

Programação Linear no Ensino Médio

Gonçalves, B. - SEED-PR-Cascavel

Conejo, P. - UNIOESTE-Cascavel

Resumo: Neste trabalho, utilizamos a Programação Linear para resolver problemas relacionados aos sistemas de equações e inequações lineares. Apresentamos uma proposta de aplicação dos Problemas de Programação Linear no Ensino Médio, fundamentada nos princípios da Base Nacional Comum Curricular, na Modelagem Matemática e na Resolução de Problemas, compreendidas como práticas significativas para a aprendizagem. Como parte de um plano de aula, analisamos no espaço $\mathbb{R}^2$ os métodos de resolução gráfica e por exaustão de um PPL, e apresentamos uma implementação em *Python* para os casos em que a resolução gráfica se mostra impraticável.

Palavras-chave: Ensino Médio; Problemas de Programação Linear; Modelagem.

Introdução

A Matemática é fundamental para compreender e resolver problemas do mundo real, sendo sua aplicação indispensável. Nesse contexto, a Programação Linear (PL) tem destaque devido sua ampla utilização na resolução destes problemas do mundo real.

Um problema de otimização consiste em minimizar ou maximizar uma determinada função f , denominada função objetivo, sujeita a determinadas condições, Ω , denominadas restrições. Segundo Ribeiro e Karas (2013) é usualmente escrito na forma

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega, \end{array} \quad (1)$$

com $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$ o conjunto das restrições, e as funções $g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Quando a função objetivo f e as funções g e h que definem as restrições são todas lineares, então dizemos que o problema de otimização (1) é um Problema de Programação Linear (PPL). A PL é um ramo da Matemática que estuda formas de resolver problemas de otimização cujas condições podem ser expressas por funções, equações e inequações lineares, isto é, do primeiro grau. Na sua forma simplificada, dados os vetores $c, x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$, a forma canônica de um PPL é

$$\begin{array}{ll} \text{otimizar (max ou min)} & f(x) = cx \\ \text{sujeito a} & Ax \leq b \\ & x \geq 0. \end{array} \quad (2)$$

Neste trabalho, exploramos o uso de PPLs, conteúdo tradicionalmente visto apenas no Ensino Superior, como uma ferramenta de ensino de Matemática para alunos do Ensino Médio, apoiados na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), e tendo como foco a Modelagem Matemática como estratégia de ensino.

Objetivamos evidenciar a relevância educacional e o potencial dos PPLs no ensino da Matemática, visto que pode motivar os alunos a trabalharem aspectos da Matemática relacionados às situações práticas. Além disso, apresentamos neste trabalho, uma implementação em linguagem *Python* que possibilita a resolução de PPLs com restrições gerais. A implementação oferece uma abordagem prática e acessível. Este processo computacional demonstra como a tecnologia pode ser integrada ao ensino e à aplicação da PL, possibilitando a resolução eficiente de problemas reais e o aprofundamento do aprendizado. O aluno pode, inclusive, manipular a implementação para resolver outros problemas, despertando curiosidade sobre o funcionamento de *softwares*.

Além de fundamentar a utilização de PPLs como ferramenta didática, propomos problemas aplicáveis ao Ensino Médio, acompanhados de suas respectivas modelagens matemáticas. Para um dos problemas apresentados, desenvolvemos sua resolução por três métodos distintos, a fim de evidenciar a diversidade de abordagens possíveis, e as variadas teorias matemáticas disponíveis no ensino médio e que podem ser aplicadas para resolver um mesmo problema.

PPLs na Matemática do Ensino Médio

Ao relacionarmos os PPLs com o Ensino Médio, é necessário estarmos amparados por documentos que orientem sua forma de abordagem. A BNCC é o documento que define as práticas a serem desenvolvidas na educação brasileira, estabelecendo um referencial para a elaboração dos currículos e das propostas pedagógicas das instituições escolares. Além disso, propõem as aprendizagens essenciais que os estudantes devem desenvolver ao longo de sua jornada escolar.

Concernente à Matemática, temos que a BNCC (p. 265) enfatiza a importância do conhecimento matemático na formação do cidadão, o documento ressalta que:

O conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais.

Ao se trabalhar com PPLs, é necessário que o aluno tenha capacidade de modelar um problema, encontrar maneiras para chegar ao resultado e, a partir disso, tomar decisões.

Segundo a autora Biembengut (1999), a Modelagem Matemática é definida como "o processo que envolve a obtenção de um modelo". Dessa forma entendemos que a Modelagem Matemática é a ação de descrever a situação que se quer modelar, de maneira matemática, usando sua linguagem própria, para que a partir disso possamos resolver o problema proposto.

Essas habilidades estão alinhadas aos objetivos da BNCC, onde ela cita que o aluno deve ser capaz de desenvolver Modelagem Matemática e que essa habilidade é extremamente valiosa para o ele. Esse aspecto reforça a validade de se trabalhar com PPLs. Segundo a BNCC (p. 268):

Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino.

O trabalho com PPLs propicia a oportunidade para inserir estas abordagens no ensino, pois, ao se trabalhar com esses problemas, os alunos são incentivados a modelar as situações propostas e a buscar ferramentas matemáticas para resolvê-las. Entre essas ferramentas podemos citar o conceito de sistemas de equações, conteúdo este indispensável para o trabalho com PPLs, que é abordado no Ensino Médio e, com a introdução de um PPL, os sistemas lineares podem ser explorados de maneira mais intuitiva e contextualizada. Lima (1993) aponta que:

Os sistemas de equações lineares constituem um tópico de grande interesse prático. Seu estudo é acessível aos estudantes, pois não requer o emprego de conceitos sutis ou complicados.

A BNCC incentiva o uso de tecnologias digitais para que os alunos possam não apenas resolver problemas, mas também compreender os conceitos matemáticos de forma mais visual e prática. Isso se alinha diretamente ao aprendizado de PL, onde a construção gráfica e a resolução de equações são ferramentas essenciais. Nesse contexto, a BNCC (p,528) destaca que:

O aluno deve resolver e elaborar problemas do cotidiano, fazendo uso de ferramentas matemáticas e de outras áreas do

conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

O uso de PPLs é uma oportunidade de inserir o uso de tecnologias digitais no processo de ensino-aprendizagem. Em relação ao uso de tecnologias digitais a BNCC (p.12) diz que o aluno deve:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

Sendo assim, neste trabalho, por meio de uma implementação dinâmica do PPL, incentivamos o aluno e o professor a criar tecnologias para resolver problemas e a produzir conhecimentos. Não obstante, ao se trabalhar com problemas que possuem enunciados contextualizados é possível aproximar os conceitos matemáticos ao cotidiano do aluno, visto que muitas vezes o aluno não vê a Matemática como uma ciência presente em sua vida. Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) apontam que:

A maioria das pessoas não consegue relacionar a Matemática nem com as outras ciências e muito menos com situações de seus cotidianos, porque foi criado um universo à parte, ou seja, para elas, a Matemática não está presente em outros contextos.

Ainda sobre a utilização de problemas em sala de aula, Onuchice (2011) ressalta que:

O problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo co-construtores de seu próprio conhecimento.

Dessa forma, acreditamos que ao modelar o problema proposto e encontrar soluções para ele, o aluno pode aprender de forma significativa os conceitos matemáticos aplicados nesse processo, de modo a evidenciar que a Matemática pode ser compreendida por meio da sua utilidade como Ciência e não somente como uma disciplina a ser aprendida apenas por tradição.

Proposta de aplicação de PPL no Ensino Médio

Nesta seção, apresentamos o enunciado de um PPL juntamente com a resolução deste. O PPL será resolvido usando o método da resolução gráfica, da exaustão e utilizando uma implementação em Python. O Apêndice deste trabalho inclui três exemplos adicionais de PPLs, com potencial aplicação em sala de aula.

Problema da indústria

Uma empresa produz dois produtos, A e B , que geram um lucro de R\$ 8,00 por litro produzido de A e R\$ 6,00 por litro produzido de B . Cada produto é preparado utilizando diferentes recursos químicos disponíveis em quantidades limitadas.

As quantidades e disponibilidades de recursos consumidos para a produção de cada produto são determinados pelos seguintes processos (misturas):

Primeiro processo: Consome dois litros do **primeiro recurso** químico para obter um litro do produto A e consome quatro litros do **primeiro recurso** químico para obter um litro do produto B . Sabendo que o total disponível deste **primeiro recurso** é de 240 litros.

Segundo processo (*escrito de forma mais resumida*): Consome quatro litros do **segundo recurso** químico por litro de A e dois litros por litro de B , com um total disponível de 240 litros.

Terceiro processo: Consome 14 litros do **terceiro recurso** químico por litro de A e um litro por litro de B , com um total disponível de 660 litros.

Quarto processo: Consome dois litros do **quarto recurso** químico por litro de A e 14 litros por litro de B , com um total disponível de 740 litros.

Desejamos modelar este problema como um PPL. Para isto vamos formular a função objetivo e as restrições que modelam este problema e determinar quantos litros de cada produto a empresa deve fabricar para maximizar o lucro total e qual é este lucro.

Modelagem Matemática do problema da indústria

Sejam x_1 a quantidade do produto A e x_2 a quantidade do produto B . Como

- cada litro do produto A gera um lucro de R\$ 8,00 e
- cada litro do produto B gera um lucro de R\$ 6,00,

o lucro total, f , pode ser calculado por

$$f = 8x_1 + 6x_2.$$

Desejamos maximizar a função lucro, f , (denominada de função objetivo), sujeito as limitações dos recursos (denominadas de **restrições**).

Agora, vamos considerar as restrições que representam as limitações dos recursos disponíveis para a produção.

- **Primeiro processo** neste processo são necessários 2 litros de um determinado recurso para produzir um litro do produto A , e 4 litros deste mesmo recurso para produzir um litro do produto B . Como a disponibilidade deste recurso é de 240 litros, segue que a restrição será dada por

$$2x_1 + 4x_2 \leq 240.$$

- **Segundo processo** neste processo são necessários 4 litros de um determinado recurso para produzir um litro do produto A , e 2 litros deste mesmo recurso para produzir um litro do produto B . Como a disponibilidade deste recurso é de 240 litros, segue que

$$4x_1 + 2x_2 \leq 240.$$

- **Terceiro processo** neste processo são necessários 14 litros de um determinado recurso para produzir um litro do produto A , e 1 litro deste mesmo recurso para produzir um litro do produto B . Como a disponibilidade deste recurso é de 660 litros, segue que

$$14x_1 + x_2 \leq 660.$$

- **Quarto processo** neste processo são necessários 2 litros de um determinado recurso para produzir um litro do produto A , e 14 litros deste mesmo recurso para produzir um litro do produto B . Como a disponibilidade deste recurso é de 740 litros, segue que

$$2x_1 + 14x_2 \leq 740.$$

As restrições representam os limites de recursos químicos disponíveis para a produção. Cada inequação relaciona o consumo de recursos com o máximo permitido, garantindo que o uso não exceda a disponibilidade.

Por fim, sabemos que as quantidades do produto A e do produto B produzidas não podem ser negativas. Ou seja, temos que

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Dessa forma, o PPL é maximizar $f = 8x_1 + 6x_2$, sujeito as restrições

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\leq 240 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 240 \\ 14x_1 + x_2 &\leq 660 \\ 2x_1 + 14x_2 &\leq 740 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Como resolver o problema (3)

Em Goldbarg e Luna (2000), os autores mostram que se a função f em um PPL possui um máximo ou um mínimo finito, então pelo menos uma solução ótima do problema (2) é vértice (ou canto) do conjunto formado pelas interseções das restrições $Ax \leq b$ e $x \geq 0$. Iremos nos referir a este conjunto por **conjunto viável** e, por exemplo, o conjunto formado pelas desigualdades dadas nas inequações (3) é um conjunto viável deste problema da indústria. Em suma, da parte teórica sobre PL, o que precisamos saber é que a solução ótima, quando existir, estará em um vértice do conjunto viável e que a quantidade de vértices é finita. Geometricamente, o conceito de vértice é de fácil visualização. Desta forma, a solução do problema (3) fica em um vértice, então para resolvê-lo basta determinar qual é este vértice.

Gráfica

Apresentamos nesta seção a resolução gráfica do Problema da indústria (3). Com o auxílio do *software* gráfico GeoGebra (ou apenas com auxílio da régua), representamos x_1 no eixo das abscissas e x_2 no eixo das ordenadas. Inicialmente, identificamos geometricamente a região viável do problema, que é dada pela interseção das regiões definidas pelas restrições. É importante ressaltar que, independente do meio em que a construção gráfica for feita, os pontos de interseção das inequações que definem as restrições, são aproximadamente determinados (quando utilizamos régua isto fica mais evidente). Logo, quando determinarmos o vértice que resolve o problema da indústria, teremos uma solução aproximada. Na Figura 1, apresentamos a região viável destacada em vermelho.



Figura 1: Região viável obtida pelas restrições dadas em (3)

Em seguida traçamos em azul a reta onde f possui valor nulo, o que é mostrado na Figura 2. Note que os pontos sobre esta reta são tais que a função f vale sempre zero. Assim, retas paralelas a $f = 0$ determinam pontos do plano onde o lucro f é constante.

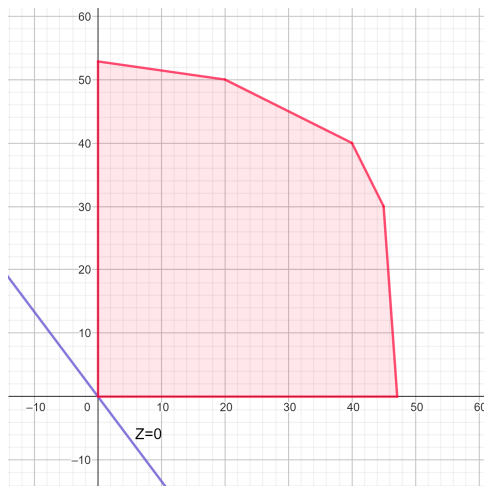


Figura 2: $f = 0$

Em seguida movemos a linha paralelamente a si própria na direção de aumento de f (ver Figura 3). Poderíamos ter movido na outra direção, mas como queremos maximizar f , isso não seria eficiente. Mover na direção oposta reduziria o valor de f , afastando-nos do objetivo de encontrar o maior valor possível dentro da região viável. Portanto, sempre avançamos na direção em que aumentamos o valor de f , garantindo que estamos nos aproximando da solução ótima. De acordo com Taha (2008).

Primeiramente, precisamos identificar a direção correta em que a função cresce (função de maximização). Para isso, traçaremos diferentes retas com base na equação da função objetivo, atribuindo diferentes valores a f , por tentativa e erro.

Identificada a direção em que a função objetivo aumenta, é possível identificar a solução ótima do modelo, dentro do conjunto viável.

A Figura 3 mostra a reta onde $f = 140$.

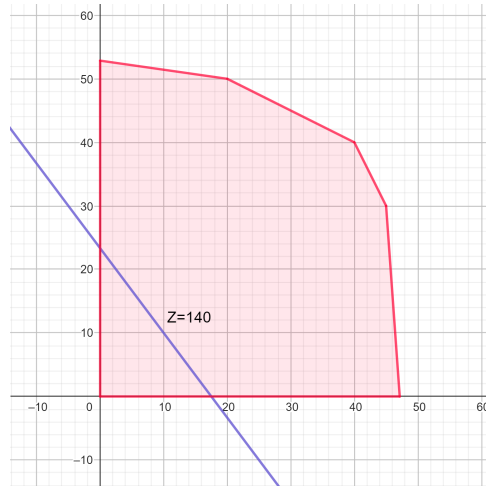


Figura 3: $f = 140$

Continuando a mover a reta paralelamente a si própria, temos conforme a Figura 4, que a solução ótima é obtida aproximadamente na coordenada $(40, 40)$ que indica um valor ótimo de aproximadamente R\$ 560,00, obtido ao produzir 40 litros de x_1 e também 40 litros de x_2 .

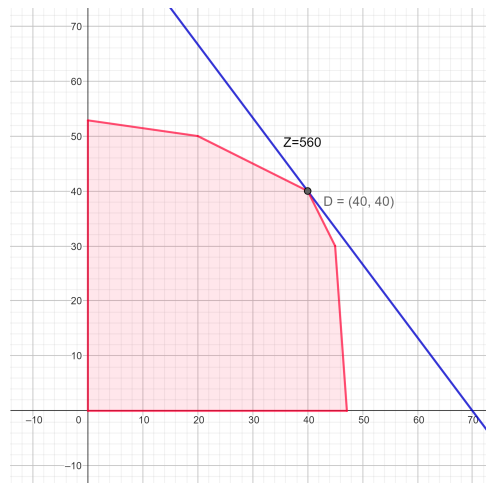


Figura 4: $f = 560$

Exaustão

Iremos determinar a solução ótima deste PPL utilizando o método da exaustão, que consiste em determinar os vértices da região viável e, em seguida, calcular o valor de f em cada um deles, e comparar estes valores para determinar a melhor solução possível para o problema, denominada de solução ótima. Este método é amparado pelo fato de que a solução ótima de um PPL está no vértice do polígono formado pela região viável, e que a quantidade de vértices é finita. Este método, apesar de menos eficiente para problemas de grande porte, é ideal para ilustrar a aplicação de conceitos básicos de otimização no ensino médio.

Na Figura 1, apresentamos a região viável destacada em vermelho. Note que cada par de equações gera um ponto, que pode pertencer ao conjunto de vértices da região viável que define o PPL. Para aplicar o método da exaustão, é necessário determinar as coordenadas dos pontos (vértices) que pertencem a região viável. Estes vértices são determinados pelas inequações (duas a duas) que definem o PPL.

O cálculo do lucro total para cada vértice nos mostra qual combinação de produção resulta no maior lucro, permitindo identificar a solução ótima.

Como exemplo vamos encontrar o vértice formado pelas restrições $2x_1 + 14x_2 \leq 740$ e $2x_1 + 4x_2 \leq 240$. Note que o vértice determinado por estas duas inequações está na interseção onde vale a igualdade. Assim, transformamos as desigualdades em igualdades

$$2x_1 + 14x_2 = 740 \quad \text{e} \quad 2x_1 + 4x_2 = 240.$$

Agora, resolvemos esse sistema de equações para encontrar as coordenadas do ponto onde as duas retas se cruzam. Resolvendo este sistema com alguma técnica que os alunos já tiveram contato, podemos determinar o ponto de interseção das duas retas, ou seja, o vértice formado pelas restrições, dado por

$$(x_1, x_2) = (20, 50).$$

É sempre necessário verificar se este vértice pertence à região viável (onde estamos buscando a solução). Para fazer isto, podemos observar o gráfico da região viável, ou testar este ponto nas demais restrições para verificar se estas são satisfeitas.

Repetindo este procedimento para todas as combinações de restrições, identificamos 6 vértices distintos que pertencem à região viável. A representação gráfica dos vértices e suas coordenadas estão apresentadas na Figura 5.

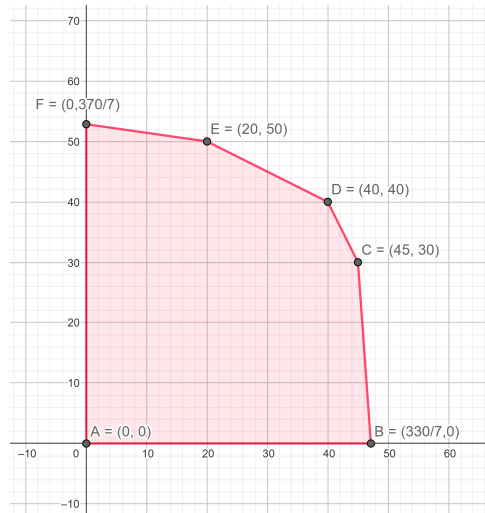


Figura 5: Vértices A,B,C,D,E e F

Agora calculamos o valor de f nos vértices para identificar a solução ótima. O vértice onde f for máximo será a solução ótima do problema.

Vértice A

Como $A = (0, 0)$, temos que ele representa uma produção nula dos dois produtos da empresa. Então

$$f = 8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0,$$

dessa forma o lucro será de R\$ 0,00.

Vértice B

Como $B = (\frac{330}{7}, 0)$, temos que ele representa uma produção de $\frac{330}{7}$ litros do produto x_1 e nenhum litro do produto x_2 , assim

$$f = 8 \cdot \frac{330}{7} + 6 \cdot 0 = \frac{2640}{7},$$

dessa forma o lucro será de aproximadamente R\$ 377,14.

Vértice C

Como $C = (45, 30)$, temos que ele representa uma produção de 45 litros do produto x_1 e 30 litros do produto x_2 , assim

$$f = 8 \cdot 45 + 6 \cdot 30 = 360 + 180 = 540,$$

dessa forma o lucro será de R\$ 540,00.

Vértice D

Como $D = (40, 40)$, temos que ele representa uma produção de 40 litros de ambos os produtos, assim

$$f = 8 \cdot 40 + 6 \cdot 40 = 320 + 240 = 560,$$

dessa forma o lucro será de $R\$ 560,00$.

Vértice E

Como $E = (20, 50)$, temos que ele representa uma produção de 20 litros do produto x_1 e 50 litros do produto x_2 , assim

$$f = 8 \cdot 20 + 6 \cdot 50 = 160 + 300 = 460,$$

dessa forma o lucro será de $R\$ 460,00$.

Vértice F

Como $F = (0, \frac{370}{7})$, temos que ele representa uma produção de 0 litros do produto x_1 e $\frac{370}{7}$ litros do produto x_2 , assim

$$f = 8 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{370}{7} = \frac{2220}{7},$$

dessa forma o lucro será de aproximadamente $R\$ 317,14$.

Desta forma, o maior valor de f é obtido no vértice D , indicando que a produção ótima é de 40 litros de x_1 e 40 litros de x_2 , gerando um lucro máximo de $R\$ 560,00$. A solução ótima representa a melhor estratégia de produção dentro das limitações dos recursos, maximizando o lucro da empresa.

Python

Nesta seção, apresentamos uma resolução do problema da indústria utilizando uma implementação em Python. Para resolver o PPL, utilizamos o comando `Lpminimize`, que, por padrão, é uma implementação em C++ do `Cbc` (Coin-or Branch and Cut), um software *open-source* para Programação Inteira Mista ou contínua, e que resolve PPLs com restrições gerais.

Nesta implementação o usuário deve inserir na página do google colab a função objetivo e as restrições, como a seguir

```
#Importando a biblioteca PuLP

!pip install pulp
import pulp as p
#definindo as variaveis do problema
x1=p.LpVariable("x1", lowBound=0, cat='Continuous')
x2=p.LpVariable("x2", lowBound=0, cat='Continuous')

#definindo a funcao objetivo a ser otimizada
funcao = p.LpProblem("exemplo",p.LpMinimize)
funcao += -(8*x1+6*x2) #negativo para maximizar lucro

#definindo as restricoes do problema
funcao += 2*x1+4*x2<=240
funcao += 4*x1+2*x2<=240
funcao += 14*x1+1*x2<=660
funcao += 2*x1+14*x2<=740

#maximizando o problema
solucao = funcao.solve() # comando para resolver o problema
print(p.LpStatus[solucao]) # diz se foi resolvido

#imprimindo cada variavel
for j in funcao.variables(): print(j.name, "=", j.varValue)

print("lucro maximo =",-p.value(funcao.objective))
```

Para utilizar o Google Colab, o usuário deve copiar esta implementação (Ctrl c), pesquisar e acessar o site *Google Colab* em seu navegador, com uma conta de email *Google* conectada. Após acessar o site o usuário deve selecionar a opção *New notebook (ou novo notebook)*, e em seguida ao carregamento da página o usuário deve colar a implementação

(Ctrl v) onde está escrito *start coding or generate with AI* (ou comece o código ou gere com IA). A Figura 6 mostra este passo.

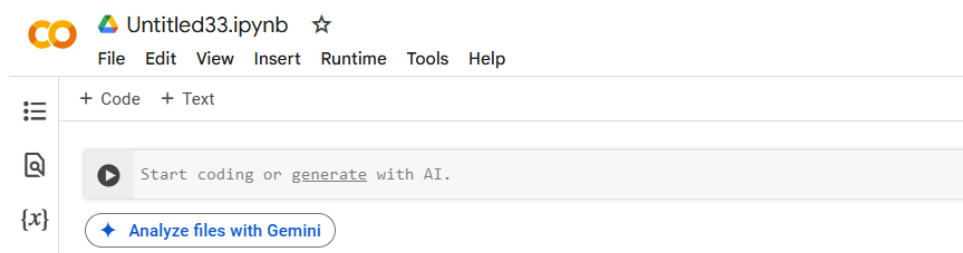


Figura 6: Colando a implementação

Por fim o usuário deve clicar na seta ao lado da implementação que foi colada no site, para executar a implementação e obter os resultados. A Figura 7 representa a solução ótima para o problema .

```
Optimal
x1 = 40.0
x2 = 40.0
lucro maximo = 560.0
```

Figura 7: Solução com *Python*

Dessa forma temos que a solução ótima corresponde ao vértice *D*. Sendo assim, o lucro máximo é R\$ 560,00, e é obtido ao se produzir 40 litros de cada um dos produtos.

Considerações finais

O presente trabalho apresentou uma análise sobre o uso dos PPLs no contexto educacional do Ensino Médio. Destacamos que essa abordagem está alinhada às diretrizes da BNCC, que valoriza a Modelagem Matemática como estratégia pedagógica significativa para a aprendizagem.

Esperamos que a implementação apresentada para a resolução de PPLs possa ser útil em possíveis aplicações em sala de aula. Essa ferramenta pode, inclusive, servir de inspiração para que os próprios estudantes desenvolvam soluções tecnológicas, promovendo a autonomia e o protagonismo no processo de aprendizagem.

Concluimos, assim, que o trabalho com PPLs no Ensino Médio representa uma abordagem promissora para integrar habilidades matemáticas, promover a Modelagem Matemática e incentivar o uso de tecnologias digitais. Essa integração permite ao aluno vivenciar o conhecimento de forma significativa, conectando conceitos teóricos a situações práticas, enriquecendo a aprendizagem e ampliando as possibilidades de aplicação do conteúdo matemático.

Referências Bibliográficas

- [1] Biembengut, Maria Salett; Modelagem matemática e implicações no ensino e aprendizagem de matemática. Blumenau: Ed. da Furb, 1999.
- [2] Brasil. *Base nacional comum curricular (BNCC). Educação é a base.* MEC/CONSED/UNDIME, Brasília, 2017.
- [3] Goldbarg, M. C. e Luna, H. P. L. *Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos.* Editora Campus, Rio de Janeiro, 2000.
- [4] Lima, E. L. Sobre o ensino de sistemas lineares. *Revista do Professor de Matemática*, v. 23, p. 8–18, 1993.
- [5] Meyer, J. F. C. A.; Caldeira, A. D.; Malheiros, A. P. S. Modelagem em educação matemática. *Coleção Tendências em Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2011.
- [6] Onuchice, Allevato. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.
- [7] Ribeiro, A. A. e Karas, E. W. *Otimização contínua: aspectos teóricos e computacionais.* MPS-SIAM Series on Optimization. Cengage Learning, São Paulo, 2013.
- [8] Taha, H. A. Pesquisa operacional. 8. ed. São Paulo: Pearson, 2008.

Apêndice

Problema da fazenda

Um fazendeiro cultiva dois tipos de lavoura: milho e soja. Cada hectare de cada cultura consome os seguintes recursos:

recurso	milho (por ha)	soja (por ha)	disponível
terra (ha)	1	1	20 ha
água (mil litros)	2	4	52 mil L
mão de obra (horas)	4	3	75 horas

Cada hectare de milho rende R\$ 240,00 enquanto cada hectare de soja rende R\$ 270,00 de lucro. O objetivo é determinar quantos hectares de cada cultura o fazendeiro deve plantar para obter o maior lucro possível, respeitando os limites de recursos.

Temos que uma modelagem para este problema considerando x_1 a quantidade de hectares de milho e x_2 a quantidade de hectares de soja será

$$\text{maximizar } f = 240x_1 + 270x_2,$$

sujeito as restrições

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20 & (\text{terra}) \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 52 & (\text{água}) \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 75 & (\text{mão de obra}) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Outro Problema da indústria

Uma indústria fabrica dois produtos, chamados de produto A e produto B. A produção de cada unidade de cada produto exige o uso de três recursos: duas máquinas e material de embalagem. As informações sobre o consumo de recursos por unidade e a disponibilidade máxima desses recursos estão na tabela a seguir:

recurso	produto A	produto B	disponível
máquina 1	4 horas	2 horas	44 horas
máquina 2	3 horas	4 horas	39 horas
embalagem	2 unidades	5 unidades	40 unidades

A cada unidade vendida, a empresa obtém R\$ 20,00 de lucro com o produto A e R\$ 25,00 com o produto B. O objetivo da empresa é maximizar o lucro total, respeitando as limitações de recursos.

Sejam x_1 a quantidade vendida do produto A e x_2 a quantidade vendida do produto B.

Temos que a modelagem deste problema será maximizar a função lucro L

$$\text{maximizar } L = 20x_1 + 25x_2,$$

sujeito as restrições

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 44 & (\text{máquina 1}) \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 39 & (\text{máquina 2}) \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 40 & (\text{embalagem}) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Problema da dieta

Suponha que, por motivos justificáveis, uma certa dieta alimentar esteja restrita a leite desnatado, carne magra de boi, carne de peixe e uma salada de composição bem conhecida. Sabendo ainda que os requisitos nutricionais serão expressos em termos de vitaminas A, C e D e controlados por suas quantidades mínimas (em miligramas), uma vez que são indispensáveis à preservação da saúde da pessoa que se submete à dieta. A Tabela 1 resume a quantidade de cada vitamina em disponibilidade nos alimentos e sua necessidade diária para a boa saúde de uma pessoa.

Tabela 1: Tabela nutricional dos alimentos e requisitos mínimos.

vitamina	Leite (litro)	carne (kg)	peixe (kg)	salada (100g)	requisito nutricional mínimo
A	3 mg	5 mg	7 mg	2 mg	29 mg
C	4 mg	6 mg	8 mg	3 mg	35 mg
D	5 mg	7 mg	6 mg	4 mg	42 mg
custo	4 reais	6 reais	5 reais	3 reais	

Buscamos determinar as quantidades diárias de certos alimentos que devem ser ingeridos em uma dieta de redução calórica, de forma que os requisitos nutricionais sejam atendidos ao menor custo possível.

Consideramos que x_1 indica a quantidade de leite, x_2 a de carne, x_3 a de peixe e x_4 a de salada.

- Modelagem Matemática da função objetivo.

Aqui basta multiplicarmos o valor de cada alimento pela variável que representa a quantidade deste alimento, temos então que a função objetivo f será

$$f = 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4.$$

- Modelagem Matemática das restrições

i) A restrição associada à demanda de vitamina A é dada por

$$3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 \geq 29.$$

ii) A restrição associada à demanda de vitamina C é dada por

$$4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 3x_4 \geq 35.$$

iii) A restrição associada à demanda de vitamina D é dada por

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 \geq 42.$$

Como não é possível comprar uma quantidade negativa de alimentos temos que

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Assim, o PPL se torna minimizar $f = 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4$, sujeito a

$$3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 \geq 29$$

$$4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 3x_4 \geq 35$$

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 \geq 42$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$