejamento cuidadoso e a aquisição de materiais essenciais, que podem ser adquiridos de forma gradual. A médio e longo prazo, os benefícios superam os custos, pois o Laboratório se torna um espaço de transformação, onde os alunos podem desenvolver uma relação positiva com a matemática e, conseqüentemente, melhorar seu desempenho acadêmico.

Portanto, a criação de um laboratório de matemática é uma proposta viável e necessária, que alia teoria e prática. Este projeto não apenas atende às demandas educacionais contemporâneas, mas também contribui para a formação de cidadãos críticos, criativos e preparados.

3. Objetivos

1. Facilitar a Compreensão de Conceitos Abstratos

Utilizar materiais manipuláveis, para tornar o aprendizado da matemática mais concreto e acessível.

2. Demonstrar Teoremas e Propriedades de Forma Visual

Aplicar recursos práticos, para ilustrar conceitos matemáticos de maneira interativa.

3. Promover o Desenvolvimento de Habilidades Cognitivas e Sociais

Estimular o raciocínio lógico, a criatividade e o trabalho em grupo, contribuindo para a formação integral dos alunos.

4. Integrar Teoria e Prática no Ensino da Matemática

Oferecer um ambiente onde os alunos possam aplicar conceitos teóricos por meio de atividades práticas, consolidando o conhecimento de forma dinâmica.

5. Estruturar um Espaço Físico Adequado e Funcional

Propor um ambiente organizado com mesas coletivas, prateleiras, quadro branco e equipamentos multimídia, garantindo a eficiência das atividades.

6. Capacitar Professores para o Uso de Metodologias Ativas

Formar educadores para utilizar os materiais do laboratório de forma alinhada ao currículo e às necessidades dos alunos.

7. Melhorar o Desempenho e o Interesse dos Alunos

Reduzir as dificuldades e o desinteresse pela matemática, promovendo um ensino mais contextualizado e significativo.

8. Servir como Modelo para Outras Instituições

Demonstrar a viabilidade do laboratório, incentivando sua replicação em outras escolas.

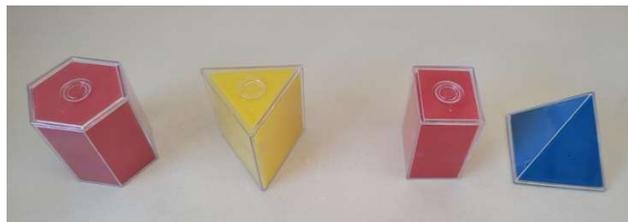
4. Aplicação Prática

4.1 Planificação dos Sólidos Geométricos

O estudo dos sólidos geométricos e suas planificações no Laboratório de Matemática proporciona aos alunos uma oportunidade prática para explorar conceitos fundamentais da geometria. Sólidos geométricos são figuras tridimensionais com volume, que ocupam espaço e estão presentes em diversos contextos do cotidiano. Entre os principais sólidos estão o **cubo**, o **paralelepípedo**, a **pirâmide**, o **cilindro** e o **cone**, cada um com características específicas.

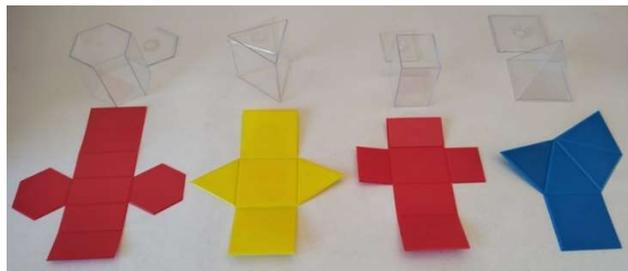
A **planificação** é o processo de desenhar as faces de um sólido geométrico em uma superfície plana, permitindo visualizar como as partes se juntam para formar o objeto tridimensional.

Figura 1: Sólidos Geométricos (1)



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Figura 2: Sólidos Geométricos e suas planificações (1)



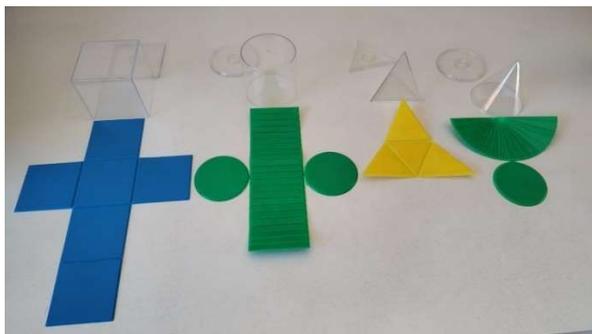
Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Figura 3: Sólidos Geométricos (2)



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Figura 4: Sólidos Geométricos e suas planificações (2)



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Atividade 1: Explorando Sólidos Geométricos

Objetivo: Reconhecer as características dos principais sólidos geométricos.

Desenvolvimento:

- Apresentar aos alunos os sólidos geométricos (cubo, pirâmide, cilindro etc.) e suas planificações (Figuras 1, 2, 3 e 4).
- Pedir que identifiquem o número de faces, arestas e vértices de cada sólido.
- Comparar os sólidos prontos com suas planificações, destacando como as formas bidimensionais se transformam em tridimensionais.

Atividade 2: Montando Sólidos a Partir de Planificações

Objetivo: Montar sólidos geométricos a partir de suas planificações.

Desenvolvimento:

- Distribuir moldes de planificações para os alunos (Figuras 2 e 4).
- Orientar os alunos a recortar, dobrar e colar as planificações, montando os sólidos.
- Discutir as dificuldades e as estratégias utilizadas para a montagem.

Atividade 3: Relacionando com o Cotidiano

Objetivo: Identificar sólidos geométricos e suas planificações em objetos do dia a dia.

Desenvolvimento:

- Levar para a sala de aula objetos como caixas de sapato (paralelepípedos), latas de refrigerante (cilindros) e entre outros.
- Pedir que os alunos desmontem os objetos e comparem com as planificações estudadas.

- Debater como o conhecimento das planificações pode ser útil em situações reais, como na construção de embalagens.

Benefícios da Abordagem

- **Aprendizado Significativo:** Os alunos compreendem a geometria espacial de forma concreta, relacionando teoria e prática.
- **Desenvolvimento de Habilidades:** A montagem de sólidos estimula a coordenação motora, a criatividade e o raciocínio lógico.
- **Contextualização:** A relação com objetos do cotidiano torna o aprendizado mais relevante e aplicável.

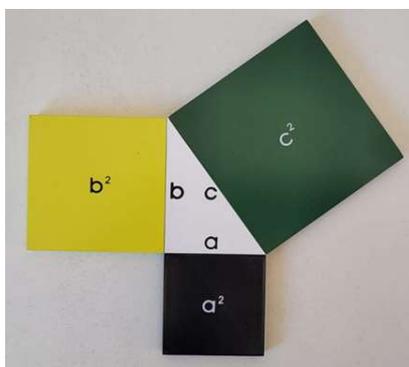
Sugestões para o Professor

- Utilizar materiais de baixo custo, como papel cartão e embalagens recicláveis, para a confecção das planificações.
- Incentivar os alunos a criarem suas próprias planificações, explorando diferentes sólidos.
- Integrar a atividade com outros temas, como cálculo de áreas e volumes, para ampliar o aprendizado.

4.2 Uma Demonstração do Teorema de Pitágoras

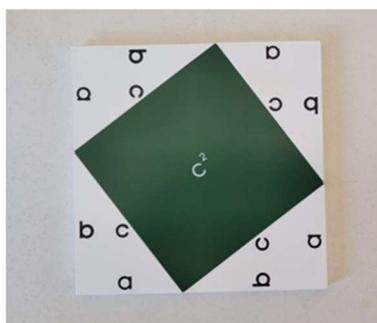
O Teorema de Pitágoras é um dos pilares da geometria e possui aplicações práticas em diversas áreas, como Engenharia, Arquitetura e Física. No laboratório de matemática, a demonstração desse teorema pode ser uma atividade enriquecedora, permitindo que os alunos compreendam não apenas a teoria, mas também a aplicação prática do conceito. Utilizando materiais concretos, como quadrados e triângulos de madeira (Figuras 5 e 6) e pastilhas de vidro (Figura 7), os alunos podem visualizar e experimentar as relações métricas descritas pelo teorema.

Figura 5: Quadrados e triângulo de madeira



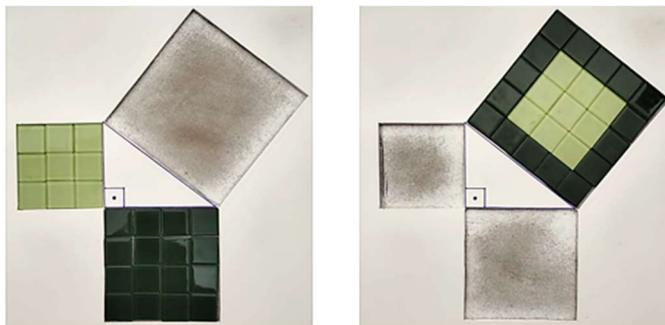
Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Figura 6: Quadrado e triângulos de madeira



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Figura 7: Pastilhas de vidro comprovando o teorema de Pitágoras no terno (3, 4 e 5)



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Objetivos Pedagógicos

- Compreender o enunciado e a demonstração do Teorema de Pitágoras.
- Desenvolver habilidades de visualização e raciocínio geométrico.
- Aplicar o teorema em situações práticas e problemas reais.
- Relacionar o teorema com as habilidades da BNCC, como EF09MA13 e EF09MA14.

Materiais Necessários

- Triângulos retângulos de madeira (Figuras 5 e 6).
- Quadrados de madeira para representar as áreas sobre os catetos e a hipotenusa.
- **Pastilhas de vidro** para comprovar visualmente o teorema para o terno (3, 4 e 5) (Figura 7).
- Régua, calculadora e softwares de geometria dinâmica (como GeoGebra).

Atividade 1: Compreendendo o Teorema de Pitágoras

Objetivo: Introduzir o conceito do Teorema de Pitágoras e sua fórmula.

Desenvolvimento:

- Apresentar o enunciado do teorema: $c^2 = a^2 + b^2$, onde c é a hipotenusa e a e b são os catetos.
- Utilizar um triângulo retângulo de madeira (Figura 5) para identificar os catetos e a hipotenusa.
- Mostrar a relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os lados do triângulo (Figura 6).

Atividade 2: Demonstração Visual com Pastilhas de Vidro

Objetivo: Comprovar o Teorema de Pitágoras de forma visual e prática.

Desenvolvimento:

Utilizar pastilhas de vidro (Figura 7) para representar as áreas dos quadrados sobre os catetos e a hipotenusa.

Para o terno pitagórico (3, 4 e 5), considere cada *pastilha* (p) como uma unidade do lado do triângulo retângulo:

- Cobrir o quadrado sobre o cateto $a = 3p$ com $9p$.
- Cobrir o quadrado sobre o cateto $b = 4p$ com $16p$.
- Cobrir o quadrado sobre a hipotenusa $c = 5p$ com $25p$.
- Mostrar que a soma das pastilhas (p) dos catetos ($9p + 16p = 25p$) é igual ao número de pastilhas da hipotenusa, comprovando visualmente o teorema.

Atividade 3: Resolução de Problemas Práticos

Objetivo: Aplicar o Teorema de Pitágoras em situações reais.

Desenvolvimento:

- Propor problemas práticos, como calcular a altura de uma escada apoiada em uma parede ou a distância entre dois pontos em um mapa.
- Utilizar materiais do laboratório para simular as situações e resolver os problemas.

Atividade 4: Exploração com Softwares de Geometria

Objetivo: Ampliar a compreensão do teorema com o uso de tecnologias.

Desenvolvimento:

- Utilizar softwares como GeoGebra para manipular triângulos retângulos e verificar o teorema.
- Explorar diferentes ternos pitagóricos (como 5, 12, 13) e observar as relações entre as áreas.

Benefícios da Abordagem

- **Aprendizado Significativo:** Os alunos compreendem o Teorema de Pitágoras de forma concreta, relacionando teoria e prática.

- **Desenvolvimento de Habilidades:** A atividade estimula o raciocínio lógico, a visualização espacial e a resolução de problemas.
- **Contextualização:** A aplicação em situações reais torna o aprendizado mais relevante e aplicável.
- **Integração de Tecnologia:** O uso de softwares amplia as possibilidades de exploração e visualização.

Sugestões para o Professor

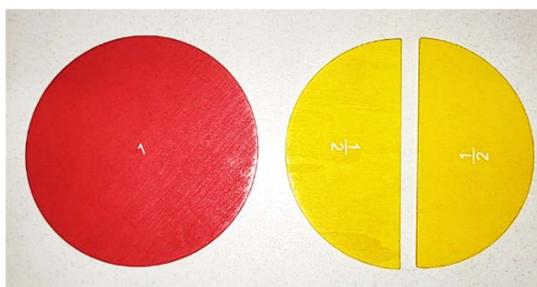
- Utilizar materiais de baixo custo, como papel cartão e madeira, para a confecção dos quadrados e triângulos.
- Incentivar o uso das pastilhas de vidro para comprovar o teorema de forma visual e interativa.
- Explorar diferentes ternos pitagóricos e generalizar o teorema para outros casos.
- Integrar a atividade com outros temas, como cálculo de áreas e perímetros, para ampliar o aprendizado.
- Utilizar as figuras do acervo pessoal (Figuras 5, 6 e 7) como material de apoio visual durante as atividades.

4.3 Discos de Frações no Laboratório de Matemática

Os discos de frações são materiais concretos que proporcionam uma abordagem prática e visual para a compreensão de frações. Segundo Lorenzato (2010), o uso de recursos manipuláveis torna a aprendizagem mais significativa, conectando conceitos abstratos à realidade. Miskulin (2019) complementa que a manipulação desses materiais favorece o desenvolvimento do pensamento matemático, enquanto Freire (2001) enfatiza que a participação ativa dos estudantes potencializa a construção do conhecimento.

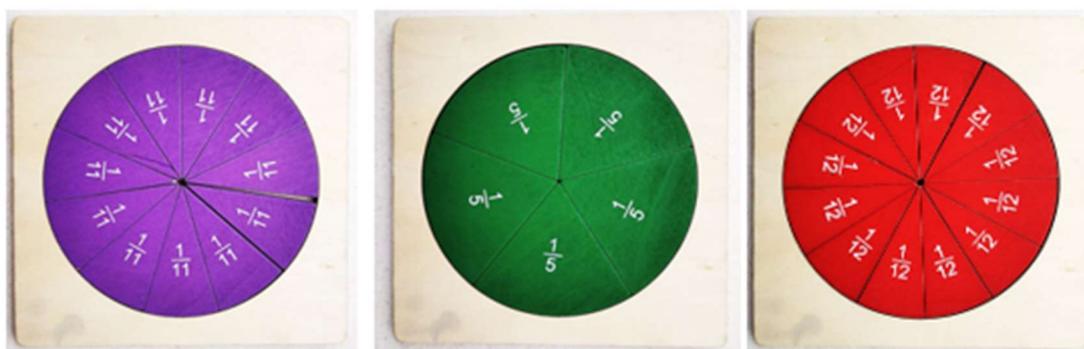
No laboratório de matemática, os discos de frações permitem que os alunos explorem conceitos como comparação, soma, subtração, multiplicação e divisão de frações de forma intuitiva e interativa, promovendo maior engajamento e compreensão.

Figura 8: Um disco inteiro e duas metades de um disco



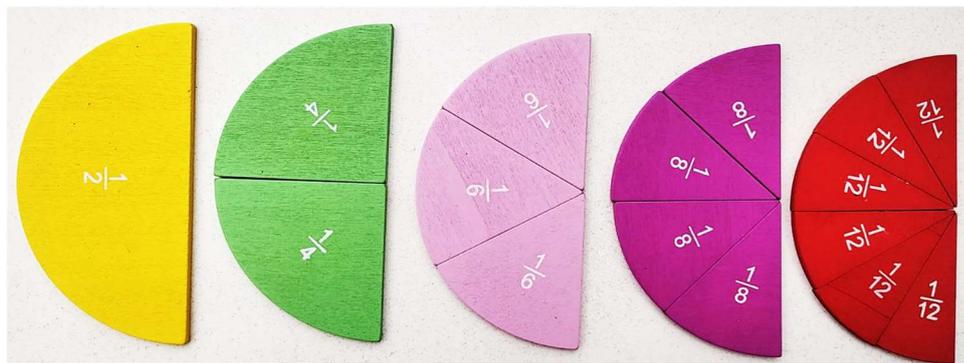
Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Figura 9: Diferentes frações que compõem um disco inteiro



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Figura 10: Frações diferentes de um disco que resultam na mesma fração do disco.



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Objetivos Pedagógicos

- Facilitar a compreensão de frações e suas operações.
- Desenvolver habilidades de visualização e raciocínio matemático.
- Promover a participação ativa dos alunos no processo de aprendizagem.
- Consolidar o conceito de frações equivalentes.

Materiais Necessários

- Discos de frações (Figuras 8, 9 e 10).
- Discos coloridos ou marcados para representar diferentes frações, por exemplo: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ etc.
- Atividades impressas ou digitais para exercícios complementares.

Aplicação Prática no Laboratório

Atividade 1: Comparação de Frações

Objetivo: Comparar frações e compreender a relação entre numerador e denominador.

Desenvolvimento:

- Distribuir discos de frações (Figura 9) para os alunos.
- Pedir que comparem frações como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$.
- Discutir por que, quando o numerador é 1, quanto maior o denominador, menor é a fração.

Atividade 2: Soma e Subtração de Frações

Objetivo: Realizar operações básicas com frações de forma visual.

Desenvolvimento:

- Utilizar discos para somar frações, como $\frac{1}{4} + \frac{2}{8}$.
- Mostrar que o resultado é $\frac{4}{8}$ (ou $\frac{1}{2}$).
- Repetir o processo com outras frações, como $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Estimule os alunos a realizarem os cálculos e depois mostre o resultado usando os discos de fração.

Para esse último exemplo, temos:

Figura 11: Discos de frações mostrando a soma de frações.



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Desse modo, os alunos perceberão que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ e $\frac{5}{6}$ correspondem à mesma parte do inteiro.

Atividade 3: Multiplicação e Divisão de Frações

Objetivo: Explorar multiplicação e divisão de frações.

Desenvolvimento:

- Multiplicar uma fração por um número inteiro, como $2 \times \frac{1}{3}$.
- Utilizar dois discos de $\frac{1}{3}$ para mostrar que o resultado é $\frac{2}{3}$.
- Discutir como a divisão de frações pode ser representada com os discos.
- Explique aos alunos que dividir uma fração por outra é o mesmo que multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda. Por exemplo:

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{4}{2} = 2.$$

- Utilize um disco de $\frac{1}{2}$ (meio círculo) e discos de $\frac{1}{4}$ (quartos de círculo).

- Pergunte aos alunos: “Quantos discos de $\frac{1}{4}$ são necessários para cobrir completamente o disco de $\frac{1}{2}$?”
- Sobreponha os discos de $\frac{1}{4}$ no disco de $\frac{1}{2}$ e mostre que são necessários 2 discos de $\frac{1}{4}$ para cobrir $\frac{1}{2}$.

Atividade 4: Frações Equivalentes

Objetivo: Identificar e compreender frações equivalentes.

Desenvolvimento:

- Utilizar discos para mostrar frações equivalentes, como $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$ e $\frac{6}{12}$ (Figura 10).
- Discutir porque essas frações representam a mesma parte do inteiro.

Benefícios da Abordagem

- **Aprendizado Significativo:** Os alunos compreendem frações de forma concreta, relacionando teoria e prática.
- **Desenvolvimento de Habilidades:** A manipulação dos discos estimula o raciocínio lógico e a visualização matemática.
- **Engajamento:** A participação ativa dos alunos torna o aprendizado mais interativo e divertido.
- **Contextualização:** A aplicação em situações práticas torna o aprendizado mais relevante e aplicável.

Sugestões para o Professor

- Utilizar discos coloridos para facilitar a visualização das frações.
- Promover discussões em grupo após as atividades, com perguntas como:
 - “Como você pode representar a soma de duas frações?”
 - “O que acontece quando você divide uma fração?”
- Aplicar exercícios escritos ou orais para avaliar o entendimento dos alunos.
- Utilizar as figuras do acervo pessoal (Figuras 8, 9 e 10) como material de apoio visual durante as atividades.

4.4 Torre de Hanói no Laboratório de Matemática

A Torre de Hanói é um quebra-cabeça matemático popularizado pelo matemático francês Édouard Lucas em 1883. Embora Lucas tenha associado o jogo a uma lenda mitológica sobre um templo em Benares, na Índia, onde monges manipulavam 64 discos em três hastes, não há registros históricos que comprovem a existência do jogo antes dele. O mais provável é que Lucas tenha criado o jogo inspirado em conceitos matemáticos e desafios de movimentação sequencial já estudados anteriormente.

As regras da Torre de Hanói são simples, mas desafiadoras:

- Apenas um disco pode ser movido por vez.
- Um disco de maior diâmetro não pode ser colocado sobre um disco de menor diâmetro.
- Somente o disco no topo de cada pilha pode ser movido.

Esse problema não só é fascinante do ponto de vista lógico e matemático, mas também serve como uma excelente ferramenta pedagógica no Laboratório de Matemática, ajudando os alunos a desenvolverem habilidades de raciocínio lógico, resolução de problemas e compreensão de conceitos como recursão e algoritmos.

Figura 122: Torre de Hanói



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Objetivos Pedagógicos

- Desenvolver habilidades de raciocínio lógico e resolução de problemas.
- Explorar conceitos matemáticos como recursão e algoritmos.
- Promover o pensamento crítico e a colaboração entre os alunos.
- Relacionar a atividade com a habilidade EF08MA10 da BNCC, que envolve identificar regularidades em sequências numéricas ou figuras e construir algoritmos por meio de fluxogramas.

Materiais Necessários

- Uma Torre de Hanói física (Figura 12).
- Discos de diferentes tamanhos e três hastes.
- Quadro ou papel para anotar estratégias e movimentos.

Aplicação Prática no Laboratório de Matemática

Apresentação do Problema

- Explique as regras básicas da Torre de Hanói aos alunos.
- Mostre uma configuração inicial com os discos empilhados em ordem decrescente em uma das hastes.
- Disponha 5 discos em uma das hastes e desafie os alunos a transferir todos os discos para outra haste, seguindo as regras.

Discussão das Estratégias

- Discuta com os alunos as possíveis estratégias para resolver o problema.
- Pergunte como eles poderiam mover os discos sem violar as regras, promovendo o pensamento crítico e a colaboração.

Solução Recursiva

- Explique que a solução para a Torre de Hanói envolve recursão.
- Mostre a relação entre a quantidade de discos (n) e o número mínimo de movimentos (m):
 - Para $n = 1$, $m = 1$.
 - Para $n = 2$, $m = 3$.
 - Para $n = 3$, $m = 7$.
 - Para $n = 4$, $m = 15$.
- Pode-se demonstrar pelo Princípio de Indução Finita, tema não previsto de ser tratado em um ambiente escolar, que a quantidade mínima de movimentos (m) para mover os discos de uma torre a outra é $m = 2^n - 1$., sendo n a quantidade de discos.

Análise dos Resultados

- Analise com os alunos quantas jogadas foram necessárias para completar a tarefa.
- Discuta a relação entre o número total de discos e o número mínimo de movimentos, utilizando a fórmula $2^n - 1$.

Reflexão Final

- Promova uma reflexão sobre as dificuldades enfrentadas durante a atividade.
- Relacione essas dificuldades com problemas matemáticos mais amplos, como a complexidade de algoritmos e a importância da recursão.

Benefícios da Abordagem

- **Aprendizado Significativo:** Os alunos compreendem conceitos matemáticos complexos, como recursão e algoritmos, de forma concreta.
- **Desenvolvimento de Habilidades:** A atividade estimula o raciocínio lógico, a resolução de problemas e o pensamento crítico.
- **Engajamento:** A natureza desafiadora do jogo torna o aprendizado mais interativo e divertido.
- **Contextualização:** A aplicação em situações práticas torna o aprendizado mais relevante e aplicável.

Sugestões para o Professor

- Utilize uma Torre de Hanói física para que os alunos possam manipular os discos diretamente.
- Explore versões virtuais do jogo para ampliar as possibilidades de simulação e análise.
- Incentive os alunos a criarem suas próprias estratégias e a compararem com a solução ótima.
- Relacione a atividade com outros conceitos matemáticos, como sequências numéricas e exponenciação.

4.5 Relação entre o Volume de um Prisma Triangular e Três Pirâmides no Laboratório de Matemática

O estudo de sólidos geométricos, como prismas e pirâmides, é essencial para compreender conceitos de volume e área, conforme previsto na habilidade EF09MA19 da BNCC. Um prisma de base triangular pode ser dividido em três pirâmides de mesmo volume, o que permite visualizar de forma concreta a relação entre seus volumes. Utilizando um prisma triangular sólido e desmontável em três pirâmides, os alunos podem explorar essa relação de maneira prática e interativa no Laboratório de Matemática.

Figura 13: Prisma reto de base triangular regular.



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Figura 14: Prisma da Figura 12 desmontado em três pirâmides de mesmo volume.



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Objetivos Pedagógicos

- Compreender a relação entre o volume de um prisma triangular e o volume de três pirâmides de mesma base e altura.
- Desenvolver habilidades de cálculo de volumes e áreas.

- Promover o pensamento crítico e a resolução de problemas.
- Relacionar a atividade com situações cotidianas, como cálculos de volumes em construções e embalagens.

Materiais Necessários

- Prisma triangular desmontável em três pirâmides (Figuras 13 e 14).
- Régua: Para medir as dimensões dos sólidos.
- Calculadora: Para auxiliar nos cálculos.
- Folha de atividades: Com exercícios práticos e questões reflexivas.
- Papel e caneta: Para anotações e cálculos.

Aplicação Prática no Laboratório de Matemática

Atividade 1: Montagem e Exploração do Prisma e das Pirâmides

Objetivo: Familiarizar os alunos com o prisma triangular e suas três pirâmides.

Desenvolvimento:

- Apresente o prisma triangular desmontável e mostre como ele se divide em três pirâmides.
- Peça que os alunos montem e desmontem o prisma, observando as características de cada pirâmide (base, altura e formato).
- Discuta as semelhanças e diferenças entre as pirâmides.

Atividade 2: Medição e Cálculo de Volumes

Objetivo: Calcular os volumes do prisma e das pirâmides e verificar a relação entre eles.

Desenvolvimento:

- Meça as dimensões do prisma (área da base e altura) e calcule seu volume.
- Volume do prisma: $V_{\text{prisma}} = A_b \times h$.
- Calcule o volume de uma pirâmide: $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \times A_b \times h$ e compare com o volume do prisma.

Atividade 3: Comparação Visual dos Volumes

Objetivo: Visualizar a relação entre os volumes do prisma e das pirâmides.

Desenvolvimento:

- Monte o prisma e mostre que ele é composto por três pirâmides.
- Desmonte o prisma e compare o tamanho de cada pirâmide com o prisma completo.
- Discuta com os alunos como a divisão do prisma em três pirâmides ilustra a relação entre seus volumes.

Atividade 4: Resolução de Problemas Práticos

Objetivo: Aplicar o conceito em situações reais.

Desenvolvimento:

- Proponha problemas práticos, como:
- Calcular o volume de uma pirâmide com base triangular e altura conhecida.
- Determinar a altura de um prisma com volume igual ao triplo de uma pirâmide dada.
- Peça que os alunos expliquem seus cálculos e conclusões.

Discussão e Reflexão

- Promova uma discussão sobre as dificuldades enfrentadas e as estratégias utilizadas.
- Relacione a atividade com situações cotidianas, como o cálculo de volumes em construções ou embalagens.
- Peça que os alunos expliquem, com suas próprias palavras, a relação entre os volumes do prisma e das pirâmides.

Benefícios da Abordagem

- **Aprendizado Significativo:** Os alunos compreendem a relação entre os volumes de forma concreta, relacionando teoria e prática.
- **Desenvolvimento de Habilidades:** A atividade estimula o raciocínio lógico, a resolução de problemas e a colaboração.
- **Engajamento:** A manipulação dos sólidos torna o aprendizado mais interativo e divertido.
- **Contextualização:** A aplicação em situações práticas torna o aprendizado mais relevante e aplicável.

Sugestões para o Professor

- Utilize o prisma desmontável para mostrar a relação entre os volumes de forma visual e prática.
- Explore diferentes formas de base (triangular, quadrada, hexagonal) em atividades complementares.
- Relacione a atividade com outros conceitos matemáticos, como áreas de polígonos e semelhança de figuras.
- Incentive os alunos a criarem seus próprios problemas e a compartilharem suas soluções com a turma.

4.6 Relação entre o Volume de um Cone e um Cilindro no Laboratório de Matemática

O estudo de sólidos geométricos, como cones e cilindros, é essencial para compreender conceitos de volume e área, conforme previsto na habilidade EF09MA19 da BNCC. Uma das relações mais importantes nesse contexto é que o volume de um cone é igual a $\frac{1}{3}$ do volume de um cilindro com a mesma base e mesma altura. Utilizando cone e cilindro que podem ser preenchidos com água ou argila, os alunos podem explorar essa relação de maneira prática e interativa no Laboratório de Matemática.

Figura 15: Cone e Cilindro de mesma base e mesma altura.



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Objetivos Pedagógicos

- Compreender a relação entre os volumes de um cone e um cilindro com a mesma base e altura.
- Desenvolver habilidades de cálculo de volumes e áreas.
- Promover o pensamento crítico e a resolução de problemas.
- Relacionar a atividade com situações cotidianas, como cálculos de volumes em construções e embalagens.

Materiais Necessários

- **Cone e cilindro de mesma base e altura:** Feitos em material transparente ou sólido, que permitam o preenchimento com água ou argila (Figura 15).
- **Água ou argila:** Para preencher os sólidos e comparar os volumes.
- **Régua:** Para medir as dimensões dos sólidos.
- **Calculadora:** Para auxiliar nos cálculos.

- **Folha de atividades:** Com exercícios práticos e questões reflexivas.

Aplicação Prática no Laboratório de Matemática

Atividade 1: Apresentação dos Sólidos

Objetivo: Familiarizar os alunos com o cone e o cilindro.

Desenvolvimento:

- Apresente o cone e o cilindro, destacando que eles têm a mesma base e altura.
- Meça as dimensões (raio da base e altura) e calcule as áreas da base:
- Área da base: $A_b = \pi r^2$.
- Discuta as características de cada sólido (formato, faces etc.).

Atividade 2: Preenchimento e Comparação de Volumes

Objetivo: Comprovar que o volume do cone é $\frac{1}{3}$ do volume do cilindro.

Desenvolvimento:

- Preencha o cone com água ou argila até a borda.
- Transfira o conteúdo do cone para o cilindro, mostrando que são necessários três cones para preencher completamente o cilindro.
- Discuta com os alunos a relação entre os volumes:
- Volume do cilindro: $V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h$.
- Volume do cone: $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$.

Atividade 3: Cálculo dos Volumes

Objetivo: Calcular os volumes do cone e do cilindro e verificar a relação entre eles.

Desenvolvimento:

- Calcule o volume do cilindro: $V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \times h$
- Calcule o volume do cone: $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times h$
- Compare os resultados com a demonstração prática.

Atividade 4: Resolução de Problemas Práticos

Objetivo: Aplicar o conceito em situações reais.

Desenvolvimento:

- Proponha problemas práticos, como:

- Calcular o volume de um cone com raio da base $r = 4 \text{ cm}$ e altura $h = 9 \text{ cm}$.
- Determinar o volume do cilindro com a mesma base e altura do cone dado.
- Peça que os alunos expliquem seus cálculos e conclusões.

Discussão e Reflexão

- Promova uma discussão sobre as dificuldades enfrentadas e as estratégias utilizadas.
- Relacione a atividade com situações cotidianas, como o cálculo de volumes em construções ou embalagens.
- Peça que os alunos expliquem, com suas próprias palavras, a relação entre os volumes do cone e do cilindro.

Benefícios da Abordagem

- **Aprendizado Significativo:** Os alunos compreendem a relação entre os volumes de forma concreta, relacionando teoria e prática.
- **Desenvolvimento de Habilidades:** A atividade estimula o raciocínio lógico, a resolução de problemas e a colaboração.
- **Engajamento:** A manipulação dos sólidos e o uso de água ou argila tornam o aprendizado mais interativo e divertido.
- **Contextualização:** A aplicação em situações práticas torna o aprendizado mais relevante e aplicável.

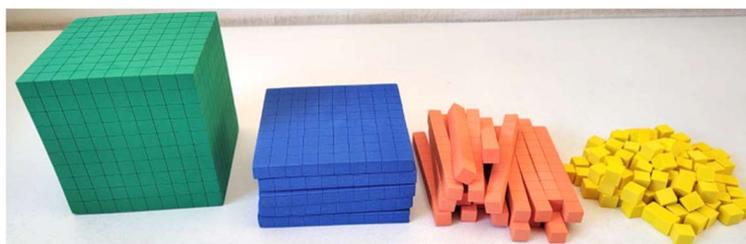
Sugestões para o Professor

- Utilize o cone e o cilindro para mostrar a relação entre os volumes de forma visual e prática.
- Explore diferentes dimensões (raio e altura) em atividades complementares.
- Relacione a atividade com outros conceitos matemáticos, como áreas de círculos e semelhança de figuras.
- Incentive os alunos a criarem seus próprios problemas e a compartilharem suas soluções com a turma.

4.7 Utilização do Material Dourado no Laboratório de Matemática

O Material Dourado é um recurso didático essencial no ensino da matemática, especialmente no Laboratório de Matemática. Composto por unidades (cubos), barras (dezenas), placas (centenas) e blocos (milhares), ele permite que os alunos visualizem e manipulem quantidades, facilitando a compreensão de conceitos fundamentais como adição, subtração, multiplicação e divisão. A manipulação concreta das peças torna o aprendizado mais significativo e engajador, ajudando os alunos a internalizarem conceitos abstratos de forma intuitiva.

Figura 16: Material Dourado.



Fonte: Acervo pessoal do autor, 2024.

Objetivos Pedagógicos

- Facilitar a compreensão de operações matemáticas básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão).
- Desenvolver habilidades de raciocínio lógico e resolução de problemas.
- Promover a visualização concreta de conceitos abstratos.
- Estimular o engajamento dos alunos por meio de atividades interativas.

Materiais Necessários

- **Material Dourado:** Cubos (unidades), barras (dezenas), placas (centenas) e blocos (milhares) (Figura 16).
- **Folha de atividades:** Com exercícios práticos e questões reflexivas.
- **Quadro ou papel:** Para anotações e registros.
- **Calculadora:** Para verificação de resultados (opcional).

Aplicação Prática no Laboratório de Matemática

Atividade 1: Adição com Material Dourado

Exemplo: $48 + 36$

Objetivo

Realizar a adição de dois números com reagrupamento, utilizando o Material Dourado para visualizar e compreender o processo.

Materiais Necessários

- Cubos (unidades): Representam as unidades (1 a 9).
- Barras (dezenas): Representam as dezenas (10 unidades cada).
- Placas (centenas): Representam as centenas (100 unidades cada) – não serão necessárias neste exemplo.

Passo a Passo

1. Representação dos Números

- Represente o número **48**:
 - 4 barras (4 dezenas = 40) + 8 cubos (8 unidades).
- Represente o número **36**:
 - 3 barras (3 dezenas = 30) + 6 cubos (6 unidades).

2. Junção das Peças

- Junte as barras dos dois números:
 - 4 barras (40) + 3 barras (30) = 7 barras (70).
- Junte os cubos dos dois números:
 - 8 cubos (8) + 6 cubos (6) = 14 cubos (14).

3. Reagrupamento

- Observe que 14 cubos ultrapassam o valor de uma dezena (10 cubos).
- Troque 10 cubos por 1 barra:
 - 14 cubos = 1 barra (10) + 4 cubos (4).
- Adicione a nova barra ao total de barras:
 - 7 barras (70) + 1 barra (10) = 8 barras (80).
- Sobram 4 cubos (4).

4. Resultado Final

- Some as barras e os cubos restantes:
 - 8 barras (80) + 4 cubos (4) = 84.
- Conclua que $48 + 36 = 84$.

Resumo Visual

Passo	Representação com Material Dourado	Cálculo Matemático
Representar 48	4 barras + 8 cubos	$40 + 8 = 48$
Representar 36	3 barras + 6 cubos	$30 + 6 = 36$
Somar barras	4 barras + 3 barras = 7 barras	$40 + 30 = 70$
Somar cubos	8 cubos + 6 cubos = 14 cubos	$8 + 6 = 14$
Reagrupar cubos	14 cubos = 1 barra + 4 cubos	$14 = 10 + 4$
Somar barras finais	7 barras + 1 barra = 8 barras	$70 + 10 = 80$
Resultado	8 barras + 4 cubos = 84	$80 + 4 = 84$

Pergunte aos alunos:

- Por que precisamos trocar 10 cubos por 1 barra?

Como o reagrupamento facilita a adição de números maiores?

Contextualização:

Relacione a atividade com situações do cotidiano, como somar quantidades de objetos ou dinheiro.

Atividade 1: Subtração com Material Dourado

Exemplo: $47 - 18$

Objetivo: Realizar a subtração de dois números utilizando o Material Dourado.

Materiais: Cubos (unidades), barras (dezenas).

Passo a Passo:

- Represente o número 47:
 - 4 barras (4 dezenas = 40) + 7 cubos (7 unidades).
- Represente o número 18:
 - 1 barra (1 dezena = 10) + 8 cubos (8 unidades).
- Subtraia as peças:

- Troque 1 barra por 10 cubos (para facilitar a subtração das unidades).
 - Agora, temos 3 barras (30) + 17 cubos (17).
 - Subtraia as barras: 3 barras – 1 barra = 2 barras (20);
 - Subtraia os cubos: 17 cubos – 8 cubos = 9 cubos (9).
- Conclua que $47 - 18 = 29$.

Atividade 3: Multiplicação com Material Dourado

Exemplo: 4×5

Objetivo: Compreender a multiplicação como grupos iguais.

Materiais: Cubos (unidades).

Passo a Passo:

- Explique que 4×5 significa 4 grupos de 5 unidades.
- Monte 4 grupos com 5 cubos cada:
 - Cada grupo representa 5 unidades.
- Junte todos os cubos:
 - 4 grupos de 5 cubos = 20 cubos.
- Conclua que $4 \times 5 = 20$.

Atividade 4: Divisão com Material Dourado

Exemplo: $20 \div 4$

Objetivo: Ilustrar a divisão como repartição equitativa.

Materiais: Cubos (unidades).

Passo a Passo:

- Represente o número 20:
 - 20 cubos (20 unidades).
- Explique que $20 \div 4$ significa dividir 20 cubos em 4 grupos iguais.
- Distribua os 20 cubos em 4 grupos:
 - Cada grupo terá 5 cubos.
- Conclua que $20 \div 4 = 5$.

Atividade 5: Valor Posicional

Exemplo: Representação de Números

Objetivo: Compreender o valor posicional (unidades, dezenas, centenas).

Materiais: Cubos (unidades), barras (dezenas), placas (centenas).

Passo a Passo:

- Peça que os alunos representem o número 123:
 - 1 placa (1 centena = 100) + 2 barras (2 dezenas = 20) + 3 cubos (3 unidades).
- Discuta como cada peça representa um valor posicional diferente.
- Proponha outros números para representação, como: 245, 308, 1500.

Atividade 6: Atividade de Troca

Exemplo: Troca de Unidades por Dezenas

Objetivo: Compreender a troca de unidades por dezenas.

Materiais: Cubos (unidades), barras (dezenas).

Passo a Passo:

- Peça que os alunos representem o número 15:
 - 1 barra (1 dezena = 10) + 5 cubos (5 unidades).
- Mostre que 10 cubos podem ser trocados por 1 barra.
- Proponha outras trocas, por exemplo: 25 cubos = 2 barras + 5 cubos.

Discussão e Reflexão

- Promova uma discussão sobre as dificuldades enfrentadas e as estratégias utilizadas.
- Relacione a atividade com situações cotidianas, como cálculos de quantidades em compras ou divisão de objetos.
- Peça que os alunos expliquem, com suas próprias palavras, como o Material Dourado ajudou na compreensão dos conceitos.

Benefícios da Abordagem

- **Aprendizado Significativo:** Os alunos compreendem operações matemáticas de forma concreta, relacionando teoria e prática.
- **Desenvolvimento de Habilidades:** A atividade estimula o raciocínio lógico, a resolução de problemas e a colaboração.
- **Engajamento:** A manipulação das peças torna o aprendizado mais interativo e divertido.
- **Contextualização:** A aplicação em situações práticas torna o aprendizado mais relevante e aplicável.

Sugestões para o Professor

- Utilize o Material Dourado para introduzir conceitos de valor posicional e operações básicas.
- Explore diferentes níveis de dificuldade, aumentando gradualmente a complexidade das operações.
- Relacione a atividade com outros conceitos matemáticos, como frações e medidas.
- Incentive os alunos a criarem seus próprios problemas e a compartilharem suas soluções com a turma.

Considerações Finais

O Laboratório de Matemática é um ambiente transformador, onde a matemática deixa de ser abstrata e ganha vida por meio de atividades práticas, materiais manipuláveis e experiências interativas. Este Produto Educacional explora como estruturar e utilizar esse espaço para promover um aprendizado significativo, desenvolvendo habilidades essenciais como raciocínio lógico, criatividade, colaboração e resolução de problemas.

Materiais como sólidos geométricos, material dourado, discos de frações e jogos matemáticos, aliados a atividades envolvendo planificações, teorema de Pitágoras e operações básicas, demonstram como a matemática pode ser ensinada de forma lúdica e engajadora.

É fundamental que as escolas disponham de um espaço físico adequado, garantindo que o Laboratório de Matemática seja funcional, seguro e convidativo. Avaliações, como questionários, observações e análises de desempenho, são essenciais para medir o impacto do laboratório no aprendizado dos alunos.

Implementar um Laboratório de Matemática é um investimento no futuro dos estudantes, proporcionando-lhes ferramentas para compreender e aplicar a matemática no cotidiano. Convidamos gestores, professores e educadores a adotarem novas práticas, adaptando as sugestões deste Produto à realidade de suas escolas. O sucesso do laboratório depende não apenas dos recursos disponíveis, mas também da criatividade, dedicação e colaboração de todos os envolvidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, V. R. N. Interferências pedagógicas na superação de dificuldades da aprendizagem matemática. *UNlrevista*, v. 1, n. 2, abr. 2006.

BENINI, M. B. C. *Laboratório de ensino de matemática e laboratório de ensino de ciências: uma comparação*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2006

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 27 jul. 2024.

FREIRE, P. *Pedagogia do oprimido*. 17. ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra, 2004.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. *Matemática: ciência e aplicações: ensino médio, volume 2*. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

LORENZATO, S. *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. 2. ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2010.

RAMOS, C. A. (2021). *Laboratório de ensino de matemática: espaço facilitador e promotor da aprendizagem*. Dissertação de Mestrado em ensino de ciências exatas. Universidade Federal de São Carlos – UFSCar.