

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

RECURSO EDUCACIONAL

**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA UTILIZANDO O
PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA INTEGRANDO
A MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE
MATEMÁTICA**

ÁLVARO RAONNY MENEZES DE SANTANA

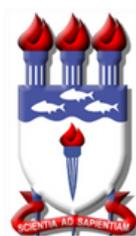


Instituto de Matemática

Maceió, julho de 2025



PROFMAT



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS – UFAL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

RECURSO EDUCACIONAL

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA UTILIZANDO O PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA INTEGRANDO A MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Autoria:
Álvaro Raonny Menezes de Santana
Prof. Dr. Marcos Ranieri da Silva



Instituto de Matemática



PROFMAT

Álvaro Raonny Menezes de Santana

**UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA UTILIZANDO O PERCURSO DE ESTUDO E
PESQUISA INTEGRANDO A MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE
MATEMÁTICA**

Recurso educacional apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Ranieri da Silva

MACEIÓ

2025

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – esquematização dos passos.	12
Figura 2 – tarefas e casos do processo de Modelagem segundo Barbosa.	14
Figura 3 – grafo de perguntas.	24
Figura 4 – grafo de respostas.	28
Figura 5 – vista frontal e lateral da primeira casa e vista frontal e superior da segunda.	34
Figura 6 – painel solar policristalino.	35
Figura 7 - área do quadrado.	35
Figura 8 – imóvel 1.	37
Figura 9 – imóvel 2.	37
Figura 10 – imóvel 3.	38
Figura 11 – imóvel 4.	39
Figura 12 – imóvel 5.	39
Figura 13 – imóvel 6.	40
Figura 14 – retângulo.	41
Figura 15 – imagem de um quadrado.	41
Figura 16 – paralelogramo e sua transformação em retângulo.	41
Figura 17 – imagem de um triângulo.	42
Figura 18 – triângulo retângulo.	42
Figura 19 – triângulo equilátero.	43
Figura 20 – imagem de um losango.	43
Figura 21 – imagem de um losango.	44
Figura 22 – círculo, seu recorte e reorganização.	44
Figura 23 – setor circular e sua fórmula.	44
Figura 24 – superfície do cone planificada.	45
Figura 25 – latitude e longitude.	48
Figura 26 – potencial de geração solar ao longo dos meses.	50
Figura 27 – vista frontal e lateral da primeira casa e vista frontal e superior da segunda.	51
Figura 28 – triângulo com associações.	52
Figura 29 – tabela trigonométrica comum.	52
Figura 30 - tabela trigonométrica expandida.	53
Figura 31 – ângulos presentes nos telhados.	53
Figura 32 – triângulo retângulo em A.	55

Figura 33 – representação visual da demonstração anterior.	56
Figura 34 - triângulo retângulo ABC.	57
Figura 35 – triângulo retângulo ABC reto em A.	57
Figura 36 – triângulo retângulo.	58
Figura 37 – fatores de perda da geração de energia solar.	61
Figura 38 – página do gerador de números configurada.	63
Figura 39 – um possível resultado ao clicar em “Get Numbers”.	63

GLOSSÁRIO

BNCC – BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR – DOCUMENTO ORIENTADOR SOBRE AS COMPETÊNCIAS E HABILIDADES QUE DEVEM SER DESENVOLVIDAS PELOS ESTUDANTES.

MM – MODELAGEM MATEMÁTICA – MÉTODO DE ENSINO QUE FAZ USO DE PROBLEMAS REAIS EM CONJUNTO DA MATEMÁTICA OBJETIVANDO O APRENDIZADO.

PEP – PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA – ESTRATÉGIA DE ENSINO NA QUAL EXISTE A PRESENÇA DE UMA INVESTIGAÇÃO LIDERADA PELO ALUNO.

PQM – PARADIGMA DE QUESTIONAMENTO DE MUNDO – TRATA-SE DE UMA MANEIRA ALTERNATIVA DE ENXERGAR O COMO A APRENDIZAGEM OCORRE. DIZ QUE O ENSINO E APRENDIZAGEM DEVEM SER BUSCADOS POR MEIO DE PERGUNTAS.

PVO – PARADIGMA DE VISITA ÀS OBRAS - UMA FORMA ALTERNATIVA DE NOMEAR O ENSINO TRADICIONAL, NO QUAL O PROFESSOR MOSTRA TODO O NECESSÁRIO E OS ALUNOS APENAS ASSISTEM.

TAD – TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO – TEORIA DE YVES CHEVALLARD, ESTUDA COMO O CONHECIMENTO PODE SE DÁ ATRAVÉS DAS RELAÇÕES QUE ELE PODE TER COM AS PESSOAS ENVOLVIDAS NO PROCESSO DE APRENDIZAGEM.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	7
1.1 Orientações gerais para o professor	7
2 RESUMO DAS TEORIAS UTILIZADAS	10
2.1 Teoria Antropológica do Didático	10
2.2 Modelagem Matemática	12
3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA	16
3.1 Análise epistemológica e análise preliminar	21
3.2 Primeiras aulas e momentos introdutórios	29
3.2.1 Atividade: analisando telhados e o custo	33
3.2.2 Teoria: Formalizando e conhecendo mais sobre áreas de figuras	40
3.3 Momentos intermediários	47
3.3.1 Interdisciplinaridade entre a Matemática e a Geografia	48
3.3.2 Atividade: relacionando telhados e ângulos	50
3.3.3 Teoria: formalizando os conceitos de trigonometria a partir dos triângulos retângulos	55
3.4 Momentos finais	60
3.4.1 Atividade: calculando a geração de energia	61
3.4.2 Respondendo a Q-0	65
3.5 Após o PEP	65
4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	67

1 INTRODUÇÃO

Neste produto educacional, visamos oferecer para o professor o uso de outras opções metodológicas alternativas à abordagem tradicional. Para tal, elaboramos uma sequência didática que usa o Percurso de Estudo e Pesquisa e Modelagem Matemática. Nesta sequência, detalhamos como o professor pode proceder durante suas aulas para que o aprendizado dos alunos seja alcançado por meio dessas metodologias. Além disso, o detalhamento também tem uma segunda função, auxiliar o professor durante a mudança de perspectiva e as novas dificuldades causadas por essas metodologias, assim, a aplicação é facilitada. Visando uma leitura rápida (ou primeira leitura) sugerimos as seções 1.1, 3.1 até a 3.5.

De forma resumida, o presente produto educacional propõe uma abordagem pedagógica baseada na Modelagem Matemática e no Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), fundamentada no Paradigma de Questionamento do Mundo (PQM). A proposta visa promover o protagonismo discente, desenvolver competências investigativas e estimular a reflexão crítica, a partir da seguinte questão geradora: **“Qual a relação entre o custo da instalação de placas fotovoltaicas para a geração de energia e os benefícios que ela pode trazer?”** Com base na Teoria Antropológica do Didático (TAD) e em contribuições de autores como D’Ambrosio, Chevallard e Bassanezi. Na seção 2 detalhamos um pouco mais sobre os principais detalhes teóricos para esta sequência didática.

Neste documento, unimos o Projeto de Estudo e Pesquisa, que faz uso do Paradigma de Questionamento de Mundo, com questões iniciais que direcionam tal projeto a uma rota que envolve a Modelagem Matemática, assim, obtemos esse equilíbrio entre teoria, técnica e prática. Por meio dessa abordagem, busca-se contribuir para a formação de uma compreensão interdisciplinar, engajando estudantes e pesquisadores na análise de um tema de grande relevância social, ambiental e econômica. Ademais, a utilização da Modelagem Matemática visa fornecer uma compreensão aprofundada e aplicada do tema, promovendo uma aprendizagem concreta, contextualizada e voltada para a solução de problemas do mundo real, reforçando competências essenciais para o desenvolvimento de uma educação voltada para a sustentabilidade e a inovação.

1.1 Orientações gerais para o professor

Este manual com sequência didática é voltado para o professor que deseja aplicar outras metodologias em suas aulas, mas sente dificuldades, seja por deficiências geradas durante sua

graduação, insegurança para testar novas metodologias ou até mesmo falta de tempo para se preparar para o uso de novas formas de ensino. Contudo, devemos ressaltar que o conteúdo desse trabalho não servirá para todos os casos presentes na realidade do ensino, nestes momentos cabe ao professor realizar as modificações necessárias para adequá-lo à sua realidade.

Podemos dividir as orientações em três categorias: o papel do professor, uso geral da sequência e momentos de avaliação.

Com relação ao papel do professor, temos uma importante mudança quanto ao que ocorre em sala de aula. No ensino tradicional, o professor normalmente atua como um guia que apresenta para os estudantes assuntos, isto é, o professor realiza todo o processo ativo do ensino, enquanto o aluno fica passivo apenas observando o desfecho dos conteúdos durante a aula. Para uma utilização efetiva destas metodologias é necessário entender que o professor não será mais o responsável por guiar a aula, este papel será dos estudantes, apenas oriente os alunos para que eles não se percam nesse processo, ou seja, o professor fará interferências quando for oportuno.

Durante esta sequência temos diversos momentos distintos: pesquisas, apresentações, atividades, teoria, interdisciplinaridade. Em cada um destes momentos o comportamento do professor se altera para um melhor proveito do aprendizado.

No momento que ocorrerem as pesquisas, é seu papel orientar e ensinar aos alunos como buscar por boas fontes de informação e permitir que eles busquem, não se deve buscar por eles, mas direcioná-los caso sintam muitas dificuldades ou se percam devido à grande quantidade de informações acessível na atualidade.

As etapas com o título de atividade são voltadas para a Modelagem Matemática, nessas o professor deve auxiliar na reflexão, elaboração e montagem do modelo. Para tal, ele pode, em conjunto com os alunos, apresentar o problema, debater e trazer assuntos que faltem para a solução do problema. Desde que as atividades de modelagem se apliquem em seu contexto, deixamos aqui a opção de usá-las de forma separada do restante da sequência. Dessa forma, você ainda conseguirá trazer algo interessante para os alunos e ainda poupar tempo para outras demandas pedagógicas.

Quando tratamos de teoria, temos a formalização dos conteúdos que foram vistos superficialmente para a solução dos problemas de modelagem presentes nas atividades. Nestes momentos, você tem liberdade para tratar do ensino dos assuntos da maneira que julgar melhor. Neste sentido, a sequência inclui uma formalização básica dos assuntos com definições, demonstrações e listas de atividade, assim, proporcionando ao professor um exemplo do que

fazer para esses momentos. Os momentos de interdisciplinariedade também podem ser tratados de forma semelhante.

Com relação aos momentos de apresentação, seu papel se torna o de avaliador, durante o texto temos a presença de rubricas para avaliação. Ademais, adiante no texto, tratamos das avaliações com mais detalhes, mas é possível resumir que elas estão presentes durante as avaliações, durante as listas presentes nos momentos de teoria e, no final, com o relatório final.

Finalizadas as orientações gerais, partimos para um recorte teórico que pretende trazer para você noções da teoria em que essas metodologias são baseadas. Após a teoria, temos o início da sequência.

2 RESUMO DAS TEORIAS UTILIZADAS

2.1 Teoria Antropológica do Didático

A Teoria Antropológica do Didático (TAD), segundo Chevallard (1999), expõe que tanto o conhecimento quanto as atividades humanas e sua produção podem ser descritos em termos de praxeologias, que é uma teoria que tenta explicar a estrutura lógica da ação humana, baseada na noção de que os humanos se envolvem no comportamento proposital, que se opõe ao comportamento reflexivo.

Dessa forma, a TAD busca investigar as práticas docentes em sala de aula por meio da praxeologia, identificando quais conteúdos são valorizados e mais utilizados pelos professores em sala de aula e o decompondo nos quatro componentes que formam a quadra da praxeologia. Santos e Menezes (2015) exemplificam muito bem uma praxeologia, considere a tarefa de resolução de uma equação a seguir:

“Determine o valor de x na equação $x^2 + 6x + 9 = 0$ ”.

Assim, para executar essa tarefa, necessitamos da utilização da técnica da oposição de termos, que contém como tecnologia as propriedades das operações inversas nos números reais e é sustentada pela teoria da Álgebra.

Ainda falando sobre a praxeologia, temos praxeologia didática ou organização didática, que surge quando tentamos responder perguntas do tipo: “como ensinar o conteúdo ‘X’?”. Chevallard (1999) afirma que não se deve esperar que essas formas de tarefas que podem ocorrer na construção de uma organização didática sejam feitas de maneira única, contudo, independentemente do caminho de estudo, certas situações (momentos) estão presentes.

A TAD constata que o paradigma atual da educação em geral visa ensinar obras (praxeologias/conteúdos/assuntos/temas), que já estão prontas, totalmente bem definidas e confinadas em pacotes, ou seja, as escolas se preocupam em ensinar conteúdos, como funções, matrizes, logaritmo etc., consolidados no âmbito educacional. Contudo, há pouco questionamento sobre o porquê desses conteúdos estarem no currículo e por qual motivo eles devem ser ensinados, algo também constatado por outras metodologias como a Modelagem Matemática, o conjunto instituição de ensino e professor somente se restringe a passar o que se está nos livros e o aluno apenas responde questões artificiais com pouca, ou nenhuma, motivação para isso. (Benito *et al.*, 2022).

Sob esse ponto de vista, Chevallard (2013) afirma que o Paradigma de Visita às Obras é ultrapassado, apenas prezamos por obras/conteúdos presos aos grandes nomes da Matemática,

de forma que não existe um sentido fora de si mesma. Dessa forma, é necessário a criação de um novo paradigma de ensino.

Então, em vista desses problemas, se faz necessária uma mudança. Chevallard (2013) propõe que as obras continuem sendo visitadas, mas que elas não sejam o foco principal do sistema didático. Essa mudança se dá através do estudo para a resolução de uma questão, um problema, indo na direção contrária da organização atual que divide o estudo em temas. Essa é uma das características do Paradigma de Questionamento do Mundo (PQM) que atende a dois princípios básicos: o primeiro é que não há idade para aprender, todo mundo possui a capacidade para tal e os estudos devem ser úteis até a velhice. O segundo, para aprender determinado conteúdo, o conhecimento precisa ser perseguido com o auxílio de um mediador/professor ou não, em um material de estudo e pesquisa confiável, partindo de uma pergunta que necessite de uma pesquisa (questão geradora ou pergunta inicial).

Sob essa perspectiva, para conseguir executar uma mudança e superar o paradigma vigente (PVO), dentro da TAD, Chevallard (2009) propõe o Percurso de Estudo e Pesquisa, tal metodologia é uma estratégia de estudo baseada no processo de investigação. Os estudantes assumem o papel de investigar o necessário para responder à questão inicial, compartilhada com eles pelo professor, que também é um investigador como os alunos, assim o conteúdo e a motivação são determinados pelo processo que se dá ao tentar solucionar essa questão.

Leão e Bittar (2024) descrevem que o PEP faz usos de procedimentos da engenharia didática, que é um processo que se caracteriza por meio de um desenho experimental na concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino que se legitima pela comparação entre as análises *a priori* (preliminar) e *a posteriori* (posterior). Além disso, os autores também descrevem que quatro fases são necessárias para a construção de um PEP, a primeira é a Análise Epistemológica ou preliminar, na qual a pesquisa é problematizada, delimitada e são pensadas as condições e restrições do ambiente escolar. A segunda fase é a Análise preliminar, nela temos a escolha da questão geradora e o mapeamento das suas ramificações. A terceira fase é a análise *in vivo*, isto é, a aplicação e início das primeiras análises e apurações. A quarta fase é a Análise posterior, na qual revisamos as questões de pesquisa, realizando um contraste com o que foi observado nas experimentações, reformulando hipóteses e concluindo a pesquisa.

Assim, o PEP tem início com a análise preliminar e seleção da questão geradora e a montagem de um mapa de perguntas e respostas preliminares. Tal mapa representa os caminhos que os alunos podem tomar até que alcancem a resposta institucionalmente aceita pela questão inicial. Após esse início, a investigação é proposta aos alunos que se reúnem em grupos e

discutem qual o melhor caminho para se alcançar a resposta, que não necessariamente é única ou exata. A partir disso, os estudantes procuram respostas em obras/conteúdos/ materiais confiáveis e discutem entre si para constatar se as respostas são ou não confiáveis. Com as respostas em mãos, novas perguntas são feitas e o ciclo se repete até que o grupo decida que chegou a uma conclusão e assim possa apresentar sua trajetória. Como consequência desse processo, o foco não mais é o professor e sua transmissão de conhecimentos para o aluno, o foco passa a ser agora o aluno e seu protagonismo na busca por respostas, conhecimento para solucionar as dúvidas e questionamentos que surgem, tudo isso com o professor sendo um suporte durante esse processo.

Nesse sentido, a questão inicial impulsiona a busca por novas questões e diferentes repostas que dão impulso a uma nova modelização matemática em busca da resposta da questão inicial. Além disso, os estudos ou visitas às obras/conteúdos não necessariamente precisam ser feitas de forma tradicional, onde o processo volta a ser focado no professor e na sua transmissão de conhecimentos pertinentes à questão ou ao tema que a questão discute. Assim, podemos recorrer a outras metodologias nesse processo, aproveitando-nos do foco que o PEP dá ao aluno. Uma boa forma de fazer essa visita e melhorar ainda mais a concretização do conhecimento e o andamento do próprio PEP é a Modelagem Matemática.

2.2 Modelagem Matemática

No Brasil, a Modelagem Matemática é uma forte tendência da atualidade, ela iniciou-se por entre os anos 1970 e 1980, com a contribuição de diversos profissionais como Aristides C. Barreto, Ubiratan D'Ambrosio, Rodney Carlos Bassanezi.

Segundo Bassanezi (2004), a modelagem é algo dinâmico, usada para a obtenção de modelos por meio da abstração e generalização do problema visando se obter previsões e tendências. Tal autor esquematiza a modelagem em alguns passos:

Figura 1 – esquematização dos passos.

Passo	Descrição
Experimentação	Identificar o problema não matemático e experimentar com ele e obter dados.
Abstração	Abstração do que ocorreu no passo de experimentação, com a formulação dos

	modelos possíveis através da seleção de hipóteses, problematização e simplificação.
Resolução	O problema foi traduzido para a linguagem matemática e o estudo analítico e numérico é feito.
Validação	Validar a solução recorrendo aos dados experimentais que surgiram no passo de experimentação.
Reformulação	Caso o modelo não se encaixe nos dados experimentais, partimos para o passo de reformulação que é a modificação do modelo até que o modelo possa ser obtido.

Fonte: autor.

Portanto, Bassanezi (2004), considera a modelagem como uma estratégia na qual o foco está no caminho e não no resultado, dessa forma, a sistematização, aplicação do conteúdo matemático e a interação entre o professor e aluno são mais relevantes do que o modelo obtido em si. Na visão de outros autores o modelo pode ser visto e compreendido como

uma descrição simplificada de uma situação real, realizada através de conceitos, relações e representações matemáticas. No processo de modelação, começa-se por construir um modelo que represente a situação, depois, procura-se uma solução para o problema assim formulado em termos matemáticos, após o que se regressa à situação original, procurando interpretar nessa situação as soluções matemáticas obtidas e tirar as desejadas conclusões (Ponte; Quaresma, 2012).

Na concepção de Barbosa (2001), a Modelagem Matemática é um método que proporciona aos alunos um ambiente para se aprender Matemática por meio da investigação de situações ou problemas que tenham origem na realidade do mundo que os cerca. Ele divide o processo de investigação em três casos baseados nas formas de organização curricular. No primeiro caso, o professor descreve uma situação-problema com as informações necessárias para a sua resolução e com o problema já formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução. No segundo caso, o professor leva para a sala de aula um problema de outra área da realidade e os alunos ficam como responsáveis por fazer coleta das informações necessárias para a sua resolução. Por fim, no terceiro caso, partindo de temas não matemáticos, os alunos formulam, coletam informações, simplificam e solucionam a situação-problema.

Barbosa (2001) também frisa que é importante o professor participar da investigação, mas de maneira mais próxima de um coadjuvante e não protagonista. Seguindo tais conceitos é possível sintetizar as possibilidades de atuação da seguinte forma.

Figura 2 – tarefas e casos do processo de Modelagem segundo Barbosa.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Criação do problema	Professor	Professor	Professor / aluno
Simplificação para adequação	Professor	Professor / aluno	Professor / aluno
Coleta de dados e pesquisa	Professor	Professor / aluno	Professor / aluno
Solução	Professor / aluno	Professor / aluno	Professor / aluno

Fonte: adaptado de Barbosa (2001).

A Modelagem Matemática traz consigo uma série de vantagens para a aprendizagem dos estudantes. Biembengut e Hein (2019), colocam alguns pontos a favor da modelagem, são eles:

- Aproximar uma outra área do conhecimento da Matemática;
- Enfatizar a importância da Matemática para a formação do aluno;
- Despertar o interesse pela Matemática ante a aplicabilidade;
- Melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos;
- Desenvolver a habilidade para resolver problemas;
- Estimular a criatividade.

(Biembengut; Hein, 2019).

Vertuan (2010), afirma que:

Acreditamos que as atividades de Modelagem Matemática levam os alunos a verem a Matemática como uma ferramenta para analisar, investigar e interpretar a realidade. Ao desenvolverem uma atividade deste tipo, utilizam vários conceitos matemáticos em problemas reais e se obrigam, inclusive, a conhecerem melhor outras áreas do conhecimento. Logo, a Modelagem não só é uma alternativa para o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos, como também é uma alternativa para a formação crítica dos alunos, os quais vivem numa sociedade em constante mudança. (Vertuan, 2010).

De acordo com Bassanezi (2004), muitos professores trazem obstáculos para a sua implantação, principalmente em cursos regulares, como:

- O currículo dos cursos regulares que devem ser desenvolvidos integralmente e, como a modelagem é um processo demorado, isto pode não acontecer;
- Alguns professores de matemática duvidam se é de sua responsabilidade, ensinar a resolver problemas de outras áreas, ou estabelecer conexões com estas;

- O aluno está acomodado ao ensino tradicional, e com a introdução da Modelagem, ele pode se perder ou tornar-se apático.

- Na Modelagem, o aluno passa a ser o centro do processo de ensino-aprendizagem, ou seja, ele é responsável pelos resultados obtidos e pela dinâmica do processo, logo, a aula poderá caminhar em ritmo mais lento;

- A formação heterogênea de uma classe pode dificultar na relação dos conhecimentos teóricos adquiridos com a situação prática;

- O tema escolhido pode não interessar a todos;

- Os professores não se sentem habilitados a desenvolver a modelagem em seus cursos, por falta de conhecimento do processo ou por medo de se encontrarem em situações embaraçosas quanto às aplicações da Matemática em outras áreas.

Dessa forma, podemos observar que a Modelagem Matemática possui muitos argumentos a favor e contra ela. E, ainda, vemos que as dificuldades estão relacionadas ao cotidiano da educação como todo: dificuldades em relação aos alunos, ao professor, à escola em si e a falta de preparo nas licenciaturas.

3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A abordagem como proposta nesse trabalho tem características que a fazem ser pouco conectada com a tecnologia, isto é, ela é ideal para escolas que não possuem sala de informática ou que ela não tenha capacidade para todos os alunos da sala, pois não faz uso de softwares que necessitam de computadores capazes ou outros programas do tipo. Contudo, em alguns momentos o acesso a um navegador de internet para pesquisas se faz necessário e o uso do celular e livros também.

Além disso, a seguir, temos a presença de um cronograma para a aplicação com as etapas semanais e sugestões para a divisão de aulas. Esta abordagem inicialmente tem duração prevista de 2 meses, caso o professor aplique-a em suas 4 aulas de matemática semanais. De outro modo, caso o professor aplique em outra disciplina como, por exemplo, Aprofundamento de Ciências da Natureza e Matemática, que possui duas aulas semanais, a duração passa a girar em torno de 4 meses e um ajuste do cronograma se faz necessário (basta dividir ao meio o número de etapas semanais). Por fim, propositalmente foram deixados espaços em branco no cronograma, eles servem para não deixar que atrasos na duração inicial prevista ocorram, além de possibilitar estender momentos que o professor julgue que seja necessário mais tempo.

Semana	Etapa	Objetivos
1	Apresentação da metodologia do PEP e da pergunta geradora.	Contextualizar o projeto e estimular o engajamento inicial;
	Levantamento de dúvidas e sugestões com base na pergunta.	Estimular a curiosidade e o pensamento investigativo;
	Organização das perguntas e construção inicial do grafo.	Estabelecer conexões entre as dúvidas levantadas;
	Formação dos grupos e divisão temática das perguntas.	Estruturar a investigação colaborativa por temas.
2	Início da pesquisa.	Levantar dados reais e contextualizar o problema;
	Continuação.	Relacionar matemática com questões sociais e econômicas;
	Organização dos dados obtidos e preparação para a apresentação dos dados.	

	Primeira apresentação (perguntas da categoria um).	Sistematizar informações e desenvolver análise crítica; Promover a troca de informações e aprimorar a comunicação.
3	Atividade sobre área dos telhados.	Introduzir geometria plana aplicada; Aplicar fórmulas de área de figuras planas; Relacionar área útil e viabilidade técnica; Argumentar e validar resultados coletivamente.
	Teoria sobre área de figuras planas.	
	Cálculo da área disponível nos imóveis dos grupos e preparação para as próximas apresentações.	
	Segunda apresentação (perguntas da categoria 5).	
4	Discussão sobre o ângulo ideal de inclinação dos painéis por meio da interdisciplinariedade.	Relacionar orientação solar e trigonometria; Utilizar relações trigonométricas básicas; Compreender o impacto da localização geográfica; Ampliar o pensamento crítico e investigativo.
	Atividade sobre o estudo dos ângulos a partir dos telhados.	
	Teoria sobre trigonometria.	
	Modelagem do posicionamento ideal com base na região e no imóvel e discussão sobre as variações nos ângulos entre os grupos.	
5	Atividade sobre o cálculo de geração de energia.	Trabalhar com leitura de dados científicos; Calcular produção estimada por residência; Desenvolver habilidades de sistematização; Consolidar análise de dados em contexto real.
	Estimativa da geração mensal de energia (em kWh).	
	Organização dos dados para comparação e solução das perguntas das categorias 3 e 4.	
	Apresentação das estimativas de cada grupo.	

6	Análise geral do custo de manutenção do sistema (perguntas da categoria 2).	Aplicar proporção, porcentagem e raciocínio lógico; Relacionar matemática financeira e tempo de retorno; Analisar viabilidade conforme diferentes perfis; Retomar e consolidar o conhecimento produzido.
	Análise dos benefícios e estimativa de retorno do investimento.	
	Comparação de economia mensal entre os imóveis.	
	Revisão do percurso, conteúdos e respostas geradas.	
7	Construção da resposta final à pergunta geradora.	Sistematizar as descobertas em forma de síntese; Elaborar produto da pesquisa; Socializar resultados e argumentar coletivamente; Aperfeiçoar comunicação oral e visual dos dados; Refletir criticamente sobre a aprendizagem.
	Produção de relatórios, pôsteres e/ou apresentações.	
	Apresentação dos grupos.	
	Avaliação coletiva da trajetória e das descobertas.	
8		

Com relação às avaliações temos a presença de 3 instrumentos avaliativos distintos, tais instrumentos podem ser encontrados nos anexos e estão descritos nos próximos parágrafos. De forma resumida, sempre que um grupo for apresentar, ele poderá ser avaliado de acordo com os critérios socioemocionais da BNCC. Além disso, na medida em que avançamos na proposta, temos a presença de atividades que podem ser utilizadas para uma avaliação qualitativa das técnicas, teorias, habilidades e competências adquiridas. Por fim, temos uma última avaliação que é feita a partir do relatório final produzido pelos alunos.

Quando tratamos de avaliação a autora Hoffmann (2001) elenca que, devido à grande complexidade do processo avaliativo, é necessário um conjunto de reflexões anterior ao processo avaliativo, tais como: “O que pretendemos?”, “Para quem pretendemos?”, “Quais

condições iremos criar?”. As respostas para essas perguntas não são definitivas, contudo, elas ampliam o olhar do professor com relação ao processo de ensino aprendizagem.

Ao pensar nas condições que criamos ao percorrer desta sequência, observamos que elas abrem muitas portas para avaliar os alunos em diversos aspectos. Pensando na situação escolar que a proposta seria aplicada e no decorrer da sequência, chegamos a 3 tipos de avaliação que verificam diferentes habilidades que podem ser adquiridas durante a proposta, são elas: a avaliação qualitativa das atividades presentes nos anexos; a avaliação das apresentações e debates dos alunos, por fim, a avaliação dos relatórios produzidos.

Considerando os objetivos de aprendizado expostos na introdução e nos conceitos de avaliação elencados por Hoffmann (2001), temos que pensar no que cada uma dessas formas de avaliar irão verificar nos alunos:

- Avaliação qualitativa das atividades: aqui buscamos verificar e avaliar, de forma qualitativa, a aquisição das habilidades e competências técnico-teóricas presentes na BNCC dos conteúdos vistos durante o percurso;
- Avaliação das apresentações: aqui buscamos avaliar a presença das habilidades socioemocionais, ou “soft skills”, dos alunos de acordo com a BNCC;
- Avaliação do relatório final produzido: avaliar diversos critérios que partem da produção textual, passam pela aplicação dos conceitos e chegam até a originalidade e protagonismo.

A seguir temos as rubricas avaliativas relacionadas às habilidades socioemocionais e a avaliação do relatório final.

Critério	Descrição	Nível 1 (Insuficiente)	Nível 2 (Parcial)	Nível 3 (Adequado)	Nível 4 (Excelente)
1. Clareza e organização da fala.	O grupo comunica suas ideias de forma clara, estruturada e objetiva?	Fala desorganizada e difícil de entender.	Alguma clareza, mas com repetições ou falta de coesão.	Fala clara, com começo, meio e fim definidos.	Fala bem estruturada, fluida, com ótima articulação de ideias.
2. Autonomia e domínio do conteúdo.	Os integrantes demonstram segurança e conhecimento sobre o tema?	Leitura direta, insegurança ou desconhecimento do tema.	Uso excessivo de anotações, com pouca segurança.	Fala com segurança e domínio geral do conteúdo.	Domínio completo do conteúdo, com linguagem segura e articulada.

3. Participação e cooperação no grupo.	Os membros dividiram bem as falas e se ajudaram mutuamente?	Um ou dois integrantes falam por todos.	Participação desigual, mas com cooperação pontual.	Boa divisão de falas e colaboração durante a apresentação.	Participação equilibrada, com forte espírito de equipe e apoio mútuo.
4. Empatia e escuta ativa.	Demonstram respeito ao público e respondem com empatia?	Ignoram perguntas ou reagem com impaciência.	Respondem sem clareza ou com pouca atenção ao outro.	Ouvem com atenção e respondem com respeito.	Respondem com empatia, respeito e valorizam a fala do outro.
5. Argumentação e pensamento crítico.	Apresentam conclusões baseadas em dados e refletem criticamente?	Repetem informações sem interpretar ou justificar.	Fazem generalizações com pouca base nos dados.	Relacionam dados com o problema e argumentam com lógica.	Conectam evidências, interpretam criticamente e propõem reflexões próprias.

Critério	Descrição	Nível 1 (Insuficiente)	Nível 2 (Parcial)	Nível 3 (Adequado)	Nível 4 (Excelente)
Clareza na apresentação da questão geradora.	O relatório apresenta e contextualiza bem a pergunta inicial?	A pergunta não é citada ou está desconectada do tema.	A pergunta é citada, mas pouco articulada ao desenvolvimento.	A pergunta está contextualizada e conecta bem com os dados.	Apresenta a pergunta de forma clara, crítica e contextualizada.
Qualidade da investigação e uso de dados.	A equipe coletou dados relevantes e os analisou com coerência?	Dados ausentes ou superficiais.	Dados presentes, mas com análise limitada.	Dados consistentes e parcialmente analisados.	Dados reais, bem-organizados e analisados com profundidade.
Aplicação de conceitos matemáticos.	Foram aplicados corretamente conceitos geométricos, trigonométrico	Uso mínimo ou incorreto de conteúdos.	Alguns conteúdos usados corretamente.	Aplicação adequada dos conteúdos principais.	Excelente uso dos conceitos, com explicações e justificativas.

	s e financeiros?				
Organização e estrutura do relatório.	O texto está bem-organizado (introdução, desenvolvimento, conclusão)?	Desorganizado e difícil de compreender.	Organização parcial, com alguns erros de estrutura.	Organização satisfatória, linguagem adequada.	Muito bem estruturado, coeso e coerente.
Originalidade, reflexão e protagonismo.	O grupo apresentou ideias próprias, conclusões críticas e envolvimento no processo?	Sem autoria ou apenas reprodução de conteúdo.	Alguma elaboração própria, mas pouco reflexiva.	Mostra envolvimento e interpretação do problema	Demonstra autoria, reflexão crítica e protagonismo investigativo.

3.1 Análise epistemológica e análise preliminar

Como o primeiro passo para a construção de um PEP temos a análise epistemológica ou preliminar. Nesta, visamos avaliar quais saberes estão em jogo, as características gerais dos estudantes e as dificuldades que surgem a partir da própria instituição de ensino. Assim, cabe ao professor que deseja aplicar a sequência refletir sobre suas condições de ensino. Para esta sequência, pensamos, como forma de exemplo, em algumas condições que reflitam o processo da análise epistemológica, elas serão discutidas a seguir.

Para nossa análise exemplificativa, determinamos os saberes que estão em jogo a partir da BNCC, quando ela afirma, na competência 3, que é necessário resolver problemas em diversos contextos, com criação de modelos e análise dos resultados. Além da BNCC, também pensamos na defasagem dos alunos e nas habilidades que podem ser desenvolvidas a partir de uma temática multidisciplinar. Também dialogamos com outros professores da escola e montamos um perfil geral da turma em que a sequência será aplicada, nosso perfil é dado por: alunos que possuem pontos fracos em protagonismo, habilidades de fala e discussão, interpretação de texto, além desses pontos fracos, eles também necessitam de forte recomposição da aprendizagem.

Com relação às dificuldades da escola, penamos que ela traz limitações com relação à estrutura física, por exemplo, a sala de informática tem capacidade para cerca de 10 alunos e muitas vezes é utilizada para reuniões. Nesse sentido, quando pensamos que em média o número de alunos em sala de aula é 40, utilizar tal sala se torna inviável. Também existe uma cobrança com relação aos conteúdos dados e as avaliações devem ocorrer sempre em uma determinada semana, assim surgem limitações com o tempo para a proposta. Além disso, a biblioteca da escola também enfrenta problemas similares à sala de informática, com relação à capacidade e uso.

Portanto, dentro dessas limitações exemplificadas, o melhor a ser feito é o uso de um PEP semiaberto, visto que dessa forma teremos uma predeterminação dos conteúdos a se aprender e quantidade de conteúdo fora do contexto usual da escola se torna reduzida, contribuindo para as dificuldades com tempo e cobranças conteudistas da gestão escolar e, também, tal modalidade ainda cede liberdade para os alunos explorarem contribuindo para o desenvolvimento de diversas habilidades deles.

Dessa maneira, finalizamos a análise epistemológica, o professor deve fazer algo semelhante em seu contexto, a fim de que seu contexto de ensino produza uma reflexão que o permita ter noção dos desafios que ele enfrentará, como também das ferramentas que ele tem à disposição para uso.

O segundo passo para o preparo de um PEP está na análise preliminar, dentro dela o questionamento inicial é de suma importância, dentro da sustentabilidade e geração de energia limpa temos o tema que trata de placas solares, por ser um tema capaz de gerar uma multidisciplinaridade incrível, iniciaremos o nosso percurso com ele.

Uma observação é necessária, em nosso material temos o objetivo de auxiliar o professor na aplicação dessas metodologias, logo, diversas reflexões, ideias e materiais já estão prontas para uso, este trecho é um deles. Vale lembrar que o professor(a) sempre pode complementar o que será visto aqui com suas próprias ideias e percepções.

Dentro deste tema, chegamos, após reflexões, à pergunta inicial: “Qual a relação entre o custo da instalação de placas fotovoltaicas para a geração de energia e os benefícios que ela pode trazer?”. Essa questão instiga uma curiosidade sobre o lado financeiro e funcional das placas, o que normalmente desperta o interesse dos alunos.

Finalizada a escolha da questão inicial, o próximo passo é construir um grafo de possíveis perguntas que os alunos podem fazer sobre o tema. É importante que as questões estejam organizadas pelas suas relações entre si, dessa forma aqui faremos uso de indicies. Dada

a questão inicial, as seguintes perguntas derivadas foram pensadas e organizadas por sua relação com as demais:

0. Qual a relação entre o custo da instalação de placas fotovoltaicas para a geração de energia e os benefícios que ela pode trazer?

1. Quais são os custos iniciais associados à instalação de placas voltaicas?

1.1. Quais são os equipamentos necessários para a instalação?

1.1.1 Quanto custa a compra e instalação dos equipamentos?

1.1.2. Qual é o preço dos painéis solares?

1.1.3. Quais são os custos dos inversores e outros componentes?

1.1.4. Quanto custa a instalação e mão de obra especializada?

1.2. Existem incentivos ou subsídios disponíveis para reduzir os custos iniciais?

1.2.1. Quais programas governamentais estão disponíveis para a energia solar?

1.2.2. Quais são os benefícios fiscais e isenções?

2. Quais são os custos de manutenção e operação das placas voltaicas?

2.1. Qual é a vida útil dos painéis solares e componentes?

2.2. Quais são os custos de manutenção regular e substituição de componentes?

2.2.1. Quanto custa a limpeza e manutenção dos painéis?

2.2.2. Qual é o custo de substituição de componentes, como inversores?

3. Qual é a economia gerada pela redução na conta de energia elétrica?

3.1. Qual é a redução média na conta de energia após a instalação?

3.1.1. Qual é a economia estimada com base no consumo de energia atual?

3.1.2. Qual é o impacto das tarifas de energia nas economias?

3.2. Como a energia excedente pode ser vendida ou compensada na rede?

3.2.1. Quais são as políticas de compensação e venda de energia?

3.2.2. Como funcionam os créditos de energia?

3.3. Vale a pena para quem consome pouca energia elétrica?

4. Qual é o tempo estimado para o retorno do investimento?

4.1. Como calcular o tempo de retorno com base nos custos e economias?

4.1.1. Quais são as variáveis que afetam o tempo de retorno?

4.2. Qual é o impacto de variáveis como eficiência do sistema e clima?

4.2.1. Como a localização geográfica afeta o tempo de retorno?

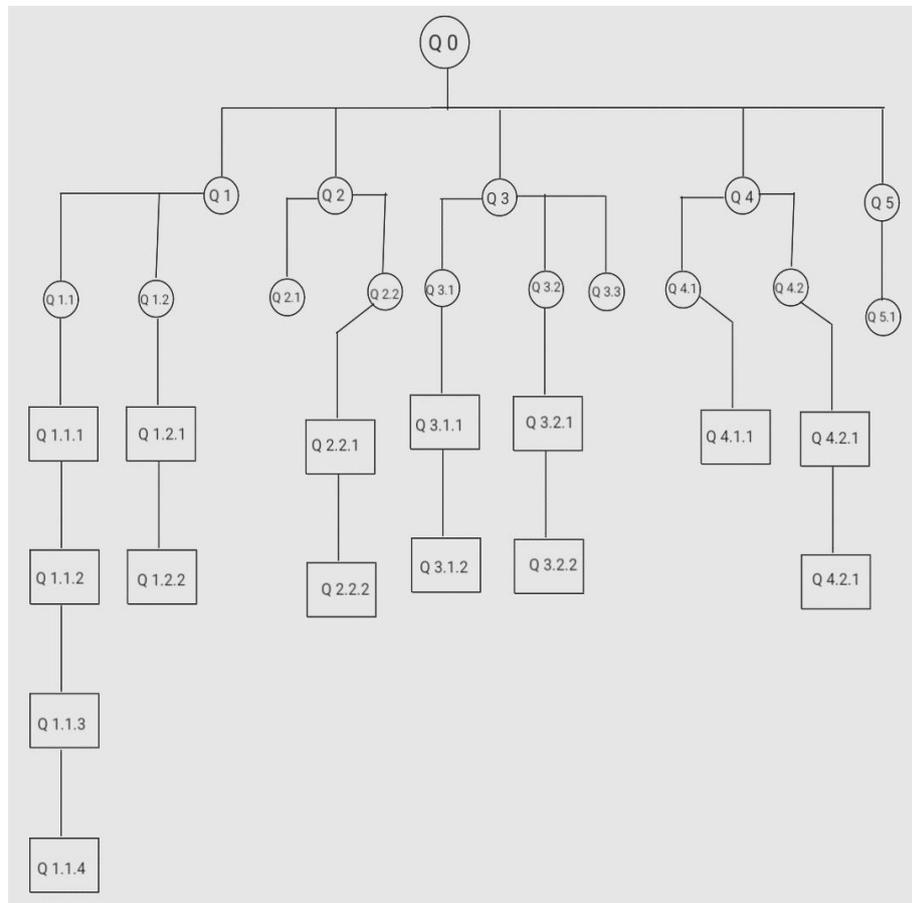
4.2.2. Quais são os efeitos de variações sazonais na geração de energia?

5. Como funciona uma placa de energia solar?

5.1 Como podemos melhorar seu funcionamento para obter maior geração de energia?

É importante que você em conjunto com os alunos também faça uma etapa de construção visual das conexões entre as perguntas, para melhorar a fixação na mente de ambos. Tal construção e análise são feitas na fase de experimentação ou análise *in vivo*. Em formato visual, utilizaremos a seguinte notação “Q” para pergunta seguido de uma numeração que indique sua relação com as demais perguntas, por exemplo, “Q 3.2.2” ou “Q-3.2.2” seria a pergunta 3.2.2 exposta anteriormente. Assim, temos a seguinte figura com as perguntas criadas:

Figura 3 – grafo de perguntas.



Fonte: autor.

Dadas essas questões derivadas, é importante que você tenha conhecimento sobre como os alunos podem respondê-las, quais possíveis respostas e como essas respostas podem se conectar com algum conteúdo Matemático, dessa forma você pode manejar melhor os alunos durante a aplicação e guiá-los parcialmente na direção da solução da resposta inicial. É importante salientar que os alunos normalmente irão utilizar a ferramenta mais prática a

disposição deles para chegar a essa resposta, ou seja, farão uso de pesquisas no Google, livros e materiais didáticos a disposição na biblioteca escolar, portanto o professor deve auxiliá-los para que eles alcancem respostas embasadas e verdadeiras por meio de fontes confiáveis.

A formação das respostas para as perguntas iniciais de cada índice segue usualmente a relação inversa das conexões entre as perguntas, isto é, para responder, por exemplo, a questão Q2 precisamos responder às questões Q 2.1 e Q 2.2 antes e por sua vez, antes das questões Q 2.1 e Q 2.2, precisamos responder às questões Q 2.2.1 e Q 2.2.2. É importante ter sempre a relação entre os questionamentos em atenção, dessa forma garantimos uma certa estrutura para a investigação e assim os alunos se sentem menos perdidos em sua procura pelas respostas.

Você também deve ter uma noção das respostas e como elas devem ser organizadas, chegamos a algumas respostas esperadas ou o caminho que se pode percorrer para alcançar a resposta, são elas:

Resposta 1.1.1: é necessário consultar sites de empresas especializadas no assunto. Em geral, são necessários: painéis solares, inversor solar, suportes, controlador de carga, baterias, cabos e conectores, quadro de distribuição, sistema de aterramento, medidor bidirecional.

Resposta 1.1.2: os preços variam bastante conforme a marca e eficiência.

Resposta 1.1.3: os custos com o inversor dependem do tipo e capacidade. Para outros componentes, como cabos, estruturas de suporte e outros, o preço deles depende da necessidade de onde serão instalados.

Resposta 1.1.4: para determinar esse custo, precisamos saber a complexidade do sistema e o local onde será instalada.

Resposta 1.1: a partir das 3 respostas anteriores, podemos pensar em uma residência comum, ou até mesmo utilizar uma residência dos alunos como referência e, com isso, consultar algumas empresas da região para determinar o custo da compra e instalação.

Resposta 1.2.1: existem alguns programas que podem ser consultados e, com isso, os alunos podem verificar se eles abrangem a região em questão.

Resposta 1.2.2: os alunos podem buscar pela legislação local para descobrir se existem ou não benefícios desse tipo.

Resposta 1.2: dependerá da região em que o projeto for aplicado.

Resposta 1: para a primeira pergunta, notamos que existe uma grande variação nos custos iniciais, dessa forma, cabe neste momento uma atividade que consiste na divisão da turma em grupos, donde cada grupo represente uma residência com condições distintas uma das outras. Dessa forma, o trabalho de cada grupo será construir a resposta ao primeiro questionamento de acordo com a residência do próprio grupo.

Resposta 2.1: a vida útil das placas normalmente gira em torno de 30 anos, os inversores possuem, os inversores normalmente têm vida útil menor, 10 a 15 anos.

Resposta 2.2.1: depende do tamanho do sistema, da frequência da limpeza e do local de instalação.

Resposta 2.2.2: o custo pode variar um pouco dependendo da evolução da tecnologia do componente que precisa ser trocado. Em geral, inversores custam bem mais do que os suportes e o cabeamento.

Resposta 2.2: normalmente, tais custos aumentam conforme o sistema envelhece e peças mais caras como inversores e placas precisam ser trocados. Os alunos podem fazer uma tabela sobre os valores atuais do preço dos componentes envolvidos no processo e, com isso, simular os custos anuais de limpeza e extras (troca de alguma placa, cabeamento, suporte, inversor no ano em questão).

Resposta 2: tal pergunta tem sua solução determinada pela resposta 2.2.

Resposta 3.1.1: depende do tamanho do sistema e do quanto a residência consome em média por mês.

Resposta 3.1.2: quanto maiores as tarifas/ bandeiras de energia, maior tende a ser a economia gerada pelo uso de painéis solares.

Resposta 3.1: para responder a essa pergunta é necessário avaliar o tamanho do sistema, as bandeiras e a capacidade que o sistema tem de gerar energia e o quanto a energia custa.

Resposta 3.2.1: existem normativas que possibilitam a compensação da energia excedente pelo sistema solar, normalmente estas normativas fazem uso do sistema de créditos que têm um prazo para serem utilizados.

Resposta 3.2.2: são uma forma de adquirir saldo extra que pode ser usado para abater o consumo futuro que ultrapasse a capacidade de geração.

Resposta 3.2: em geral, a energia em excesso é injetada na rede de distribuição e, assim, são gerados saldos que podem ser utilizados para abater o consumo futuro de energia.

Resposta 3.3: é comum não valer a pena para quem apresenta consumo baixo, pois o custo do investimento pode não ser retornado ao longo da vida útil do sistema.

Resposta 3: para determinar o quanto vale a economia gerada precisamos determinar quanto as placas do sistema podem produzir, quanto desta energia é gasta pela residência e quanto o excedente pode valer.

Resposta 4.1.1: tal tempo de retorno depende do custo inicial do sistema, dos custos de manutenção, da economia mensal e se existem ou não incentivos fiscais.

Resposta 4.1: é necessário levar em conta o custo inicial, o custo da manutenção e o saldo da geração mensal média.

Resposta 4.2.1: Quanto maior a tarifa de energia e a incidência solar, menor será o tempo de retorno.

Resposta 4.2.2: Dependendo do quão forte seja a variação do clima na região podem existir momentos de menor geração de forma significativa, contudo isso pode ser compensado pela geração de saldo energético nos momentos favoráveis.

Resposta 4.2: o impacto pode ser benéfico ou não a depender do clima da região, com alguns fatores que podem viabilizar a instalação mesmo em condições fora do ideal.

Resposta 4: neste momento cabe outra atividade aos grupos mencionados na resposta 1, donde cada um que já tem a resposta sobre o custo inicial, irá buscar as informações encontradas nas respostas sobre o custo organizá-las em conjunto do saldo, com relação ao saldo de geração outra atividade que será discutida mais adiante no texto poderá ser utilizada para determinar o saldo.

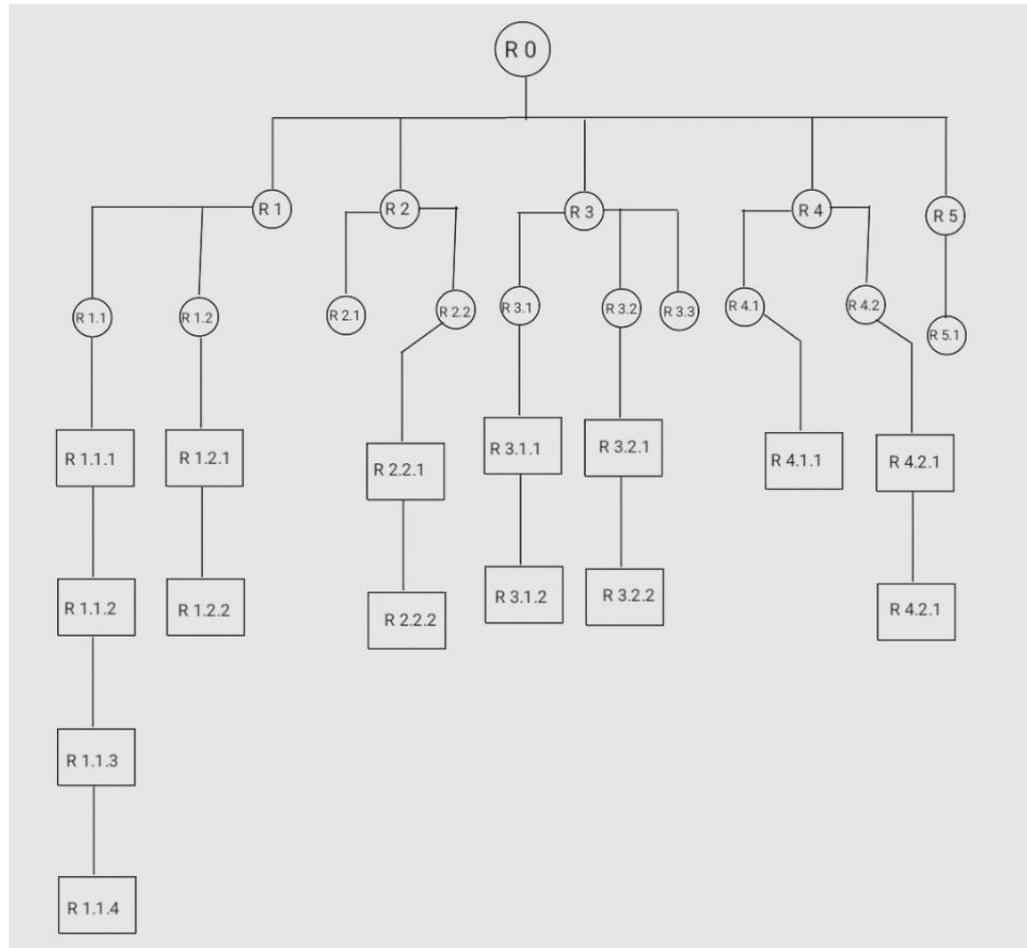
Resposta 5.1: a quantidade de radiação solar recebida afeta a produtividade do painel, quanto mais perpendicular for a incidência da luz sobre a placa, melhor. Dessa forma, precisamos colocar a placa de forma que a luz solar a atinja fazendo um ângulo de 90° .

Resposta 5: um conjunto de módulos capta a radiação solar e converte a energia solar em elétrica por meio do efeito fotovoltaico.

Resposta 0: será dada por meio do conjunto das atividades futuras presentes nesta dissertação.

Novamente, podemos relacionar as respostas em um grafo para melhorar a visualização e a conexão delas. Segue tal grafo na figura a seguir:

Figura 4 – grafo de respostas.



Fonte: autor.

Dentro do caminho para as respostas é necessário que você esteja atento para as respostas que podem passar por conteúdos de sua disciplina ou de outras. Quando tratamos de matemática, observamos que a construção da resposta 1 pode caminhar pelo conteúdo de área de figuras planas. Além desta, a resposta 5 pode percorrer conteúdos relacionados a ângulos, já a resposta 4 pode envolver matemática básica.

Como os alunos podem apresentar tanto respostas qualitativas quanto quantitativas para os questionamentos, é interessante padronizar os registros dos alunos. Para tal, a seguir, temos a presença de um modelo de tabela que pode ser usado para o registro das respostas quantitativas. Nesse sentido, com relação às repostas qualitativas, sugerimos a confecção de um relatório com seções para cada categoria de perguntas onde os registros de cada resposta podem ser dispostos. Ademais, caso considere relevante, confeccionar os modelos de registro de resposta em conjunto com os alunos também é uma opção.

Nome dos integrantes do grupo				
Imóvel				
Custos	Valor	Incentivos	Valor	
Inversor		Fiscais		
Cabos		Geração		
Conectores				
Placas				
Estrutura				
Mão de obra				
Quadro de distribuição				
Total		Total		

As perguntas e respostas exibidas aqui não representam a totalidade do que pode ser visto em uma sala de aula, nem tampouco a variedade advinda da criatividade de alguns alunos. Elas nos servirão como base para o planejamento e execução das atividades que estão presentes nos próximos tópicos.

3.2 Primeiras aulas e momentos introdutórios

Para a primeira parcela de 50 minutos, ou seja, a primeira aula, é imprescindível apresentar aos alunos o que será feito. Neste caso, precisamos explicar a eles como as próximas aulas irão funcionar, isto é, é preciso comentar com eles sobre a inversão de papéis que irá ocorrer e que eles não poderão ficar passivos para que a metodologia tenha andamento e funcionamento. Ou seja, é preciso contar que eles farão o papel de investigadores a respeito de um tema e que eles precisarão organizar-se em grupos para tal. Caso haja perguntas a respeito, elas devem ser solucionadas.

Também é necessário comentar com os alunos que iremos trabalhar com o tema de placas solares, com isso, é certo que haverá alguma estranheza por parte de alguns. É possível

pensar que eles perguntarão coisas do tipo: “Como assim placas solares?” ou “Mas a aula é de Matemática, como pode isso?”. Neste momento em que eles estão curiosos com a mudança, já temos uma oportunidade para iniciar o percurso de estudo e pesquisa com a nossa questão inicial: “Qual a relação entre o custo da instalação de placas fotovoltaicas para a geração de energia e os benefícios que ela pode trazer?”

Como motivação e contextualização do assunto recomendamos a você que aplique o texto a seguir. Tal texto serve para “quebrar o gelo” e como base para os questionamentos da próxima aula.

Energia Solar e Placas Voltaicas

A energia solar é uma das fontes de energia renovável mais promissoras e sustentáveis disponíveis atualmente. Ela é obtida a partir da luz e do calor emitidos pelo Sol, podendo ser convertida em energia elétrica por meio das chamadas placas solares ou placas fotovoltaicas (também conhecidas como painéis fotovoltaicos). Com a expansão da energia solar e do conhecimento de seus benefícios, a instalação de placas fotovoltaicas tem se tornado o desejo de muitas pessoas que buscam reduzir significativamente os gastos com as contas de luz e trazer mais sustentabilidade para o imóvel.

As placas fotovoltaicas, também conhecidas como painéis solares fotovoltaicos, são os equipamentos mais importantes que compõem os sistemas solares fotovoltaicos conectados à rede (on-grid). A sua função é captar a luz solar e convertê-la em energia elétrica, o que ocorre por meio das células fotovoltaicas, normalmente fabricadas em silício, que integram a sua composição. Assim, por necessitarem da exposição à luz solar para captá-la, as placas fotovoltaicas se encontram expostas no telhado, formando a parte visível do sistema. Cada uma delas é capaz de gerar uma quantidade específica de energia e, ao serem conectadas, podem abastecer todo o consumo elétrico de um imóvel.

Nos dias atuais, há uma grande diversidade de placas solares no mercado nacional, as quais variam de acordo com o material de sua composição – silício, que pode se apresentar de modos distintos, como policristalino, monocristalino e silício-amorfo – e quantidade de células fotovoltaicas. Devido à variedade de modelos, é importante compreender os principais aspectos das placas solares, de forma a adquirir a mais adequada para o seu projeto.

As placas fotovoltaicas mais utilizadas globalmente contam com uma quantidade de células fotovoltaicas que varia de 60 a 72, com potência que pode chegar a 550W. Os painéis das principais fabricantes costumam apresentar 1 metro de largura por 2 metros de comprimento. O peso é variável, podendo partir de 18,20 kg e chegar até 27 kg. A produção de energia elétrica por meio da luz solar, é realizada por cada célula fotovoltaica que compõe a placa solar. Dessa forma, quanto maior a quantidade de células, maior é a potência da placa. Essa conversão da luz solar em energia elétrica se dá a partir de um fenômeno chamado efeito fotovoltaico.

Cada célula fotovoltaica conta com uma cobertura de vidro, uma camada antirefletora, um contato frontal – que possibilita aos elétrons entrarem em circuito –, um condutor – responsável por fazer com que os elétrons completem o circuito – e algumas camadas de

semicondutores. Essa composição permite a ocorrência do efeito fotovoltaico. Basicamente, esse fenômeno é caracterizado pelo surgimento de uma tensão elétrica em um material semicondutor por meio de sua exposição à luz do sol. Assim, esse processo acontece quando as partículas elementares da luz solar – os fótons – atingem a célula e passam a reagir com os átomos de silício, provocando o desprendimento dos elétrons que estão no lado negativo. Após esse momento, um campo elétrico é criado na área de junção, já que os fótons não conseguem passar para o lado negativo e vice-versa. A única possibilidade de trajeto para essas partículas é a fina grade que liga as camadas. Portanto, surge a corrente elétrica que conhecemos como energia solar fotovoltaica.

Existem inúmeras vantagens trazidas pelo uso das placas fotovoltaicas e, portanto, do sistema solar fotovoltaico como um todo. A principal delas é a economia significativa obtida na conta de luz, que pode chegar a uma redução de até 90% do valor, pois o consumidor conseguirá gerar toda a energia necessária no mês, não havendo necessidade de pagar as taxas da distribuidora.

Além disso, conforme estabelecido pela Lei 14.300, que converteu em legislação as regras de geração distribuída elaboradas pela Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) na Resolução Normativa n.º 482, ao instalar um sistema fotovoltaico em algum imóvel e conectá-lo à rede local, o consumidor passa a integrar o sistema de compensação de energia elétrica, sendo capaz de gerar créditos energéticos. Ao produzir a própria energia por meio do uso de placas solares, também é possível contar com incentivos do governo, como a isenção do ICMS (nível estadual) e do PIS e COFINS (federal). Já na esfera municipal, quem produz energia por meio do sistema fotovoltaico pode receber desconto no IPTU por meio de programas de IPTU verde. Outros benefícios garantidos pelo uso de placas fotovoltaicas é a longa vida útil de 25 a 30 anos, além da baixa necessidade de manutenção, que é realizada de maneira periódica e simples.

Fonte: <https://www.portalsolar.com.br/placas-fotovoltaicas>

A partir da leitura do texto e da pergunta inicial (Pergunta 0), reflita e responda:

Pergunta 0: *Qual a relação entre o custo da instalação de placas fotovoltaicas para a geração de energia e os benefícios que ela pode trazer?*

1. **Quais fatores devem ser considerados para responder a essa pergunta?**
 - Liste os elementos que precisam ser analisados.
2. **Que questionamentos surgem a partir dessa investigação?**
 - Que perguntas você precisa responder para chegar a uma conclusão?
3. **Você possui os dados necessários para responder à pergunta?**
 - Caso não tenha, quais dados seriam importantes e onde poderiam ser encontrados?
4. **Quais recursos foram utilizados para buscar as respostas?**
 - Cite materiais, fontes ou ferramentas ou consultados.
5. **Registre o caminho percorrido até a resposta final:**
 Apresente de forma clara as etapas da investigação, os dados coletados e as conclusões obtidas.

Agora entramos na segunda aula, este é o momento em que se deve fazer os alunos refletirem sobre o que é preciso para responder essa pergunta. Nessa segunda aula é necessário

reunir todas as dúvidas, perguntas e sugestões dos alunos e que elas sejam salvas em anotações. É a partir desses registros que serão montados os grafos das perguntas relacionadas à questão inicial e, também, tais registros serão utilizados para os próximos passos e atividades.

Caso veja que existem muitas perguntas e os alunos ainda apresentam sugestões e dúvidas no fim da segunda aula, o tempo para tal atividade pode ser aumentado para uma terceira aula. Além disso, após reunidas as perguntas, é necessário que você realize em seu momento de planejamento a análise delas. Por fim, aqui iremos considerar que não foi necessário tempo extra, para simplificar a indexação das aulas.

Concluídos os registros, a aula 3 irá consistir em nossa primeira atividade com os alunos/professor. Tal atividade será organizar o grafo de perguntas derivadas do nosso PEP. Queremos que os alunos reflitam e categorizem as perguntas de acordo com a semelhança no assunto de que elas tratam e quais perguntas podem nos ajudar a responder outras.

Na quarta aula, ocorrerá a formação dos grupos e a divisão temática das perguntas, assim poderemos reorganizar o grafo de acordo com a semelhança de temas.

Como visto na figura sobre os grafos de resposta, os questionamentos ficarão divididos em 5 categorias. Para a quinta aula, os alunos irão iniciar o processo de investigação dessas 5 categorias. Divididos em 5 grupos (caso existam mais categorias de perguntas, os alunos podem ser divididos em mais grupos), cada grupo irá ser o responsável por investigar e tentar solucionar, ou teorizar como pode ser solucionado as perguntas presentes na categoria um com o objetivo de montar uma apresentação sobre essa categoria, vale ressaltar que os alunos podem tentar responder todas as perguntas nesta aula, a escolha da categoria é apenas para dar um norte a cada grupo. Para tal, eles podem utilizar quaisquer meios disponíveis, sejam livros, pesquisas na internet (no computador da escola ou em seu próprio telefone). Para a sexta e sétima aula, os alunos podem continuar a pesquisa, contudo, na parcela final da aula, instruímos os alunos a prepararem uma apresentação para a próxima aula sobre o que eles encontraram como resposta da categoria um.

Para a oitava aula, temos a apresentação das repostas da categoria um (Q-1 e suas perguntas derivadas). Conforme os alunos avancem em sua explicação, será possível perceber que uma resposta exata para a primeira pergunta (Q-1) é difícil de se formular, pois existem muitas condições que podem influenciar na capacidade de geração elétrica da casa. A partir daí, o professor irá propor uma atividade para melhor compreensão a respeito desse fato que será feita na nona aula, ela está disponível a seguir.

3.2.1 Atividade: analisando telhados e o custo

Com esta atividade, temos como objetivos chegar a um meio para se responder à pergunta Q-1 de forma geral, além de que os alunos possam aprender sobre áreas de figuras planas durante este processo. Para tal, iremos modelar, em conjunto com os alunos, o custo em função da área que o telhado possui. Com o propósito de atingir esses objetivos, seguimos a linha de modelagem do caso 3 pensada por Barbosa (2001).

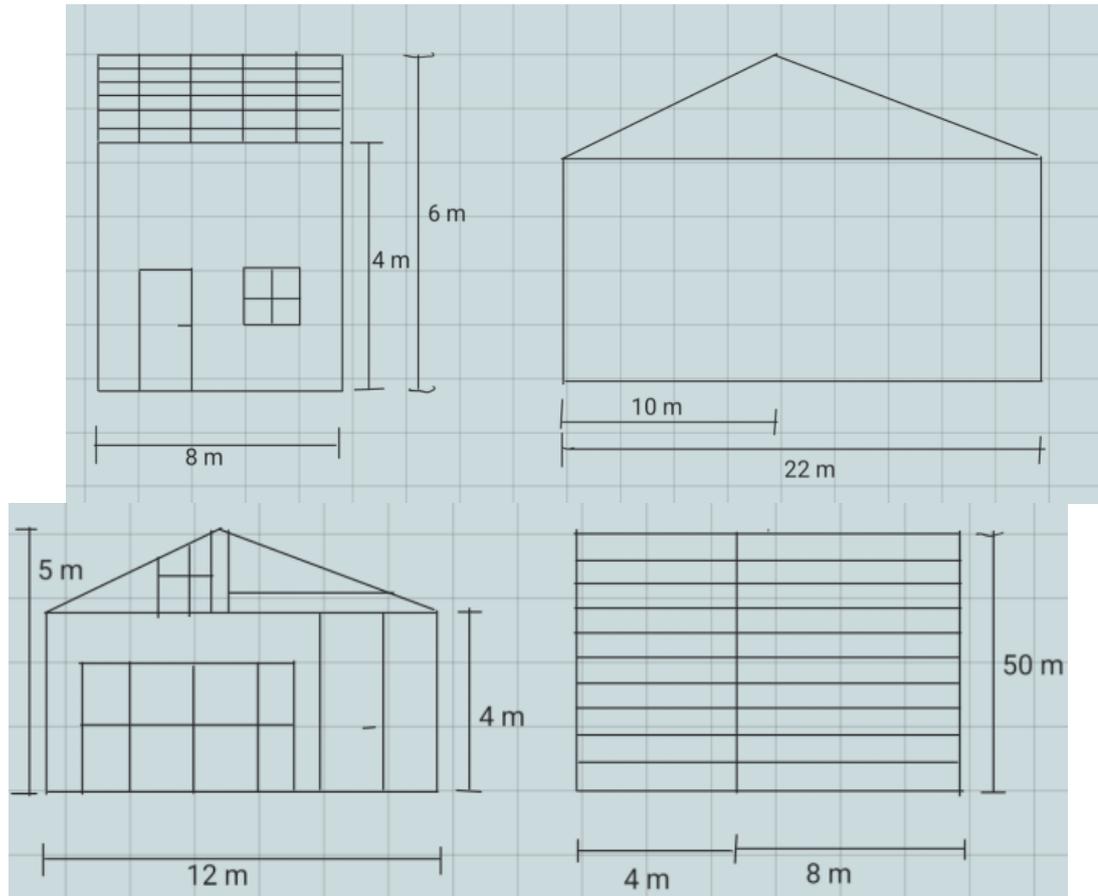
Em detalhes, temos que a criação do problema já surgiu anteriormente na tentativa de dar uma resposta mais completa e específica para Q-1. Nesta atividade, tratamos da simplificação do problema a partir da utilização de imóveis fictícios para a análise do custo em função da área. Tais imóveis farão parte da coleta de dados feita pelos alunos/professor. Além disso, com relação à etapa de pesquisa, é necessário buscar por painéis solares e seu custo, como também, a forma de se calcular a área dos telhados. Por fim, a solução é dada quando chegamos a uma forma de relacionar essas variáveis (área e custo) e calculamos o valor. Ademais, é necessário também entender que tal processo não é limitado para os imóveis fictícios em questão. Assim, propomos que a atividade possa ser percorrida da maneira que ela será apresentada a seguir.

O espaço que a pessoa apresenta para instalar suas placas é um fator capaz de influenciar amplamente a capacidade de geração elétrica que a residência irá possuir e os custos com placas. Esta atividade pretende relacionar tais fatos com os conteúdos de áreas de figuras.

Inicialmente, a seguinte situação problema será apresentada:

Observe as seguintes casas e seus telhados:

Figura 5 – vista frontal e lateral da primeira casa e vista frontal e superior da segunda.



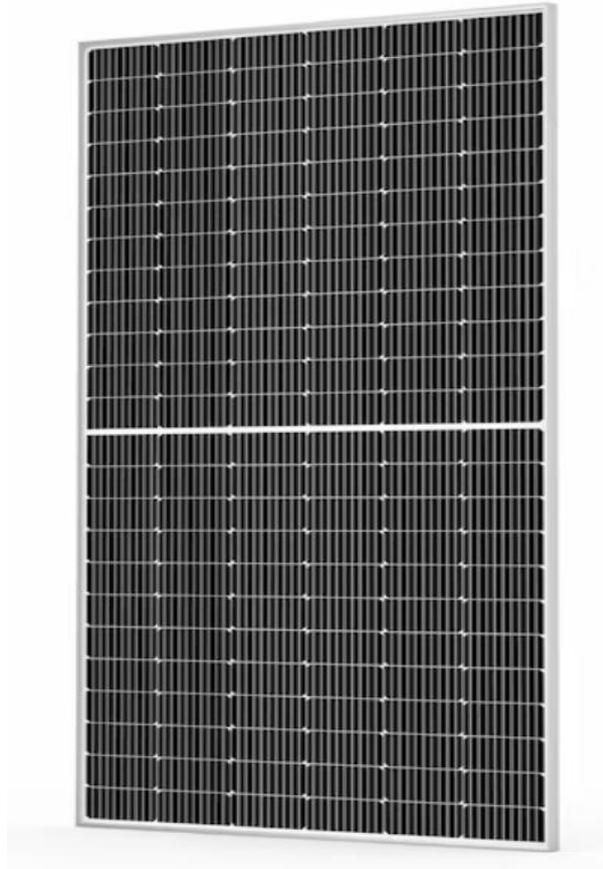
Fonte: autor.

Qual das casas apresenta um maior custo de instalação das placas solares?

Quanto é o custo de instalação das placas em cada casa?

Se forem utilizadas placas do modelo a seguir, feitas de silício policristalino, temos um custo de 399 por placa segundo dados da NeoSolar (2024). Para critérios de simulação de instalação é possível utilizar a área da placa como sendo 2 m^2 .

Figura 6 – painel solar policristalino.



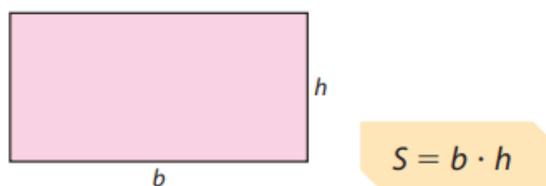
Fonte: Freepik, 2025.

É fácil responder à primeira pergunta, a casa que apresentar o maior telhado também apresentará um custo maior, pois mais placas serão usadas no processo. Para a segunda pergunta, precisamos determinar o quanto de espaço disponível pode ser usado para a instalação das placas.

Visto que as placas são planas e ficarão sobre o telhado, essa quantidade de espaço disponível pode ser dada a partir do conceito de área. Dessa forma, iniciamos a descrever o conceito da área de polígonos. A área de uma figura plana é uma medida da superfície de uma figura, para seu cálculo é necessário utilizar algumas fórmulas específicas por figuras.

Em nosso exemplo inicial temos a presença de retângulos, dessa forma, é necessário revisarmos sua fórmula, que é dada por:

Figura 7 - área do quadrado.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

Assim podemos ver que a quantidade de espaço disponível na primeira casa pode ser encontrada através da largura e comprimento do telhado. Dessa forma, temos que a largura do telhado é de 8 metros, mas o comprimento do trecho de subida e do trecho de descida são diferentes e podem ser encontradas a partir de Pitágoras. Daí temos que os comprimentos são:

$$c_s^2 = 10^2 + 2^2 = 104 \quad c_s = \sqrt{104} \cong 10,2$$

$$c_d^2 = 12^2 + 2^2 = 148 \quad c_d = \sqrt{148} \cong 12,2$$

Portanto, a área do primeiro telhado é dada por:

$$S = 8 \times 10,2 + 8 \times 12,2 = 179,2$$

O que totaliza 89 placas de 2 m^2 .

Já na segunda casa, temos um comprimento de 50 metros em ambas as partes de subida e descida do telhado. Para as larguras também podemos utilizar Pitágoras, da seguinte forma:

$$l_s^2 = 4^2 + 1^2 = 17 \quad l_s = \sqrt{17} \cong 4,1 \quad l_d^2 = 8^2 + 1^2 = 65 \quad l_d = \sqrt{65} \cong 8,1$$

Assim, a área do telhado é dada por:

$$S = 50 \times 4,1 + 50 \times 8,1 = 610$$

Portanto, são necessárias 305 placas de 2 m^2 para cobrir esse telhado.

Dessa forma, o custo para cobrir o telhado da primeira casa com o máximo de placas possível é dado por:

$$T_1 = 89 \times 399 = 35511$$

Para a segunda casa:

$$T_2 = 305 \times 399 = 121695$$

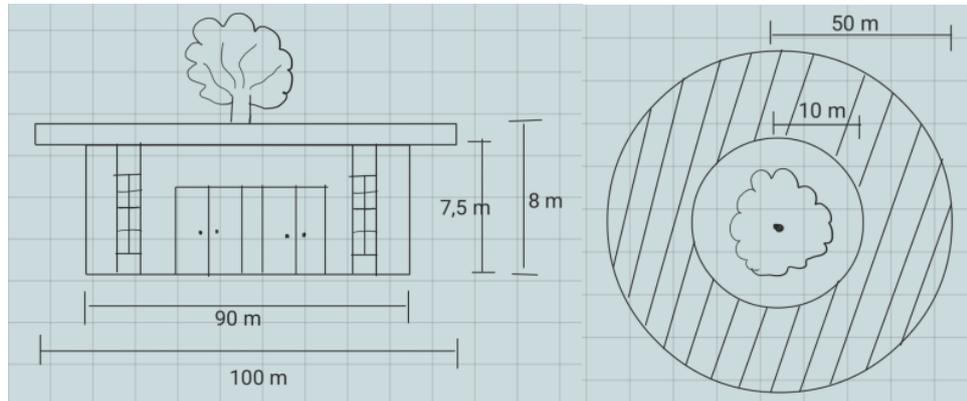
Portanto, a casa 2 é a que apresenta o maior custo.

Finalizado tal momento introdutório da atividade apresentamos em sequência uma lista de imóveis hipotéticos em que cada grupo ficará responsável por responder os questionamentos do PEP com base neles, incluindo a pergunta Q-1 que trata dos custos, dessa vez com dados mais concretos presentes na lista de imóveis. Inicialmente, os alunos podem apresentar como custo o valor bruto das placas solares, contudo, conforme mais perguntas vão sendo respondidas, a complexidade do que gera o custo aumenta e eles devem atualizar tal valor de acordo. A seguir apresentamos algumas imagens dos imóveis fictícios, a descrição e dados.

Imóvel 1: abaixo temos a visão de frente e por cima da planta de um futuro museu, localizado no nordeste do Brasil. Tal planta dará à luz um museu que tenta integrar tecnologia e natureza, as exposições disponíveis para o público serão dadas a partir de obras que borrrão a

separação entre o natural e o feito pelo homem. Assim, uma das preocupações dos idealizadores é a própria geração de energia, o consumo estimado das obras gira em torno de 5000 kWh mensais.

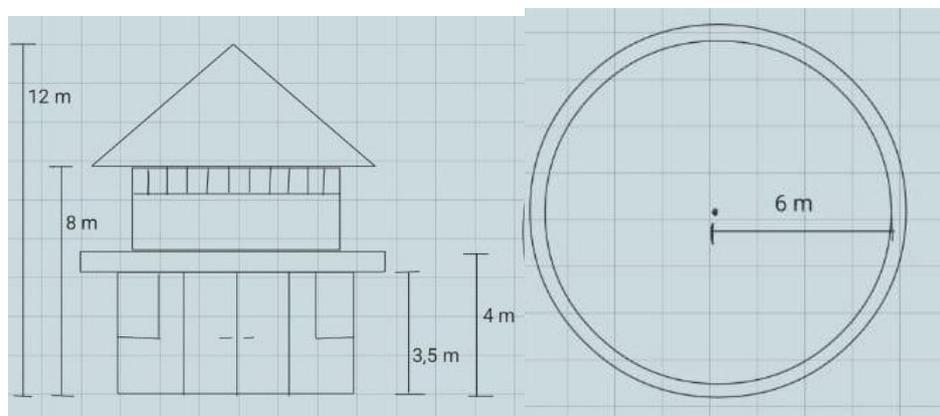
Figura 8 – imóvel 1.



Fonte: construído pelo autor.

Imóvel 2: o setor hospitaleiro e de turismo segue buscando por novas formas de atrair mais clientes e, assim, aumentar seus ganhos. Uma recente modalidade de turismo no Sudeste visa conectar mais as pessoas a natureza através do aluguel de chalés localizados em regiões rurais. Em algumas localidades, para o corte de custos, é necessário que os chalés possuam geração própria de energia, além do armazenamento, com a capacidade para suprir cerca de 400 kWh por mês de geração. Abaixo temos a vista frontal e superior de um projeto a ser construído.

Figura 9 – imóvel 2.

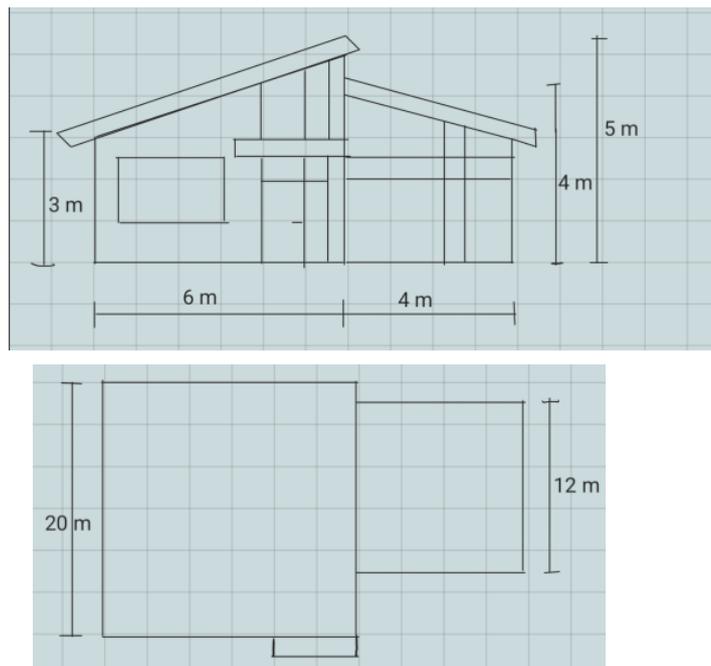


Fonte: consido pelo autor.

Imóvel 3: este imóvel está localizado em um condomínio do sul do país projetado com foco na sustentabilidade ambiental e na economia de recursos. Com design moderno e

funcional, o espaço oferece conforto e eficiência para moradores preocupados com o impacto ambiental. Com base no projeto sustentável e no uso de energia solar, os gastos com eletricidade podem ser reduzidos em até 70%. A previsão média mensal é de 300 kWh dependendo do uso de equipamentos elétricos como ar-condicionado e eletrodomésticos de maior consumo. A seguir temos o projeto com vista frontal e superior.

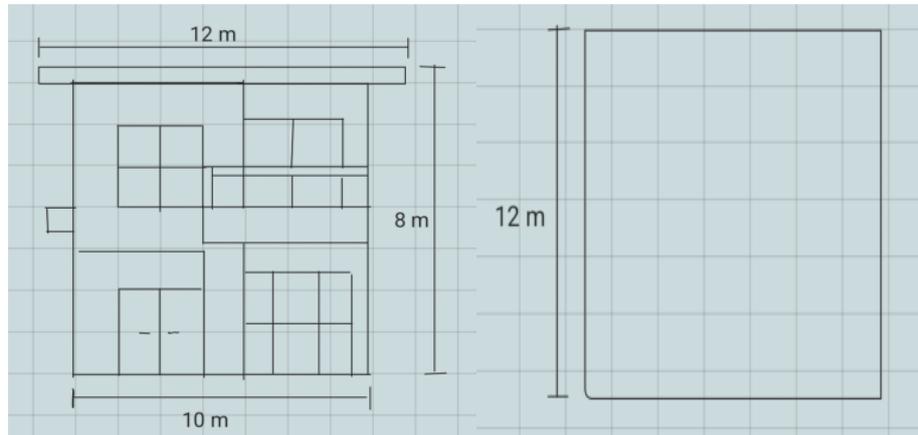
Figura 10 – imóvel 3.



Fonte: construído pelo autor.

Imóvel 4: esta casa térrea foi projetada com foco em sustentabilidade ambiental e eficiência energética, proporcionando um ambiente acolhedor e ecologicamente responsável. Com arquitetura contemporânea e soluções inteligentes, ela é ideal para quem busca conforto alinhado com a preservação ambiental e a otimização do terreno externo. Graças ao uso de energia solar e iluminação eficiente, os gastos mensais com eletricidade podem ser significativamente reduzidos, tendo em vista que o consumo médio para uma residência do tipo gira em torno de 450 kWh. Abaixo temos a planta para visualização com vista frontal e superior.

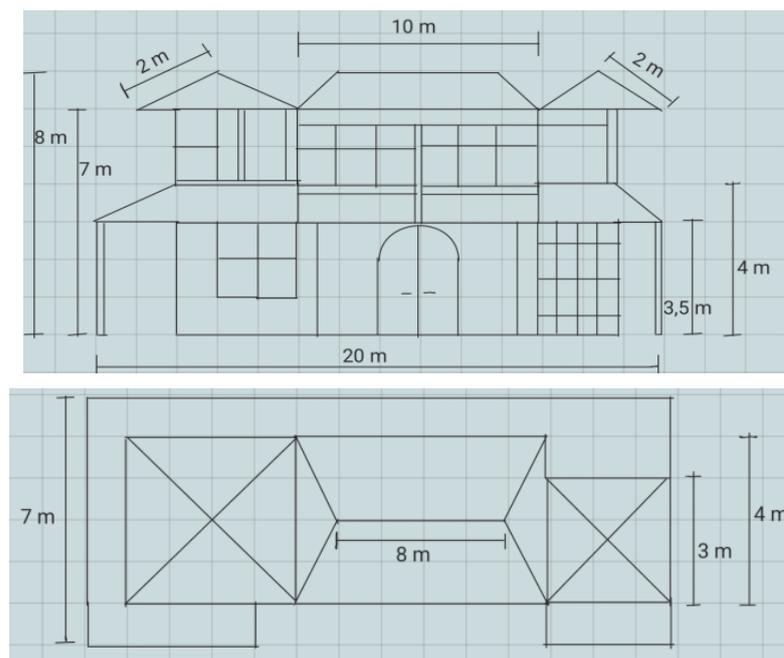
Figura 11 – imóvel 4.



Fonte: construído pelo autor.

Imóvel 5: uma casa única e inspiradora, projetada no estilo oriental clássico, perfeita para locação em produções audiovisuais, como filmes, séries, clipes musicais e comerciais, ela está situada na Califórnia. A arquitetura autêntica e os detalhes minuciosos proporcionam um cenário rico em cultura, beleza e atmosfera zen. A casa está disponível para locação diária ou semanal, com pacotes personalizados para diferentes produções. A atmosfera rica em cultura oriental garante um cenário único, perfeito para narrativas autênticas ou composições visuais impactantes. Ela conta com geração própria de energia, via placas solares, visando suprir as necessidades mensais estimadas em 2000 kWh devido ao alto consumo elétrico dos equipamentos de gravação. A seguir temos a vista frontal e superior da mesma.

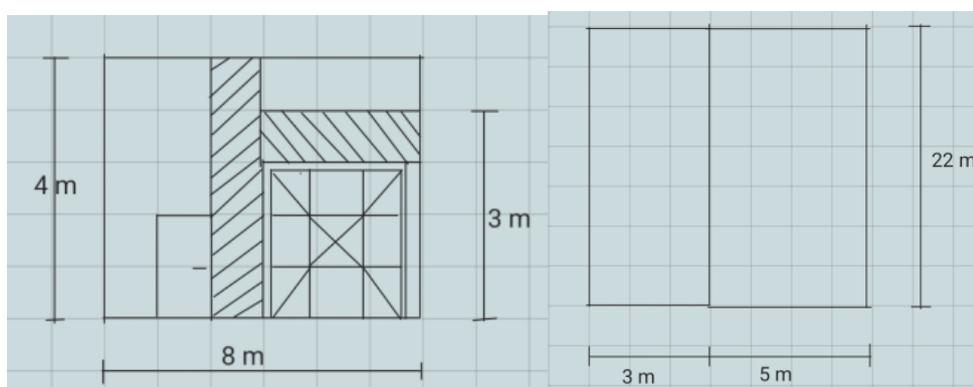
Figura 12 – imóvel 5.



Fonte: construído pelo autor.

Imóvel 6: esta casa térrea combina elementos clássicos da arquitetura brasileira com o charme do telhado invertido, oferecendo um estilo diferenciado e moderno. Ideal para quem busca um lar espaçoso e funcional, localizada em um bairro residencial de Sergipe. Essa casa não inclui características de sustentabilidade, mas entrega o conforto necessário para famílias ou uso como escritório ou espaço comercial. O telhado invertido agrega um diferencial visual ao imóvel, que combina o tradicional com um toque moderno. O suficiente para abrigar móveis e eletrodomésticos que geram um consumo médio mensal de 150 kWh.

Figura 13 – imóvel 6.



Fonte: construído pelo autor.

É recomendado que você imprima e faça um sorteio de um imóvel por grupo para dinamizar mais as interações. Com o intuito de pensar nos diversos formatos de superfícies para a instalação das placas é necessário complementar o estudo fazendo uma visita às obras a respeito de áreas de figuras. Dessa maneira, saímos da nossa atividade e partimos para a décima aula, agora motivados ao compreender a utilidade do assunto, para um estudo da teoria, apresentado na seção a seguir.

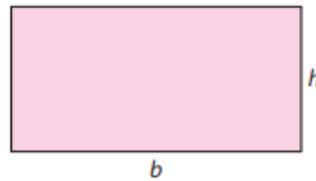
3.2.2 Teoria: Formalizando e conhecendo mais sobre áreas de figuras

Neste momento, buscamos ampliar a visão sobre áreas de figuras aprendendo mais sobre outras figuras e propriedades delas. Anteriormente, revisitamos a fórmula para o cálculo da área de um retângulo, agora, desejamos retomar formalmente esse conceito, ao mesmo tempo que ampliamos a teoria para várias outras figuras e justificamos formalmente alguns casos.

No dia a dia as áreas que precisamos determinar nem sempre são polígonos perfeitos, contudo, saber como realizar esse cálculo nos ajuda a fazer uma boa aproximação dessas áreas. Listaremos aqui as mais comuns:

- Área do retângulo: A área “S” de um retângulo de lados de medidas b e h é dada pelo produto da medida da base b pela medida da altura h . Ou seja, $S = b * h$.

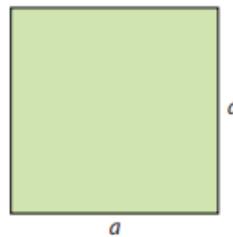
Figura 14 – retângulo.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

- Área do quadrado: todo quadrado é um retângulo com lados de medidas iguais. Logo, a área “S” de um quadrado é igual ao produto das medidas de seus lados.

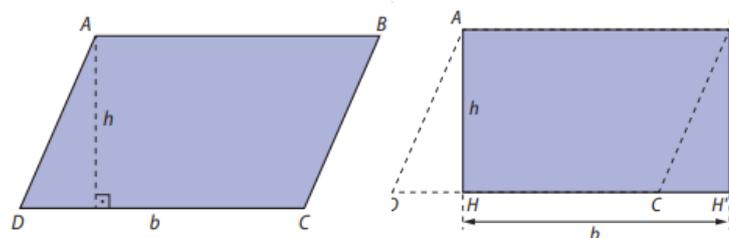
Figura 15 – imagem de um quadrado.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

- Área do paralelogramo: considerando um paralelogramo ABCD, com base de tamanho b e altura h , projetando de maneira ortogonal os vértices A e B sobre a reta CD, obtemos mais dois pontos H e H' que formam um retângulo ABHH'. Como os triângulos AHD e BH'C são semelhantes pelo caso lado, ângulo e ângulo oposto. Assim, eles têm a mesma área. Portanto, a área do paralelogramo é dada pelo produto da base pela altura.

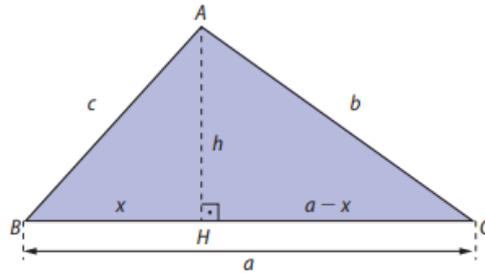
Figura 16 – paralelogramo e sua transformação em retângulo.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

- Área do triângulo: a área “S” do triângulo ABC é igual à metade do produto da medida da base pela altura relativa a essa base. Uma outra forma de calcular é fazendo uso da fórmula de Heron: $S = \sqrt{p * (p - a) * (p - b) * (p - c)}$, donde p é o semiperímetro do triângulo e a, b e c são as medidas de seus lados.

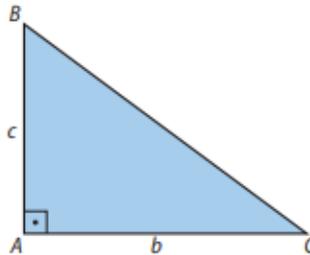
Figura 17 – imagem de um triângulo.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

- Área do triângulo retângulo: sejam as medidas dos catetos dadas por b e c a área do triângulo retângulo é dada por: $S = \frac{b*c}{2}$.

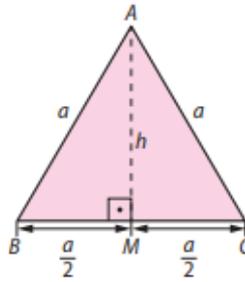
Figura 18 – triângulo retângulo.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

- Área do triângulo equilátero: sendo a a medida de seus lados, sua área “S” é dada por: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

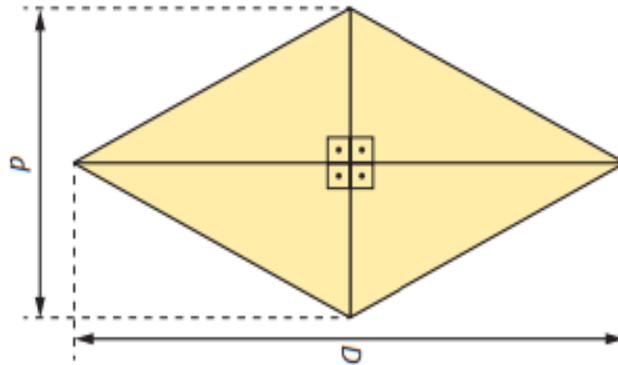
Figura 19 – triângulo equilátero.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

- Área do losango: observe que o losango pode ser partido em quatro triângulos congruentes que apresentam uma mesma área. Assim, sua área “S” é a soma das áreas desses quatro triângulos, isto é: $S = \frac{D*d}{2}$.

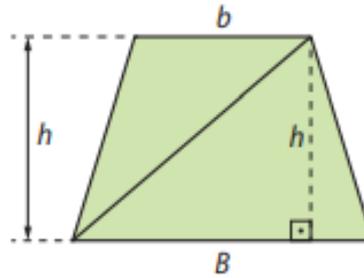
Figura 20 – imagem de um losango.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

- Área do trapézio: vamos considerar um trapézio cujas base maior, base menor e altura medem B , b e h , respectivamente. Traçando uma diagonal nesse trapézio, obtemos dois triângulos: um de base B e altura h e outro de base b e altura h . A área “S” do trapézio é a soma dessas áreas, então: $S = \frac{(B+b)*h}{2}$.

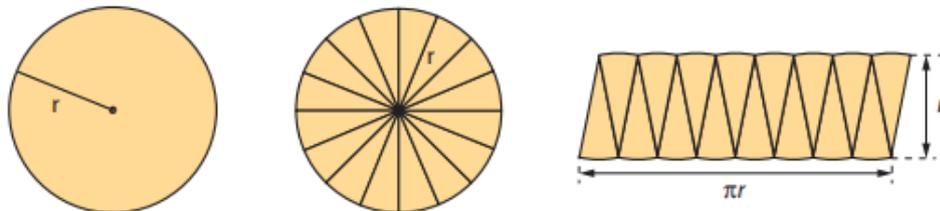
Figura 21 – imagem de um losango.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

- Área do círculo: considerando um círculo de raio r , dividindo-o em um número par de partes iguais, podemos formar uma figura que lembra um paralelogramo. Quanto mais aumentarmos essa quantidade de partes, mais a base se aproxima do comprimento de metade da circunferência. Assim, quanto mais aumentarmos a quantidade de partes, mais a figura se aproxima de um paralelogramo de lados πr e r . Realizando esse processo de forma ilimitada de vezes a área do círculo e a do paralelogramo coincidem, logo, a área do círculo de raio r é dada por $S = \pi r^2$.

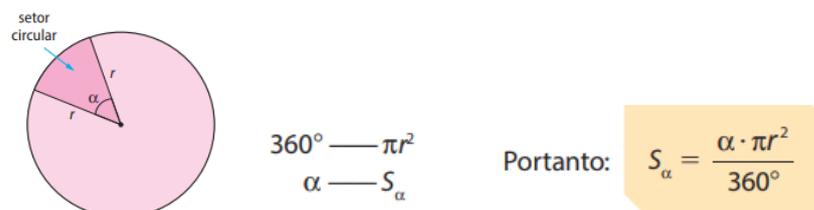
Figura 22 – círculo, seu recorte e reorganização.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

- Área do setor circular: para calcular a área do setor circular basta realizar uma regra de 3 simples a partir do ângulo central α :

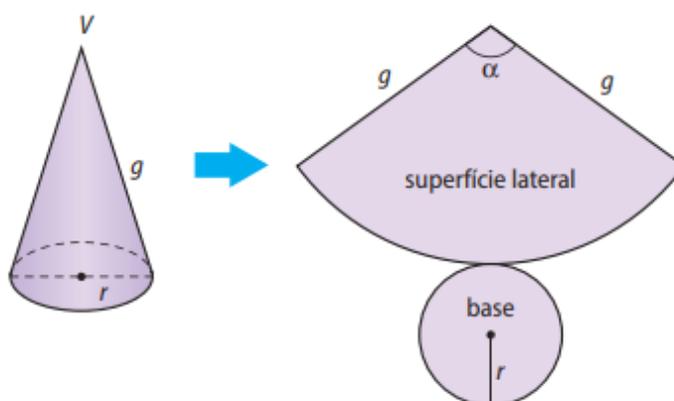
Figura 23 – setor circular e sua fórmula.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

- Área da superfície lateral de um cone reto: planificando a superfície de um cone reto de base r e geratriz g . A área da superfície lateral de um cone corresponde à área de um setor circular de raio g (geratriz do cone) e arco de comprimento $2\pi r$, o qual é o comprimento da circunferência da base do cone. Como a área do setor circular é proporcional ao comprimento do arco correspondente, podemos, dessa forma, determinar sua área, dada por: $S = \pi r g$.

Figura 24 – superfície do cone planificada.

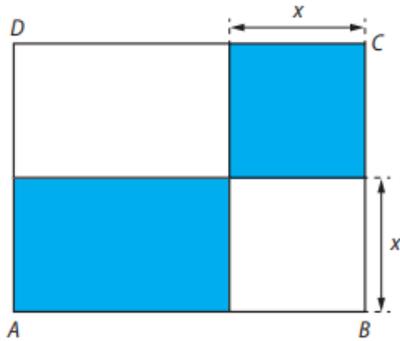


Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

Finalizadas essas explicações, temos uma lista de atividades, encontrada a seguir, com o objetivo de fixar os conceitos e de servir como instrumento avaliativo, é recomendado que a atividade seja realizada de forma individual e que o professor recolha a mesma para uma avaliação qualitativa dos alunos. Tais questões foram retiradas do livro *Prisma matemática: Geometria*.

Lista de exercícios 1

1. Uma parede retangular tem 2,4 m de comprimento por 90 cm de largura. Quantos azulejos quadrados de lado medindo 45 cm são necessários, no mínimo, para cobrir essa parede?
2. Se aumentarmos a medida do lado de um quadrado em 4 cm, sua área será aumentada em 56 cm^2 . Qual é a medida da diagonal do quadrado inicial?
3. Considere o retângulo ABCD a seguir.



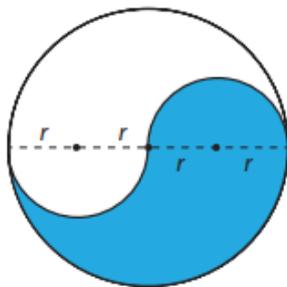
Sabendo que $AB = 27$ cm e $AD = 21$ cm, calcule o valor de x de modo que a soma das áreas dos retângulos em azul seja a maior possível.

4. (Udesc-SC) Maria precisa comprar piso para o seu apartamento cuja planta baixa pode ser vista na figura. Devido aos recortes necessários para a colocação do piso, o mestre de obras solicitou 10% a mais da metragem total do apartamento.

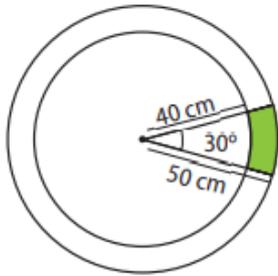


De acordo com as instruções do mestre de obras, Maria deve comprar aproximadamente?

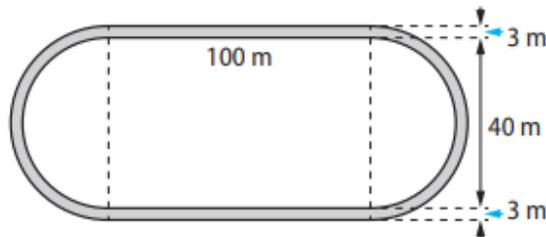
5. Qual é a medida do diâmetro de um círculo de área 100π dm^2 ?
6. Sabendo que $r = 10$ cm, calcule a área da região colorida de azul na figura. (Adote $\pi = 3,14$.)



7. Duas circunferências concêntricas têm raios iguais a 50 cm e 40 cm, conforme indica a figura. Calcule a área destacada em verde.



8. Uma praça é formada por um retângulo de comprimento 100 m e largura 40 m e dois semicírculos com diâmetro coincidindo com o lado menor do retângulo.



Em torno da praça será construída uma calçada de 3 m de largura, cujo preço por metro quadrado é R\$ 50,00. Calcule o custo total desse projeto. (Adote $\pi = 3,14$).

3.3 Momentos intermediários

Com relação a décima primeira aula, os alunos deverão ajustar as respostas da categoria de perguntas um. Após os grupos apresentarem o que eles determinaram como a resposta da pergunta Q-1 e finalizadas as imersões e aprendizados propostos anteriormente, é necessário dar continuidade a resposta das outras categorias de perguntas. Outra categoria que nos permite adentrar em mais outros assuntos é a cinco. A partir dela podemos, de forma interdisciplinar, tratar de ângulos. Portanto, teremos apresentações, na décima segunda aula, na qual os alunos irão tratar da categoria 5.

Como já mencionado, para a resposta da questão Q-5.1, os alunos possivelmente encontraram que as placas, idealmente, devem fazer um ângulo de 90 graus com os raios solares. Contudo, sistemas que fazem um rastreamento da posição solar e ajustam as placas conforme o movimento do sol são mais raros. Dessa forma, o usual é fazer uso de uma medida para o ângulo da placa dada a partir da latitude e do azimute (Freita; Júnior, 2019).

Portanto, para que os alunos consigam responder com propriedade acerca do questionamento Q-5.1 é necessária uma visita a algumas outras obras. Tal visita será feita por meio da interdisciplinariedade na décima terceira aula.

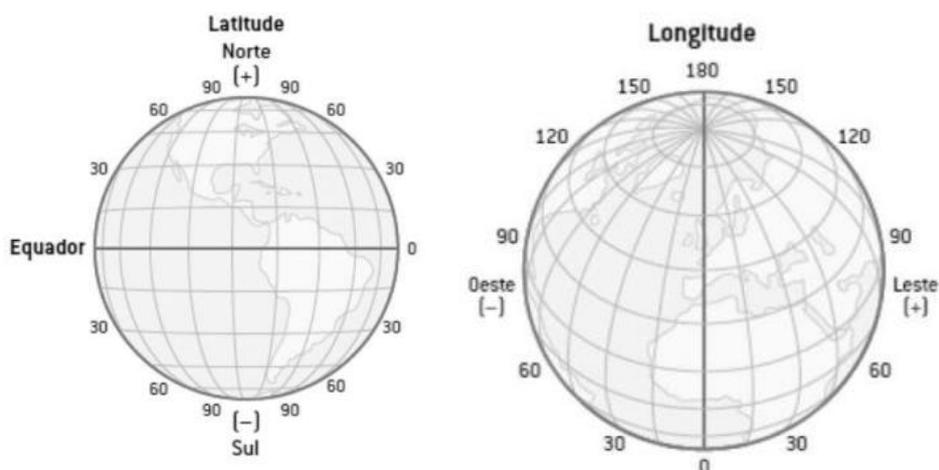
3.3.1 Interdisciplinaridade entre a Matemática e a Geografia.

Nos sistemas de localização são utilizadas linhas imaginárias, linhas essas traçadas para facilitar a localização de elementos e fenômenos na superfície terrestre. O cruzamento dessas linhas horizontais e verticais representam um sistema de localização que mostra com exatidão a posição de um determinado ponto da superfície terrestre. (Sampaio, 2022)

Um dos sistemas de localização mais comuns no planeta faz uso de paralelos e meridianos. Os paralelos são linhas que dão a volta completa na terra no sentido leste – oeste, o principal deles é o equador, além disso, eles também cumprem a função de separar as zonas térmicas. Os meridianos são linhas que cortam o planeta de forma perpendicular aos paralelos, ou seja, são linhas que cortam a Terra no sentido norte – sul, o meridiano de Greenwich é o ponto de referência deles. (Sampaio, 2022)

Cada ponto do cruzamento entre um paralelo e um meridiano é uma coordenada geográfica. A distância entre os paralelos é chamada de latitude e entre os meridianos é chamada de longitude. Sua medida é dada em graus. (Sampaio, 2022).

Figura 25 – latitude e longitude.



Fonte: Geo-logos, 2021.

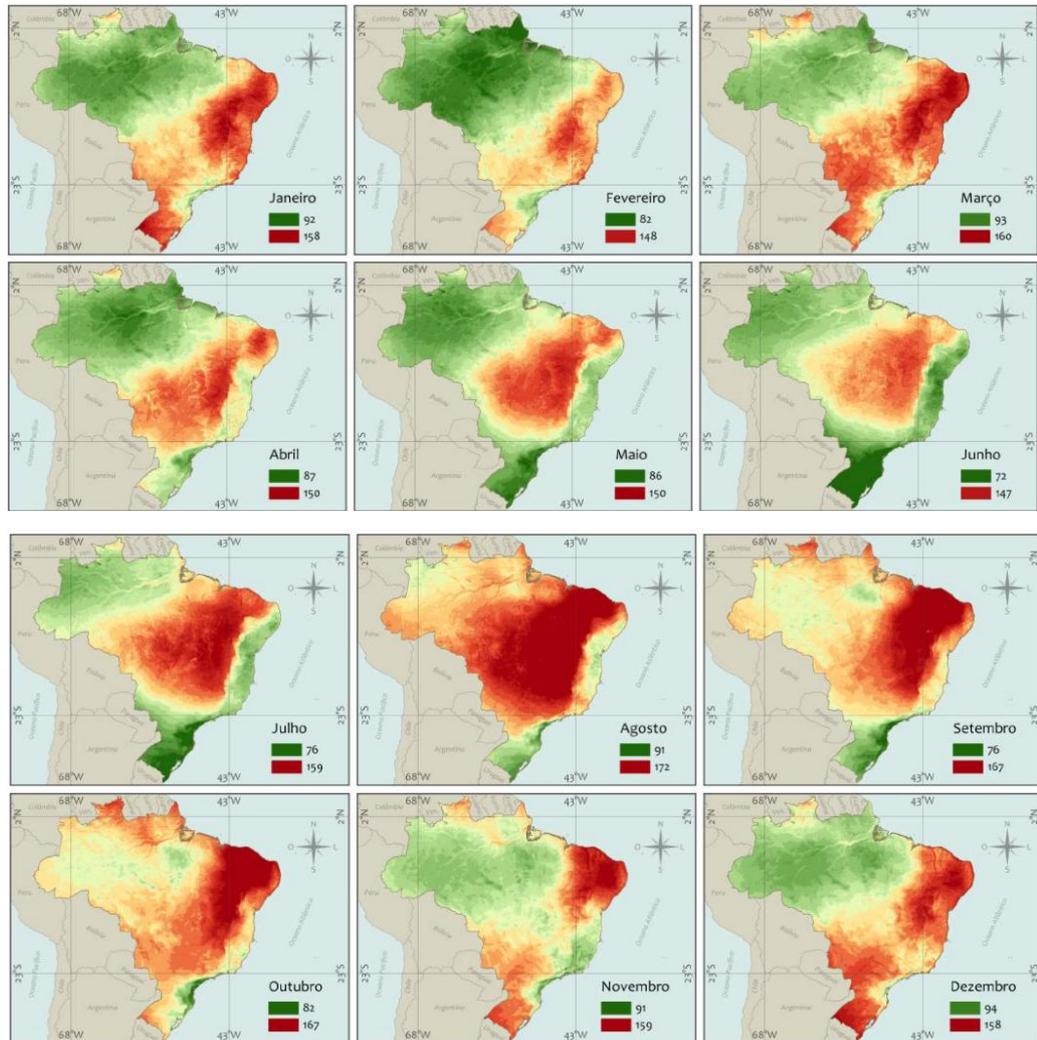
Portanto, podemos observar que a latitude e longitude são apenas as regiões formadas por duas retas. Dessa forma, latitude e longitude são representações de ângulos, já que um ângulo é a região formada a partir de duas retas.

Agora, a partir da latitude e longitude conseguimos encontrar os ângulos em que as placas devem ficar, contudo, a maioria dos telhados não são planos e paralelos ao chão. Portanto, é necessário encontrar uma forma de determinar o ângulo do próprio telhado para que as placas sejam instaladas de forma correta. Para tal processo podemos utilizar alguns conceitos da trigonometria de triângulos.

Outro conceito importante da geografia é a sazonalidade, ele se refere às mudanças cíclicas que ocorrem ao longo do ano, geralmente são previsíveis. Normalmente essas variações possuem um intervalo específico inferior a um ano e afetam muitas coisas como o clima, a vegetação, a agricultura e o turismo. Contudo, temos exceções como os fenômenos: El Niño, aquecimento das águas do Oceano Pacífico e La Niña, correspondente ao resfriamento dessas águas. Tais fenômenos não possuem sazonalidade explícita, mas são cíclicos, isto é, um seguido pelo outro, além disso, eles podem causar impactos no clima do Brasil.

Em nosso caso, a incidência de luz solar é muito importante e é um fator sazonal. O Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) possui um sistema que mapeia o potencial solar mensal de todos os estados do país. A partir desse sistema podemos visualizar os efeitos da sazonalidade na geração solar nas figuras a seguir. Além disso, o site também conta com tabelas sobre a irradiação média mensal de diversas regiões ao longo dos meses, informações essenciais para o cálculo da geração de energia. Tais informações podem ser encontradas em seu site: https://labren.ccst.inpe.br/atlas_2017.html. Por exemplo, em Maceió – AL, acessamos o atlas, escolhemos o estado e o município, encontramos o ID, pesquisamos a partir do ID no site e verificamos que no mês de janeiro a incidência média é de $5376 \frac{Wh}{m^2 \cdot dia}$.

Figura 26 – potencial de geração solar ao longo dos meses.



Fonte: adaptado de Pereira *et al.* (2017).

Após esse momento interdisciplinar, os alunos passarão a ter o entendimento sobre como os ângulos são influenciados pela posição geográfica e como a posição também tem impacto na incidência, além disso, eles também adquiriram uma noção dos impactos da sazonalidade na geração. Essa última, que ainda não foi determinada, e, quando partimos em direção a ela, precisamos saber do ângulo de instalação das placas, portanto mais uma atividade se faz necessária. Atividade que será aplicada na décima quarta aula e está presente a seguir.

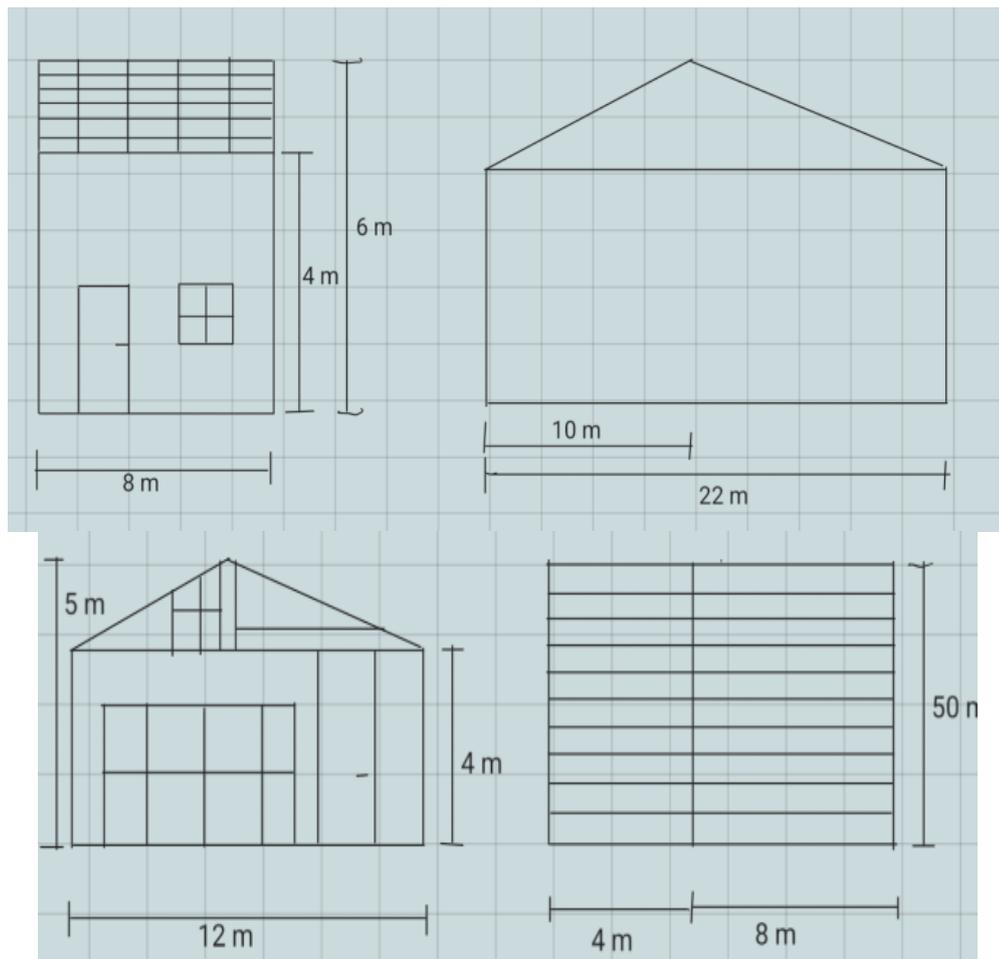
3.3.2 Atividade: relacionando telhados e ângulos

Nesta atividade visamos adquirir e aprender os conhecimentos necessários para determinar o ângulo ideal de instalação das placas, considerando que os telhados das casas

comumente não são paralelos ao chão. Dessa forma, seguiremos fazendo uso das duas casas que foram utilizadas na primeira atividade.

Observando os telhados podemos notar que é a suas inclinações são capazes de gerar uma discrepância com o ângulo ideal para a instalação das placas, dessa forma precisamos encontrar esse ângulo para a correta instalação.

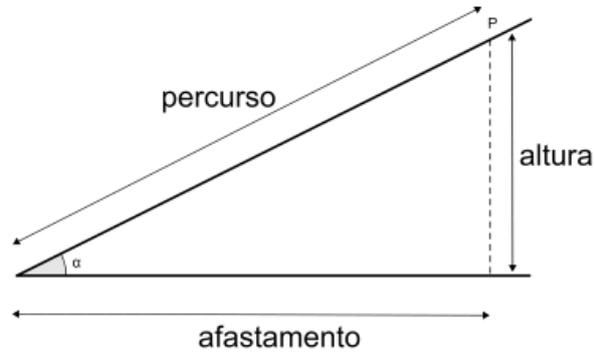
Figura 27 – vista frontal e lateral da primeira casa e vista frontal e superior da segunda.



Fonte: autor.

Observando o telhado lateralmente, podemos compará-lo a um triângulo, como na figura abaixo

Figura 28 – triângulo com associações.



Fonte: Dante (2008).

Visto que se alterarmos individualmente os valores do afastamento, altura e percurso, o ângulo α e, por consequência, seu valor se alteram. Então, a partir desses valores e suas relações entre si podemos determinar o valor do ângulo. Assim, para solucionarmos o problema do ângulo dos telhados, precisamos visitar o conteúdo de trigonometria no triângulo retângulo. Dessa forma, partimos dos conceitos dados a seguir.

A razão entre o afastamento e o percurso é chamada de cosseno do ângulo α .

$$\cos \alpha = \frac{\text{afastamento}}{\text{percurso}}$$

A razão entre a altura e o percurso é chamada de seno do ângulo α .

$$\sin \alpha = \frac{\text{altura}}{\text{percurso}}$$

A razão entre a altura e o afastamento é chamada de tangente do ângulo α .

$$\tan \alpha = \frac{\text{altura}}{\text{afastamento}}$$

Tais razões nos proporcionam um conhecimento do valor do ângulo, muitas delas organizadas em tabelas como abaixo:

Figura 29 – tabela trigonométrica comum.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

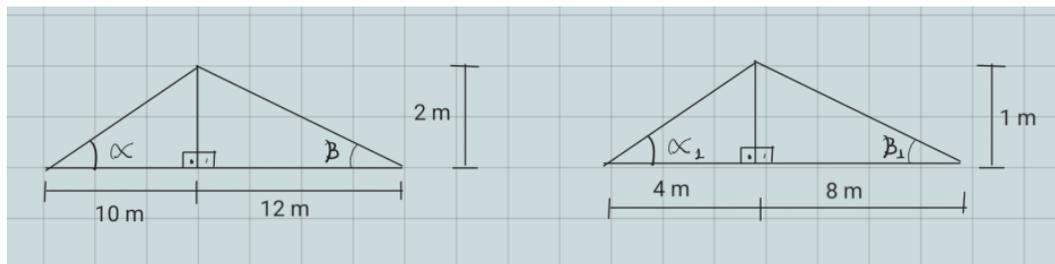
Figura 30 - tabela trigonométrica expandida.

Graus	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Radia nos	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	\exists	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	\exists	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Fonte: Passei direto, 2018.

Dessa forma, os ângulos dos telhados iniciais, apresentados na figura a seguir, são dados da seguinte forma:

Figura 31 – ângulos presentes nos telhados.



Fonte: autor.

$$\tan \alpha = \frac{2}{10} = 0,2 \quad \tan \beta = \frac{2}{12} = 0,16667$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{1}{4} = 0,25 \quad \tan \beta_1 = \frac{1}{8} = 0,125$$

A partir da tabela presente a seguir, temos que os ângulos são: $\alpha = 12^\circ$; $\beta = 10^\circ$; $\alpha_1 = 14^\circ$; $\beta_1 = 7^\circ$.

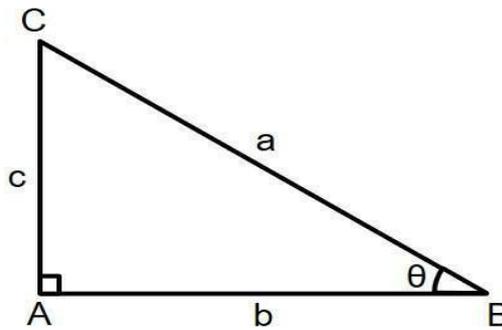
Ângulo	Sen	Cos	Tg	Ângulo	Sen	Cos	Tg
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,682	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,766	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,788	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,327
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,809	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,829	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,225	0,9744	0,2309	58°	0,848	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,515	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,866	0,5	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,804
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,309	0,9511	0,3249	63°	0,891	0,454	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,342	0,9397	0,364	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,246
22°	0,3746	0,9272	0,404	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,342	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,454	0,891	0,5095	72°	0,9511	0,309	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5	0,866	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,515	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,848	0,6249	77°	0,9744	0,225	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,829	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,809	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,788	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,766	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,682	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,29
45°	0,7071	0,7071	1	90°	1	0	-

Novamente, motivados pela aplicação prática dos conteúdos, podemos partir para a formalização e aprofundamento da teoria por trás da prática.

3.3.3 Teoria: formalizando os conceitos de trigonometria a partir dos triângulos retângulos.

Anteriormente tratamos dos conceitos de seno cosseno e tangente de forma simplificada, visando a solução imediata do problema do ângulo dos telhados, contudo, é necessária a formalização teórica desses conceitos. Para tal formalização faremos uso do triângulo retângulo a seguir:

Figura 32 – triângulo retângulo em A.



Fonte: Autor.

Dessa forma,

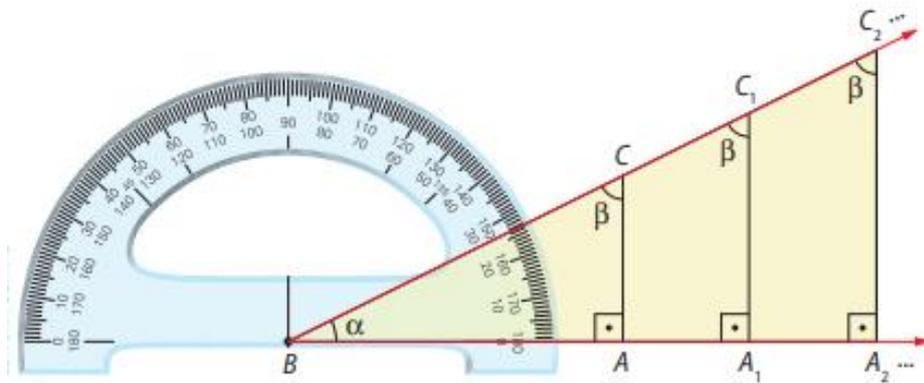
- **a** é a medida da hipotenusa, que é o lado oposto ao ângulo reto;
- **b** e **c** são as medidas dos catetos, que são os segmentos que compõem o ângulo reto;
- \underline{AC} é o cateto oposto ao ângulo θ ;
- \underline{AB} é o cateto adjacente ao ângulo θ .

As razões que verificamos anteriormente dependem apenas da medida do ângulo e não do tamanho dos lados. De fato, sobre uma das semirretas que determina um dos lados do ângulo, tomamos arbitrariamente os pontos A, A_1, A_2, \dots e, por esses pontos, traçamos segmentos perpendiculares ao lado \underline{BA} , que intersectam o outro lado do ângulo nos pontos C, C_1, C_2, \dots , respectivamente. Obtemos, assim, os triângulos retângulos $ABC, A_1BC_1, A_2BC_2, \dots$, que são semelhantes entre si pelo caso AA (ângulo-ângulo).

Portanto, podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \dots = K$$

Figura 33 – representação visual da demonstração anterior.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

Assim, considerando o ângulo α como referência, tal relação é a razão entre o tamanho do cateto oposto ao ângulo α e a medida da hipotenusa, chamada de seno de α ($\text{sen } \alpha$). Portanto, escrevemos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{AC}{BC}$$

De modo análogo podemos relacionar as razões entre a medida dos catetos adjacentes e a hipotenusa para obter o que chamamos de cosseno de α ($\text{cos } \alpha$). E, considerando as razões entre os catetos opostos e adjacentes do ângulo α , obtemos a tangente de α ($\text{tan } \alpha$). Assim, escrevemos:

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{AB}{BC}$$

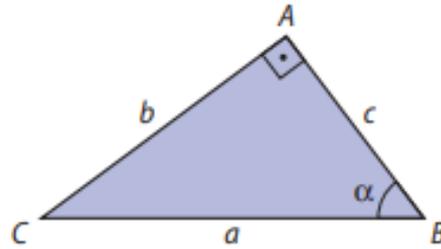
$$\text{tan } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha} = \frac{AC}{AB}$$

Além disso, existem diversas relações envolvendo seno, cosseno e tangente de um ângulo α . A relação fundamental da Trigonometria diz que a soma do quadrado do seno de um ângulo agudo α com o quadrado do cosseno desse mesmo ângulo agudo α é igual a 1, ou seja:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

Demonstração: considere o triângulo retângulo a seguir.

Figura 34 - triângulo retângulo ABC.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

Temos que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{a} \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{b^2}{a^2} \quad \operatorname{cos} \alpha = \frac{c}{a} \rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{c^2}{a^2}$$

Dessa forma, obtemos:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

Visto que o triângulo é retângulo, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Portanto,

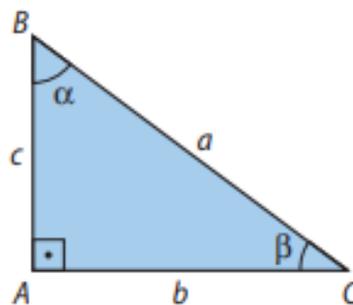
$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Outra relação importante é que o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno de seu complemento, ou seja:

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{cos} (90^\circ - \alpha)$$

Demonstração: Considere o triângulo retângulo da figura a seguir.

Figura 35 – triângulo retângulo ABC reto em A.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

Como $\alpha + \beta = 90^\circ$, obtemos que $\alpha = 90^\circ - \beta$. Logo, temos que:

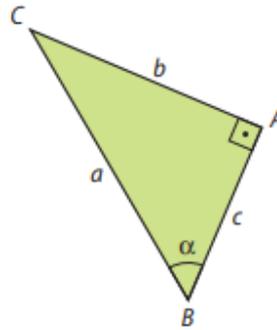
$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{cos} (90^\circ - \alpha)$$

Por fim, a tangente de um ângulo agudo α é igual à razão entre o seno e o cosseno desse mesmo ângulo. Ou seja:

$$\tan \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$$

Demonstração: Tome o triângulo da figura a seguir.

Figura 36 – triângulo retângulo.



Fonte: Bonjorno, José; Giovanni Jr., José; Sousa, Paulo, 2020.

Assim,

$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{a} \quad \text{cos } \alpha = \frac{c}{a}$$

Ao dividir o seno pelo cosseno, obtemos:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \tan \alpha$$

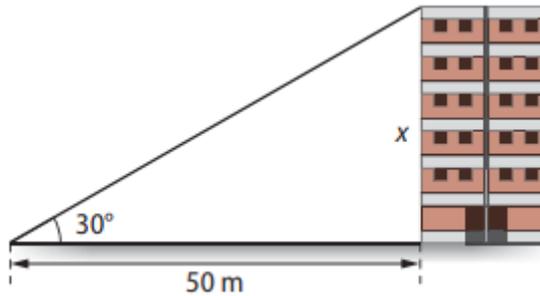
Após a formalização, uma atividade para os alunos é determinar o ângulo do telhado do imóvel do seu grupo e, em conjunto com ele, determinar o ângulo de instalação das placas com relação ao telhado (décima sexta aula), também incluímos outra atividade convencional recortada do livro de trigonometria de Bonjorno, *et al.* (2022). Dessa forma, verificamos e fixamos os conteúdos aprendidos e, ainda, concordamos com Biembengut e Hein (2019), quando eles afirmam que: “Pode-se propor, também, a resolução de exercícios (convencionais, aplicados, demonstrações). Esses exercícios servem como meio de avaliar se os conceitos apresentados foram apreendidos.” (Biembengut; Hein, 2019).

Lista de exercícios 2

1. Considere duas pessoas a 4 km de distância uma da outra, localizadas em dois pontos A e B no solo. A pessoa no ponto A, olhando na direção de B, avistou, segundo um ângulo de 50° (com a horizontal), um helicóptero. No mesmo instante, a pessoa no ponto B, olhando na direção de A, avistou o mesmo helicóptero segundo um ângulo de 45° (com a horizontal).

Aproximadamente, a que altura do solo o helicóptero estava naquele momento? Considere $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{tg} 50^\circ \approx 1,19$.

2. Quando os raios do Sol formam o ângulo de 30° com o plano do chão, obtém-se a medida de 50 m para a sombra de um prédio. Qual é a altura aproximada desse prédio? Dado: $\operatorname{tg} 30^\circ \approx 0,58$.

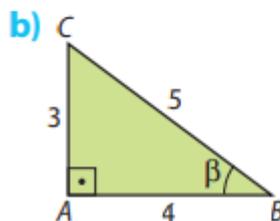
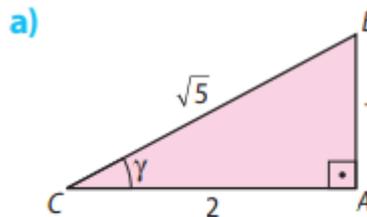


3. (Vunesp-SP) Um ciclista sobe, em linha reta, uma rampa com inclinação de 3 graus a uma velocidade constante de 4 metros por segundo.

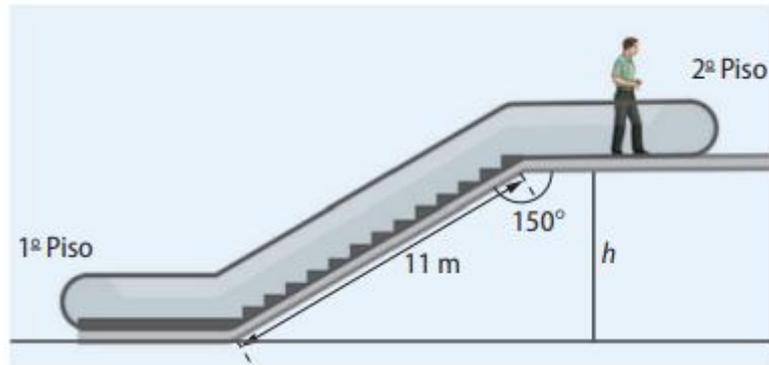


A altura do topo da rampa em relação ao ponto de partida é de 30 m. Use a aproximação $\sin 3^\circ \approx 0,05$ e responda. O tempo, em minutos, que o ciclista levou para percorrer completamente a rampa é?

4. Em cada caso, calcule o seno, o cosseno e a tangente do ângulo agudo destacado.



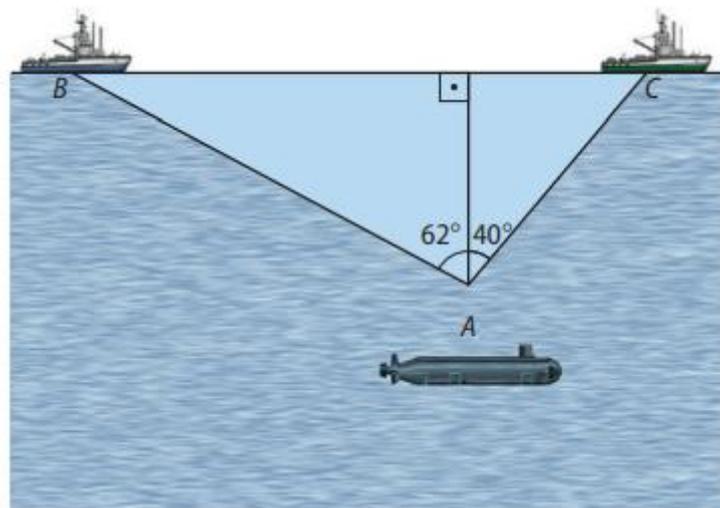
5. Numa estação rodoviária, um homem vai do primeiro piso para o segundo por meio de uma escada rolante, conforme mostra a figura a seguir:



Calcule a altura h , em metro, atingida pelo homem ao chegar ao segundo piso. Considere $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

6. Uma pessoa, ao observar um edifício sob um ângulo de 45° , conseguiu identificar o 20º andar do edifício. Sabendo que essa pessoa estava a 60 m do edifício e que todos os andares têm a mesma altura, calcule a altura de cada andar. Considere $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. Um submarino A, que se encontra a uma profundidade de 400 m no mar, detecta dois barcos B e C na superfície da água sob ângulos de 62° e 40° , respectivamente, medidos entre a direção dos barcos e a direção perpendicular à superfície, como mostra a figura:



Qual é a distância aproximada entre os dois barcos? Considere $\operatorname{tg} 62^\circ \approx 1,9$ e $\operatorname{tg} 40^\circ \approx 0,8$.

3.4 Momentos finais

Com as devidas conexões com outras áreas feitas e as perguntas do PEP respondidas, partimos para uma atividade prévia à resposta da pergunta Q-0. Essa atividade visa

complementar ainda mais o conhecimento acumulado pelos alunos até então e, com isso, dar mais embasamento para a resposta da pergunta inicial. Tal atividade será feita na décima sétima aula.

3.4.1 Atividade: calculando a geração de energia

Para responder às perguntas das categorias 3 e 4 dentro do contexto do imóvel de cada grupo, é necessário determinar o quanto de energia a placa é capaz de gerar. Portanto, os alunos precisam entender sobre os fatores que podem causar impactos negativos na geração de energia.

Um dos fatores necessários para se calcular e entender melhor o custo-benefício dos painéis solares são os fatores de perda da geração de energia solar. Segundo um estudo feito por Kurokawa e Ikki (2001), os principais fatores de perdas de eficiência podem ser:

- Perdas na conversão de energia;
- Sombreamento parcial;
- Perdas nos inversores;
- Mismatch (descasamento de módulos);
- Aumento da temperatura do painel fotovoltaico.

Outros estudos mais recentes são capazes de quantificar os fatores de perda, como podemos observar no trabalho de Jurinic (2020). Tais quantidades de perda podem ser vistas nas tabelas abaixo.

Figura 37 – fatores de perda da geração de energia solar.

Fatores de perdas	Variação	Exemplo	Gerador Fotovoltaico de 1KWp
Sombreamento	0,0 – 5,0 %	2,5 %	$E_{ideal}=1.200KWh$
Sujidade	1,0 – 3,0 %	2,0 %	1.170KWh
Reflexão	3,0 – 5,0 %	4,0 %	1.147KWh
Variação do aspecto AM 1.5	1,0 – 2,0 %	1,5 %	1.101Kwh
Mismatch	0,5 – 2,5 %	1,7 %	1.084Kwh
Condições diferentes dos padrões de teste	4,0 – 9,0 %	6,0 %	1.066Kwh
Perdas c.c.	0,5 – 1,5 %	0,7 %	1.002Kwh
Perdas na conversão de energia	0,5 – 3,0 %	1,5 %	995Kwh
Perdas no inversor	3,0 – 7,5 %	5,0 %	980Kwh
Perdas na fiação elétrica	0,2 – 1,5 %	0,5 %	931Kwh
			$E_{real}=926Kwh$

Fonte: Jurinic, 2020.

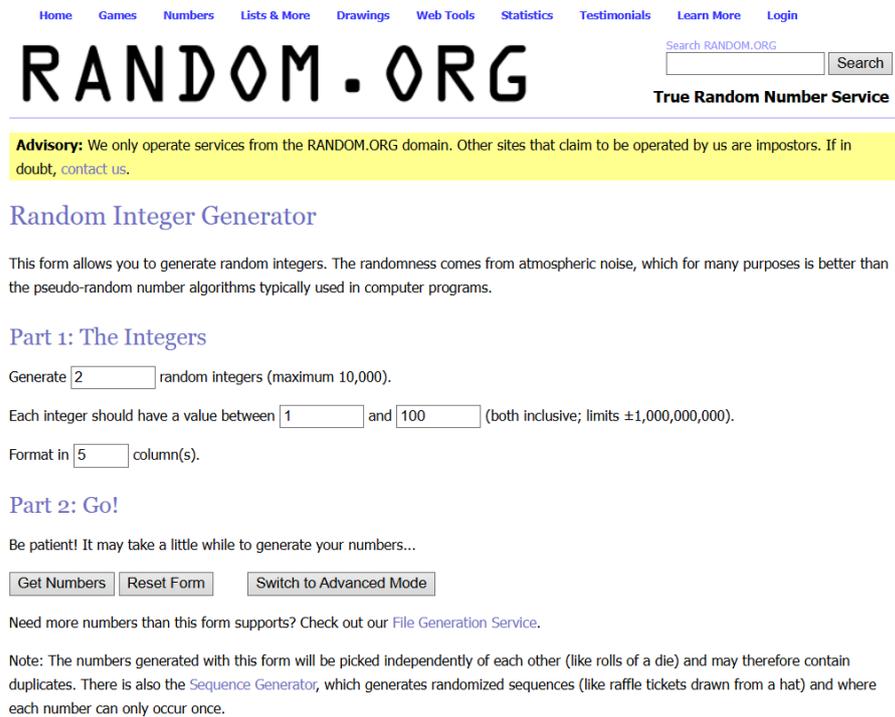
Dessa forma, podemos tornar mais próximo da realidade o cálculo da geração de energia de cada imóvel caso o sistema apresente fatores de perda energética. Assim, neste momento é proposta uma atividade para os grupos calcularem a geração energética ideal de cada imóvel e contrapô-la com a geração real com a presença de perda.

Nesse sentido, para determinar quais serão os fatores que irão influenciar na geração de cada sistema dos diferentes imóveis, será feito a partir de sorteio. Um representante do grupo em um primeiro sorteio irá retirar quais fatores irão influenciar seu imóvel e, em um sorteio a partir de um gerador de números aleatórios, o quanto tais fatores serão influentes.

Os fatores podem ser encontrados na tabela seguinte, quanto ao gerador de números aleatório pode ser utilizado o seguinte: <https://www.random.org/integers/>. Basta configurá-lo conforme a figura abaixo e clicar em “Get Numbers”. Para os demais sorteios basta clicar no botão “Again!” que surgirá após o primeiro sorteio.

Sombreamento
Sujidade
Reflexão
Mismatch
Condições diferentes dos padrões de teste
Perdas por curto-circuito
Perdas na conversão de energia
Perdas no inversor
Perdas na fiação elétrica

Figura 38 – página do gerador de números configurada.



Home Games Numbers Lists & More Drawings Web Tools Statistics Testimonials Learn More Login

RANDOM.ORG

Search RANDOM.ORG Search

True Random Number Service

Advisory: We only operate services from the RANDOM.ORG domain. Other sites that claim to be operated by us are impostors. If in doubt, [contact us](#).

Random Integer Generator

This form allows you to generate random integers. The randomness comes from atmospheric noise, which for many purposes is better than the pseudo-random number algorithms typically used in computer programs.

Part 1: The Integers

Generate random integers (maximum 10,000).

Each integer should have a value between and (both inclusive; limits ±1,000,000,000).

Format in column(s).

Part 2: Go!

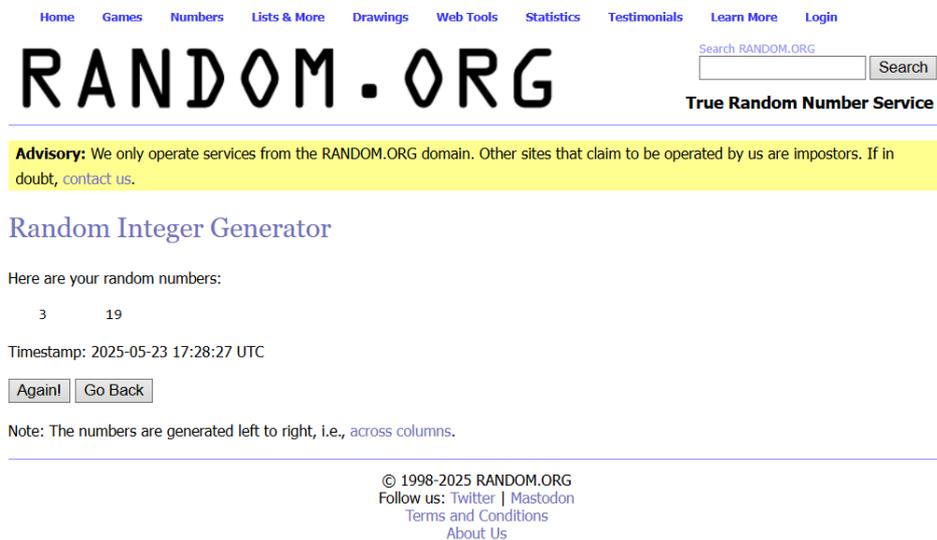
Be patient! It may take a little while to generate your numbers...

Need more numbers than this form supports? Check out our [File Generation Service](#).

Note: The numbers generated with this form will be picked independently of each other (like rolls of a die) and may therefore contain duplicates. There is also the [Sequence Generator](#), which generates randomized sequences (like raffle tickets drawn from a hat) and where each number can only occur once.

Fonte: <https://www.random.org/integers/>

Figura 39 – um possível resultado ao clicar em “Get Numbers”.



Home Games Numbers Lists & More Drawings Web Tools Statistics Testimonials Learn More Login

RANDOM.ORG

Search RANDOM.ORG Search

True Random Number Service

Advisory: We only operate services from the RANDOM.ORG domain. Other sites that claim to be operated by us are impostors. If in doubt, [contact us](#).

Random Integer Generator

Here are your random numbers:

3 19

Timestamp: 2025-05-23 17:28:27 UTC

Note: The numbers are generated left to right, i.e., across columns.

© 1998-2025 RANDOM.ORG
Follow us: [Twitter](#) | [Mastodon](#)
[Terms and Conditions](#)
[About Us](#)

Fonte: <https://www.random.org/integers/>

Na prática, digamos que o representante de um grupo retirou no sorteio os fatores sombreamento e sujidade e, além disso, no sorteador de números, ele tirou os seguintes resultados: 71 e 80, isso significa que o sombreamento terá um impacto de 7,1% na geração de energia e a sujidade 8,0%.

Quando todos os grupos estiverem com seus fatores, é necessário que eles levem em consideração o rendimento das placas, que em média é de 17%, a incidência solar local, quanto de área de placas existe no imóvel e os seus respectivos fatores de perda. Dessa forma, eles irão obter a geração de energia da placa para os seus imóveis e, assim, estarão mais próximos de responder à Q-0.

Durante a aula, os alunos farão o que pode ser visto no exemplo numérico a seguir:

- Área total do telhado 50 m^2 , destes 30 m^2 possuem placas;
- Com um rendimento de 17% e uma irradiância de $5376 \frac{\text{Wh}}{\text{m}^2 \cdot \text{dia}}$ temos uma geração de energia em condições ideais de: $E_i = 0,17 \times 5376 \times 30 = 27417 \frac{\text{Wh}}{\text{dia}}$;
- Com 30 m^2 ocupados por placas de 2 m^2 temos um total de 15 placas;
- Nossas placas só possuem uma potência de 200 W, logo, assumindo 12 horas de luminosidade máxima a energia máxima que pode ser produzida é: $E_m = 200 \times 12 \times 15 = 36000 \frac{\text{Wh}}{\text{dia}}$. Dessa maneira, a geração ideal pode ser alcançada com nossas placas;
- Resultado do sombreamento: $E_{som} = (1 - 0,071) \times 27417 = 25470$
- Resultado da sujidade: $E_{suj} = (1 - 0,08) \times 25470 = 23432$.
- Portanto, temos uma geração de $23,4 \text{ kWh}$ por dia.

Na décima oitava aula, teremos a criação das estimativas de geração de energia por parte dos imóveis do grupo. Com relação a décima nona aula, após a resolução das perguntas das categorias 3 e 4, o professor pode incentivar os alunos a fazerem uma reflexão sobre o dimensionamento do sistema. Para tal, pode haver um debate com os integrantes de cada grupo a partir das reflexões geradas pelas perguntas: o sistema que está sendo instalado é suficiente? Ele está sendo excessivo ou leva em consideração a sazonalidade da irradiância? Ele suporta um aumento no consumo de energia no futuro?

Para a vigésima e vigésima primeira aula, respectivamente, os alunos podem apresentar as estimativas feitas anteriormente e realizar a análise geral do custo de manutenção (perguntas da categoria 2). Ao chegarem na vigésima segunda e terceira os alunos poderão fazer as análises dos benefícios e estimativas de retorno, além da comparação de economia mensal entre os imóveis de cada grupo. Na vigésima quarta aula, os alunos poderão revisitar o percurso, os conteúdos e respostas geradas, isto é, ocorrerá uma espécie de recapitulação do que terá sido feito por eles até então.

3.4.2 Respondendo a Q-0

Após isso, os alunos podem optar por investigar ainda mais com outras perguntas a situação, ou dar a resposta para a Q-0. Caso optem por investigar mais, o professor pode manter a divisão de grupos atual e, durante os próximos encontros, os alunos podem apresentar as respostas das questões derivadas encontradas até que eles se sintam preparados para dar a resposta final à Q-0. Caso contrário, durante a vigésima sexta e vigésima sétima aula, haverá, respectivamente, a construção da resposta final à pergunta inicial e a produção do relatório final em conjunto da preparação da apresentação dele.

Durante o encontro prévio a apresentação resolução da Q-0 é importante ressaltar aos grupos que sua apresentação da resposta para a questão inicial seja feita/personalizada conforme o imóvel cujo grupo estava como responsável nas atividades anteriores. Isto mostra aos alunos como os diferentes fatores causam impactos na busca por soluções e como os modelos se comportam em diferentes situações.

Durante a vigésima sétima aula haverá as apresentações dos grupos sobre a pergunta inicial, finalizadas as apresentações sobre a Q-0, é recomendado ao professor que ele abra um espaço para o feedback dos alunos (vigésima oitava aula), para que eles falem dos pontos que eles gostaram, dos que não gostaram e como eles pensam que o processo feito por todos pode ser melhorado.

3.5 Após o PEP

Após a análise in vivo, isto é, a aplicação do percurso com os alunos, existe a análise a posterior. Durante ela na qual revisamos as questões de pesquisa realizando um contraste com o que foi observado nas experimentações, reformulando hipóteses e concluindo a pesquisa. Nesse sentido, pensando que você está apenas aplicando a metodologia e não está realizando nenhuma produção científica a respeito, recomendamos que as reflexões sejam voltadas para as vantagens e desvantagens das metodologias em questão dentro do seu contexto escolar.

Outras reflexões podem girar em torno da aplicação do método em suas outras turmas, para tal, pode ser pensado: “Quais outras modificações na sequência podem ser feitas para que o uso dela seja facilitado em outras turmas?”, “As perguntas pensadas na análise preliminar foram suficientes para me preparar para as perguntas feitas pelos alunos?”, “Os alunos propuseram alguma outra categoria de perguntas interessante de ser adicionada a sequência para aplicações futuras?”.

Assim, chegamos ao fim da sequência didática. Concluimos dizendo que a abordagem delineada neste produto educacional oferece uma contribuição relevante ao ensino de Matemática, especialmente por propor um ensino crítico, contextualizado e comprometido com os desafios contemporâneos da educação e da sustentabilidade.

4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, J. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. **Reunião anual da ANPED**, v. 24, n. 2001, p. 01-15, 2001.

BASSANEZI, R. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Editora Contexto, 2004.

BENITO, R.; SILVA, M.; BOSCH, M. **Um percurso de estudo e pesquisa para o ensino de cônicas no ensino médio**: condições e restrições que incidem sobre sua implementação. Bolema, Rio Claro (SP), 2022. Disponível em:
<https://www.scielo.br/j/bolema/a/y84c5wGJbPrXsK5p6hrYYGq/?lang=pt>.

BIEMBENGUT, M.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Editora Contexto, 2019.

BONJORNO, J.; GIOVANNI Jr., J.; SOUSA, P. **Prisma matemática**: Geometria e trigonometria. Editora FTD. São Paulo, ed..2020.

BONJORNO, J.; GIOVANNI Jr., J.; SOUSA, P. **Prisma matemática**: Geometria. Editora FTD. São Paulo, ed..2020.

CHEVALLARD, Y. **L'analyse des pratiques enseignantes em Théorie Anthropologic Didactique**. Recherches em Didactiques des Mathématiques, Grenoble, v.19, 1999.

CHEVALLARD, Y. **La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder**; Clermont-Ferrand, 16-23, 2009.

CHEVALLARD, Y. **La matemática en la escuela**: Por una revolución epistemológica y didáctica. Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2013.

DA PONTE, J.; QUARESMA, M. O papel do contexto nas tarefas matemáticas. **Revista Interações**, v. 8, n. 22, 2012.

Freepik. **Painel solar policristalino**. Disponível em: <https://br.freepik.com>. Acesso em 08/02/2025.

Geo-Logos. **Latitude e longitude**. Disponível em: <http://geoweb.geo-logos.com.br/geo-logos/curso%20de%20rotas/GEO%20LOGOS%20-%20MV2%20-%20Latitude%20e%20Longitude%20WGS84%20GGMMSSS.htm> Acesso em: 08/02/2025.

HOFFMANN, J. **Avaliar para promover**: as setas do caminho. Porto Alegre, Editora Mediação, 2001.

JURINIC, F. **Estudo para melhoria na performance e eficiência de placas fotovoltaicas**: através de um sistema combinado de inclinação e resfriamento. Universidade Federal da Fronteira do Sul. Cerro Largo, 2020.

LEÃO, K.; BITTAR, M. Percalços de um percurso de estudo e pesquisa. **Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, p. 1-15, 2024.

NEOSOLAR. **Qual o preço de uma placa solar?** Acesso em: 08/02/2025. Disponível em: <https://www.neosolar.com.br/aprenda/saiba-mais/placa-solar-fotovoltaica/preco-placa-solar-fotovoltaica>

PEREIRA, E.; *et al.* **Atlas brasileiro de energia solar**. 2.ed. São José dos Campos: INPE, 2017. 80p. Disponível em: <http://doi.org/10.34024/978851700089>

SAMPAIO, F. **Geração alpha geografia**. SM educação. São Paulo, 4 ed. 2022.

SANTOS, M.; MENEZES, M. A teoria antropológica do didático: uma releitura sobre a teoria. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 8, n. 18, 2015.

RANDON. **Randon integer generator**. Aceso em: 08/02/2025. Disponível em: <https://www.random.org/integers/> .