Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Metodologia de Ensino de Matemática no Ensino Médio

ISRAEL PEREIRA

ENSINO DO CÁLCULO DE GRANDES ÁREAS COM AUXÍLIO DO TEODOLITO CASEIRO

PARAUAPEBAS/PA
2025

Israel Pereira

Ensino do cálculo de grandes áreas com auxílio do teodolito caseiro

Dissertação apresentada como requisito obrigatório para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará.
Linha de Pesquisa: Metodologia para o Ensino de Matemática no Ensino Médio.
Orientador: Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves.

PARAUAPEBAS/PA
2025

Israel Pereira

Ensino do cálculo de grandes áreas com auxílio do teodolito caseiro

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade do Estado do Pará. Linha de Pesquisa: Metodologia para o Ensino de Matemática no Ensino Médio.
Orientador: Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves.

Data de aprovação:

Banca examinadora

___________________________________. Orientador
Prof. Dr. Fábio José da Costa Alves
Doutor em Geofísica - Universidade Federal do Pará / UFPA
Universidade do Estado do Pará

____________________________________. Examinadora (Interna)
Prof[a]. Dr[a]. Cinthia Cunha Maradei Pereira.
Doutora em Bioinformática – Universidade Federal do Pará / UFPA
Universidade do Estado do Pará

_____________________________________. Examinador (Externo)
Prof. Dr. Fabrício Martins da Costa
Doutor em Engenharia de produção – Universidade Federal de São Carlos / UFSC
Universidade do Estado do Pará

Ao meu pai, Salvador Gomes Pereira

Agradecimento

Ao meu **Deus**, pois sei que todas as coisas são feitas segundo a sua vontade, e sem Ele nada seria possível.

A minha esposa **Robélia Gangá Pereira** que sempre esteve ao lado apoiando – me nessa caminhada. As minha filhas **Yasmim Gangá Pereira** e **Rebeca Gangá Pereira** que me inspiravam a continuar a cada dia.

A toda a equipe de professores do PPGEM/UEPA, pela dedicação em ensinar de forma precisa e com fundamentação prática, obrigado por compartilhar conosco tanto conhecimento.

Ao meu orientador **Prof. Dr. Fábio José da Costa**, que nunca mediu esforços para orientar da melhor maneira possível e por ter conhecimento profundo de causa, foi uma honra ter-lhe como orientador.

Ao meu querido pai **Salvador Gomes Pereira** (*in memoriam*), que sempre teve a certeza de que eu chegaria até aqui, e alçaria voos ainda maiores, obrigado por sua dedicação enquanto estávamos juntos.

Ao casal **Dona Maurila** e **Seu João** que foram fundamentais em minha vida, me dando norte e porto seguro nos momentos mais difíceis.

RESUMO

PEREIRA, Israel. **Ensino do cálculo de grandes áreas com auxílio do teodolito caseiro**. Dissertação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2023.

Apresenta-se nesta dissertação os resultados de uma pesquisa que tem como objetivo investigar as potencialidades da aplicação de uma sequência didática baseada na Modelagem Matemática e a confecção e uso do teodolito caseiro para auxiliar no ensino de cálculo de grandes áreas no Ensino Médio. Foi definido como questão de pesquisa: *Qual a potencialidade da aprendizagem de área, no ensino médio, a partir do uso de um teodolito caseiro?* A pesquisa foi realizada em uma escola pública localizada na zona rural do município de Parauapebas, sudeste do Pará. Os sujeitos foram alunos da 2ª série. Para coleta de dados foram utilizados materiais em áudio e vídeo, além dos materiais escritos produzidos durante a experimentação. A análise dos dados dava-se mediante a produção das atividades propostas, onde os alunos efetuavam as observações e anotações necessárias e a posteriori os dados eram analisados em sala de aula. Para elaboração das atividades presentes na sequência didática, foi utilizada como tendencia da Educação Matemática: Modelagem Matemática. A partir dos resultados coletados e analisados da aplicação do produto educacional (sequência didática), foi possível concluir que o uso do teodolito caseiro tem grande potencialidade para ser explorado como ferramenta didática para o ensino de cálculos de grandes áreas, pois instigou os alunos a mobilizarem conhecimento, além de aguçar o interesse dos mesmos pelo tema. Os resultados considerados têm grande fundamento na forma inovadora da abordagem do objeto matemático por meio do teodolito caseiro. Este trabalho traz implicações positivas para ensino de Matemática pelo seu caráter inovador e funcional, desta forma espera-se que outros professores ou pesquisadores possam fazer uso dessa metodologia inovadora, com forma de ensino de cálculo de grandes ou de forma adaptada com outros tópicos, de acordo com a necessidade.

Palavras-chave: Ensino. Sequência didática. Grandes áreas. Teodolito caseiro.

ABSTRACT

This dissertation presents the results of a research that aims to investigate the potential of applying a didactic sequence based on Mathematical Modeling and the creation and use of a homemade theodolite to assist in teaching calculation of large areas in high school. The research question was defined as: What is the potential for learning the area, in high school, through the use of a homemade theodolite? The research was carried out in a public school located in the rural area of the municipality of Parauapebas, southeast of Pará. The subjects were 2nd grade students. Audio and video materials were used to collect data, in addition to written materials produced during the experiment. Data analysis took place through the production of proposed activities, where students made the necessary observations and notations and subsequently the data were analyzed in the classroom. To prepare the activities present in the didactic sequence, a trend in Mathematics Education was used: Mathematical Modeling. From the results collected and analyzed from the application of the educational product (didactic sequence), it was possible to conclude that the use of the homemade theodolite has great potential to be explored as a didactic tool for teaching large area calculations, as it encouraged students to mobilize knowledge, in addition to sharpening students' interest in the topic. The results considered have great foundation in the innovative way of approaching the mathematical object through the homemade theodolite. This work has positive implications for teaching Mathematics due to its innovative and functional character, so it is hoped that other teachers or researchers can make use of this innovative methodology, teaching major calculus or in an adapted way with other topics, according to the need.

Keywords: Teaching. Didactic sequence. Large areas. Homemade theodolite.

Lista de Ilustrações

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Iniciei minha carreira como professor em paralelo com minha faculdade de Matemática, e após seis meses, iniciei mais uma faculdade, agora de Educação do Campo, na Área de Ciências da Natureza e Matemática. Como professor atuei basicamente em áreas rurais, o que me trouxe muita riqueza em conhecimentos, principalmente dos saberes matemáticos dos trabalhadores rurais.

Essa minha proximidade com os povos do campo, me motivou a pesquisar sobre o ensino de áreas, e nesse contexto de dissertação, pesquisar sobre cálculo de grandes áreas. Quando pensamos em grandes áreas, podemos pensar no lote de terra de um agricultor, que quase sempre lembra uma figura plana de grandes proporções. Neste sentido, tenho um relacionamento muito próximo com o objeto de estudo, por ser professor de Matemática no campo.

O estudo de área de figuras planas é de grande importância para o entendimento do ambiente que nos cerca, além de contribuir "[...] para a apreensão de conceitos não só geométricos como também algébricos [...]" (IMAFUKU et. al., 2021, p. 5). Dessa forma, torna-se essencial que os alunos compreendam o ensino do cálculo de grandes áreas, especialmente as rurais, não apenas como uma matéria escolar, mas como uma ferramenta que pode enriquecer e dar significado à sua aprendizagem.

Apesar da importância do cálculo de áreas, é comum encontrarmos alunos com dificuldades nesse tópico, notamos que os educandos geralmente não estão familiarizados com a temática, e que embora os documentos oficiais como a Base Nacional Comum Curricular, trazerem expressamente a importância do estudo da Geometria, notamos a ausência desse tópico de forma mais aprofundado em salas de aulas, principalmente quando nos referimos ao Ensino Médio.

Diante desse pressuposto, autores como Quitãn (2018), Araújo (2013), Pereira (2017) e Cândido (2016) pesquisaram sobre a temática de Geometria, e são unânimes em concluir que o ensino de áreas, ou de Geometria de maneira geral se torna mais significativo quando é inserido no contexto a realidade do educando.

Quitãn (2018) citando PISA (2015), enfoca que apesar da exigência nos currículos, os estudantes encontram maiores dificuldades na resolução de problemas envolvendo assuntos que trabalham com a Geometria ou conteúdos afins. Como professor, noto que as maiores dificuldades dos alunos é relacionar o cálculo de áreas com seu o seu dia a dia, mesmo em muitas situações em que fazem uso da Geometria, como em trabalhos rurais.

Essas dificuldades encontradas pelos estudantes relacionadas ao estudo de Geometria plana está diretamente ligada a dificuldade de ensinar esses tópicos, uma vez que são ensinados de forma separados, sem uma relação com situações reais, como cálculo de grandes áreas, por exemplo.

O fato de os tópicos em geometria serem ensinados de forma separados, dificulta a resolução de situações reais. O cálculo de grandes áreas, por exemplo, envolve o estudo de vários tópicos de Geometria plana. Portanto, ao serem separados esses tópicos, o ensino fica mais distante, ou seja, existirá uma lacuna entre a Matemática escolar e problemas reais do dia a dia.

A modelagem Matemática surge neste contexto como um elo entre a Matemática escolar e a praticada no dia a dia pelos educandos, pois para Bassanezi (2004), a Modelagem Matemática é a arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos.

Ao propormos um problema real ao aluno, esse se sentirá parte deste contexto, e então surgem os múltiplos caminhos a serem trilhados até que se chegue a uma formulação. Nesse sentido a Modelagem Matemática é uma importante ferramenta para a aproximação entre o que é de vivência do educando e o que ele estuda em sala de aula.

Neste sentido, autores como Araújo (2013) que propõe uma sequência didática com enfoque na História da Matemática, Pereira (2017) que faz uso do Geogebra como forma de aproximar mais o educando do ensino de áreas e Cândido (2016) que faz uso da Modelagem Matemática, no sentido de criar modelos que possam satisfazer o uso da Geometria dentro e fora da sala de aula, propõem ferramentas ou metodologias para enriquecer ou dá significado ao ensino de área.

Esta pesquisa, por sua vez propõe uma sequência didática com o uso do teodolito caseiro no cálculo de grandes áreas. O desenvolvimento dessa pesquisa baseou-se na seguinte questão: *Qual a potencialidade da aprendizagem de área, no ensino médio, a partir do uso de um teodolito caseiro?*

O objetivo geral deste trabalho é *investigar as potencialidades da aplicação de uma sequência didática baseada na Modelagem Matemática, e a confecção e uso do teodolito caseiro para auxiliar no cálculo de grandes áreas no ensino aprendizado de cálculo de áreas no Ensino Médio*.

E para que possamos alcançar o objetivo geral, definimos os seguintes objetivos específicos:

- Estabelecer estratégias para a confecção e uso do teodolito caseiro em sala de aula;
- Elaborar e aplicar a sequência didática nas turmas especificas do Ensino Médio;
- Analisar se o desempenho dos educandos nas atividades propostas surtiu efeitos que possam contribuir na potencialidade do aprendizado de cálculo de grandes áreas.

No 2º capítulo, foi abordado sobre a Modelagem Matemática, trazendo suas concepções de acordo com Bassanezi (2004) e Biembengut e Hein (2009). Este capítulo trata ainda do modelo de Modelagem Matemática utilizado na sequência didática.

No 3º capítulo, elencamos sobre o objeto matemático em estudo (áreas de figuras planas), trazendo seu contexto histórico, além de definições de áreas de figuras planas e as relações seno, cosseno e tangente no triangulo retângulo.

No 4º capítulo, foram expostos os procedimentos metodológicos. Descrevemos ainda neste capítulo a sequência didática desenvolvida nesta pesquisa e as orientações para sua aplicação. Neste capítulo fazemos a análise dos dados.

Tal pesquisa traz uma metodologia inovadora para o ensino de cálculo de grandes áreas, e assim, se destaca em relação as demais pesquisas pela utilização do teodolito caseio no cálculo de áreas.

1. LEVANTAMENTO BIBLIÓGRÁFICO

O levantamento bibliográfico aconteceu de 25 de agosto de 2022 à 10 de fevereiro de 2023, e o buscador utilizado foi o Google (www.google.com.br). O critério para seleção das pesquisas utilizadas foi temporal e proximidade com o objeto matemático: cálculo de área, no qual buscamos pesquisas publicadas nos últimos 10 anos, a iniciar-se no início de 2013 até a presente data. Utilizamos as chaves de busca: "cálculo de área". Ao pesquisarmos o Google retornou um total de 12 páginas, onde foi verificado todos os resultados das 12 páginas e aplicado os filtros: objeto matemática e ano de publicação, foram baixados 19 trabalhos relacionados ao objeto, sendo que desses 19 apenas 11 estavam no critério temporal de 10 anos.

Os trabalhos analisados estão dispostos no quadro a seguir:

Quadro 1 – levantamento bibliográfico

ANO	TIPO DE TRABALHO	TILULO	AUTOR
2015	Dissertação	Cálculo de Áreas de Figuras Planas e Espaciais com aplicações ao Ensino Fundamental e Médio	Alessandro Luis Custodio
2018	Dissertação	O conceito de área sob uma perspectiva investigativa, concreta e contextualizada	Bárbara Sótan Quintãn
2013	Dissertação	Cálculo de áreas: Um Meio Atrativo para o enriquecimento do Ensino da Matemática	Lise Canario de Araújo
2017	Dissertação	Práticas de Ensino em Geometria Plana	Lucas Rodrigues Pereira
2015	Dissertação	O uso do desenho geométrico como motivador de aprendizagem no ensino de área de figuras planas	Tânia Pinto dos Santos Souza
2022	Monografia	Uma discussão a respeito do estudo de área a partir da integração de material concreto e dinâmico	Alex Fernando de Lima
2016	Dissertação	Áreas e distancias na agrimensura: uma proposta prática de modelagem matemática para ensino fundamental e médio	Luana Patrícia Silva Cândido
2013	Dissertação	Evolução do cálculo de áreas de figuras planas: de Arquimedes a Newton	Aurílio da Silva Guedes

2015	Dissertação	O princípio de Cavalieri como método de demonstração e fundamentação, para o cálculo de áreas e volumes	Wecsley Fernandes Lima
2019	Dissertação	Abordagem prática dos conceitos de área e perímetro a partir da planta baixa de uma escola	Nathália Melo do Bem Vasconcelos
2020	Dissertação	Gamificação voltada para ensino da Geometria plana	Pablo Henrique dos Santos Souza

Fonte: o autor

Na pesquisa realizada por Custódio (2015), foi feito um estudo detalhado sobre áreas de figuras planas e especiais. A pesquisa foi realizada em uma escola do Estado de São Paulo, em turmas do ensino Fundamental e Médio. Como metodologia o autor elaborou atividades didáticas especificamente para o trabalho, além de fazer análises em livros didáticos. Após aplicação das atividades e conclusão da pesquisa, conclui-se que o professor não deve utilizar apenas um único material em suas aulas e que o professor use as demonstrações de áreas tanto como aprendizagens quanto curiosidade para os alunos.

Já na pesquisa realizada por Quintãn (2018), que teve como objetivo investigar se a aplicação de uma sequência didática com base na aprendizagem significativa abordando o estudo de área de figuras planas, possibilita aos alunos um aprendizado significante em Geometria. A elaboração da sequência foi baseada em diagnóstico aplicado no 9º de uma escola do interior do Rio de Janeiro. De acordo com a pesquisa foi possível verificar que a utilização dessas estratégias de ensino pode, realmente, contribuir para o processo de ensino-aprendizagem em Geometria.

Enquanto que na pesquisa realizada por Araújo (2013), que foi de cunho bibliográfico e propôs a solução de problemas de cálculo de área de figuras atraentes como uma ferramenta para uma aprendizagem mais significativa de alguns dos conteúdos da educação básica. A autora faz uso da História da Matemática para embasar os conteúdos propostos. Como resultado a autora conclui que muitas contextualizações podem se dá por meio de elementos matemático para assim, enriquecer as aulas de Matemática na aplicação de conceitos de maneira estimulante e agradável, mas com toda uma teoria solidamente construída como alicerce.

A pesquisa desenvolvida por Pereira (2017), teve por objetivo propor uma sequência didática para a disciplina de Geometria Euclidiana Plana do curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, com o auxílio do software de geometria dinâmica GeoGebra. E foi desenvolvida no âmbito do curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Usando método dedutiva para propor metodologias de ensino. O autor observou um progresso na conceituação dos discentes devido às tarefas geométricas adequadas e uma clara organização pedagógica. Desta forma, conclui-se após análises e discussões, e baseado nos resultados colhidos na pesquisa que o software GeoGebra é uma ferramenta auxiliadora eficaz na compreensão das especificidades matemáticas relativas Geometria Plana.

A pesquisa de Santos (2010), teve por objetivo investigar o conhecimento matemático prático de trabalhadores rurais, em especial, o cálculo de área. Para a realização da pesquisa foi avaliada as atitudes dos indivíduos em seu ambiente socio-cultural. Dessa forma, a pesquisa se deu na escola, com alunos do 8º e 9º anos e professores e também fora da escola com trabalhadores rurais. A pesquisa baseou – se na abordagem da Etnomátemática com campo teórico. Diante da pesquisa, chegou-se a resultados com a constatação de que o trabalhador rural não considera o aspecto geométrico da figura.

Uma outra pesquisa analisada foi a desenvolvida por Souza (2015), que teve como objetivo apresentar uma proposta de trabalho com o uso de régua e compasso na construção de figuras planas associada a verificação das definições e propriedades relacionadas a tais figuras. O trabalho foi realizado com todos os discentes da turma 4TIV1 do Curso de Informática do Centro Territorial de Educação Profissional do Agreste de Alagoinhas. Nota-se ainda que a autora utilizou o método dedutivo, partindo da constatação de que o Desenho Geométrico proporciona um maior entendimento e visualização de problemas que envolvem Geometria e, em particular, o ensino de área de figuras planas. Suas principais conclusões foram que ao longo do percurso pedagógico no ensino de Matemática, podemos constatar as dificuldades apresentadas por alunos de ensino médio em desenvolver o pensamento geométrico. Conclui-se também que o Desenho Geométrico se revelou uma boa ferramenta de aprendizagem para o ensino de Geometria.

Já na pesquisa realizada por Lima (2022), onde seu objetivo foi investigar diferentes possibilidades oferecidas pela integração entre os materiais para trabalhar conceitos de área de figuras planas no Ensino Fundamental II. O trabalho também apresenta uma discussão a respeito de alternativas para o estudo de áreas de figuras geométricas planas, considerando a integração do material concreto - Geoplano com o software dinâmico – GeoGebra. O uso integrado do Geoplano e GeoGebra auxilia de forma positiva o processo de construção do pensamento geométrico.

No trabalho realizado por Cândido (2016), foi proposto aulas que possibilitem uma investigação pelos alunos, assim, foi aplicada uma sequência didática, baseada na Modelagem Matemática, visando a motivação e aprendizado significativa dos alunos. E como conclusão, observou-se que esse tipo de atividade é relevante no decurso da aprendizagem da Matemática, vista que fornece ao aluno uma maneira de compreendê-la como criação humana, gradativamente abstrata conforme os modelos representativos.

A pesquisa de Guegues (2013), teve por objetivo mostrar a evolução do cálculo de área do ponto de vista histórico, fazendo uma abordagem de Arquimedes (método da exaustão) a Newton. A pesquisa foi desenvolvida basicamente com bibliografias, em especial as de aspecto histórico do conteúdo de área.

Quando analisamos a pesquisa de Lima (2015), notamos que seu objetivo foi mostrar que o Princípio de Cavalieri é muito eficiente e simples na demonstração de fórmulas de áreas de figuras planas e volumes de sólidos. A metodologia desta pesquisa foi de cunho bibliográfico. E de acordo com o que pode observar no decorrer do trabalho concluiu-se, que se deve reconhecer a importância desse estudo para construção do conhecimento do aluno e não tentar uma coisa já pronta, pois só assim ele terá um aprendizado mais concreto.

Já a pesquisa realizada por Vasconcelos (2019), teve como objetivo investigar os conceitos de área e perímetro por meio de uma proposta de atividades, demonstrando de forma prática tais conceitos por meio do desenvolvimento da planta baixa (croqui) de uma escola. A atividade foi realizada em duas turmas do 6º ano do Ensino Fundamental. A fim de alcançar o objetivo do presente trabalho, foi aplicada uma sequência didática com base na resolução de problemas. De acordo com as considerações e os resultados analisados e apresentados nesta pesquisa, foi possível constatar que o uso das atividades utilizando objetos manipuláveis e de atividades práticas favorecem, consideravelmente, a aprendizagem dos principais conceitos de medidas de perímetro e área.

Souza (2020), teve sua pesquisa com o objetivo de construir uma gamificação voltada para o ensino de geometria plana, baseada na tendencia do uso de tecnologia no ensino de Matemática e o uso de jogos no ensino de Matemática. O game foi elaborado em Google formulário, dividido em 9 obstáculos, no qual o enredo da gamificação é buscar um pergaminho perdido dos estudos de Euclides, portanto passando também pela história da Matemática. Como resultado da pesquisa foi possível observar que, quando trabalhamos com a matemática, é possível um processo de ensino-aprendizagem que considere a ludicidade, o prazer, o desafio, que aguce a curiosidade do educando e o desafie a buscar e construir novos conhecimentos e aprendizagens.

Neste sentido, percebemos que as pesquisas aqui analisadas, tratam o ensino de área das mais variadas formas, trazendo teorias e tendencias diversas, como, Lima (2022), que apresenta o GeoGebra como ferramenta, Souza (2015), apresenta o uso de régua e compasso, Araújo (2013), traz a tendencia de resolução de problemas.

A pesquisa aqui proposta se difere das demais na abordagem do conteúdo matemático, tendo como proposta o ensino de cálculo de grandes áreas com uso do teodolito caseiro. Portanto, este trabalho será uma sequência didática baseada na modelagem matemática, onde essa sequência será aplicada em uma turma do Ensino Médio.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA

No item anterior foi possível notar diversas pesquisas voltadas para as mais diferentes tendencias da Educação Matemática, todas buscando investigar, compreender ou propor formas de contribuição para o ensino de Matemática. Tendencias como Resolução de problemas, Etnomatemática, Jogos e Materiais Concretos e Modelagem Matemática. Neste item abordares a Modelagem Matemática.

> Atualmente a Modelagem Matemática na Educação Matemática compõe um campo de vastas pesquisas na academia e de ação em sala de aula por muitos professores que procuram métodos diferentes de ensinar matemática nos diversos níveis de ensino (PINHEIRO, 2015).

Nota – se que muitos professores na busca de melhores resultados em sala de aula, propõem a Modelagem Matemática em suas atividades, porém, nota – se ainda que grande parte destes educadores tem dificuldade em compreender o que é, e como trabalhar com esta tendencia em sala de aula.

2.1. Modelagem Matemática e Modelo Matemático

Para Biembengut e Hein (2009, p. 9) “muitas situações do mundo real podem apresentar problemas que requeiram soluções e decisões”. Em nosso dia a dia, tais problemas aparecem a todo momento, seja eles bem simples ou complexos, o fato é que apareceram, por exemplo, o troco que devo receber ao fazer uma compra em um comércio ou como proceder em um tratamento de um dependente químico que não aceita ser internado. O primeiro problema podemos classificá-lo como quantificado, e deve ser resolvido utilizando fórmulas matemáticas. Já o segundo é mais complexo e exige diversos outros conhecimentos de cunho social, médico ou político. Voltando ao primeiro problema, certamente devemos recorrer as relações matemática, para definirmos um modelo adequado de resolução, e neste caso, esse modelo será um modelo matemático, pois de acordo com Biembengut e Hein (2009, p. 9) [...] “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real, denomina-se ‘modelo matemático’”.

Em sua pesquisa, Silva (2021) elencou os principais autores no cenário da Modelagem Matemática no contexto da educação básica no Brasil, dentre eles segundo o autor, pode-se destacar Barbosa (2001, 2004), Bassanezi (2004, 2011), Biembengut (2004, 2009), Caldeira (2009), Burak (1987, 1992, 2010) e Klüber (2008).

Para esta pesquisa e sequência didática aqui proposta, exploraremos inicialmente a concepção de Modelagem Matemática de Bassanezi (2004), onde o mais importante no processo de criação de um modelo é o caminho utilizado para se chegar nesse modelo, pois é durante a construção que o aluno consegue compreender os conceitos que estão sendo utilizados.

Bassanezi (2004) diz ainda que a Modelagem Matemática se trata de um processo dinâmico, ou seja, não devemos pensar em um único caminho para se chegar à um modelo matemático. Assim a Modelagem Matemática em sua essência é a arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cuja linguagem aplicada e suas resoluções é a usual.

Usaremos ainda a concepção de Modelagem Matemática de BIEMBEBGUT e HEIN (2009), pela proximidade com a concepção anterior. Para os autores o caminho utilizado para se chegar em um modelo é o que se denomina de Modelagem Matemática, ou seja, para os autores a Modelagem Matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo.

Quanto ao modelo de Modelagem matemática utilizado na sequência didática recorreremos ao que Barbosa (2004) chama de regiões de possibilidades, onde o autor divide essas regiões em três casos.

No caso 1, o professor apresenta um problema, devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos a investigação (BARBOSA, 2004, p.4). Neste caso fica com o aluno a responsabilidade de construir o modelo e encontrar a solução. Já no caso 2, os alunos deparam-se apenas com o problema para investigar, mas têm que sair da sala de aula para coletar dados. Ao professor, cabe apenas a tarefa de formular o problema inicial, o aluno deve ir em busca dos dados para resolver o problema (BARBOSA, 2004).

O caso 3, trata de projetos desenvolvidos a partir de temas 'não-matemáticos', que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos alunos. Neste caso, a formulação do problema, a coleta de dados e a resolução são tarefas dos alunos (BARBOSA, 2004).

Quadro 2 - Processos de Modelagem e os níveis de atuação

	Case 1	Case 2	Case 3
Formulação do problema	professor	professor	professor/aluno
Simplificação	professor	professor/aluno	professor/aluno
Coleta de dados	professor	professor/aluno	professor/aluno
Solução	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

Fonte: (BARBOSA, 2004, P.78)

Na sequência desenvolvida nesta pesquisa trabalharemos com base no caso 2, pois será posto um problema onde os alunos deverão investigar, para isso o aluno precisará sair da sala de aula para coletar os dados.

Biembengut e Hein (2009), afirmam que a Modelagem Matemática usada em toda ciência tem contribuído para evolução do conhecimento. Portanto faz-se necessário diferenciarmos seu uso como método científico e como metodologia de ensino.

2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA COMO MÉTODO CIENTÍFICO E COMO METODOLOGIA DE ENSINO

Bassanezi (2009), ressalta que com exceção das ciências físicas que que evoluíram respaldadas em teorias formuladas com o auxílio da Matemática, as outras ciências factuais como, a biologia, química e a economia, usavam apenas linguagem comum para exprimir as ideias, o que geralmente resultava em falta de clareza e imprecisão. O autor assegurando a importância do uso da Matemática nas ciências, propõe a substituição de uma visão ingênua da realidade pesquisada por uma postura crítica e mais abrangente, procurando-se uma linguagem adequada que facilite e racionalize o pensamento.

Neste cenário ressalta-se a Matemática aplicada fazendo uma junção do que se é abstrato com a formalização, atualmente,

> A Matemática Aplicada moderna pode ser considerada como a arte de aplicar matemática a situações problemáticas, usando como processo comum a modelagem matemática (Bassanezi, 2009, p.32).

Portanto a Modelagem Matemática com todo poder de síntese que tem possui uma contribuição histórica enquanto método científico. E Bassanezi (2009) destaca alguns pontos relevante da Modelagem Matemática como instrumento de pesquisa, como:

- Pode estimular novas ideias e técnicas experimentais;
- Pode dar informações em diferentes aspectos dos inicialmente previstos;
- Pode ser um método para se fazer interpolações, extrapolações e previsões:
- Pode sugerir prioridades de aplicações de recursos e pesquisas e eventuais tomadas de decisão;
- Pode preencher lacunas onde existem falta de dados experimentais;
- Pode servir como recurso para melhor entendimento da realidade;
- Pode servir de linguagem universal para compreensão e entrosamento entre pesquisadores em diversas áreas do conhecimento.

No que se referente a Modelagem Matemática no ensino, Biembengut e Hein (2009), destacam que esta tendência pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos de Matemática que ele ainda não conhece. Isso porque seguindo o processo da Modelagem Matemática na resolução de um teorema, por exemplo, deve se iniciar por sua motivação, formulação de hipóteses, validação de hipóteses, novos questionamentos e finalmente seu enunciado, e assim conjugando verdadeiramente o binômio ensino-aprendizagem (Bassenezi, 2009). Neste sentido para a Modelagem Matemática como metodologia de ensino é mais importante o caminho que o levou ao modelo doque o modelo, exatamente pelo processo de construção de conhecimento que foi submetido o aluno durante a Modelagem.

Segundo Biembengut e Hein (2009), nos cursos regulares, quando há um programa a ser cumprido, o processo de modelagem precisa sofrer alterações para se adequar à possibilidade de aplicação. E ainda deve-se voltar-se a promoção do conhecimento matemático e da habilidade de utilizá-lo. Nesses cursos regulares usa-se o método chamando de Modelação Matemática, que consiste em utilizar a essência da Modelagem Matemática em cursos regulares. Veja os objetivos desse método segundo Biembengut e Hein (2009):

- Aproximar uma outra área do conhecimento matemático;
- Enfatizar a importância da matemática para a formação do aluno;
- Despertar o interesse pela matemática e entre a aplicabilidade;
- Melhorar a apreensão dos conceitos matemática;
- Desenvolver habilidade para resolver problemas;
- Estimular a criatividade.

Assim para esclarecer a diferença entre os dois tipos de Modelagem Matemática citados, Pinheiro (2015) apud Bassanezi (2009), aponta que na Modelagem Matemática como método científico as vantagens estão na abrangência e poder de síntese, além de que quando usada como instrumento de pesquisa pode auxiliar nas tomadas de decisão, a estimular novas ideias e técnicas experimentais e a entender melhor a realidade. Enquanto estratégia de ensino-aprendizagem o autor nos diz que o mais importante é o método utilizado para se chegar ao modelo do que o modelo propriamente dito, pois é durante a construção que o aluno consegue compreender os conceitos que estão sendo utilizados.

3. ESTUDO DO OBJETO MATEMÁTICO

Ao longo da história, mesmo nas civilizações mais antigas como a babilônica e a egípcia, nota-se o uso da geometria em suas atividades diárias, embora fosse uma geometria essencialmente métrica, segundo Roque e Pitombeira (2012), ou seja, uma geometria preocupada principalmente em medir comprimentos, áreas e volumes. E quando falamos do Egito Antigo, esses cálculos resumiam-se em áreas e volumes. E dessa forma, o surgimento da geometria está diretamente ligado as atividades práticas do dia a dia dos seres humanos, como medir um lote de terra, calcular o volume de um tanque de criação de peixes ou descobrir um volume do tronco de uma árvore.

> A Geometria foi desenvolvida a partir da necessidade de medir terras, construir casas, templos, monumentos, navegar e calcular distancias. Através dos tempos, os seus registros estão presentes nos legados de todas as civilizações: babilônios, egípcios, gregos, chineses, romanos, hindus, árabes utilizaram as formas geométricas no seu dia a dia. (LIMA, 2015)

Portanto o ensino de Matemática como o conhecemos hoje é tão antigo quanto as civilizações citadas acima, e teve sua estruturação iniciada por volta de 600 anos antes de Cristo.

Quando pensamos em medida de áreas percebemos que as civilizações mais antigas como a egípcia, já usava esse artifício mesmo que de maneira não dedutiva ou organizada como conhecemos atualmente. De acordo com Custódio (2015, pg. 23).

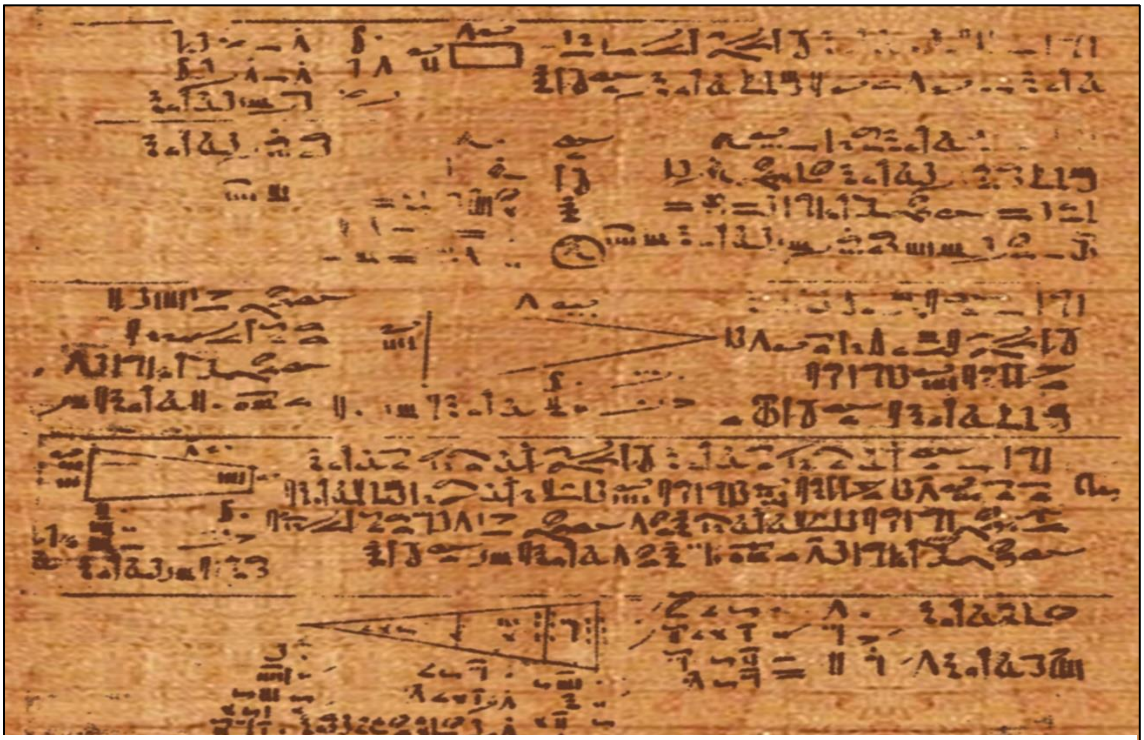
> O historiador Heródoto e o filósofo Aristóteles acreditavam que a geometria surgiu no Egito, com os agrimensores, que tinham que recalcular as dimensões dos terrenos após cada inundação que acontecia anualmente no vale do rio Nilo”.

Assim, [...] esses agrimensores acabaram aprendendo a calcular áreas de terras repartindo-as em retângulos e triângulos, [...] e dessa forma, podemos chegar a uma possível conclusão dos primeiros registros do uso cálculo de áreas (FARIAS, 2021).

Quando estudamos a Matemática dos egípcios certamente não podemos deixar de nos remeter ao Papiro Rhind e o Papiro Moscou, que juntos nos fornecem uma boa noção de como eram os cálculos envolvendo a Geometria e a Aritmética dos egípcios.

O Papiro Rhind, também conhecido por papiro de Ahmes, é datado de 1850 a.C, e apresenta problemas de natureza geométrica e algébricas, é um dos documentos mais antigos de registros de Geometria (VASCONCELOS, 2019, p. 26 apud GARBI, 2019a).

Figura 1 - Papiro de Rhind



Fonte: astronomiareal.com

Quantos aos problemas neste papiro, para Buenos (2018, at al)

> Foi um dos documentos mais importantes para a matemática egípcia, contendo 85 problemas envolvendo aritmética e geometria como: o uso de frações, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica, medir áreas de triângulos, trapézios e retângulos, calcular volumes de cilindros e prismas, etc e com suas respectivas soluções.

Alguns dos problemas contidos nesse papiro trata diretamente do cálculo de área, como o problema 51: *qual a área de um triângulo de lado 10 jet e base 4 jet*. E o problema 50: *Um campo circular tem 9 jet de diâmetro. Qual é a sua área?*

O Papiro de Moscou, é considerado o segundo papiro mais importante da época e ele é um pouco mais antigo que o Papiro de Rhind, foi escrito com menos cuidado, comparado a obra de Ahmes, por um escriba desconhecido cerca de 1850 a.C. (BUENOS 2018. at al).

Ainda segundo os autores esse papiro contém 25 problemas onde apresentam as fórmulas do volume do tronco de uma pirâmide.

> Podemos ver que os problemas escritos sobre geometria nos papiros refere-se a problemas de volumes e áreas de figuras planas. Calculava-se as áreas de retângulos, triângulos e trapézio com precisão pelo método de decomposição e recomposição de figuras (BUENOS 2018. at al).

Figura 2 - Parte do Papiro de Moscou

Fonte: obricentrodamente.com

3.1 ÁREA DE FIGURAS PLANAS E RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIANGULO RETÂNGULO

Dulce e Pompeo (2013), definem região poligonal ou superfície poligonal sendo a reunião de um polígono com seu interior. Neste trabalho usaremos a expressão área de um polígono, ao invés de área de uma região poligonal. Assim neste item serão definidas as áreas do quadrado, do retângulo, do triângulo, do trapézio e do losango, de acordo com Dolce e Pompeo (2013), além das relações seno, cosseno e tangente de um ângulo, de acordo com as definições de Iezzi (2013).

3.1.1 área do retângulo e do quadrado

Antes de definirmos a área do retângulo e do quadrado, faz-se necessário elencarmos a definição da razão entre dois retângulos quaisquer.

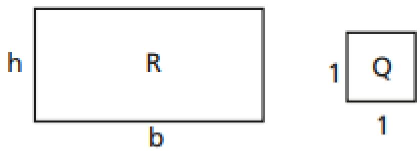
Teorema: "a razão entre dois retângulos quaisquer é igual ao produto da razão entre as bases pela razão entre as alturas."

Dado os retângulos R_1 (b_1, h_1) e R_2 (b_2, h_2), a razão entre eles será:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{b_1}{b_2} . \frac{h_1}{h_2}$$

Dado o retângulo R(b, h) e o quadrado unitário Q(1,1), em decorrência do teorema citado acima, temos:

Figura 3 - retângulo e quadrado unitário



Fonte – Dolce e Pompeo (2013)

Área do retângulo R(b,h) =

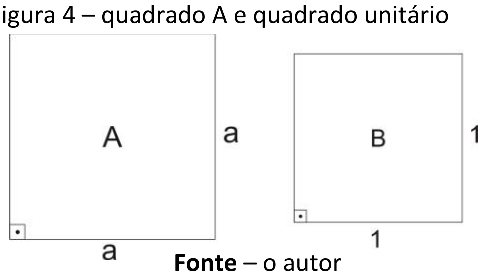
$$A_R = \frac{R(b,h)}{Q(1,1)} = \frac{b}{1} . \frac{h}{1}$$

$$A_R = b.h$$

O quadrado por ser um retângulo particular aplica-se o mesmo teorema.

Dado os quadrados A(a,a) e B(1,1), temos:

Figura 4 – quadrado A e quadrado unitário



Fonte – o autor

$$A_Q = \frac{A(a,a)}{B(1,1)} = \frac{a}{1} . \frac{a}{1}$$

$$A_Q = a.a$$

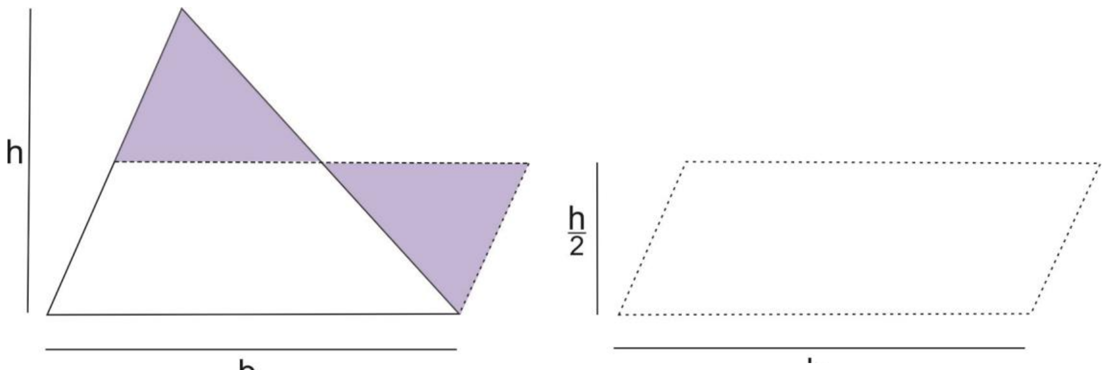
$$A_Q = a^2$$

3.1.2 área do triângulo

Para definirmos a área do triângulo recorreremos ao teorema: *todo triângulo é equivalente a um paralelogramo de base congruente à do triângulo e altura metade da altura do triângulo*.

Sendo o triangulo T, de altura h e base b, e o paralelogramo de altura $\frac{h}{2}$ e base b.

Figura 5 – triângulo e paralelogramo



Fonte – Adaptado de Dolce e Pompeo (2013)

E definindo que todo paralelogramo é equivalente a um retângulo, cuja área já conhecemos, temos:

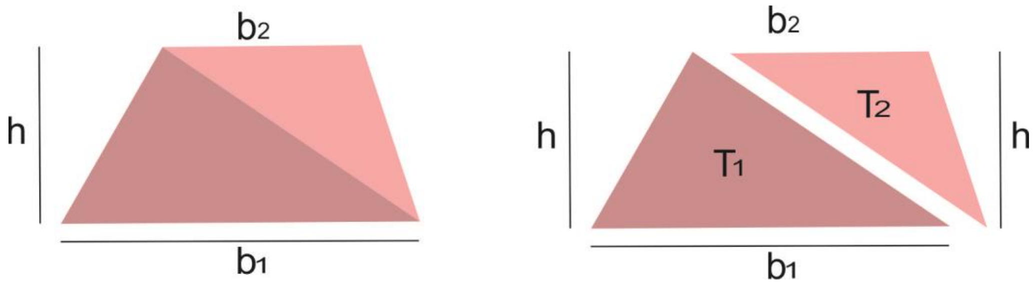
$$A_T = A_P \Rightarrow A_T = b\,.\frac{h}{2} \Rightarrow A_T = \frac{b\,.h}{2}$$

No caso do triângulo equilátero sua altura é $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, e, portanto, sua área é $S = \frac{1}{2}.a.\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \mathrm{S} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

3.1.3 área do trapézio

Dado o trapézio abaixo, de bases b_1 e b_2 e altura h, ele é a soma de dois triângulos, sendo T_1 (b_1, h) e T_2 (b_2, h).

Figura 6 – triângulo 1 + triangulo 2 = trapézio



Fonte – Adaptado de Dolce e Pompeo (2013)

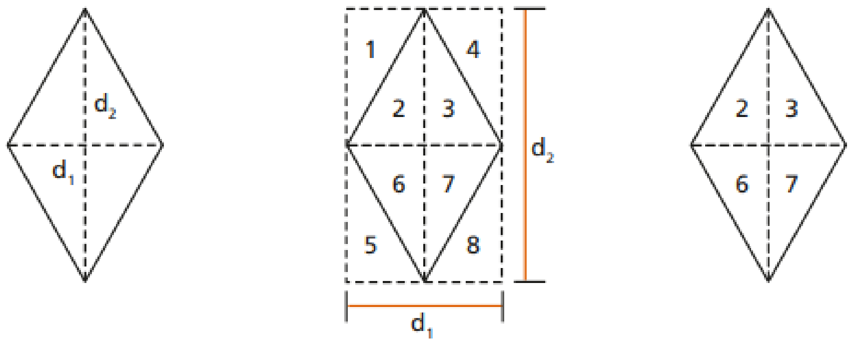
Portanto, a área do trapézio é a soma das áreas dos triângulos T_1 e T_2:

$$A_T = \frac{b_1 . h}{2} + \frac{b_2 . h}{2} \Rightarrow \frac{(b_1 + b_2) . h}{2}$$

3.1.4 área do losango

Dado o losango $L(d_1, d_2)$, conhecendo suas diagonais, conduziremos suas paralelas pelos vértices.

Figura 7 – losango e as paralelas



Fonte – Dolce e Pompeo (2013)

Assim, a área do losango é dada por:

$$A_L = A_{(4\ triângulos)} = \frac{A_{(8\ triângulos)}}{2} \Rightarrow A_L = \frac{d_1 . d_2}{2}$$

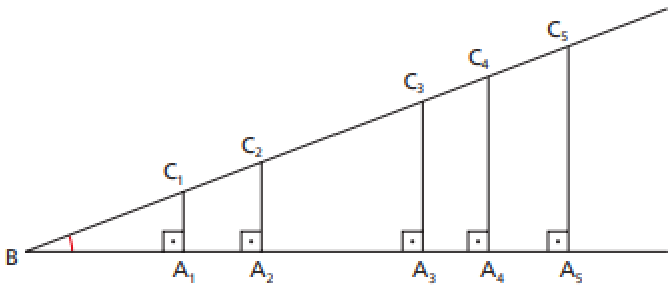
Observação: como o losango é um paralelogramo, sua área também pode ser dada por:

$$A_L = b . h$$

3.1.5 seno, cosseno e tangente de um ângulo

Definiremos seno, cosseno e tangente por meio da semelhança de triângulos. Fixando um ângulo $\hat{B}$ marcaremos sobre um dos seus lados os pontos A_1, A_2, A_3,... e conduzindo por eles, as perpendiculares A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, ...

Figura 8 – triângulos semelhantes



Fonte – Iezzi (2013)

Os triângulos BC_1A_1, BC_2A_2, BC_3A_3, ..., são semelhantes por terem os mesmos ângulos. Então, podemos escrever a relação:

$$\frac{C_1A_1}{BC_1} = \frac{C_2A_2}{BC_2} = \frac{C_3A_3}{BC_3} = \cdots (constante)$$

É possível verificar que esta relação, não depende do tamanho do triângulo, depende apenas do valor de $\hat{B}$. Note que $C_1A_1, C_2A_2, C_3A_3, \ldots$, são catetos apostos ao ângulo $\hat{B}$, e BC_1, $BC_2, BC_3, \ldots$, são hipotenusas. Essa relação é chamada *seno* de um ângulo, e é definida por:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$

De forma análoga, obtemos as relações a seguir:

$$\frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BA_3}{BC_3} = \cdots (constante)$$

Esta relação é chamada de *cosseno*, e é definida por:

$$\cos\theta = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

Vejamos a relação a seguir:

$$\frac{BA_1}{C_1A_1} = \frac{BA_2}{C_2A_2} = \frac{BA_3}{C_3A_3} = \cdots (constante)$$

Esta relação é chamada *tangente* de um ângulo, e é definida por:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

4. METODOLOGIA

Esta pesquisa terá caráter qualitativo, onde foi feita uma pesquisação, ou seja, será desenvolvida através de um experimento em que o pesquisador é observador e participante. Durante a pesquisa serão coletadas informações de áudio, que serão analisados e escritas durante a experimentação didática que será realizada com alunos do Ensino Médio de uma escola pública da região rural do município de Parauapebas. As análises feitas no material escrito e em áudio serão de caráter qualitativo.

A pesquisa terá como modelo de análise uma sequência didática utilizando a Modelagem Matemática e o teodolito caseiro, elaborada com base nas observações iniciais acerca do problema de pesquisa deste trabalho. Esta sequência terá como objetivo testar a hipótese inicial, mas também contribuir para um melhor engajamento dos alunos sobre o ensino aprendizagem de áreas de figuras planas. Durante os processos foram feitas observações onde analisou-se as etapas de construção do modelo, ou seja, desde a coleta de dados, processamento da informação, busca de elementos para matematizar e por último a determinação do modelo final, que consiste nas etapas da modelagem matemática.

4.1. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Em muitas situações do dia a dia é necessário efetuar cálculos envolvendo áreas, porém algumas regiões das superfícies onde deseja-se calcular podem ser inacessíveis, o que exige outros métodos ou instrumentos para realização do cálculo. Neste sentido, apresentaremos aos alunos esse instrumento que será utilizado nessa sequência, o teodolito caseiro. Portanto partiremos do seguinte problema: *Como medir áreas de regiões onde pelo menos uma de suas dimensões é inacessível para medição?*

A seguir apresentaremos as três atividades propostas na sequência didática:

Atividade 1 – Calcular distâncias dentro da sala de aula.

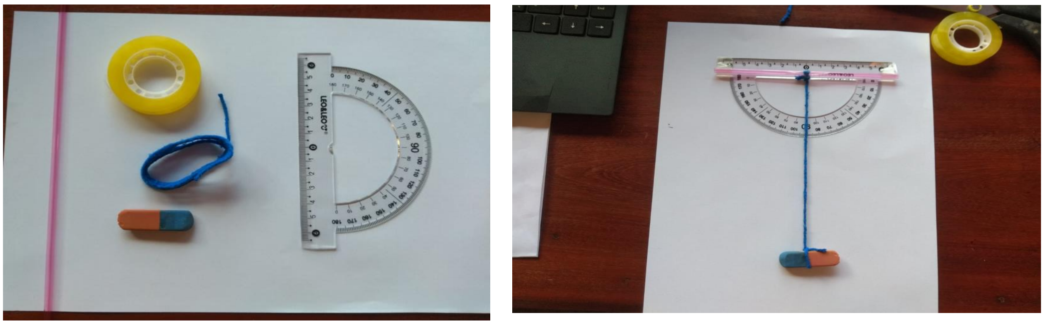
Aluno(a) 1: ____

Aluno(a) 2: ____

Recursos: transferidor, canudo, barbante, fita adesiva, borracha, fita métrica e teodolito caseiro.

Problema: Calcule a área das paredes da sala de aula.

Figura 9 – teodolito caseiro



Fonte: google map

Rascunho:

Atividade 2 – Cálculo da área das paredes da frente da escola

Aluno(a) 1: ____

Aluno(a) 2: ____

Recursos: Teodolito caseiro, calculadora, trena, papel e caneta.

Problema: Calcule a área das paredes da frente da escola.

Rascunho:

Atividade 3 – Cálculo da área do terreno onde a escola foi construída

Aluno(a) 1: ____

Aluno(a) 2: ____

Problema: Calcule a área onde a escola foi construída

Figura 10 – vista aérea da escola

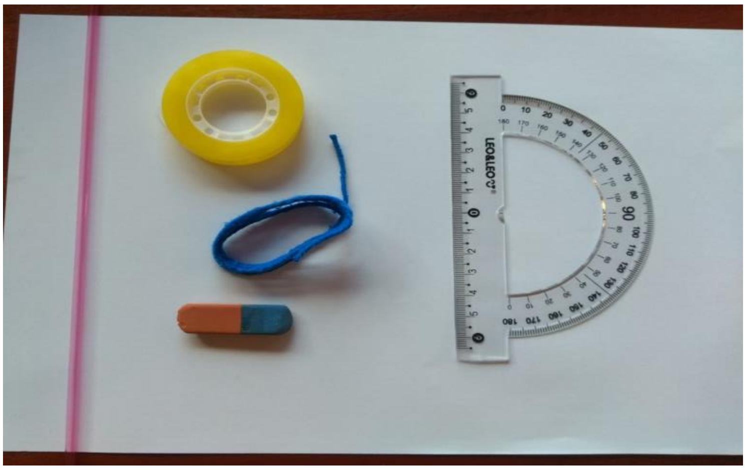
Fonte: google map

4.1.1 ORIENTAÇÕES PARA O PROFESSOR ACERCA DA PRIMEIRA ATIVIDADE:

Na primeira atividade o professor deve explicar que o teodolito caseiro é parte da resolução do problema, e, portanto, inicialmente deve-se construí-lo.

Construção do teodolito caseiro: O transferidor deve estar sobre uma superfície plana, organize todos os materiais necessários para sua construção: transferidor, canudo, barbante, fita adesiva e borracha (pode ser outro objeto).

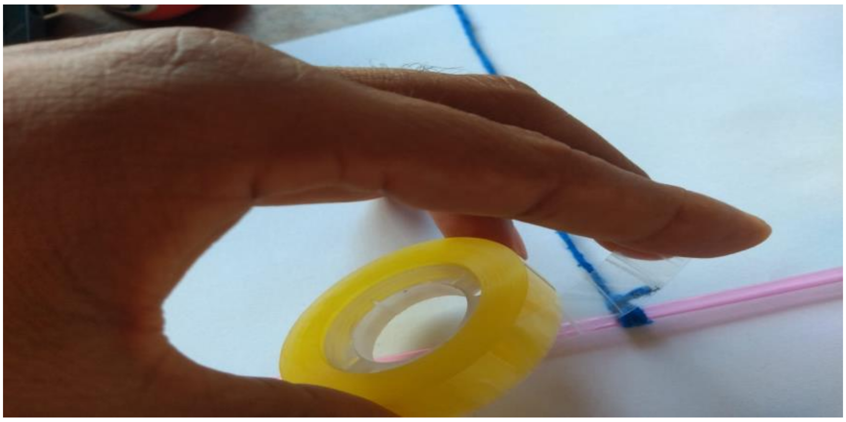
Figura 11 – materiais para construção do teodolito caseiro



Fonte: O autor

a) Amarre o barbante no meio do canudo, para fixar melhor, cole o pedaço pequeno de fita sobre o nó do barbante.

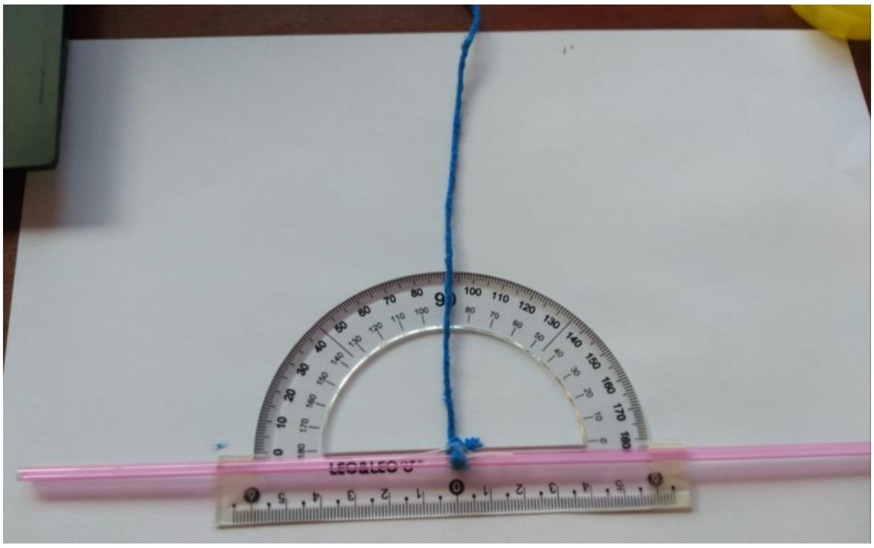
Figura 12 – fixando o barbante



Fonte: o autor

c) Usando a fita adesiva fixe o canudo no transferidor, ficando sempre atento para que o nó fique exatamente no marco zero da régua do transferidor.

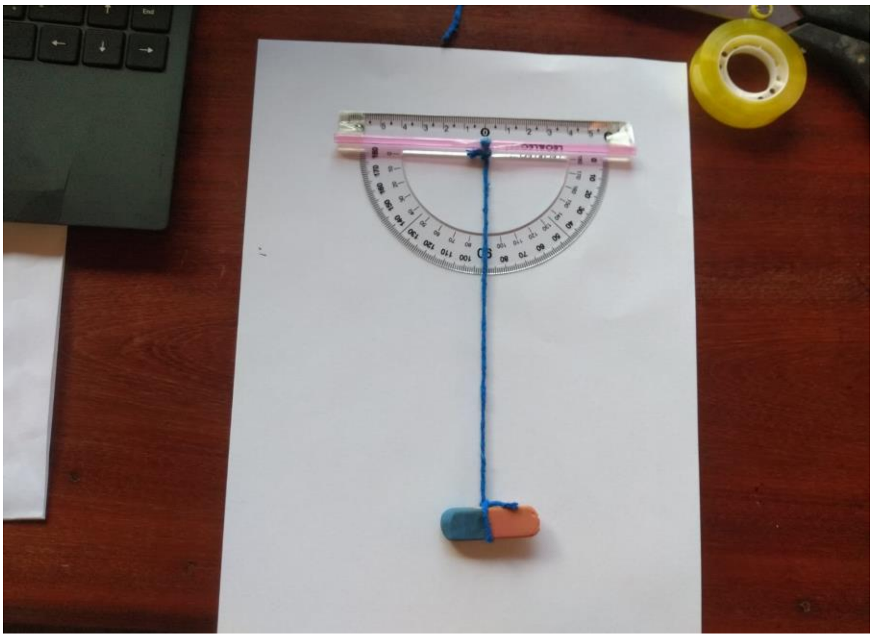
Figura 13 – fixando o canudo no transferidor



Fonte: O autor

d) Corte o excesso do canudo que passar da régua do transferidor e fixe a borracha no barbante.

Figura 14 – fixando a borracha



Fonte: O autor

Nesta etapa é importe deixar claro para os alunos que existem diversas maneiras de construir um teodolito caseiro, inclusive com tripé, porém optamos por usar esse modelo por ser simples sua confecção.

Atividade 1 – Calculando pequenas distâncias na sala de aula

a) **Calculando a altura do colega**: O teodolito deverá ficar sobre uma base, uma mesa por exemplo, enquanto um dos alunos fica em pé o outro projeta a mira para o ponto mais alto do colega e anota o ângulo projetado pelo barbante no teodolito, deve-se anotar também a altura da mesa e a distância da mesa até o colega. Por exemplo, se a mesa tiver 0,80 m de altura, a distância entre a mesa o colega for de 3m e o ângulo projetado for de 17º, usando a tangente do ângulo, teríamos: tg (17º) = x/3, x = 0,91 m, somando a altura da mesa (0,91+0,80), teríamos uma altura aproximada de 1,71 m.

b) **Medir o comprimento do quadro branco, em seguida calcular sua área** (adaptado do canal Keila Kotaira CG & Bin, 2023), para esse cálculo a dupla deverá apoiar o teodolito sobre a régua de apoio do pincel/apagador do quadro branco e a mira projetada para o topo da lousa, com uma trena mede-se a altura. Supondo que a altura foi de 1,20m e ângulo foi de 16,5º, teríamos tg (16,5) = 1,20/x, onde teríamos um comprimento de aproximadamente 4 metros. Sabendo o comprimento, e usando a formula da área do retângulo, temos 4m x 1,2 m = 4,8 m^2.

c) **Medir a área de umas das paredes da sala de aula**, neste caso primeiramente devemos saber a altura da parede, já que comprimento é fácil de medir com a trena. Para isso, o teodolito pode ser apoiado sobre a cadeira de 0,50m de altura e a mira projetada para o ponto mais alto da parede. Supondo que o comprimento da sala de aula é de 10 m e ângulo projetado foi de 23º, teríamos, tg (23º) = x/10 = 4,2, somando com a altura da cadeira (4,2 + 0,5) = 4,7 m, e assim, podemos calcular a área fazendo 10m x 4,7 = 9,2 m^2.

4.2 EXPERIMENTAÇÃO DIDÁTICA

Para o desenvolvimento desta pesquisa foi realizada a experimentação didática que consiste na aplicação da sequência didática contida no item anterior. A experimentação foi realizada em uma escola da rede Estadual de Ensino do Pará, em uma turma do 2º ano do Ensino Médio do turno da noite, composta por 20 alunos. Foram realizados três encontros com a turma, sendo 1 durante a noite, e os demais no contraturno, para que os encontros fossem possíveis no contraturno, foi feito acordo com a direção da escola para que os educandos viessem durante o dia sem prejuízo de frequência no dia dos encontros. O encontro em sala de sala se deu em um horário normal de aula no turno da noite, esse encontro ocorreu dia 04 de novembro de 2024, o segundo encontro ocorreu no contraturno no dia 11 de novembro de 2024 às 14h, e o terceiro encontro ocorreu igualmente no contraturno dia 25 de novembro de 2024, às 14h. Durante o mês de novembro, a escola estava com sérios problemas de transporte para os alunos, portanto o experimento foi realizado com apenas 10 alunos, divididos em 5 duplas.

Esta escola Funciona em forma de anexo de uma escola sede, e está localizada na Vila Paulo Fonteles, área rural, distante 50 km da sede do Município de Parauapebas.

4.3 LEVANTAMENTO DOS DADOS

O levantamento dos dados foi feito por meio de registros de voz e escritos, a partir de atividades desenvolvidas pelas duplas.

Cada dupla recebeu seu próprio material e cada uma construiu sua própria solução. Todas as soluções encontradas pelas duplas para resolver o problema foram registradas. Após ter resolvido o problema as duplas socializaram suas soluções com as demais equipes. Todos os registros também foram feitos por meio de gravador de voz, e quando possível foram feitos também por meio de vídeos.

4.4 ANÁLISES DOS DADOS

Na análise de dados buscamos indícios de aprendizagem tanto no registro de voz quanto nos registros escritos, onde foi verificado a importância da interação do pesquisador com os alunos no processo de ensino aprendizagem, em que este conduziu o experimento com intuito de orientar o aluno a resolver o problema, antes de dar qualquer informação importante para ele.

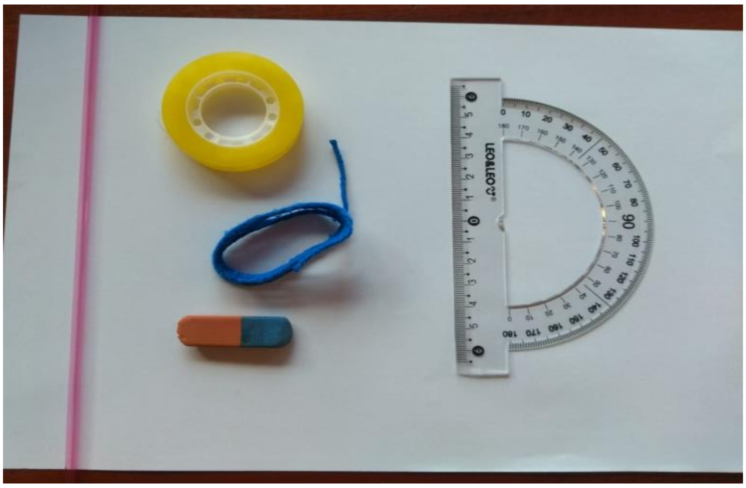
A aplicação da sequência didática se deu em três momentos, em cada um desses momentos os alunos realizaram uma atividade proposta, com o intuito de solucionar um problema inicial. O primeiro encontro ocorreu em 4 de novembro de 2024, às 19:30, na sala de aula, esse horário foi acordado entre a coordenação e o professor regente, a turma foi dividida em duplas, como estavam presentes 10 alunos, foram formadas 5 duplas, que foram chamadas de dupla 1,2,3,4 e 5. O contato com os alunos foi feito de forma presencial, ao conversar com professor da turma, tive a oportunidade de conversar com os próprios alunos sobre as atividades, e os mesmos concordaram em participar.

A atividade número 1 teve como problema o cálculo da área das paredes da sala de aula, e sua primeira etapa de resolução foi a construção do teodolito caseiro.

Ao iniciarmos a primeira atividade, a curiosidade tomou conta do ambiente, queriam saber de fato o que era um teodolito, essa curiosidade trouxe motivação para a turma já que almejavam descobrir o que era e o que fazia o objeto ali construído.

O primeiro passo da primeira etapa da atividade foi a apresentação e distribuição dos materiais que seriam utilizados na confecção do teodolito, bem como o passo a passo impresso da construção. Cada dupla recebeu os materiais necessários para construção do teodolito e desenvolvimento da atividade.

Figura 15 – apresentação dos materiais

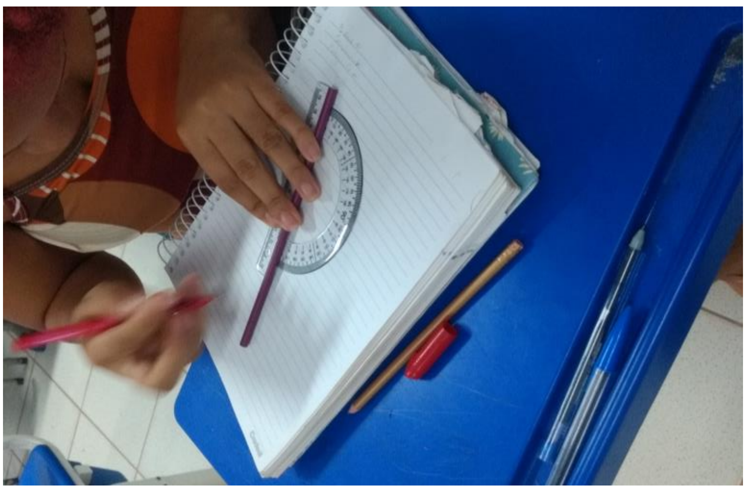


Fonte – o autor

Cada dupla recebeu os seguintes materiais: transferidor, fita, barbante, borracha, canudo e um papel com o passo a passo, o que aguçou ainda mais a curiosidade, perguntas surgiam a todo momento, como: isso serve para medir? Como podemos usar essas coisas? Vamos ter que subir na parede para medir? E nesse momento formou-se as duplas para o desenvolvimento da atividade.

As instruções para a montagem foram dadas de forma impressa para cada grupo, e ainda aconteciam as intervenções quando era solicitado. De acordo com o acontecimento das intervenções as dúvidas diminuam de forma gradativa. E então cada grupo começou a dá forma ao seu trabalho.

Figura 16 – confecção do teodolito



Fonte – o autor

Neste momento as duplas começam colar o canudo no transferidor, na figura 16, temos a dupla 1 fazendo a colagem do canudo, e começando a perceber a sua função, notou-se uma certa autonomia desta dupla na confecção.

A dupla 5, teve mais dificuldade em realizar esta etapa, pois não estavam compreendendo a localização do canudo no transferidor. As demais duplas, assim como a dupla 1, conseguiram fazer esta etapa com uma certa autonomia.

Com o canudo colado no transferidor, foi o momento de pendurar a borracha, surgem então muitas dúvidas em relação a função da borracha.

Figura 17 – teodolito pronto

Fonte – o autor

Logo após o término desse passo descobriram que sua função era apenas de tracionar o barbante, que indicaria o ângulo.

Na execução desta etapa , os alunos se depararam com vários tópicos da Matemática escolar, principalmente de Geometria plana, sendo usado em um processo para a resolução de um problema real. Durante esse passo da resolução do problema, surgiu o objeto matemático ângulos, percebendo assim uma boa aplicação para o estudo desse objeto matemático. A segunda etapa para a resolução do problema foi a separação (mobilização da matemática utilizada).

Ao mobilizarem tanto conhecimento matemático, a reação dos alunos foram as mais diverasas, a aluna K, por exemplo, disse: “nossa professor não lembrava que sabia tanta Matemática assim”. O Aluno M, disse: “sou gênio”.

Figura 18 – aluno mostrando teodolito pronto

Fonte: o autor

Com o teodolito confeccionado, chega o momento de fazermos o primeiro teste/calibragem, que consistiu em calcularmos a área de uma das paredes da sala de aula, ou seja, resolver de fato problema proposto.

Agora cada grupo deveria buscar o melhor caminho para se chegar em um modelo matemático capaz de fornecer uma área, com o conhecimento do comprimento da parede e de um ângulo de referência. Esta área estaria simbolizando uma grande área, em que se conhece apenas a medida de sua dimensão mais acessível.

As dúvidas foram surgindo e gradativamente fui fazendo as intervenções, então os grupos começaram medir os ângulos, mirando para o canto superior da parede a ser calculada sua área.

Figura 19 – mirando ângulo com teodolito

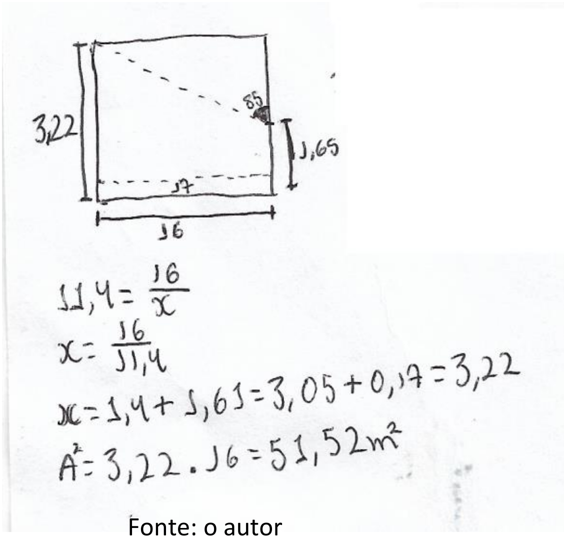
Fonte: o autor

Em cada dupla um aluno ficou responsável por fazer a mira do ângulo e o outro para fazer as anotações no caderno.

Com as medidas anotadas, surge entre os alunos dúvidas sobre o que fazer para se encontrar a área. O que se tinha era apenas o comprimento e a medida do ângulo, então após algumas instigações, aos poucos foram notando que daria para usar a relação trigonométrica tangente, e assim poderiam descobrir o lado aposto ao observador, que seria a altura da parede. Porém, surge um problema entre os grupos! Ao efetuarem o cálculo da tangente do ângulo a altura deu em torno de 1,5 m, mesmo utilizando a calculadora, o cálculo não batia, o que estava errado? Após algum tempo alertei os grupos que poderia estar faltando a altura do observador, pois o ângulo foi calculado do observador acima. E assim conseguiram resolver o tal "*problema da parede baixa*".

A partir desse momento, os grupos sentiram-se mais seguros e autônomos na resolução do problema proposto, pois notaram que tinham em mãos o comprimento e altura da parede, e poderiam facilmente encontrar a medida da área através da fórmula da área do retângulo.

Figura 20– cálculo feito por uma dupla



Fonte: o autor

Acima o resultado encontrado por um dos grupos, com o ângulo de 85º encontram a altura de parede de 3,22m. A altura real da parede, era de 3m, logo conseguiram chegar bem próximo.

A atividade 2, que consistiu em realizar o cálculo da área das paredes da frente da escola, usando o modelo matemático desenvolvido na atividade 1.

Figura 21– medindo a frente da escola

Fonte: o autor

Nesta atividade os alunos estavam mais familiarizados com o teodolito e seu uso e já tinham o modelo matemático a ser seguido. Portanto, tornou-se mais fácil a mobilização dos conteúdos por parte dos grupos.

Os educandos foram a campo com a intenção de resolver o problema proposto: calcular a área da parede da frente da escola.

Os grupos organizaram-se, de forma a ficar um observador do ângulo e outro fazendo as anotações.

Figura 22– mirando ângulo 2

Fonte: o autor

Nesta atividade fica evidente a familiaridade dos educandos com os objetos matemáticos relacionados a área das figuras planas e com as relações trigonométricas no triangulo retângulo, e assim percebe-se que a autonomia e mobilização de conteúdos surge de forma mais visível.

Figura 23 – usando a fita métrica

Fonte: o autor

A cada descoberta os alunos sentiam-se mais atraídos pela atividade, da mais simples a mais complexa. Por exemplo, muitos alunos não sabiam manusear uma calculadora científica, e com essas atividades passaram a usá-las, inclusive em aulas de outras disciplinas como Física e Química.

Durante essa atividade, com uma maior autonomia dos alunos, ficou praticamente a cargo deles, trilharem o caminho matemático para se chegar a resolução do problema proposto.

Logo após a coleta dos dados, foram aos cálculos, e assim cada grupo foi chegando ao resultado esperado para a resolução do problema. Todos ficaram satisfeito, pois os resultados foram muito próximos uns dos outros. E assim esta atividade proporcionou aos estudantes mais consciência da utilidade da matemática para resolver e analisar problemas do cotidiano (D'Ambrosio, 1989).

Na atividade 3 foi proposto aos alunos que calculassem a área do lote onde está localizado a escola.

Esta área trata-se de um local que representa uma grande área, pois tem algumas partes que é inacessível, fazendo com que os educandos mobilizassem muitos conhecimentos e estratégias para calcular a área.

O caminho poderia ser parecido com os das atividades anteriores, porém, o que logo notaram é que não teria como mirar o teodolito sem um local onde pudessem focar o ângulo.

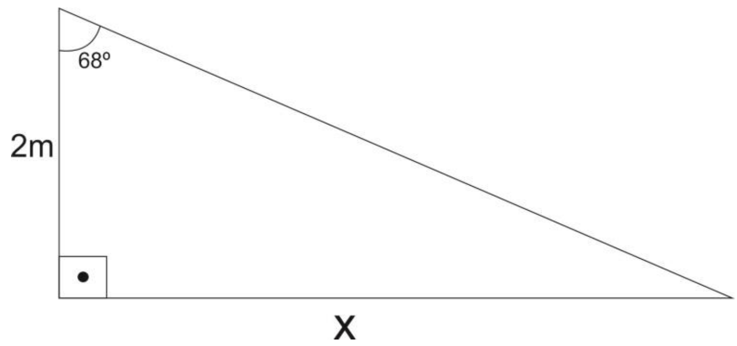
Dentre as estratégias que surgiram, surge a ideia de usar um cano como uma espécie de estaca, para que fosse possível mirar o teodolito.

Figura 24 – medindo distância até a estaca

Fonte: o autor

Dessa forma, cada grupo foi capaz de mobilizar os conhecimentos necessário para resolver o problema. O grupo 2 por exemplo, ao mirar o teodolito ao ponto mais alto da estaca observaram um ângulo de 68º graus no teodolito, sabendo que a altura da estaca era de 2m, montou-se o seguinte triangulo retângulo:

Figura 27 – triangulo retângulo



Fonte: o autor

Onde 2m representa a altura da estaca e x representa a distância a ser medida. Para calcular a distância usou-se a relação trigonométrica tangente de 68º, da seguinte forma:

$$tg\ 68º = \frac{x}{2}$$

$$2{,}47 = \frac{x}{2}$$

$$x = 4{,}94$$

Arredondamos o valor para 5m, foi-se repetindo o processo até descobrir que aquele lado tinha uma medida de 30 m. ao repetir o caminho nos demais lados, notou-se que se tratava de um retângulo de 30 m por 60m. A partir desse momento todos os grupos concluíram o problema, determinando a área.

Com essa terceira atividade, ficou ainda mais evidente o potencial dessa sequência didática, uma vez que ela instigou os educandos a mobilizarem conteúdos para resolverem os problemas propostos e aprenderem com mais facilidade o objeto matemático: área de figuras planas.

Um outro ponto a ser observado foi o uso da trigonometria para resolver questões de grandes áreas, e isso somente foi possível com o teodolito, que foi a ferramenta educacional inserida nesta sequência e que trouxe, de acordo com a pesquisa um maior potencial para o ensino de grandes áreas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa propusemos uma sequência didática sobre o tópico de áreas de figuras planas, com enfoque nas grandes áreas. Para tal pesquisa testamos o potencial da utilização do teodolito caseiro como ferramenta didática e inovadora, para auxiliar no cálculo de grandes áreas. O estudo foi feito com alunos da 2ª série de uma escola pública de Ensino Médio localizada na zona rural de Parauapebas, sudeste do Pará.

As considerações aqui citadas dão-se mediante aplicação da sequência didática (produto educacional) proposta nesta pesquisa, que foi composto por três atividades, sendo a atividade 1: Cálculo da área das paredes da sala de aula; atividade 2: Cálculo da área das paredes da frente da escola; atividade 3: Cálculo da área onde a escola foi construída. Considerando o resultado do relatório de análise dos resultados. Após a aplicação e análise, verificou-se que a sequência de fato trouxe resultado satisfatório ao problema de pesquisa: Qual a potencialidade da aprendizagem de área, no ensino médio, a partir do uso de um teodolito caseiro?

Para que esta pesquisa fosse concebida, a revisão de literaturas foi de grande importância no sentido de buscarmos trabalhos que se aproximasse do tema pesquisado. É importante notar o teor inovador de tal pesquisa, uma vez que se destaca em relação as demais pelo uso do teodolito caseiro como ferramenta didática para o cálculo de áreas.

A sequência didática foi aplicada em grupo, para que os alunos pudessem ter mais facilidade na mobilização dos objetos matemáticos necessários para realização da mesma, em que cada componente do grupo tinha uma função, e assim, fosse possível compartilhar e participar de toda a atividade.

Durante a realização das atividades surgiram algumas dúvidas, em especial sobre os objetos matemáticos. Ao surgirem essas questões o pesquisador instigava os alunos a encontrarem o caminho viável para resolução da situação, e nunca apresentava uma resposta de imediato, uma vez que a Modelagem matemática é exatamente este caminho percorrido até chegar ao modelo matemático.

Na aplicação da atividade 1, os alunos tiveram mais dificuldades em mobilizar os conhecimentos matemáticos necessários, porém aos poucos foram ganhando mais autonomia. Na atividade 2 os educandos mostraram-se com mais autonomia para realizar o problema proposto. Na atividade 3 os grupos já eram capazes de escolher o caminho a ser usado na realização da atividade.

Durante a aplicação da sequência didática os alunos mostram-se sempre muito interessados, em especial pelo uso do teodolito, todos queriam mirar o ângulo no dispositivo. Enfatizando assim o potencial do uso dessa ferramenta didática: o teodolito caseiro.

Quanto ao objetivo geral dessa pesquisa: investigar as potencialidades da aplicação de uma sequência didática baseada na Modelagem Matemática, e a confecção e uso do teodolito caseiro para auxiliar no cálculo de grandes áreas no ensino aprendizado de cálculo de áreas no Ensino Médio. Nota-se que o uso do teodolito caseiro tem grande potencialidade para ser explorado como ferramenta didática para o ensino de cálculos de grandes áreas, pois instigou os alunos a mobilizarem conhecimento, além de aguçar o interesse dos alunos pelo tema. Pode-se dizer ainda que de acordo com as análises dos resultados os objetivos específicos dessa pesquisa foram alcançados.

Ressaltamos ainda que os resultados considerados tem grande fundamento na forma inovadora da abordagem do objeto matemático por meio do teodolito caseiro.

Durante a aplicação da sequência didática ponderamos algumas dificuldades e limitações:

- A maioria dos alunos são de rota, e com diversos problemas nos transportes, tivemos que remarcar várias vezes a aplicação das atividades;
- Ao trabalharmos com calculadora científica, optamos por usar um app, que se tornou mais acessível aos alunos;
- Alguns alunos tiveram dificuldades em mobilizar os conhecimentos acerca de trigonometria no triangulo retângulo.

Espera-se com este trabalho, que outros professores possam fazer uso dessa metodologia inovadora, como forma de ensino de cálculo de grandes ou de forma adaptada com outros tópicos, de acordo com a necessidade do professor. Além disso, esperamos que sirva de apoio, como referencial teórico para outros pesquisadores pelo seu teor inovador e eficaz.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEX, Alex Fernando de. **Uma discussão a respeito do estudo de área a partir da integração de material concreto e dinâmico**. Monografia - universidade federal da fronteira sul, Chapecó, 2022.

ARAÚJO, Lise CanÁrio de. Cálculo de áreas: **Um Meio Atrativo para o enriquecimento do Ensino da Matemática**. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal da Bahia, Bahia, 2013.

BANDEIRA, Edvan. **Papiro de Rhind**. Disponível em: <http://www. https://astronomiareal.wordpress.com/2019/05/05/papiro-de-rhind-registros-matematicas-de-1650-a-c/> Acessado em 10 de setembro de 2023.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por quê? Como? **Veritati**: revista da UCSal. Salvador: Universidade Católica do Salvador, n. 4, p.73-80, 2004. Disponível em: <http://www.somaticaeducar.com.br/arquivo/material/142008-11-01-12-27-33.pdf> Acesso em 01 de setembro de 2023.

BASSANEZI, Rodney C. **Ensino-Aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. Ed. Contexto, 2ª edição, São Paulo, 2004.

BIENBENGUT, M. S; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2009.

CÂNDIDO, Luana Patrícia Silva. **Áreas e distancias na agrimensura: uma proposta prática de modelagem matemática para ensino fundamental e médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2016.

CUSTÓDIO, Alessandro Luis. **Cálculo de áreas de figuras planas e espaciais com aplicações ao ensino fundamental e médio**. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar 9:** geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

GUEDES, Aurílio da Silva. **Evolução do cálculo de áreas de figuras planas: de Arquimedes a Newton**. Dissertação (Mestrado profissional em rede nacional) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar, 3** : trigonometria. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

IMAFUKU. R. S et al. Uma análise das dificuldades de ingressantes no Ensino Médio na resolução de questões sobre área e perímetro. **Revista Recet**, São Paulo, v. 2, p. 04 - 24, 2021.

LIMA, Wecsley Fernandes. **O princípio de Cavalieri como método de demonstração e fundamentação¸ ao para o cálculo de áreas e volumes**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2015.

PEREIRA, Lucas Rodrigues. **Práticas de Ensino em Geometria Plana**. **Dissertação** (Mestrado Profissional) – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, Teófilo Otoni, 2017.

PINHEIRO, Tassia C. S. **Análise de Registros de Representação Semiótica em uma Atividade Matemática com Ribeirinhos Muanenses**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2015.

QUITÃN, Bárbara Sóta. **O conceito de área sob uma perspectiva investigativa, concreta e contextualizada**. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, RJ, 2018.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de História da**

SILVA, J. A. L. **Modelagem Matemática e o ensino da geometria plana em atividades remotas para o 8° ano**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2021.

SOUZA, Pablo Henrique dos Santos. **Gamificação voltada para ensino da Geometria plana**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2020.

SOUZA, Tânia Pinto dos Santos. **O uso do desenho geométrico como motivador de aprendizagem no ensino de área de figuras planas**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Cruz das Almas, 2015.

VASLONCELOS, Nathália Melo do Bem. **Abordagem prática dos conceitos de área e perímetro a partir da planta baixa de uma escola**. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Campos dos Goytacazes, 2019.

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/pmpem