UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DA BAHIA
CENTRO DAS CIÊNCIAS EXATAS E DAS TECNOLOGIAS - CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

NOEL ANTONIO DE SOUZA

Cartilha de Orientação ao Professor Para o Ensino de Probabilidade nos Anos Finais do Ensino Fundamental

BARREIRAS-BA
2025

NOEL ANTONIO DE SOUZA

Cartilha de Orientação ao Professor Para o Ensino de Probabilidade nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – modalidade profissional – da Universidade Federal do Oeste da Bahia como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joubert Lima Ferreira.
Coorientador: Prof. Dr. Marcelo de Paula.

BARREIRAS
2025

FICHA CATALOGRÁFICA

S729 Souza, Noel Antonio de.
Cartilha de orientação ao professor para o ensino de probabilidade nos anos finais do ensino fundamental. / Noel Antonio de Souza. – 2025.

28 f.: il.
Orientador: Prof. Dr. Joubert Lima Ferreira. Coorientador: Prof. Dr. Marcelo de Paula.
Produto educacional (Mestrado) - Universidade Federal do Oeste da Bahia. Centro das Ciências Exatas e das tecnologias – CCET. Programa de Pós- Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

1. Conceito de probabilidade. 2. Ensino Fundamental. 3. Livro didático. 4.Tarefas matemáticas. I. Ferreira, Joubert Lima. II. Universidade Federal do Oeste da Bahia – Centro de Humanidades. III. Título.

CDD 510

Biblioteca Universitária de Barreiras – UFOB

Cartilha de Orientação ao Professor Para o Ensino de Probabilidade

Sumário

Apresentação

Essa cartilha é fruto de uma dissertação de Mestrado que teve como compreender como os livros didáticos de matemática que integram o PNLD 2024 apresentam o conceito de probabilidade no 6º ano do Ensino Fundamental. A partir de todo o estudo e das análises realizadas ao longo da pesquisa foi possível pensar e construir essa cartilha que tem como objetivo oferecer orientação para o professor com sugestões de tarefas matemáticas em um ambiente exploratório, para o ensino de probabilidade.

Diante da literatura analisada, percebemos que alunos e professores apresentam certas limitações no conhecimento sobre probabilidade, tanto em relação a conceitos como em procedimentos e técnicas de resolução. Portanto, pensamos na elaboração dessa cartilha para auxiliar principalmente professores com dicas e orientações teórico-metodológicas sobre o ensino de probabilidade. O objetivo é oferecer situações que provoquem, no professor, reflexões sobre o ensino e aprendizagem de probabilidade, principalmente quanto aos métodos de ensino e aprendizagem.

Dessa forma, essa cartilha constituirá um guia rápido de consulta, principalmente para professores da educação básica, auxiliando-os em seu dia a dia de sala de aula, contribuindo assim, para amenizar as lacunas existentes e, ao mesmo tempo, potencializar o ensino e a aprendizagem desse objeto de conhecimento.

Essa cartilha está estruturada da seguinte forma:

Apresentação – reúne os motivos e os objetivos da cartilha, como também algumas premissas sobre o ensino e aprendizagem de probabilidade.

Parte 1 – apresenta situações diversas sobre o ensino e aprendizagem de probabilidade e alguns métodos de resolução.

Parte 2 – apresenta os tipos de tarefas, selecionadas dos livros didáticos analisados e outras, com análise sobre elas e dicas de como o professor pode adaptá-las e implementá-las mantendo ou elevando o grau de exigência cognitiva.

Fonte: Extraído de pt.vecteezy.com.

Fonte: Extraído de pt.vecteezy.com.

Fonte: Extraído de pt.vecteezy.com.

Fonte: Extraído de www.soescola.com.

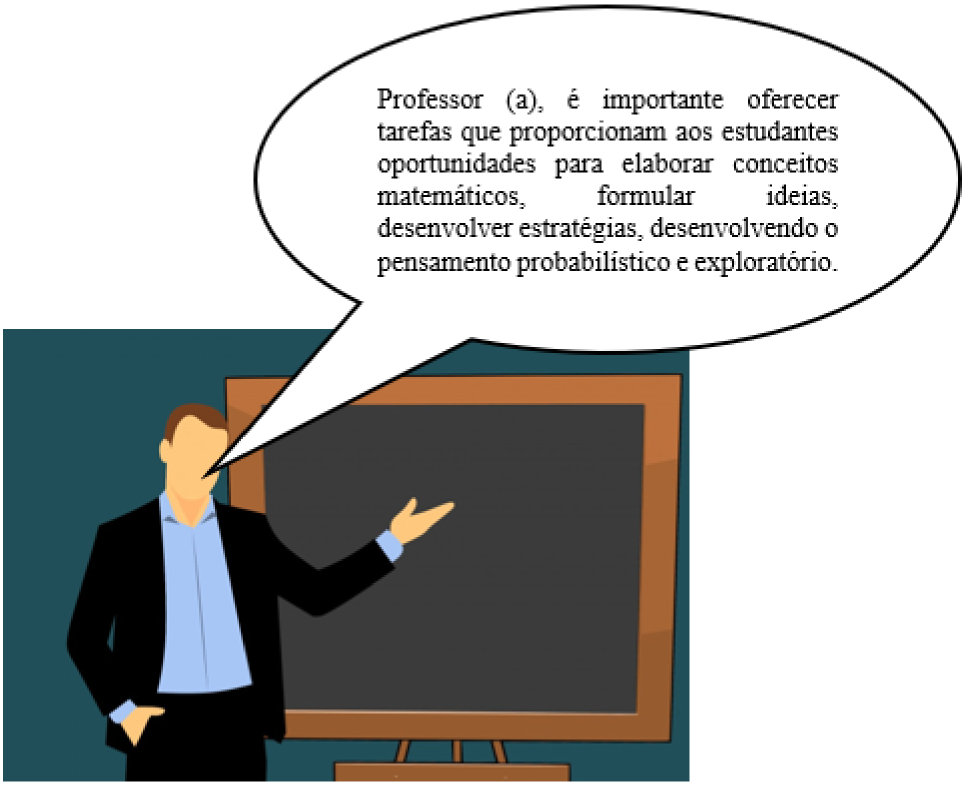
Há um consenso na literatura de que o ensino e a aprendizagem de Probabilidade pode ser um amplo espaço de trabalho pedagógico interdisciplinar além de proporcionar, através da realização de experimentos, a exploração da ideia de acaso. Segundo Carvalho (2004), Brum e Silva (2015), Almeida e Farias (2018) e Cavalcanti, Brito Lima e Andrade (2021), o desenvolvimento de atividades relacionadas a assuntos do cotidiano dos alunos, partindo de situações-problema buscando sempre um estudo investigativo, possibilitando ao aluno, a partir das situações problema a oportunidade de elaborar suas próprias hipóteses, estabelecer relações entre informações diversas, observar dados e fazer previsões, desenvolvendo, desta forma, algumas noções de Probabilidade.

Um ensino de probabilidade baseado na aplicação mecânica de regras, no qual o aluno já sabe que existe uma resposta correta e específica a ser dada (igual à do professor e/ou do livro) não favorece o desenvolvimento do raciocínio, da criatividade, da construção de conjectura e da produção de significados. Em vez disso, o professor precisa ter em mente de que nas situações reais, fora dos muros da escola, não há um professor nem livro para fornecer regras e respostas corretas. Por isso, é conveniente um ensino de probabilidade pautado na construção de significados, conjecturas, estratégias bem direcionadas. E é você, professor, o responsável por preparar e ministrar esse ensino, de conhecer e de buscar meios e estratégias para fazer os alunos avançarem rumo ao conhecimento matemático e, em específico, ao pensamento probabilístico.

Entendemos, que o professor que ensina matemática deve ser um profissional dotado de conhecimentos especializados, como propõe Carrillo *et al* (2013). Deve ser um conhecedor da Matemática e dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, capaz de selecionar e criar tarefas matemáticas desencadeadoras de reflexões, que levem os alunos a pensarem, a praticarem relações e a desenvolverem conceitos e significados sobre probabilidade, e não a mera aplicação de regras.

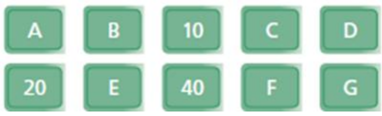
De fato, acreditamos que a implementação de tarefas matemáticas é o principal meio pelo qual o conhecimento matemático é desenvolvido e construído, isto é, concordamos com Lappan e Briars (1995) quando afirmam que a seleção de atividades ou tarefas pelo professor é a decisão mais significativa que afeta a aprendizagem de seus alunos.

Parte 1 – Probabilidade



Situação 1: Mateus tem fichas nas quais estão escritas letras e números.

Figura 1: Fichas com letras e números.



Fonte: Júnior; Castrucci (2018, p.1665; adaptado)

Se ele colocar todas as fichas em uma urna. Ao retirar uma dessas fichas, ao acaso, sem olhar, a chance maior será sair uma ficha em que está escrito um número ou uma letra? Justifique a sua resposta, fazendo a probabilidade de cada um.

Esse tipo tarefa é importante para trabalhar a ideia de espaço amostral com símbolos diferentes, ou seja, números e letras. Os alunos poderão dizer: são todas as fichas, e isso é o correto; outros poderão mesmo que de forma errada achar, que são apenas os números contidos nas fichas, pois o espaço amostral aparece de forma numérica na maioria dos livros didáticos (LD). Professor, é importante deixar claro para os estudantes que o espaço amostral é o número de casos possíveis, independentemente de ser número, letra ou outro símbolo qualquer.

O espaço amostral, no contexto do ensino superior, é convencionalmente denotado por uma letra grega maiúscula, ômega (Ω). No entanto, opta-se, neste momento, por representar o espaço amostral com as letras maiúsculas do nosso alfabeto, uma escolha que reflete uma percepção compartilhada pelos Livros Didáticos aprovados pelo PNLD 2024, que consideram a utilização da letra grega como desnecessária neste estágio. Vale ressaltar que as letras maiúsculas do alfabeto latino (A, B, C, ..., Y, Z) são reservadas para a representação de eventos e para operações com eventos, os quais constituem subconjuntos do espaço amostral.

Solução sugerida:

S = {A, B, 10, C, D, 20, E, 40, F, G}

Este exercício também aborda a definição clássica de probabilidade, que quantifica os elementos numéricos e não numéricos, permitindo a construção da razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis.

Para o número de casos favoráveis referente as letras, vamos chamar de F e a probabilidade de P.

F= {A, B, C, D, E, F, G}. São 7 casos.

$$\Pr o\,babilidade = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}.$$

$$P = \frac{7}{10} = 0{,}7 = 0{,}7.100\% = 70\%.$$

Para o número de casos favoráveis referente aos números, vamos chamar de G e a probabilidade de P.

G= {10, 20, 40}. São 3 casos.

$$\Pr o\,babilidade = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}.$$

$$P = \frac{3}{10} = 0{,}3 = 0{,}3.100\% = 30\%.$$

Sugerimos essa solução na forma fracionária, decimal e percentual para cumprir a parte da habilidade (EF06MA30) prevista na BNCC que diz para calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.

Como esse tipo de questão, que tem simbologias diferentes no espaço amostral é muito raro nos LD que compõem Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) 2024, resolvemos trazer como sugestão para o professor.

Situação 2: Para arrecadar fundos, uma instituição beneficente rifou um aparelho de som portátil com uma cartela contendo 100 nomes. O valor a ser pago pela rifa dependia da letra que aparecesse após o comprador raspar o nome escolhido. Os valores variavam de acordo com o seguinte quadro:

Quadro 1- Destruição dos dados da rifa.

Letra	G	A	B	C
Valor	Grátis	2 reais	4 reais	6 reais

Fonte: Gay (2022, p. 241; adaptado)

Sabe-se que nessa cartela havia 5 nomes com a letra G, 10 com a letra A, 15 com a letra B e 70 com a letra C.

a) Quanto a instituição arrecadou com a rifa?

b) Cássio foi a primeira pessoa a comprar um nome dessa cartela. Qual é a probabilidade de ele ter escolhido um nome pelo qual não teria de pagar? E qual é a probabilidade de ele ter escolhido um nome pelo qual teria de pagar 6 reais?

c) Felipe foi a segunda pessoa a comprar um nome dessa cartela. Ele viu que Cássio pagou 6 reais pelo nome escolhido. Qual é a probabilidade de Felipe ter escolhido um nome pelo qual não teria de pagar? E qual é a probabilidade de ele ter escolhido um nome pelo qual teria de pagar 6 reais? Escreva as respostas na forma de fração.

Comentário: Estamos sugerindo este problema para o professor aplicar em sala de aula, pois além de ser uma situação (rifa) que aparece sempre no cotidiano, ela trabalha outros conceitos matemáticos como expressão numérica e probabilidade com eventos sucessivos e sem reposição, de acordo nossa análise feita em todos os LD que compõe o PNLD 2024, foi encontrada apenas uma vez. Como é um tipo de questão importante na construção do pensamento probabilístico, resolvemos sugerir em nossa cartilha.

Solução sugerida:

a) Nessa cartela, havia 5 nomes com a letra G, 10 com a letra A, 15 com a letra B e 70 com a letra C. De acordo com os valores de cada letra, temos:

$$(5 \times 0) + (10 \times 2) + (15 \times 4) + (70 \times 6) = ?$$

aqui está representada a expressão numérica, agora basta utilizar os conhecimentos de sinas para resolver a expressão. Neste caso específico, resolver primeiramente as multiplicações e depois efetuar as adições, assim:

$$0 + 20 + 60 + 420 = 500.$$

Logo, a resposta correta é R$ 500,00.

b) Para Cássio não pagar a rifa, teria que ter escolhido um nome que iniciasse com a letra G, pois ela seria gratuita. Na cartela, havia 5 nomes com a letra G em um total de 100 nomes. Assim, a probabilidade de ele ter escolhido um nome pelo qual não teria de pagar é 5%, como está demonstrado abaixo. Para Cássio ter pagado 6 reais pela rifa, ele teria que escolher um nome da cartela que iniciasse com a letra C. Sabendo que nessa cartela havia 70 nomes com a letra C, dentre 100 nomes, a probabilidade de ele ter escolhido um nome pelo qual teria de pagar 6 reais é 70% (veja a seguir).

Aqui utilizaremos a definição clássica:

$$\Pr o\, babilidade = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}.$$

$$P = \frac{5}{100} = 0{,}05.100\% = 5\%\ e\ P = \frac{70}{100} = 0{,}7.100\% = 70\%.$$

Neste item, trabalhamos a habilidade (EF06MA30) prevista na BNCC expressando o resultado por número racional (forma fracionária, decimal e percentual). Nos LD normalmente aparece apenas uma forma e aqui, sugerimos as três.

c) Como Felipe foi a segunda pessoa a comprar um nome dessa cartela, temos que considerar que havia 99 nomes disponíveis para escolha, e não mais 100, como no início. Logo, a probabilidade de Felipe ter escolhido um nome pelo qual não teria de pagar é $\frac{5}{99}$.

Se ele viu que Cássio pagou 6 reais pelo nome escolhido, significa que foi um nome iniciado com a letra C. Assim, restam 69 nomes com a letra C dentre 99 disponíveis para a escolha. Portanto, a probabilidade de Felipe ter escolhido um nome pelo qual teria de pagar 6 reais é $\frac{69}{99}$.

Logo, trabalhamos aqui probabilidade com eventos sucessivos e sem reposição.

Situação 3: Leia a tirinha e responda às questões.

Figura 2: Tirinha de Matemática.

Fonte: Adaptado de https://www.humorcomciencia.com

a) Supondo que o dado lançado pelo tucano é "honesto", responda: qual é a probabilidade de sair a face com o número 12? E a face com o número 13?

b) Por que Bugio foi otimista? Justifique sua resposta.

Comentário: Estamos sugerindo este problema para o professor aplicar para os estudantes, pois segundo Masseno (2022), a tirinha, se utilizada de maneira adequada e planejada, pode tornar-se uma poderosa ferramenta que poderá auxiliar o docente na elaboração de propostas pedagógicas para o ensino da Matemática (Pereira; Alcântara, 2021). Pereira e Alcântara (2021, p. 66) relatam o interesse dos alunos em ler tirinhas; "a relação entre imagens e palavras, que ensinam com maior eficiência; a riqueza de informações que existe no quadrinho; o incentivo à leitura; o enriquecimento do vocabulário dos estudantes", bem como, "o despertar do pensamento e a criatividade pelo seu caráter elíptico, caráter globalizador e podem ser utilizadas em qualquer nível escolar sobre qualquer temática ou conteúdo". Além disso, esse tipo de questão não é muito comum nos LD que compõem o PNLD 2024, daí a importância de sugerirmos aqui. Assim, nossa cartilha está mostrando um excelente complemento ocupar as lacunas deixadas pelos LD.

Solução sugerida:

a) O dado tem 20 faces numeradas de 1 a 20. Portanto, a chance de sair qualquer um dos números de 1 a 20 é sempre a mesma, ou seja, uma possibilidade em um total de 20:

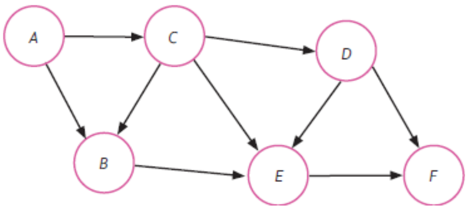
$$\frac{1}{20}\ ou\ 0{,}05\ ou\ 5\%$$

b) Esse item, tem um caráter inicial de tarefa matemática tipo exploração, pois privilegiam a comunicação de conjecturas, estratégias e dificuldades dos alunos, assim como incentivam que eles questionem suas ideias e as dos colegas, refletindo sobre necessidades, potencialidades e encaminhamentos de estratégias de resolução. Isso é muito raro de encontrar LD que compõem o PNLD 2024, daí a importância de sugerirmos aqui. Mais uma vez, nossa cartilha está mostrando um excelente complemento ocupar as lacunas deixadas pelos LD.

Assim, espera-se que os estudantes respondam que Bugio foi otimista porque, para julgar que quase acertou seu palpite, considerou apenas a proximidade entre os números 12 e 13, e não a probabilidade de cada uma dessas faces sair.

Situação 4: Na figura a seguir, representamos 6 cidades e as estradas que as ligam. Percorrendo sempre nos sentidos indicados pelas setas, os automóveis podem ir da cidade A para a cidade F por diversos caminhos, passando por pelo menos 2 das outras cidades.

Figura 3: Caminhos entre cidades.



Fonte: Iezzi; Dolce; Machado (2022a, p.306)

a) Quais são os caminhos diferentes para ir de A a F?

b) Há quantos caminhos diferentes?

Comentário: Estamos sugerindo esta questão para o professor aplicar para os estudantes, por se tratar de um problema matemático que é de fundamental importância para os estudantes, pois oferece suporte à curiosidade e ao mesmo tempo propicia a possibilidade de novas descobertas. É um problema diferente dos que aparecem na maioria dos LD, pois não traz números, mas traz caminhos para quantificar os eventos e chegarmos nos números, se necessário, como é o caso do item (b). Porém no item (a) o raciocínio do estudante para traçar os caminhos diferentes para ir de A a F. Esse tipo de problema praticamente não encontramos nos LD que compõem o PNLD 2024, daí a importância de sugerirmos aqui. Assim, nossa cartilha está mostrando um excelente material de apoio ao professor, para ocupar as lacunas deixadas pelos LD.

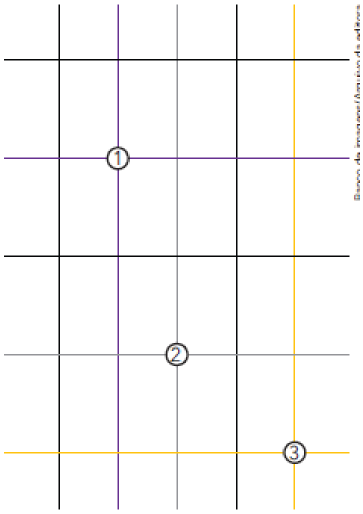
Solução sugerida:

a) Os caminhos para ir de A a F são: ABEF, ACBEF, ACEF, ACDF e ACDEF.

b) 5 caminhos.

Situação 5: Na figura a seguir, os segmentos de reta representam ruas de uma cidade, que estão nas direções norte-sul e leste-oeste.

Figura 4: Ruas de uma cidade.



Fonte: Iezzi; Dolce; Machado (2022a, p.306)

a) Pedro encontra-se na esquina das ruas roxas, no ponto 1, e quer ir à esquina das ruas cinza, no ponto 2. Caminhando só para a direita ou para baixo em relação à figura, quantos caminhos diferentes ele pode percorrer para chegar ao destino desejado?

b) Estando na esquina das ruas cinza, no ponto 2, Pedro agora quer ir para a esquina das ruas amarelas, no ponto 3. Também caminhando sempre para a direita ou para baixo em relação à figura, quantos são os caminhos diferentes para chegar ao destino desejado?

c) Indo somente para a direita ou para baixo, quantos são os caminhos para ir da esquina das ruas roxas, no ponto 1, para a das ruas amarelas, no ponto 3, passando pela das ruas cinza, no ponto 2?

d) Ao chegar da caminhada, Pedro foi lavar as mãos com água e sabão. Dirigiu-se a uma pia que estava com a torneira fechada e dispunha de sabão e toalha. Descreva as etapas para lavar bem as mãos e represente esse processo por meio de um fluxograma.

Comentário: Estamos sugerindo esta questão para o professor aplicar para os estudantes, pois ela trabalha situações que apare em uma das competências específicas de Matemática no Ensino Fundamental que aponta para o enfrentamento de situações-problema de modo a "[...] expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados)." (Brasil, 2018, p. 267). Percebemos que esse tipo de questão, mostra para o professor e para o estudante que o fluxograma é uma excelente ferramenta para representar situações probabilísticas envolvendo um pensamento lógico matemático. Como esse tipo de problema praticamente não encontramos nos LD que compõem o PNLD 2024, daí a importância de sugerirmos aqui. Percebemos assim, que nossa cartilha se torna um excelente material de apoio ao professor, para ocupar as principais lacunas deixadas pelos LD.

Solução sugerida:

a) Pedro deve caminhar 1 quadra para o leste (L) e 2 para o sul (S). As possibilidades são: LSS, SLS e SSL. São 3 caminhos possíveis.

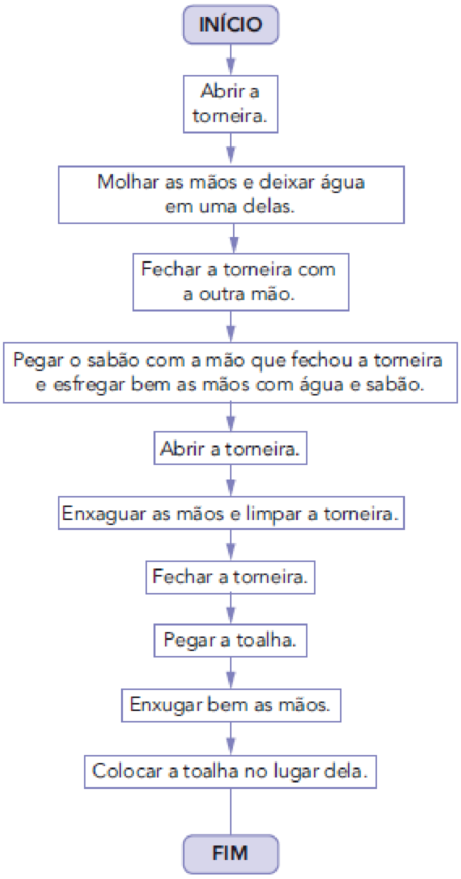
b) Pedro deve caminhar 2 quadras para o leste (L) e 1 para o sul (S). As possibilidades são: LLS, LSL e SLL. São 3 caminhos possíveis.

c) Para ir da esquina das ruas roxas para a das ruas cinza, há 3 caminhos. Em cada um deles, para ir daí até a esquina das amarelas, há 3 caminhos. Então, o número de caminhos possíveis é: 3 x 3= 9.

d) Exemplo de resposta: início → abrir a torneira → molhar as mãos e deixar água em uma delas → fechar a torneira com a outra mão → pegar o sabão com a mão que fechou a torneira e esfregar bem as mãos com água e sabão → abrir a torneira → enxaguar as mãos e limpar a torneira → fechar a torneira ñ pegar a toalha → enxugar bem as mãos ñ colocar a toalha no lugar dela → fim.

Veja o fluxograma abaixo:

Figura 5: Fluxograma de higienização das mãos.



Fonte: Iezzi; Dolce; Machado (2024a, p.129)

Parte 2 - Tipos de tarefas e suas implicações para o ensino e aprendizagem

“As tarefas são o elemento organizador da atividade de quem aprende” (Ponte, 2014 p. 14)

Fonte: Adaptado de pt.vecteezy.com.

- Tarefa tipo exercício é fechada e de desafio reduzido. Servem para o aluno pôr em prática os conhecimentos já anteriormente adquiridos.
- Tarefa do tipo problema também fechada, mas com elevado desafio. O aluno não conhece um algoritmo que leve a solução imediata.
- Tarefa do tipo investigação tem um grau de desafio elevado, mas é uma tarefa aberta. Exige um papel ativo do aluno, que ele formule perguntas, hipóteses e procure respostas para elas.
- Tarefa do tipo exploração é uma tarefa aberta, de desafio reduzido. São tarefas fáceis, nas quais se pode trabalhar de forma instantânea, sem planejamento.

As tarefas matemáticas devem ser utilizadas pelo professor como um meio para articular os conteúdos de modo a alcançar os seus objetivos de ensino (Stein *et al*., 2009). Assim, elas assumem um papel importante nos processos de ensino e de aprendizagem, pois influenciam os alunos, na medida em que orientam sua atenção para aspectos particulares de conteúdos e especificam modos de processar a informação (Doyle, 1983). Por isso, ao selecionar e organizar tarefas, o professor precisa ter clareza de que estas vão além dos conteúdos que devem ser mobilizados para sua realização. Elas envolvem processos cognitivos relativos à compreensão, ao estabelecimento de estratégias e procedimentos, e à validação. Pois é pelas tarefas propostas em aula que o professor procura desenvolver nos alunos as habilidades programadas, permitindo-lhe ter uma noção de onde está e do que fazer para chegar aonde deseja. As tarefas podem desempenhar vários papeis: apoiar a aprendizagem, fixar conteúdo, verificar o que o aluno aprendeu, compreender de modo mais profundo as capacidades, processos de pensamento e dificuldades dos alunos (Ponte, 2014). Por isso, torna-se crucial que o professor conheça os vários tipos de tarefas, suas limitações e potencialidades e diversifique o seu uso.

No entanto, uma tarefa pode ter ou não potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que pode ajudar a mobilizar, pode dar lugar a atividades diversas, dependendo do modo como for proposta, a forma de organização do trabalho dos alunos, o ambiente de aprendizagem e a sua própria capacidade e experiência anterior. Por outro lado, uma atividade corresponde a uma ou mais tarefas realizadas no quadro de uma certa situação. Segundo esse autor, é pela sua atividade e pela sua reflexão sobre essa atividade que o aluno aprende, mas é importante esclarecer que essa aprendizagem depende de dois elementos igualmente importantes: (i) a tarefa proposta; e (ii) a situação didática criada pelo professor.

Tarefa 01.

A escola onde José e Maria estudam, está rifando uma bicicleta. Cada um, comprou bilhetes da rifa, veja figura abaixo:

Figura 7: Rifa na escola.

Fonte: Gay (2022, p. 239. Adaptado).

1. Qual a probabilidade de Maria ganhar essa bicicleta? Justifique sua resposta.

2. Qual a probabilidade de José ganhar essa bicicleta? Justifique sua resposta.

3. Agora, crie uma situação em que Maria tenha maior probabilidade de ganhar a bicicleta do que todos os outros concorrentes. Justifique sua resposta.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), a realização de uma tarefa com essas características envolve quatro momentos principais. No primeiro momento os alunos irão realizar uma investigação da situação proposta, no segundo momento o aluno define as conjecturas, para no próximo momento testá-las e refiná-las, já no quarto momento os alunos realizam a validação das conjecturas e a avaliação do trabalho realizado.

Tarefas desse tipo, são abertas e não existe reposta única, prezando pelo protagonismo do estudante. O professor aparece como mediador do conhecimento.

Durante a realização das tarefas os alunos são estimulados a realizarem processos matemáticos tais como procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjecturas, refletir e generalizar.

Para responder à tarefa acima, questionamentos por parte dos alunos poderão e deverão aparecer, como:

- Quantas rifas foram vendidas?
- Quantas José comprou?
- Quantas José comprou?

Outros questionamentos também poderão aparecer, isso é uma das características das tarefas investigativas. Como esse tipo de tarefa é aberta, os alunos são convidados a usar sua imaginação e criatividade, podendo quantificar as riras de José e Maria, para calcular a probabilidade pela visão clássica ou Laplaciana, fazendo a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, já que isto está posto em todos LD. Nesse momento é importante o professor deixar a criatividade dos alunos fluírem, pois as diferentes visões e opiniões são importantes para construção do conhecimento coletivo da turma. No momento da socialização das respostas, o professor deverá fazer as ponderações necessárias.

Como essa questão não existe uma resposta correta, ou seja, serão várias respostas que deverão ser valorizadas pelo professor. Aqui faremos apenas comentários de cada item.

Para as questões 1 e 2, os estudantes poderão quantificar as rifas, de acordo com a imaginação de cada um ou mesmo criar outras situações para expressar a probabilidade pedida.

Já para responder à questão 3, os estudantes são convidados a agirem como matemáticos, criando a sua própria questão, de acordo seu pensamento crítico.

Dessa forma, entendemos que essa tarefa proporciona aos estudantes oportunidades para elaborar conceitos matemáticos, formular ideias, desenvolver estratégias, desenvolvendo o pensamento matemático e oportunizando a investigação. Por isso, recomendamos esse tipo de tarefa.

Tarefa 2.

Depois da aula inicial de probabilidade, dois alunos resolveram realizar os experimentos mostrados abaixo, lançando uma “moeda honesta” várias vezes. Observe os experimentos a seguir e complete a tabela abaixo.

Figura 8: Experimentos do lançamento de uma moeda.

Fonte: Gay (2022, p. 240; adaptado).

Quadro 2-Destruição dos dados encontrados na situação 2.

Número de lançamentos da “moeda honesta”	Frequência absoluta de resultados de cara	Frequência relativa em porcentagem de resultados de cara	Frequência absoluta de resultados de coroa	Frequência relativa em porcentagem de resultados de cara

10	2	20%	8	
50	18	36%		
100	55	55%		

Fonte: Elaboração Própria.

Quais forma as conclusões encontradas?

Possível solução: Note que, à medida que o número de lançamentos foi aumentando, a porcentagem de lançamentos em que saiu cara foi ficando cada vez mais próxima da probabilidade de esse evento ocorrer, ou seja, foi ficando cada vez mais próxima de 50%. O mesmo ocorreu com a porcentagem de lançamentos em que saiu coroa. Vamos demonstrar os dados completos na tabela abaixo: (veja quadro 9).

Quadro 3- Resposta da destruição dos dados encontrados na situação 2.

Número de lançamentos da "moeda honesta"	Frequência absoluta de resultados de cara	Frequência relativa em porcentagem de resultados de cara	Frequência absoluta de resultados de coroa	Frequência relativa em porcentagem de resultados de cara
10	2	20%	8	80%
50	18	36%	32	64%
100	55	55%	45	45%

Fonte: Elaboração Própria.

Logo de início, os estudantes poderão imaginar que cara tem mais chance de sair do que coroa, nesse momento o professor pode intervir, pedindo para analisar a tabela completa e enfatizar a descrição da pergunta, "moeda honesta" significa que as duas faces têm a mesma chance de ficar voltada para cima, ou seja, os eventos são equiprováveis.

Para encontrar a frequência absoluta de coroa, espera-se que os alunos façam:

50-18=32 e 100-55=45

Agora, para encontrar a frequência relativa de coroa, os alunos poderão utilizar o conceito clássico de probabilidade, da seguinte forma:

$$\mathrm{Pr}\,o\,babilidade = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}.$$

$$P = \frac{8}{10} = 0{,}8.100\% = 80\%$$

$$P = \frac{32}{50} = 0{,}64.100\% = 64\%$$

$$P = \frac{45}{100} = 0{,}45.100\% = 45\%$$

Sugerimos essa tarefa, pois ela favorece na íntegra, o desenvolvimento da habilidade EF06MA30 da BNCC, permitindo que os estudantes calculem a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por meio de um número racional na forma fracionária, decimal e percentual e comparem esse número com a probabilidade obtida por meio dos experimentos sucessivos. Além disso, ela também permite que os estudantes construam as ideias de chance (chance maior ou menor de acontecer algo) e que calculem a probabilidade de um evento aleatório ocorrer, entendendo que o número que representa probabilidade será sempre igual ou menor que 1 e, também, igual ou maior que zero.

Como esse tipo de tarefa não é encontramos nos LD que compõem o PNLD 2024, daí a importância de sugerirmos aqui.

Tarefa 3.

Observe a figura abaixo:

Figura 9: Caixa com bolinhas coloridas.

Fonte: Adaptado de https://quizizz.com

1. Qual a probabilidade de retirar uma bola vermelha da caixa? Justifique tua resposta.

2. Agora, representa a situação inicial pensada por você colocando a quantidade de bolas dentro de uma urna e repete a retirada, anotando a frequência absoluta e a relativa em uma tabela para as seguintes situações:

a) 10 retiradas

b) 20 retiradas

c) 50 retiradas

3. O que tu observas entre a tua resposta na primeira questão e as retiradas da segunda questão? Justifica a tua reposta.

Aqui, temos claramente uma tarefa matemática investigativa. Esse tipo de tarefa é aberta e não tem solução única, dessa forma, o professor deverá valorizar as respostas dos estudantes e, fazer ponderação no momento oportuno, sempre incentivando a criatividade e o raciocínio lógico matemático. Logo, não apresentaremos solução, apenas um comentário de cada item da nossa tarefa.

A questão 1 dessa tarefa consiste em explorar conhecimentos probabilísticos associado à investigação, contemplando as abordagens clássica e frequentista da probabilidade.

Para responder essa tarefa, questionamentos por parte dos alunos poderão e deverão aparecer, como:

- Quantas bolas tem na caixa? Pois nos LD isso é conceituado como número de casos possíveis.
- Quantas bolas vermelhas tem na caixa? Pois nos LD isso é conceituado como número de casos favoráveis.
- Todas as bolas têm a mesma chance de ser retirada da caixa? Pois nos LD, isso é conceituado como evento equiprovável.

Outros questionamentos também poderão aparecer, isso é uma das características das tarefas investigativas. Como esse tipo de tarefa é aberta, alunos são convidados a usar sua imaginação e criatividade, podendo quantificar as bolas, para calcular a probabilidade pela visão clássica ou Laplaciana, fazendo a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, já que isto está posto em todos LD.

Já em relação à questão 2, ela foi elabora dentro da visão frequentista, fazendo vários experimentos para chegar o mais próximo do resultado. Assim, contemplaremos a habilidade (EF06MA30) prevista na BNCC para calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos, pois os alunos deverão representar a situação inicial pensada por eles, colocando a quantidade de bolas dentro de uma urna e repetir a retirada, anotando a frequência absoluta e a relativa em uma tabela. Ainda no contexto da questão 2, os alunos são estimulados a agir, usando sua criatividade na formulação da questão, conjecturando, testando e realizando provas bem como discutindo os resultados com seus colegas e professor.

Já na terceira questão, os alunos poderão concluir conhecimentos relacionados a probabilidade, quando associada à investigação e contempla as abordagens clássica e frequentista da probabilidade à medida que observação entre a resposta encontrada por ele na primeira questão e as retiradas de bola na segunda questão. Percebe-se que essa terceira questão foi criada para que os alunos pudessem concluir todo seu pensamento probabilístico, estratégias e caminhos percorrido para chegar no resultado imaginado por eles.

Esse tipo de tarefa não é encontramos nos LD que compõem o PNLD 2024.

Tarefa 4.

Júlio e Carla estão brincando com um “dado honesto”. Depois de cada lançamento feito por Júlio, Carla registra, no quadro, o número que aparece na face superior do “dado honesto”. Ela já registrou o resultado de 25 lançamentos. Agora, observe a conclusão de Júlio após observar os registros feitos por Carla. Você concorda com Júlio?

Figura 10: Arremesso de dado.

Fonte: Silveira (2022, p.275)

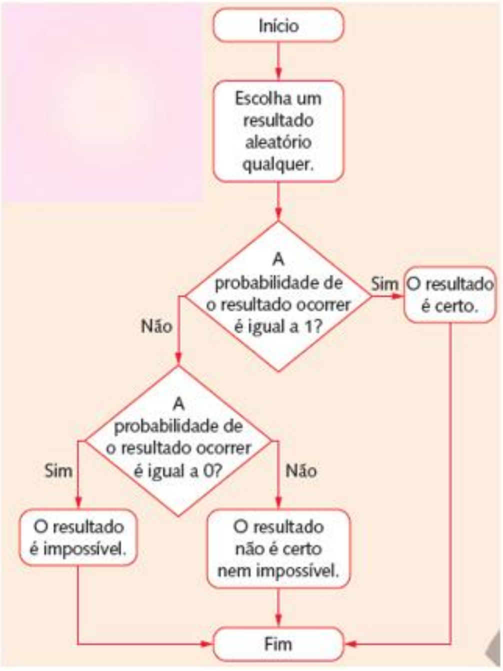
Comentário: Estamos sugerindo esta tarefa para o professor aplicar para os estudantes, por se tratar de um problema matemático que é de fundamental importância para os estudantes, pois oferece suporte à curiosidade e ao mesmo tempo propicia a possibilidade de novas descobertas. Ela é aberta, possibilitando diversas respostas e incentivando a construção do raciocínio lógico matemático.

Solução: Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam negativamente. Como o dado é "honesto", cada face tem a mesma probabilidade de sair.

Tarefa 5.

A professora Marta construiu um fluxograma para verificar se o resultado de um experimento aleatório é certo, impossível ou nenhum dos dois.

Figura 11: Fluxograma de probabilidade.



Fonte: Silveira (2022, p.275, adaptado)

Utilizando o fluxograma mostrado acima, crie três situações, onde teremos evento certo, impossível e nenhum dos dois.

Comentário: esse tipo de tarefa, coloca o estudante como protagonista do conhecimento matemático, pois ele que construirá a própria questão de acordo o seu pensamento crítico. Ela é aberta, possibilitando diversas respostas e incentivando a construção do raciocínio lógico matemático. Como esse tipo de tarefa é muito raro nos LD, estamos sugerindo aqui para que o professor tenha um suporte a mais para ajudá-lo no conteúdo de probabilidade.

Solução: É evidente que permite múltiplas soluções e, o professor deve valorizar todas, fazendo as ponderações necessárias no momento de socialização com a turma. Vamos apresentar uma possibilidade de resposta.

A: Lançar dois "dados honestos" e a soma das faces obtidas ser 15.

B: Lançar um "dado honesto" e sair um número de 1 a 6.

C: Lançar um "dado honesto" e sair um número par.

O resultado A é impossível e o resultado B é certo. O resultado C não é certo nem impossível.

Tarefa 6.

Considere a figura abaixo e crie uma questão que envolva probabilidade. Peça a um colega que a resolva e, depois, corrija-a.

Figura 12: Saco com bolas verdes e vermelhas.

Fonte: Silveira (2022, p.275)

Solução: resposta pessoal. Exemplo de resposta: Considere a imagem. É mais provável ser sorteada uma bola verde ou uma bola vermelha? Justifique sua resposta.

Para a solução do colega, a resposta seria vermelha, pois:

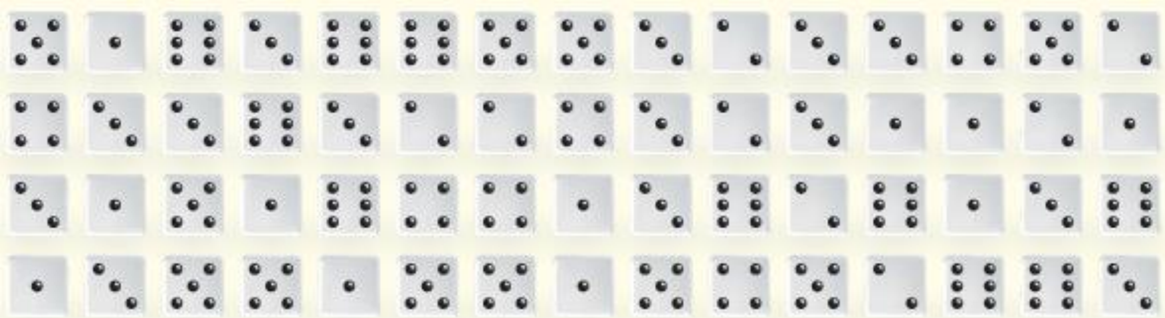
$$P = \frac{12}{22} \cong 0{,}55.100\% \cong 55\%$$

Tarefa 7.

Junte-se a um colega, construam um dado a partir da planificação de um hexaedro e pintem as faces com as cores azul, amarela, verde, laranja, preta e vermelha. Depois, façam 60 lançamentos do dado e construam uma tabela de frequência. Para finalizar, calculem a probabilidade de cada cor ficar na face superior (Bianchini, 2022, p.270. Modificado).

A seguir, um exemplo de resultados para compor a tabela de frequência.

Figura 13: Faces do dado.



Fonte: Bianchini (2022, p. XCVI)

Portanto, as frequências e probabilidades nesse caso são:

Tabela 1: Probabilidade das faces do dado.

Face superior	Frequência	Probabilidade
1	11	$\frac{11}{60}$
2	8	$\frac{8}{60}=\frac{2}{15}$
3	14	$\frac{14}{60}=\frac{7}{30}$
4	6	$\frac{6}{60}=\frac{1}{10}$
5	11	$\frac{11}{60}$
6	10	$\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$

Fonte: Elaboração Própria.

Essa tarefa foi elabora dentro da visão frequentista, fazendo vários experimentos para chegar o mais próximo do resultado. Assim, contemplaremos a habilidade (EF06MA30) prevista na BNCC para calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional, fazendo comparação desse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos. Além disso os alunos trabalharão a construção e planificação do hexaedro, que é uma figura geométrica importante dentro do ensino de probabilidade, pois em praticamente todos os LD, tem atividades envolvendo arremesso de dado. Dessa forma mostraremos para os estudantes que todas as seis faces deverão ser exatamente iguais para que elas sejam equiprováveis.

Professor (a), chegamos ao fim de nossa cartilha. Esperamos ter contribuído de forma positiva para o seu trabalho sobre probabilidade em sala de aula.

Sabemos que o seu trabalho em sala aula exige muito conhecimento, garra, dedicação e força de vontade, e torcemos para que consiga deixar em cada ser humano que receber suas orientações, com vontade de aprender e a capacidade de sonhar e construir um mundo melhor para se viver.

UM ABRAÇO!

NOEL ANTONIO DE SOUZA.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é base. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 29. Jun. 2024.

GAY, M. R. Garcia. **Araribá Conecta**: (6º ano). 1ª. ed. São Paulo: Moderna, 2022.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade**: (6º ano). 10ª. ed. São Paulo: Saraiva, 2022.

JÚNIOR, J.R. Giovanni; CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da Matemática** (6º ano). 4ª ed. São Paulo: FTD, 2018.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PONTE, J.P. Investigar, ensinar e aprender. In: **ACTAS do ROFMAT**. Lisboa: APM, 2003.

PONTE, João Pedro da. **Práticas profissionais dos professores de Matemática**. 1. ed. Lisboa. 2014. ISBN 978-989-8753-06-9. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/15310. Acesso em: 05 jul. 2024.

MASSENO, Thalya Cristiny de Sousa. **Tirinha e matemática: orientações didáticas a partir de um problema do livro O homem que calculava de Malba Tahan.** Disponível em: https://www.academia.edu/99242141/Tirinha_e_matem%C3%A1tica_orienta%C3%A7%C3%B5es_did%C3%A1ticas_a_partir_de_um_problema_do_livro_o_homem_que_calculava_de_Malba_Tahan. Acesso em: 22 fev. 2025.

SILVA, Juliano Pereira da; MOREIRA, Plinio Cavalcanti. Produto educacional sobre educação algébrica escolar: pensamento algébrico, linguagem, generalização. **Boletim online de Educação Matemática**, Joinville, v. 6, n. 10, p. 255-275, 2018. Disponível em: http://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/11274/8602. Acesso em: 03 jul. 2024.

SILVEIRA, Ênio. **Desafios da Matemática** (6º ano): 1ª. ed. São Paulo: Moderna, 2022.