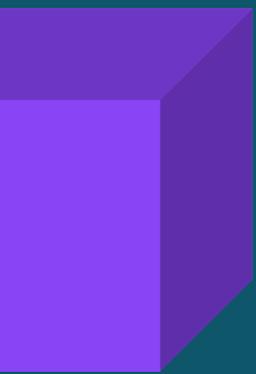
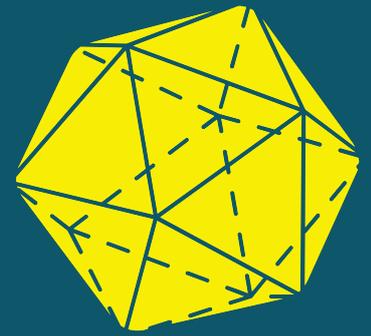




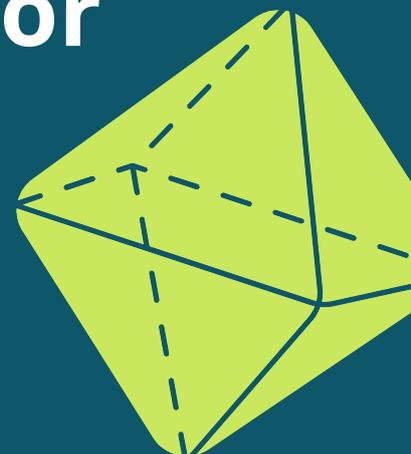
UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DA BAHIA
CENTRO DAS CIÊNCIAS EXATAS E DAS TECNOLOGIAS - CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT



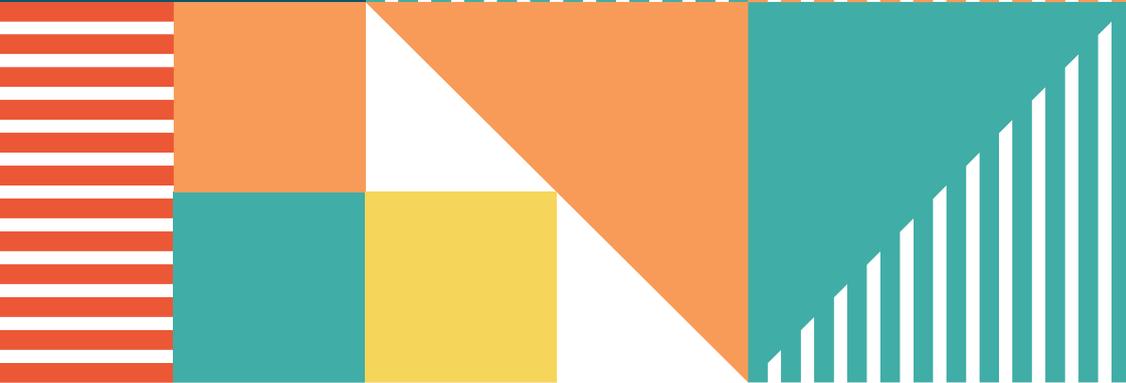
POLIEDROS E A RELAÇÃO DE EULER

O ENSINO DA GEOMETRIA ATRAVÉS DE
POLIEDROS IMPRESSOS EM 3D

Manual do Professor

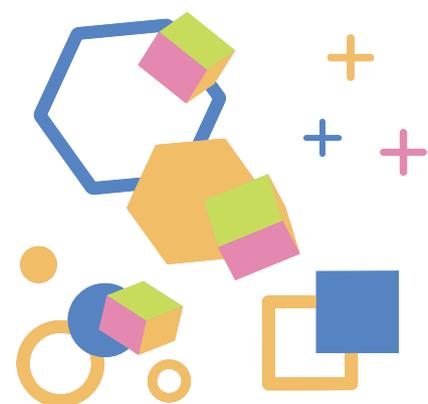
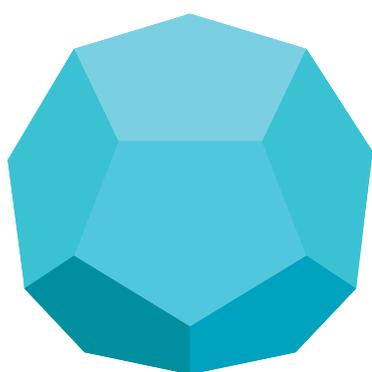


Organização: Bruna Karla Pereira de Souza Castro



Índice

1. Introdução.....	01
2. Objetivos.....	02
3. Conteúdos: Poliedros e Equação de Euler.....	03
4. Dicas e Recomendações.....	03
5. Habilidades Relacionadas.....	04
6. Descritores da Prova SAEB.....	04
7. Links dos arquivos para impressão dos poliedros.....	05
8. Materiais Utilizados.....	06
9. Atividade 1 – Classificação de Poliedros Convexos e Não Convexos.....	07
10. Atividade 2 – Baralho das planificações.....	09
11. Baralho para impressão.....	11
12. Atividade 3 - Baralho das Características.....	17
13. Baralho para impressão.....	19
14. Atividade 4 – Investigação da Relação de Euler.....	26



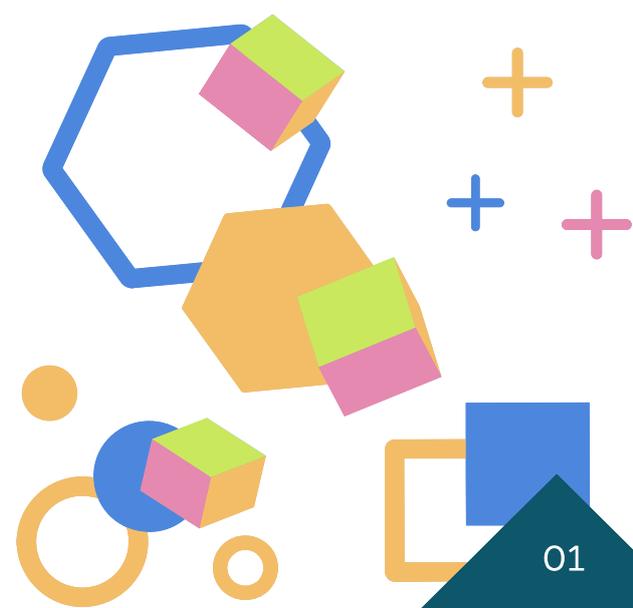


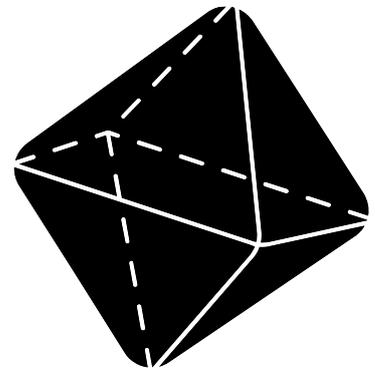
CARTILHA: O ENSINO DA GEOMETRIA ATRAVÉS DE POLIEDROS IMPRESSOS EM 3D

1. Introdução

A Geometria desempenha um papel essencial na Matemática, permitindo que os estudantes compreendam as formas tridimensionais, suas propriedades e aplicações no mundo real. No ensino tradicional, muitas vezes, o estudo dos poliedros fica restrito às representações bidimensionais em livros didáticos, dificultando a visualização espacial e a compreensão de conceito.

Esta cartilha tem como objetivo apresentar uma sequência didática para o ensino da Geometria, utilizando poliedros impressos em 3D como ferramenta de aprendizagem. Através de atividades investigativas, os alunos poderão explorar as propriedades dos sólidos de Platão, Arquimedes, Kepler-Poinsot e toroidais, verificando empiricamente suas características e aprofundando a compreensão sobre a Relação de Euler.





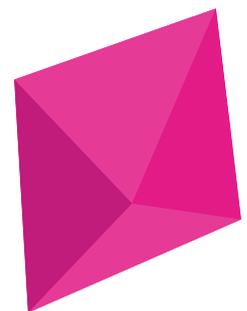
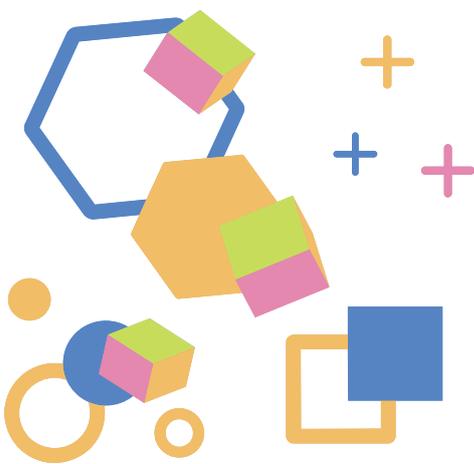
2. Objetivos

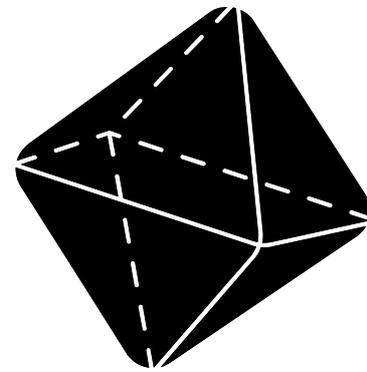
Objetivo Geral

Proporcionar uma abordagem didática diferenciada para o ensino da Geometria, utilizando poliedros impressos em 3D como recurso pedagógico para a construção do conhecimento matemático.

Objetivos Específicos

- Favorecer a visualização e manipulação concreta de poliedros para facilitar o entendimento de suas propriedades.
- Explorar a Relação de Euler e sua validade para diferentes tipos de poliedros, indo além dos convexos.
- Desenvolver o pensamento investigativo dos alunos através de atividades práticas e problematizações.
- Relacionar o estudo dos poliedros às habilidades da BNCC e à matriz de referência do SAEB, demonstrando sua importância no currículo escolar.



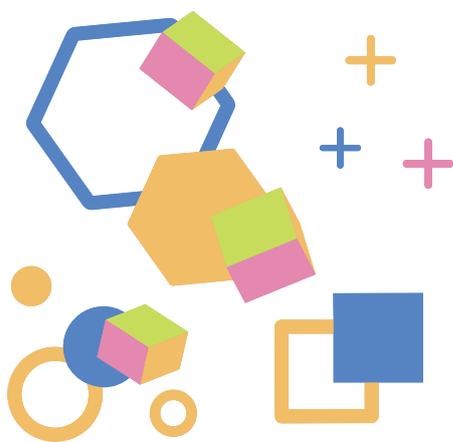


3. Conteúdo: Poliedros e a Relação de Euler

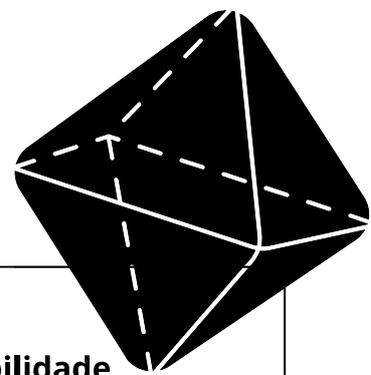
- Definição de poliedros e suas classificações (convexos e não convexos).
- Planificação de poliedros.
- Apresentação dos sólidos de Arquimedes e Kepler-Poinsot.
- A Relação de Euler ($V - A + F = 2$) e sua validade para diferentes tipos de poliedros.

4. Dicas e Recomendações

- Incentivar os alunos a explorar os sólidos, contando faces, vértices e arestas para verificar a validade da Relação de Euler.
- As atividades foram alinhadas às competências e habilidades da BNCC, garantindo uma abordagem que favoreça o raciocínio lógico e o pensamento geométrico.
- Integrar a Geometria com outras áreas do conhecimento, como Física, Arquitetura e Arte, promovendo uma visão mais ampla do tema.



5. Habilidade Relacionadas:

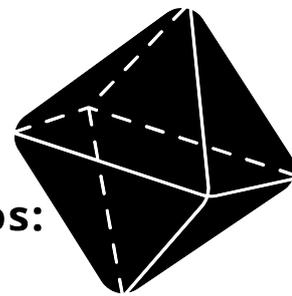


Série/Ano	Habilidade (Código BNCC)	Descrição da Habilidade
5º Ano	EF05MA16	Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos. Figuras geométricas planas: características, representações e ângulos.
	EF05MA17	Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.
6º Ano	EF06MA17	Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial
	EF06MA18	Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.

6. Descritores da Prova SAEB:

- D3 - Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas;
- D4 - Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.





7. Links dos arquivos para impressão dos poliedros:

A lista a seguir apresenta os links dos arquivos em stl utilizados para a impressão dos sólidos geométricos. Sugerimos que o tamanho do sólido para impressão seja de pelo menos 6 cm (ou 60mm).

Poliedros de Platão

<https://www.thingiverse.com/thing:3786299>

Poliedros de Arquimedes

<https://www.printables.com/model/133696-archimedean-solids#preview.589wC>

Poliedros de Kepler-Poinsot

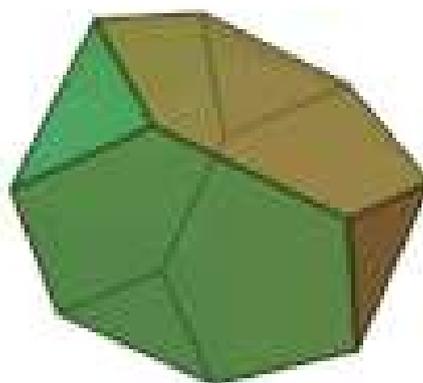
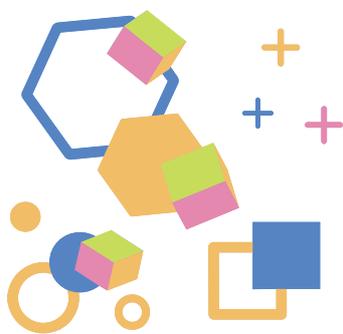
<https://cults3d.com/en/3d-model/art/art3d-clb-solides-kepler-poinsot>

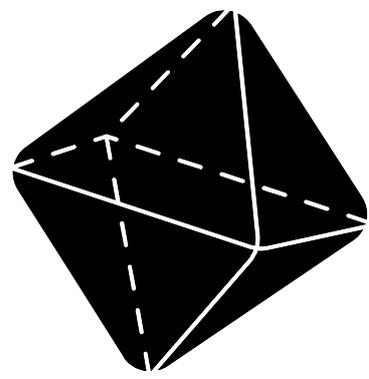
Poliedros Toroidais

<https://www.thingiverse.com/thing:2865540>

Outros Poliedros

<https://www.printables.com/model/710034-platonic-solids-variants>

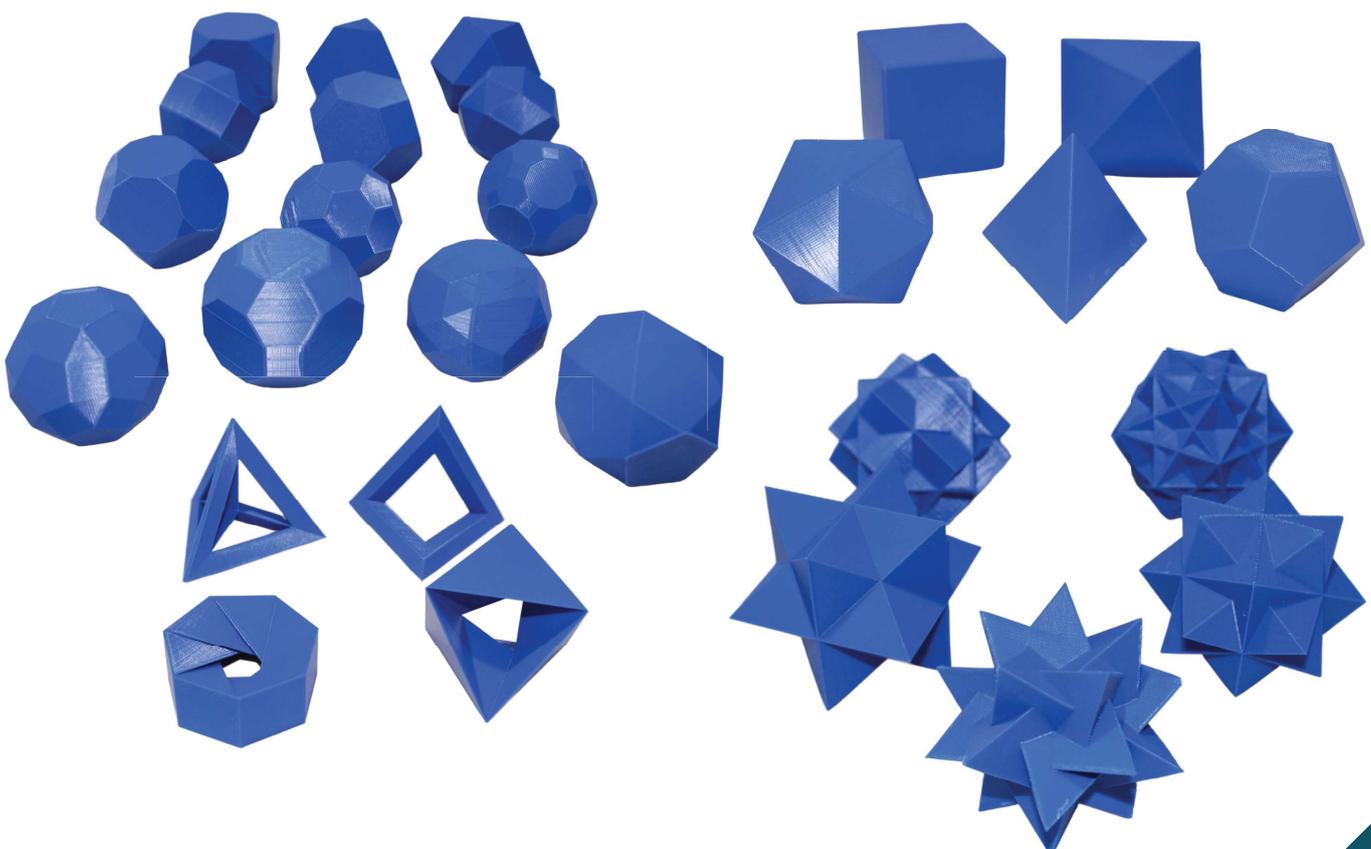




8. Materiais Utilizados:

Para a realização das atividades, serão utilizados os seguintes materiais:

- Modelos de poliedros impressos em 3D (convexos e não convexos);
- Cartas com características dos sólidos (número de vértices, arestas e faces);
- Cartas com imagens das planificações dos poliedros;
- Fichas para registro das observações e cálculos;
- Canetas coloridas laváveis para marcações temporárias nos modelos impressos;
- Quadro branco e marcadores para discussões coletivas.





Atividade 1 – Classificação de Poliedros Convexos e Não Convexos

- Os alunos manipulam os sólidos impressos em 3D, identificam suas características e classificam entre convexos e não convexos.
- Reflexão sobre como a convexidade aparece no dia a dia, em construções e estruturas.

Público-alvo: Alunos do Ensino Fundamental (6º ano) e Ensino Médio (3ª série)

Tempo estimado: 2 aulas de 50 minutos cada

Recursos: Modelos físicos de poliedros impressos em 3D, material de escrita (papel, lápis caneta) e canetinhas coloridas.

Objetivos:

- Compreender a diferença entre poliedros convexos e não convexos.
- Identificar características dos poliedros convexos e não convexos por meio da observação e manipulação.
- Desenvolver habilidades de argumentação e justificativa matemática.

Aula 1 – Introdução e Exploração

Metodologia:

Contextualização (10 min):

- Perguntar aos alunos: "O que caracteriza um sólido geométrico?"
- Apresentar diferentes poliedros e pedir que observem suas formas.
- Introduzir os conceitos de convexidade e não convexidade com exemplos do cotidiano.

Manipulação dos Modelos (25 min):

- Entregar aos alunos diferentes poliedros (convexos e não convexos).
- Pedir que os manuseiem e tentem identificar diferenças entre eles.
- Levantar hipóteses sobre o que torna um poliedro convexo ou não.

Classificação em Equipes (15 min):

- Apresentar com uso de tecnologias as definições de poliedros convexos e não convexos. Ou distribuir uma folha impressa com as definições de poliedro convexo e não convexo.
- Pedir que os alunos, que classifiquem os poliedros que receberam e justifiquem suas escolhas.



Atividade 2 – Baralho das planificações

- Associação entre poliedros e suas planificações, ajudando na visualização espacial.
- Atividades que desafiam os alunos a prever como um sólido se desdobra e se reconstrói.

Público-alvo: Alunos do Ensino Fundamental (6º ano) e Ensino Médio (3ª série)
Tempo estimado: 2 aulas de 50 minutos cada
Recursos: Cartas contendo imagens de poliedros e suas respectivas planificações (podem ser impressas ou projetadas); Fichas de resposta para os alunos registrarem suas classificações e justificativas; Quadro branco e canetas.
Objetivos: <ul style="list-style-type: none">• Relacionar poliedros tridimensionais às suas planificações.• Identificar e classificar poliedros como convexos e não convexos.• Desenvolver a observação e o raciocínio espacial dos alunos.
Aula 1 – Introdução e Exploração
Metodologia <p>Contextualização (10 min):</p> <ul style="list-style-type: none">• Apresentação inicial sobre poliedros convexos e não convexos.• Mostrar alguns exemplos de objetos do cotidiano que possuem essas formas. <p>Distribuição das Cartas (15 min):</p> <ul style="list-style-type: none">• Cada dupla ou trio recebe um conjunto de cartas com a imagem de poliedros e planificações.• Os alunos devem parear a imagem do poliedro com sua respectiva planificação. <p>Classificação e Justificativa (25 min):</p> <ul style="list-style-type: none">• Após formar os pares, os alunos devem classificar os poliedros como convexos ou não convexos.• Eles devem justificar suas escolhas por escrito e explicar como identificaram a relação entre a figura 3D e sua planificação.

Aula 2 – Análise e Aplicação

Metodologia

Discussão Coletiva (15 min):

- Cada grupo apresenta um ou dois pares formados e explica como os identificou.
- O professor corrige e complementa as explicações, reforçando conceitos-chave.

Aplicação da Relação de Euler (20 min):

- Os alunos escolhem dois poliedros e aplicam a relação $V - A + F = 2$, verificando sua validade.
- Comparação dos resultados entre poliedros convexos e não convexos.

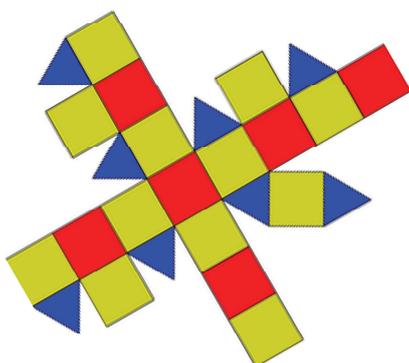
Desafio Final (15 min):

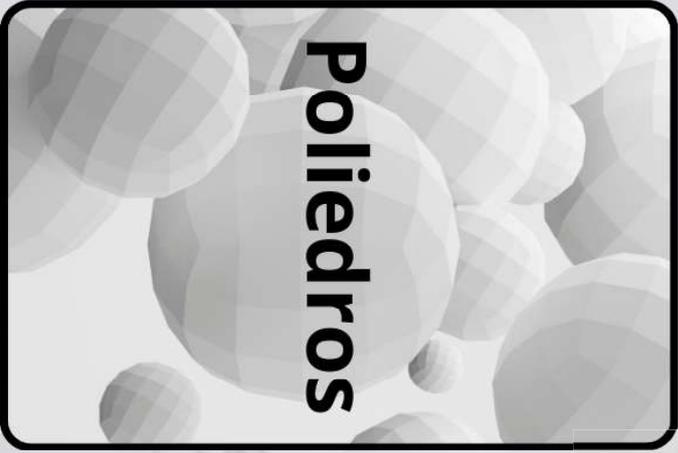
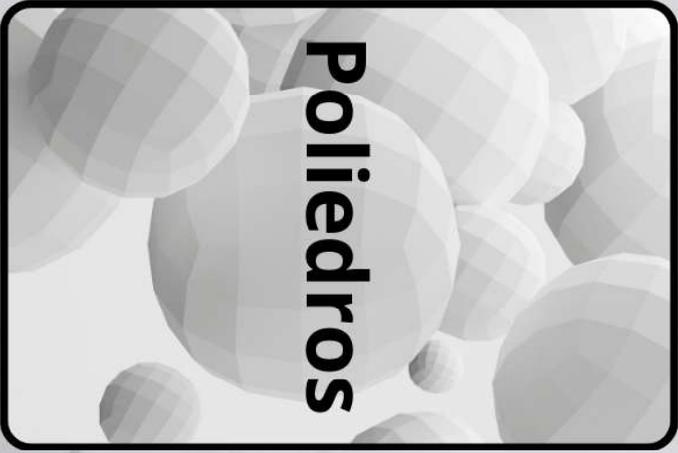
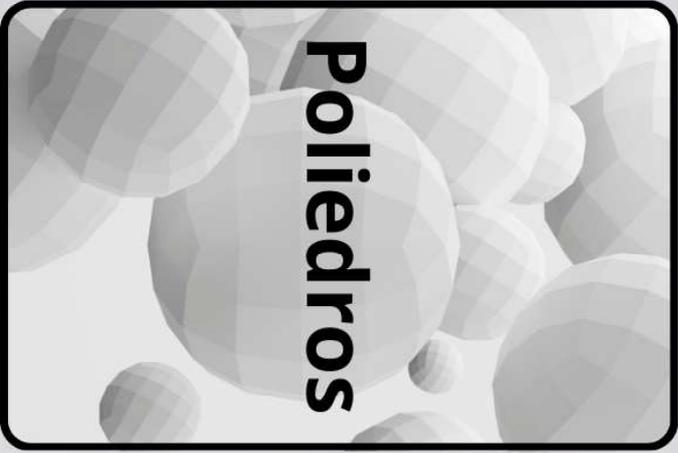
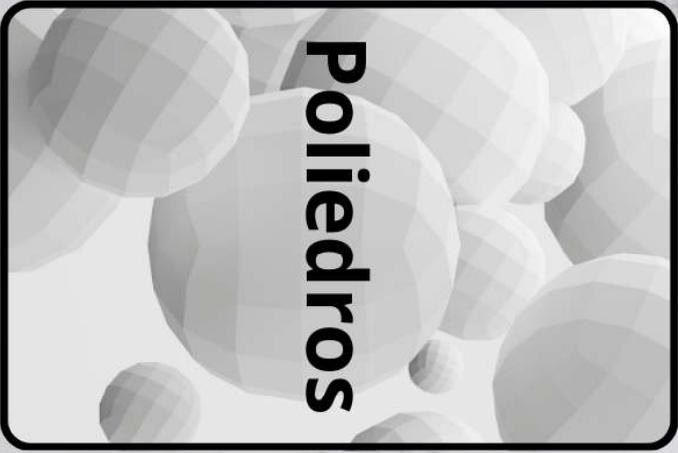
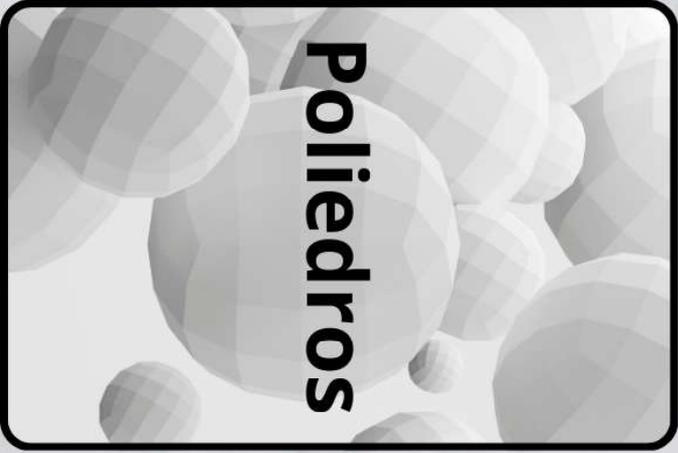
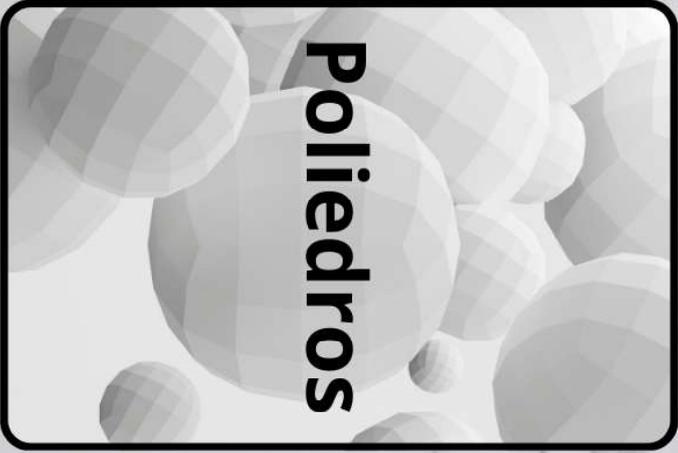
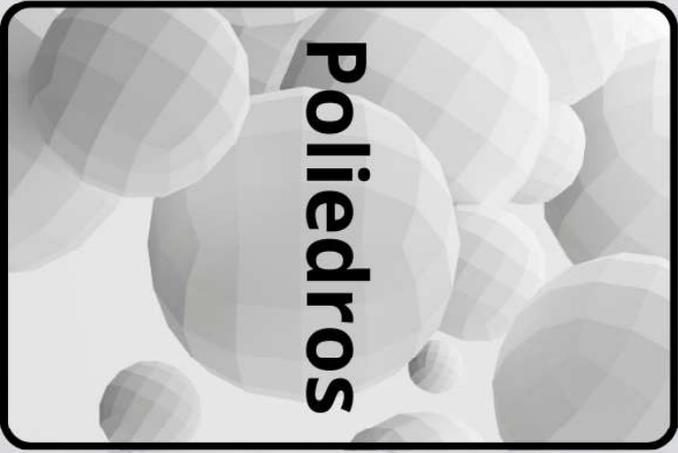
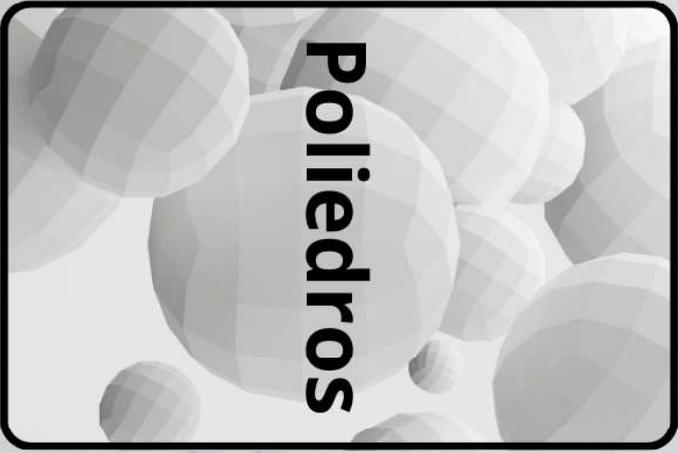
- Os alunos recebem uma carta apenas com a planificação e tentam desenhar a forma tridimensional correspondente.
- Discussão sobre as dificuldades enfrentadas e estratégias para resolver o problema.

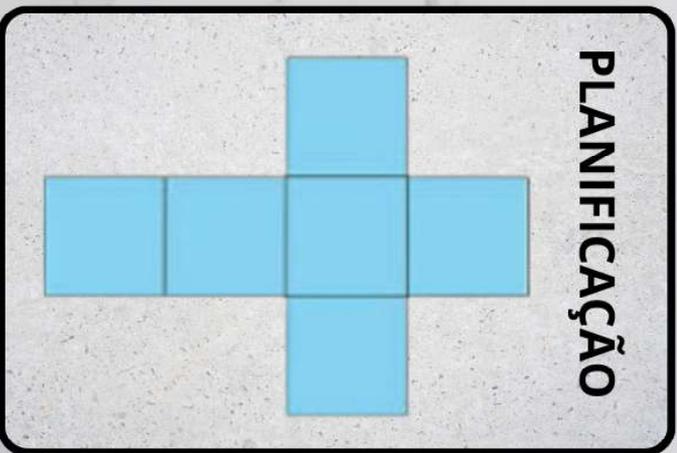
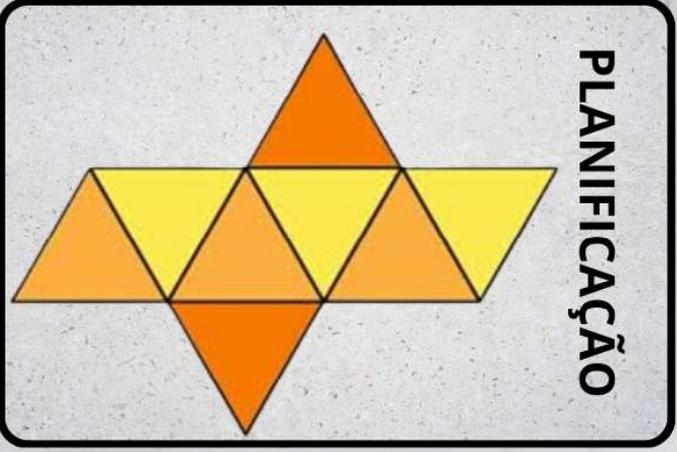
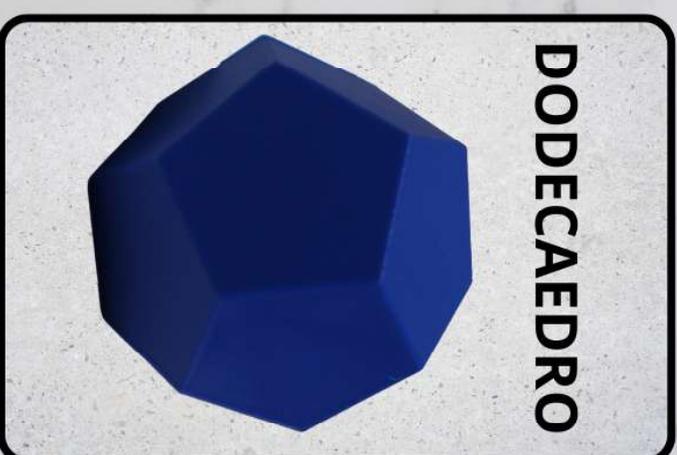
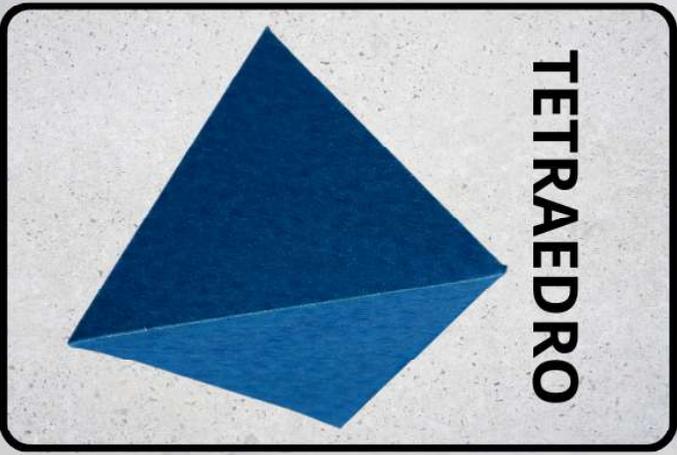
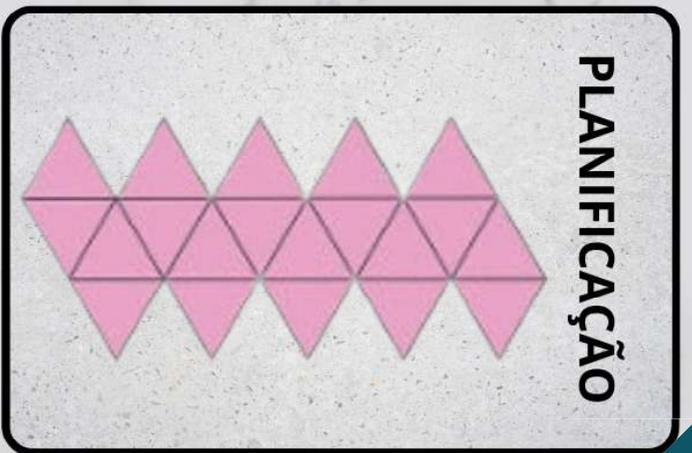
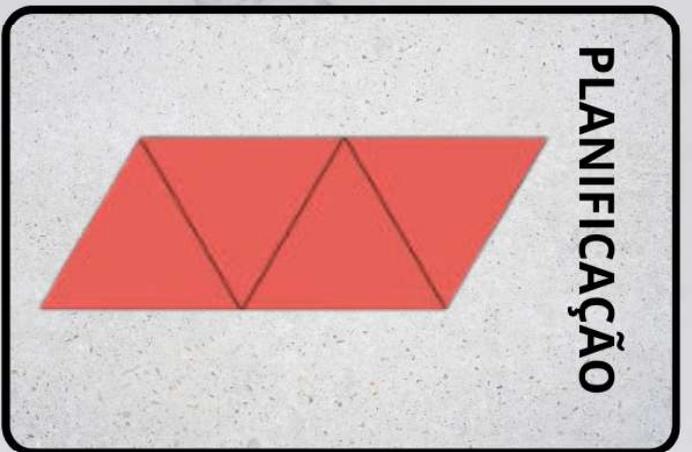
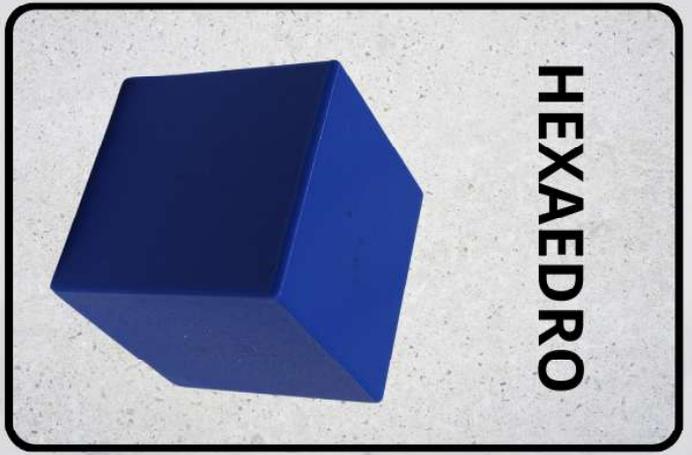
Avaliação:

- Participação na classificação e justificativa dos poliedros.
- Correção das fichas de resposta: Verificação se os alunos associaram corretamente as imagens e justificaram suas classificações.
- Autoavaliação e discussão final: O que foi mais fácil? O que foi mais difícil? Como esse conhecimento pode ser aplicado em outras áreas?

Nas próximas páginas temos as folhas para impressão das cartas que fazem parte da atividade propostas. A primeira folha deve ser impressa no verso das demais ou podem ser impressas em papéis diferentes e colcadas. É importante que a impressão deste material seja colorido e preferencialmente em um papel mais grosso. Caso o professor tenha a oportunidade sugerimos que após a impressão, seja feita a plastificação do material.







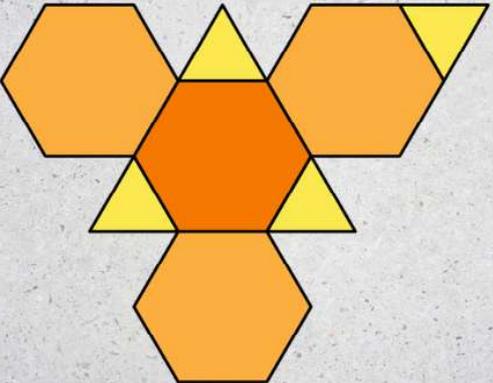
ICOSAEDRO



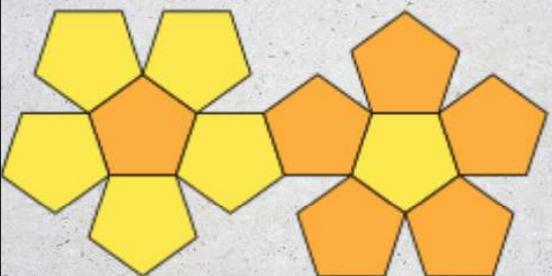
TETRAEDRO TRUNCADO



PLANIFICAÇÃO



PLANIFICAÇÃO



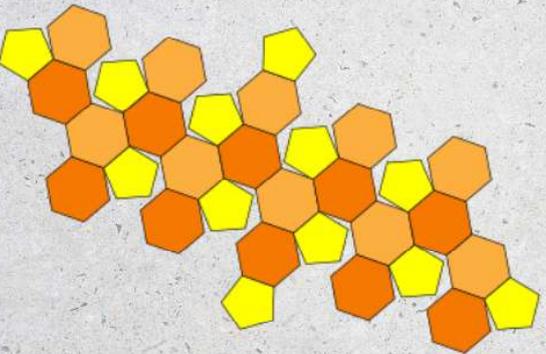
ICOSAEDRO TRUNCADO



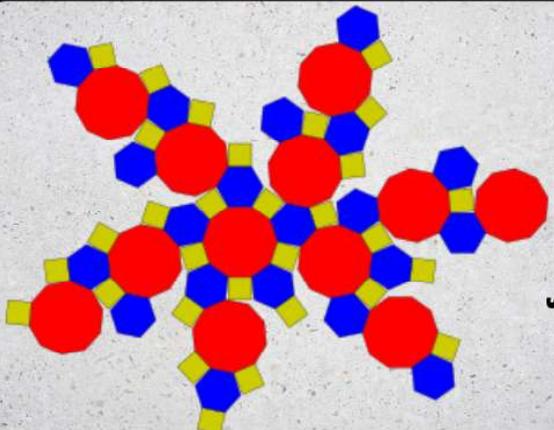
ROMBICOSIDODECAEDRO MENOR



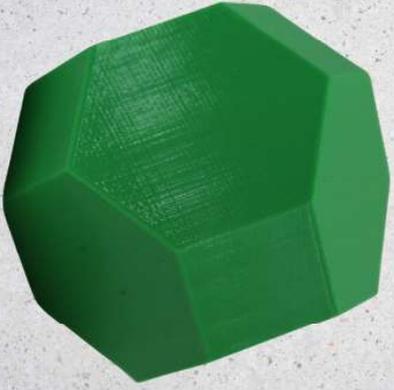
PLANIFICAÇÃO



PLANIFICAÇÃO



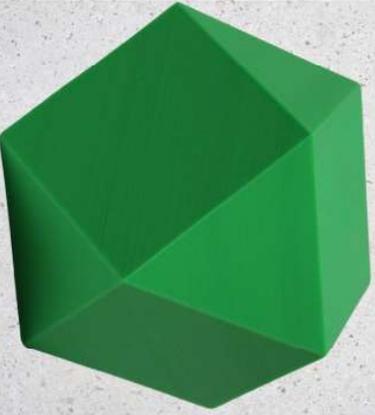
**OCTAEDRO
TRUNCADO**



**ROMBICUOCTAEDRO
MENOR**



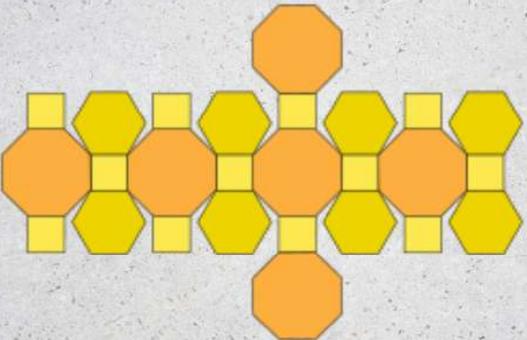
CUBOCTAEDRO



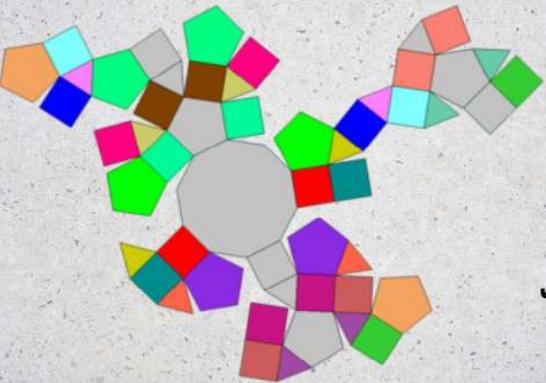
**CUBO
TRUNCADO**



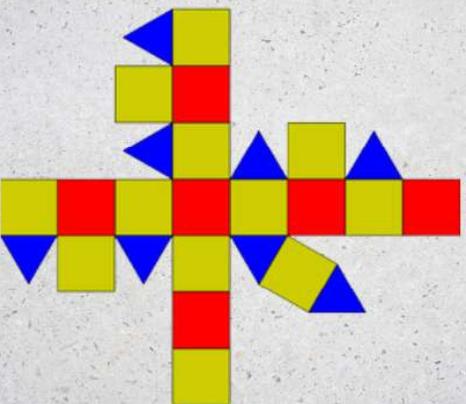
PLANIFICAÇÃO



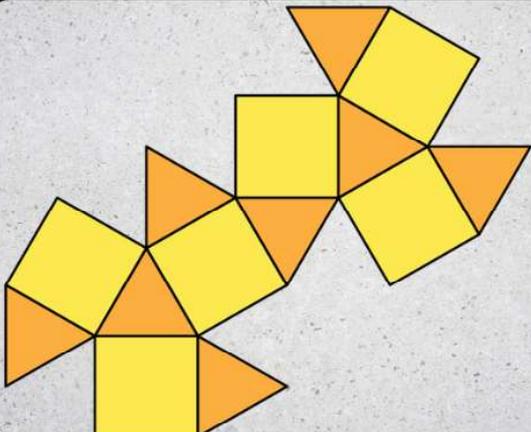
PLANIFICAÇÃO



PLANIFICAÇÃO



PLANIFICAÇÃO



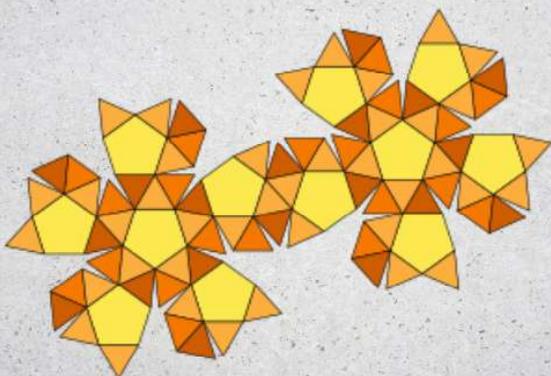
ICOSIDODECAEDRO



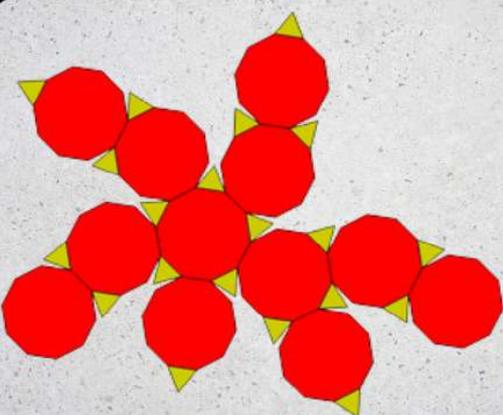
DODECAEDRO TRUNCADO



PLANIFICAÇÃO



PLANIFICAÇÃO



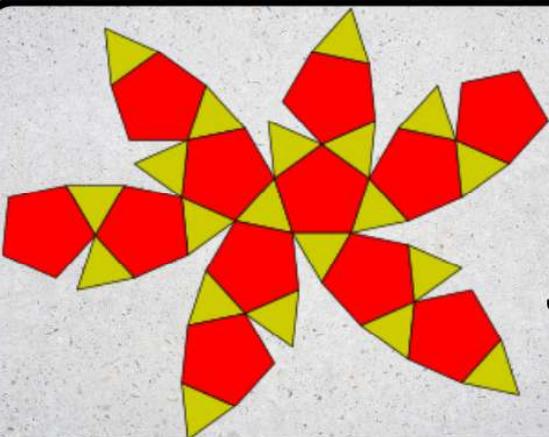
CUBOCTAEDRO TRUNCADO



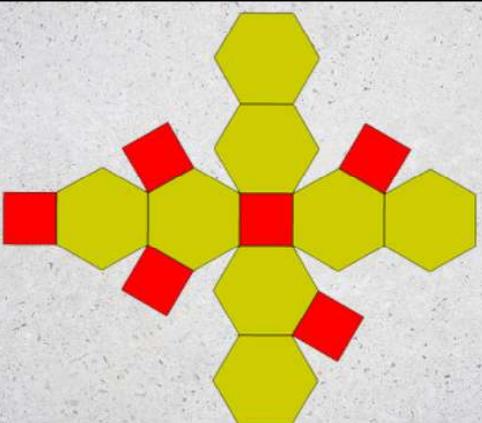
CUBO ARREBITADO



PLANIFICAÇÃO



PLANIFICAÇÃO



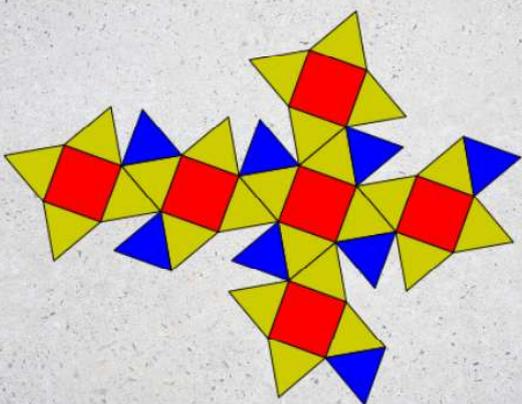
**ICOSIDODECAEDRO
TRUNCADO**



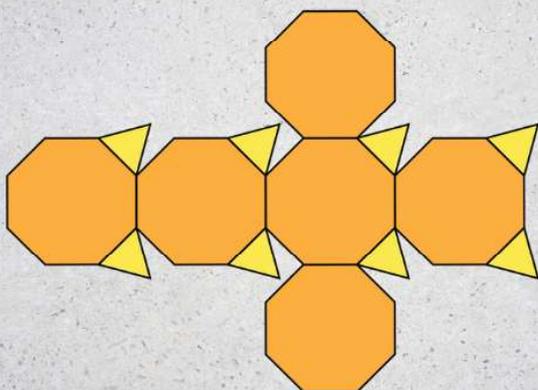
**DODECAEDRO
SNUB**



PLANIFICAÇÃO



PLANIFICAÇÃO





Atividade 3 – Baralho das Características dos Poliedros

- Identificação dos poliedros com base no número de vértices, arestas e faces.
- Exercícios práticos pra aplicar a Relação de Euler e compreender padrões geométricos.

Público-alvo: Alunos do Ensino Fundamental (6º ano) e Ensino Médio (3ª série)
Tempo estimado: 2 aulas de 50 minutos cada
Recursos: Cartas com as características dos poliedros (número de vértices, arestas e faces). Cartas com os nomes dos poliedros e imagens; Fichas de resposta para registro; Quadro branco e canetas.
Objetivos: <ul style="list-style-type: none">• Identificar poliedros a partir de suas características (vértices, arestas e faces).• Relacionar as propriedades dos poliedros com a Relação de Euler ($V - A + F = 2$).• Desenvolver o raciocínio lógico e a análise de padrões matemáticos.
Aula 1 – Introdução e Exploração
Metodologia <p>Apresentação do Conteúdo (15 min):</p> <ul style="list-style-type: none">• Introdução aos conceitos de vértices, arestas e faces.• Revisão da Relação de Euler para poliedros convexos.• Exemplos visuais de poliedros. <p>Distribuição das Cartas e Formação de Grupos (10 min):</p> <ul style="list-style-type: none">• Cada grupo recebe duas pilhas de cartas:• Uma pilha com as características dos poliedros (exemplo: "8 vértices, 12 arestas, 6 faces").• Outra pilha com os nomes dos poliedros (exemplo: "Cubo"). <p>Desafio de Associação (25 min):</p> <ul style="list-style-type: none">• Os alunos devem parear corretamente as cartas das características com as cartas dos poliedros.• Após completar os pares, cada grupo verifica se a Relação de Euler se mantém para os poliedros escolhidos.

Aula 2 – Análise e Aplicação

Metodologia

Discussão dos Resultados (15 min):

- Cada grupo compartilha suas associações e explica como chegou a elas.
- O professor corrige e reforça os conceitos.

Desafio Adicional (20 min):

- Neste desafio é proposto uma atividade em que os estudantes irão disputar em grupos. Um grupo de alunos recebem algumas cartas com as características e falam apenas duas destas características (por exemplo, número de vértices e arestas) e o outro grupo de alunos precisam deduzir a quantidade de faces antes de encontrar a correspondência correta com a carta que contém a imagem do poliedro.
- Reflexão sobre padrões matemáticos entre os poliedros.

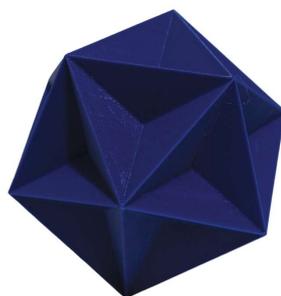
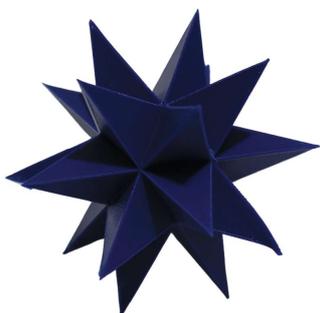
Reflexão e Conexão com o Cotidiano (15 min):

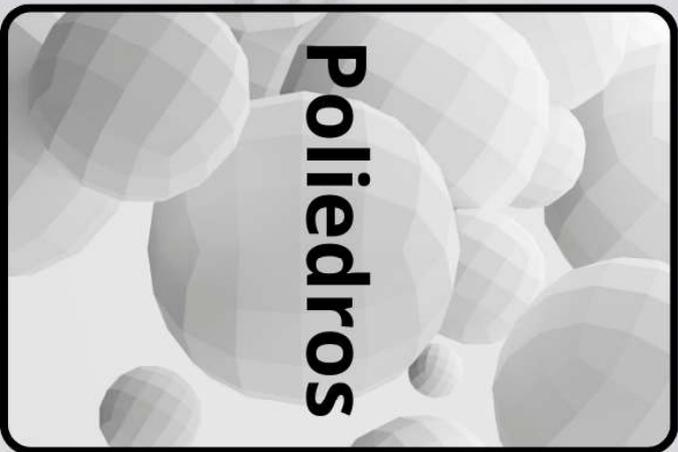
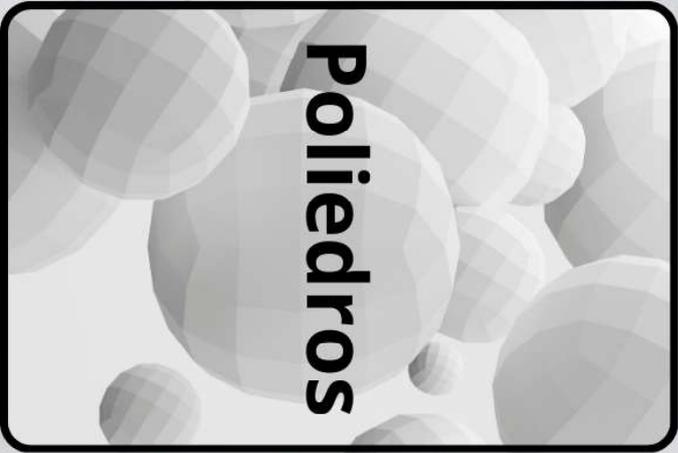
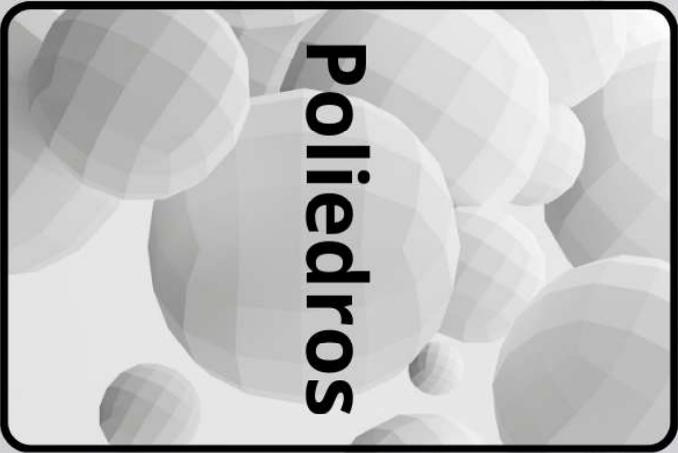
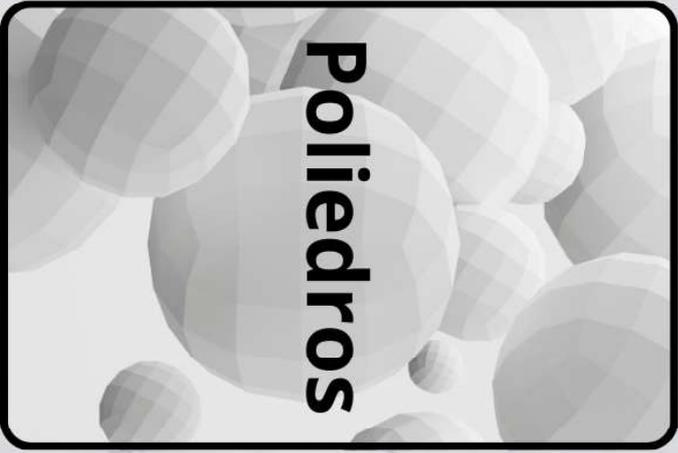
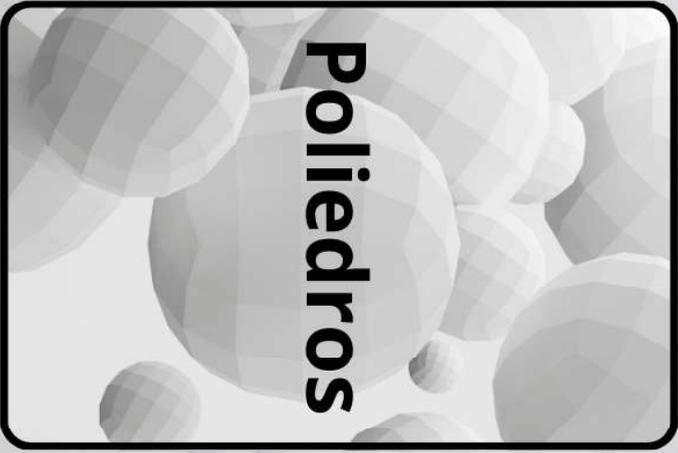
- Como a contagem de vértices, arestas e faces pode ajudar na construção de estruturas arquitetônicas?
- Discussão sobre como o conhecimento de poliedros é usado em diferentes áreas, como engenharia e design.

Avaliação:

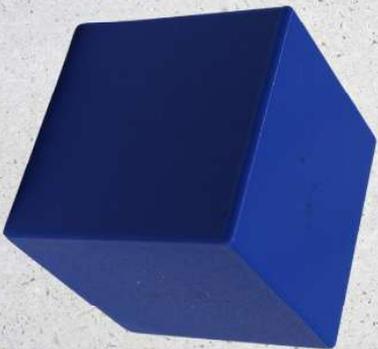
- Formativa: Observação da participação dos alunos na associação das cartas e na justificativa das respostas.
- Correção das fichas de resposta: Os alunos registram suas associações e verificam se aplicaram corretamente a Relação de Euler.
- Discussão final: Perguntas abertas para avaliação do aprendizado.

Nas próximas páginas temos as folhas para impressão das cartas que fazem parte da atividade propostas. Seguir as mesmas orientações dadas na página 10.





HEXAEDRO



CARACTERÍSTICA

Poliedro de Platão

6 Faces

8 Vértices

12 Arestas

OCTAEDRO



CARACTERÍSTICA

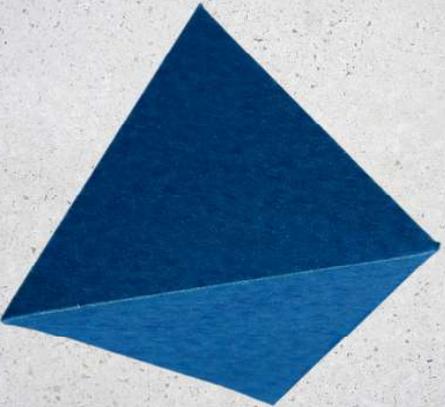
Poliedro de Platão

8 Faces

6 Vértices

12 Arestas

TETRAEDRO



CARACTERÍSTICA

Poliedro de Platão

4 Faces

4 Vértices

6 Arestas

DODECAEDRO



CARACTERÍSTICA

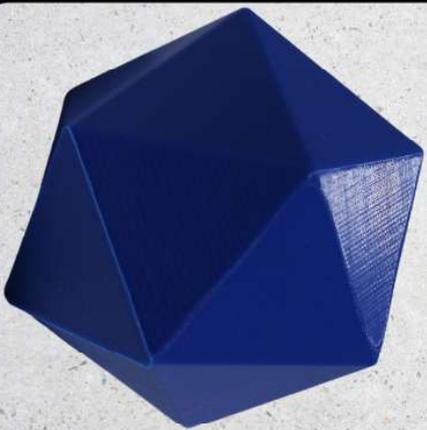
Poliedro de Platão

12 Faces

20 Vértices

30 Arestas

ICOSAEDRO



CARACTERÍSTICA

Poliedro de Platão

20 Faces

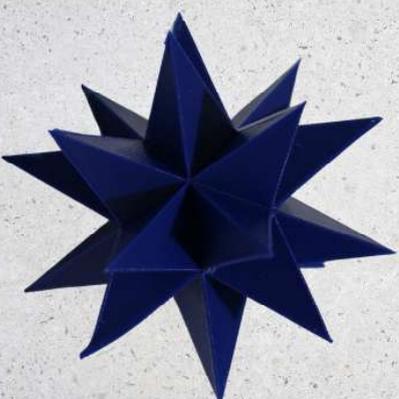
12 Vértices

30 Arestas

GRANDE

DODECAEDRO

ESTRELADO



CARACTERÍSTICA

Poliedros de

Arquimedes

12 Faces

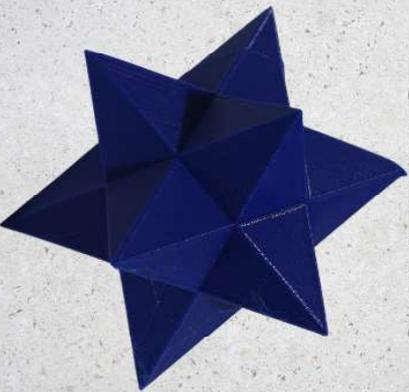
20 Vértices

30 Arestas

PEQUENO

DODECAEDRO

ESTRELADO



CARACTERÍSTICA

Poliedros de

Kepler-Poinsot

12 Faces

12 Vértices

30 Arestas

GRANDE

DODECAEDRO



CARACTERÍSTICA

Poliedros de

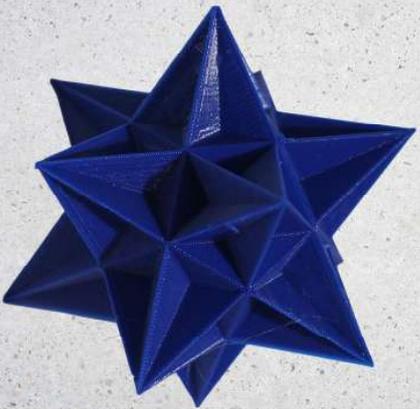
Kepler-Poinsot

12 Faces

12 Vértices

30 Arestas

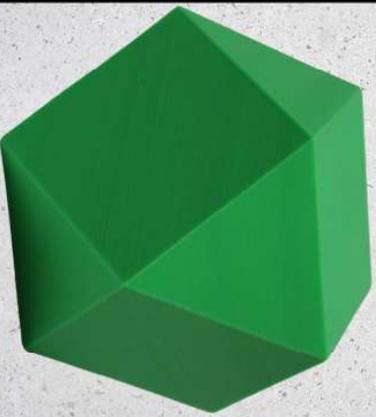
ICOSAEDRO ESTRELADO



CARACTERÍSTICA

Poliedros de
Kepler-Poincot
20 Faces
12 Vértices
30 Arestas

CUBOCTAEDRO



CARACTERÍSTICA

Poliedros de
Archimedes
14 Faces
12 Vértices
24 Arestas

TETRAEDRO TRUNCADO



CARACTERÍSTICA

Poliedros de
Archimedes
8 Faces
12 Vértices
18 Arestas

CUBO TRUNCADO



CARACTERÍSTICA

Poliedros de
Archimedes
14 Faces
24 Vértices
36 Arestas

**OCTAEDRO
TRUNCADO**



CARACTERÍSTICA

Poliedros de
Kepler-Poinsot

14 Faces

24 Vértices

36 Arestas

**CUBOCTAEDRO
TRUNCADO**



CARACTERÍSTICA

Poliedros de
Arquimedes

26 Faces

48 Vértices

72 Arestas

**ROMBICUOCTAEDRO
MENOR**



CARACTERÍSTICA

Poliedros de
Arquimedes

26 Faces

24 Vértices

48 Arestas

**CUBO
ARREBITADO**



CARACTERÍSTICA

Poliedros de
Arquimedes

38 Faces

24 Vértices

60 Arestas

ICOSIDODECAEDRO



CARACTERÍSTICA

Poliedros de
Arquimedes
32 Faces
30 Vértices
60 Arestas

**DODECAEDRO
TRUNCADO**



CARACTERÍSTICA

Poliedros de
Arquimedes
32 Faces
60 Vértices
90 Arestas

**ICOSAEDRO
TRUNCADO**



CARACTERÍSTICA

Poliedros de
Arquimedes
32 Faces
60 Vértices
90 Arestas

**ROMBICOSIDODECAEDRO
MENOR**



CARACTERÍSTICA

Poliedros de
Arquimedes
62 Faces
60 Vértices
120 Arestas

**ICOSIDODECAEDRO
TRUNCADO**



CARACTERÍSTICA

**Poliedros de
Arquimedes**
62 Faces
120 Vértices
180 Arestas

**DODECAEDRO
SNUB**



CARACTERÍSTICA

**Poliedros de
Arquimedes**
92 Faces
60 Vértices
150 Arestas

Atividade 4 – Investigação da Relação de Euler

- Contagem direta de V, A e F nos sólidos impressos e verificação da equação $V - A + F = 2$.
- Reflexão sobre quando essa relação se mantém e quando pode mudar.

Público-alvo: Alunos do Ensino Fundamental (6º ano) e Ensino Médio (3ª série)
Tempo estimado: 2 aulas de 50 minutos cada
Recursos: Poliedros em 3D; Fichas de resposta para registro; Quadro branco e canetas.
Objetivos: <ul style="list-style-type: none">• Identificar e contar corretamente os vértices, arestas e faces de poliedros.• Aplicar a Relação de Euler ($V - A + F = 2$) para poliedros convexos e analisar sua validade para poliedros não convexos.• Desenvolver habilidades de observação, registro e argumentação matemática
Aula 1 – Introdução e Exploração
Apresentação do Conceito (15 min): <ul style="list-style-type: none">• Introdução ao matemático Leonhard Euler e sua importância para a Matemática.• Explicação da Relação de Euler ($V - A + F = 2$) com exemplos simples, como cubo e pirâmide.
Manipulação de Poliedros (20 min): <ul style="list-style-type: none">• Distribuição de diferentes poliedros físicos para os grupos.• Os alunos devem contar e registrar o número de vértices, arestas e faces e registrar em uma tabela.
Primeira Verificação da Relação de Euler (15 min): <ul style="list-style-type: none">• Aplicação da fórmula em diferentes poliedros convexos e comparação dos resultados.• Discussão coletiva: "A relação sempre se mantém? Por quê?"

No desenvolvimento desta atividade é importante que os estudantes façam o registro dos valores encontrados para que possam depois aplicar a relação de Euler e assim verificarem se a mesma é válida para poliedros convexos e não convexos. Na página seguinte sugerimos um modelo de tabela para a utilização no desenvolvimento da atividade. O professor pode montar a tabela como achar mais conveniente e distribuir cópias para os alunos.

Aula 2 – Análise e Aplicação

Exploração de Poliedros Não Convexos (15 min):

- Introdução aos poliedros não convexos.
- Os alunos analisam poliedros não convexos e verificam se a Relação de Euler se mantém.

Comparação de Resultados (20 min):

- Registro dos dados obtidos em um quadro geral da turma.
- Discussão sobre padrões encontrados e possíveis exceções.

Desafio Final (15 min):

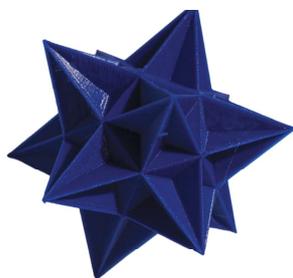
- Os alunos recebem poliedros que ainda não analisaram e tentam prever se a Relação de Euler se aplicará antes de contarem as características.
- Reflexão final: “Por que a Relação de Euler é importante na Matemática”

Avaliação:

- Observação da participação e registro correto das contagens.
- Correção das tabelas: Verificação da aplicação da Relação de Euler nos poliedros trabalhados.
- Discussão final: Os alunos apresentam o seu poliedro e explicam com suas próprias palavras se a Relação de Euler funciona.

Tabela de Registro da Relação de Euler

Poliedro	Número de Vértices (V)	Número de Arestas (A)	Número de Faces (F)	Cálculo $V-A+F$	Relação de Euler Verificada? (Sim/Não)





Bruna Karla Pereira de Souza Castro



[@prof.brunakarla](#)



prof.brunakarla@hotmail.com