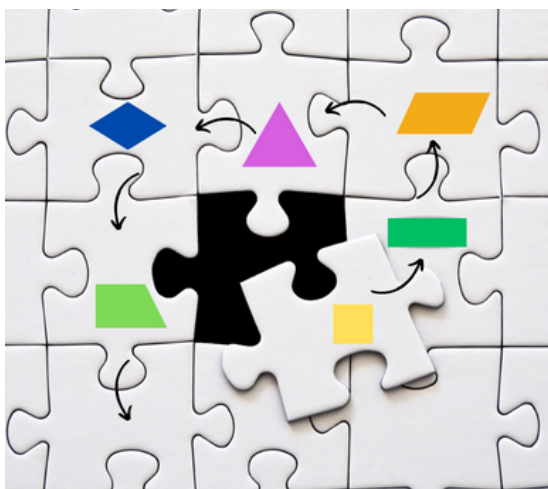


EXPLORANDO O ENSINO DE ÁREAS NO ENSINO FUNDAMENTAL ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS



Produto Educacional

Caroline Friedel
André Vanderlinde da Silva

SUMÁRIO

Sumário	2
1 CARTA AO LEITOR	3
2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	5
3 O ENSINO DE ÁREAS NO ENSINO FUNDAMENTAL	18
4 CADERNO DE PROBLEMAS	28
5 CONSIDERAÇÕES AO LEITOR	59
REFERÊNCIAS	60

1 CARTA AO LEITOR

Este produto educacional foi elaborado a partir da pesquisa da dissertação de Caroline Friedel, intitulada "O Ensino do conceito de Área através da Resolução de Problemas", orientada pelo Professor Dr. André Vanderlinde da Silva, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau.

Este produto é classificado como um material didático e contempla uma proposta de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas direcionada para o Ensino do conceito de Áreas. Esta proposta foi aplicada em uma turma de 8º ano de uma escola pública do município de Rio do Sul, Santa Catarina. Este material apresenta uma sequência didática composta de seis problemas que envolvem o ensino de áreas dos seguintes polígonos: quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo, losango e trapézio. Ao finalizar a aplicação dos problemas apresentamos uma proposta de atividade que propõe a elaboração de problemas pelos estudantes.

O principal objetivo deste material é auxiliar os professores na implementação dessa proposta em sala de aula, especialmente em relação ao tema Áreas. Espera-se, com essa leitura, que você, professor, compreenda a importância de promover o desenvolvimento conceitual das formulas de cálculo de áreas com os estudantes. Além disso, é esperado que a leitura possa esclarecer eventuais dúvidas em relação à implementação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, proporcionando valiosas orientações para integrá-la à sua prática diária

em sala de aula.

Este material não é apenas um recurso, é um convite para você, professor, transformar a experiência de aprendizado matemático. Desafie-se a torná-la envolvente e significativa por meio da prática da Resolução de Problemas.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Este material didático foi desenvolvido com objetivo de auxiliar professores a implementar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, através da Resolução de Problemas em sala de aula, envolvendo o tema Áreas. Nesta Metodologia¹ proposta por Allevato e Onuchic (2021), a Resolução de Problemas não é apenas uma ferramenta, mas é a essência que capacita os estudantes a construírem novos conhecimentos matemáticos.

Preparamos algo especial para você, professor. Apresentaremos detalhadamente como acontece o ensino por meio dessa Metodologia, explorando as etapas que são propostas para sua implementação. Além disso, abordaremos questionamentos frequentes relacionados ao uso dessa Metodologia em sala de aula.

O que definimos como um Problema?

Antes de aprofundarmos como acontece o ensino por meio dessa Metodologia, convidamos você a refletir sobre a essência de um "problema". Problemas aparecem não apenas na Matemática, mas em diversas situações do cotidiano.

¹ Ao longo do texto, utilizaremos apenas a palavra Metodologia (com letra maiúscula) para designar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, a fim de evitar repetições.

A seguir, exploraremos as definições conceituais de um problema, fundamentadas nas perspectivas de estudiosos no campo da Matemática. Conforme citado em Van de Walle (2009, p.57), Hiebert define um problema como "qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método "correto" específico de solução". Da mesma forma, Lester, citado em Echeverría e Pozo (1998, p. 15), define um problema como "uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução". De acordo com Onuchic e Allevato (2011, p. 81), um problema "é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer".

Em todas essas concepções, é perceptível que um problema matemático não é algo que se resolve instantaneamente. Pelo contrário, ele deve incentivar o estudante a pensar, a desafiá-lo ao apresentar uma situação para a qual o estudante ainda não tem a solução imediata, mas deve estar motivado a desvendá-la.

Existe diferença entre Problema e Exercício?

Sim. Enquanto um exercício se concentra na prática de um conteúdo já conhecido pelos estudantes explorando a repetição de técnicas e algoritmos, a resolução de um problema demanda criatividade

e enfrentamento de desafios, impulsionando o desenvolvimento de diversas habilidades.

Como acontece o ensino por meio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

Ao contrário da abordagem convencional de resolução de problemas nas aulas de matemática, em que o objetivo é resolver problemas, ou ainda quando o professor ensina determinado conteúdo matemático para depois utilizá-lo e aplicá-lo na resolução de problemas, esta Metodologia segue um caminho distinto, ao considerar a Resolução de Problemas como uma Metodologia de ensino.



[...] os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2009, p. 142)

Nesse sentido, ao ensinar por meio dessa Metodologia, estamos invertendo a dinâmica do ensino tradicional, pois a partir da resolução de um problema o estudante irá construir o conhecimento matemático, sendo o protagonista de sua aprendizagem.

Em síntese, nessa Metodologia, os estudantes organizados em pequenos grupos trabalharão na resolução do problema proposto, inicialmente sem intervenção do professor. Posteriormente, as soluções serão compartilhadas com a turma, e ao final desse processo o professor formalizará o conteúdo matemático, apresentando definições, nomenclaturas e a linguagem matemática apropriada para a Resolução do Problema.

O que é necessário para que um problema seja considerado um problema gerador de conhecimento matemático?

A escolha do problema é de fundamental importância nessa Metodologia. O problema escolhido é chamado de problema gerador, precisa instigar a curiosidade do estudante e, ao mesmo tempo, não deve fornecer explicitamente um algoritmo a ser seguido para sua resolução, pois, dessa forma, ele passa a ser um exercício.



O problema gerador visa à construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento; ou seja, o conteúdo matemático necessário ou mais adequado para a resolução do problema ainda não foi trabalhado em sala de aula. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021, p. 49)

Como ocorre a avaliação nessa Metodologia?

A avaliação nessa Metodologia é contínua, e envolve a observação e a análise do desempenho do estudante ao longo de todo o processo da Resolução do Problema. O nome da Metodologia indica a relação entre os termos ensino, aprendizagem e avaliação.



A palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação tem o objetivo de expressar uma concepção em que o ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento pelo aluno, com o professor atuando como guia e mediador. Desse modo, nessa Metodologia, a avaliação é realizada durante a resolução de problemas [...]. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2021, p. 47)

A aplicação dessa Metodologia em sala de aula representa uma preocupação devido ao tempo que ela pode exigir?

Alguns professores podem se sentir pressionados pelo tempo dedicado ao implementar essa proposta em sala de aula, especialmente quando há uma quantidade significativa de conteúdos a ser ensinada no currículo, além das avaliações padronizadas as quais são cobrados em preparar os estudantes . No entanto, é importante notar que a implementação dessa Metodologia não representa uma perda de tempo.



De fato, muitas vezes, ela pode economizar tempo ao proporcionar um ensino de qualidade e pois, "[...] passamos muito tempo reensinando porque os alunos não retêm as ideias. O tempo gasto para ajudá-los a desenvolver redes significativas de ideias reduz drasticamente a necessidade de reensinar e de recuperação, criando, assim, tempo a longo prazo". (VAN DE WALLE, 2009, p. 76)

Vale considerar que mesmo nas aulas tradicionais, a alocação de tempo para ensinar o conteúdo é uma necessidade, e a Resolução de Problemas pode ser uma maneira eficiente de atingir os objetivos educacionais de forma mais profunda e envolvente.

Ao implementar essa Metodologia em sala de aula ela deve ser a base para todas as aulas de Matemática?

Essa Metodologia não precisa ser a base para todas as aulas. Segundo Cai e Lester (2012, p. 152), é necessário observar que “[...] não estamos dizendo que todas as tarefas com que os estudantes se deparam devam ser problemáticas. Se o objetivo de uma aula é desenvolver e dominar certas habilidades, alguns exercícios são necessários”.

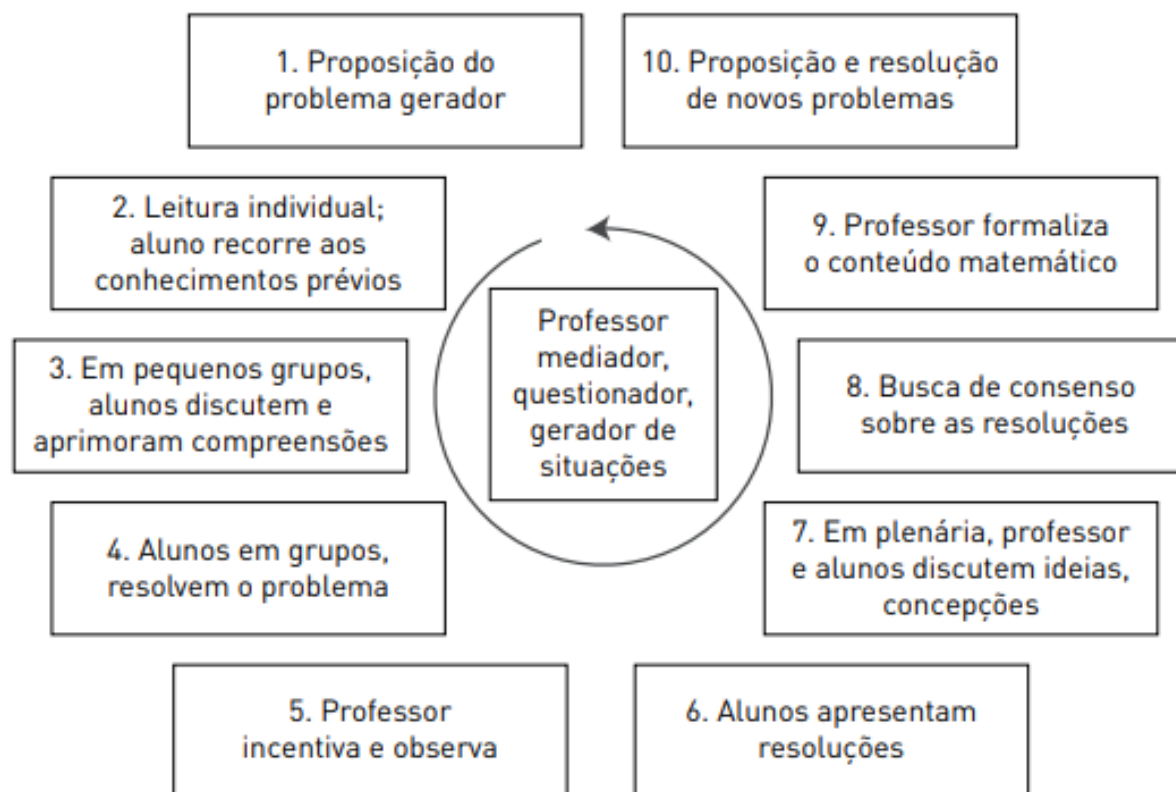
Explorando as Etapas: Da Teoria à Prática

Após introduzirmos alguns questionamentos importantes sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, agora é o momento de conhecermos um roteiro composto por 10 etapas que foi desenvolvido com objetivo de facilitar a aplicação dessa Metodologia em sala de aula. Essas etapas, propostas por Allevato e Onuchic (2021), estão expressas na Figura 2.1.

Faremos um breve relato de cada etapa apresentando ideias sobre como implementar efetivamente essa Metodologia em sala de aula.

A primeira etapa, **proposição do problema gerador**, consiste na organização do professor em buscar o problema a partir do qual ocorrerá a construção de um novo conceito ou conteúdo matemático,

Figura 2.1 – Esquema da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas



Fonte: Allevato e Onuchic (2021, p. 51)

considerando que o conteúdo matemático que deverá ser utilizado pelos estudantes na resolução do problema ainda não pode ter sido explorado em sala de aula. Esse problema pode ser sugerido pelos próprios estudantes, elaborado pelo professor ou ainda retirado de livros e apostilas e ser adaptado para tal situação.

Na segunda etapa, **leitura individual; aluno recorre aos conhecimentos prévios**, o estudante deve fazer a leitura do problema proposto pelo professor de forma individual, antes do professor fazer a leitura. Além disso, o estudante precisa pensar sobre o problema e desafiar-se a usar seus conhecimentos prévios em busca de uma solução. Nessa etapa, não deve ocorrer a interferência por parte do professor.

A terceira etapa, **em pequenos grupos, estudantes discutem e aprimoram compreensões**, o professor pode auxiliar, fazendo questionamentos, lendo o problema com o grupo para facilitar na compreensão, porque muitas vezes a leitura do problema pelo professor favorece a interpretação, considerando as dificuldades em interpretar dos estudantes .



As dificuldades de interpretação por parte dos estudantes não devem ser subestimadas, uma vez que afetam não apenas a matemática, mas também outras disciplinas e contextos. O professor desempenha um papel crucial nesta etapa ao facilitar a discussão, promover a troca de ideias e esclarecer possíveis dúvidas.

Além disso, Van de Walle (2009) afirma que é importante formar grupos heterogêneos, unindo estudantes com diferentes níveis de habilidade, incluindo tanto aqueles que enfrentam maiores desafios como os mais habilidosos. Essa abordagem cria um ambiente colaborativo propício à troca de conhecimentos e experiências entre os estudantes.

A quarta etapa, **alunos em grupo resolvem o problema**, consiste na resolução do problema proposto nos pequenos grupos, através dos conhecimentos prévios dos estudantes para, posteriormente, construir-se o conteúdo matemático ainda desconhecido para a turma. Para solucionar o problema, os estudantes podem utilizar de figuras, gráficos, tabelas ou elementos que julgarem necessários para se chegar em uma solução. O registro escrito é essencial nesta etapa.



De acordo com Van de Walle (2009, p. 49), nesta etapa: "[...] os estudantes compartilham ideias e resultados, comparam e avaliam estratégias, desafiam resultados, determinam a validade das respostas e negociam ideias sobre as quais todos podem concordar".

A quinta etapa, **professor incentiva e observa**, o professor se coloca como mediador, observador, questionador, auxiliando os estudantes a avançarem na resolução.



Nessa etapa, o professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. (ONU-CHIC; ALLEVATO, 2009, p. 141)

Na sexta etapa, **alunos representam resoluções**, os estudantes apresentam resoluções na lousa. Um integrante de cada grupo registra na lousa as conclusões e estratégias de resolução discutidas no grupo, e explica os caminhos que levaram o grupo a chegar em determinada solução.

Na sétima etapa, **em plenária, professor e alunos discutem ideias, concepções**, a turma discute os processos de resolução registrados na lousa, as dificuldades encontradas, as diferentes respostas e estratégias, e cada grupo tem oportunidade de defender e justificar suas ideias.

Na oitava etapa, **busca do consenso sobre as resoluções**, busca-se determinar qual foi o método mais eficiente ou menos eficiente para solucionar o problema discutido. Nesse momento, o professor juntamente com os estudantes chegam a um consenso da solução mais adequada para o problema.

Na nona etapa, **professor formaliza o conteúdo matemático**, consiste na formalização do conteúdo após todo o processo de reflexão e discussão de ideias. Nessa etapa, o professor apresenta na lousa um conteúdo matemático que formaliza a temática do problema, destacando propriedades e definições matemáticas.



Este é o momento que o professor deve apresentar a linguagem matemática de forma clara e precisa, "[...] padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto". (ONUChic; ALLEVATO, 2009, p. 141)

A décima etapa, a **proposição e resolução de novos problemas**, propõe aos estudantes elaboração de novos problemas ou a reformulação do problema gerador, em que é possível averiguar a aprendizagem e ainda ampliar a aprendizagem.

Quando os estudantes criam novos problemas relacionados ao problema gerador, isso possibilita a avaliação da compreensão matemática, consolidação de conhecimentos anteriores e ampliação do aprendizado, gerando uma sequência de resolução que resulta em novos desafios e conhecimentos matemáticos. A proposição de problemas fomenta a criatividade, estimula o raciocínio crítico e contribui para o aprendizado da matemática.

É obrigatório expor cada uma destas etapas ao implementar a Metodologia em sala de aula?

As etapas mencionadas acima são de grande relevância. No entanto, o professor não está obrigado a expor todas elas aos estudantes como se fossem instruções fixas para todas as ativida-

des. Essas etapas sugeridas podem ser adotadas de maneira informal, sem impor aos estudantes a obrigatoriedade de seguir cada uma delas de maneira restrita.

É importante destacar ainda que as etapas propostas nessa Metodologia são apenas sugestões, o que não implica em um processo rígido. O roteiro proposto pode ser adaptado, porém é essencial considerar três princípios irrevogáveis: iniciar com um problema gerador, formalizar o conteúdo após a resolução dos problemas, com os estudantes atuando como protagonistas da aprendizagem e o professor como mediador desse processo. De fato, nesta proposta, o roteiro já passou por adaptações, incluindo a décima etapa, que envolve a proposição e resolução de novos problemas, a ser realizada somente após a resolução dos seis problemas iniciais.



Agora que você já conheceu como funciona a Metodologia, desafiamos você, professor, a experimentar essa abordagem de Resolução de Problemas como uma oportunidade inovadora em sala de aula. Essa Metodologia tem o poder de transformar a dinâmica do ensino de Matemática, incentivando a curiosidade, promovendo a participação ativa dos estudantes e, acima de tudo, proporcionando uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos.

3 O ENSINO DE ÁREAS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Área é uma medida que quantifica a extensão de uma superfície, permitindo a expressão numérica da extensão de uma figura plana, e o estudo de áreas envolve compreender como medir e calcular o espaço dentro de figuras geométricas.

O ensino do conceito de Áreas precisa ir além da simples aplicação de fórmulas, buscando garantir que os estudantes compreendam o raciocínio subjacente aos cálculos. Esta abordagem, centrada no entendimento, não apenas promove a proficiência nas fórmulas, mas também estimula o pensamento crítico e a criatividade, preparando os estudantes para aplicar seus conhecimentos de maneira flexível em diversas situações.



No cenário atual do ensino de áreas, observa-se uma predominância na abordagem mecânica, com ênfase na memorização de fórmulas para o cálculo de áreas, muitas vezes desprovida de uma compreensão conceitual. Diante dessa realidade, surge a necessidade de explorar e investigar metodologias educacionais que possam aprimorar a compreensão de conceitos, promovendo uma aprendizagem significativa e, como consequência, melhorar o desempenho dos estudantes.

Ao implementar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas no ensino de Áreas, buscamos oferecer aos estudantes a oportunidade de explorar o desenvolvimento conceitual das fórmulas de cálculo de áreas. O objetivo é afastar-se da

aplicação mecânica e memorização de fórmulas sem uma compreensão conceitual.

O Ensino de Áreas e a BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada em 2017, orienta o currículo do Ensino Fundamental de 1º ao 9º ano no Brasil. O estudo de Áreas compete à unidade temática Grandezas e Medidas. Essa unidade temática, por sua vez, contribui para: "A consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico" (BRASIL, 2018, p. 273). O conceito de Áreas normalmente é ensinado em um contexto geométrico, devido à sua estreita relação com a Geometria, que é quem fornece o quadro conceitual e as ferramentas necessárias para seu cálculo e compreensão. Vale ressaltar que ambas as áreas do conhecimento, Geometria e Grandezas e Medidas, estão interligadas de maneira significativa.



Uma rica compreensão da Geometria tem implicações claras e importantes para outras áreas curriculares [...] Medidas e Geometria estão claramente alinhadas no desenvolvimento de fórmulas para áreas e volumes na compreensão das relações entre área e perímetro ou superfície e volume. (VAN DE WALLE, 2009, p. 438)

O Quadro 1 mostra a distribuição do conteúdo Área na BNCC com seus respectivos objetos de conhecimento e habilidades.

Quadro 1 – O estudo de Áreas de acordo com a BNCC nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Ano escolar	Unidade temática	Objeto de conhecimento	Habilidades
6º ano	Grandezas e Medidas	Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume	(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
6º ano	Grandezas e Medidas	Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado	(EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.
7º ano	Grandezas e Medidas	Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros	(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros. (EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.
8º ano	Grandezas e Medidas	Área de figuras planas Área do círculo e comprimento de sua circunferência	(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Fonte: (BRASIL, 2018)

Na unidade temática de Grandezas e Medidas, a BNCC determina que:

No Ensino Fundamental – Anos Finais, a expectativa é a de que os estudantes reconheçam comprimento, **área**, volume e abertura de ângulo como **grandezas associadas a figuras geométricas** e que consigam resolver problemas envolvendo essas grandezas com o uso de unidades de medida padronizadas mais usuais. [...] Nessa fase escolar, os alunos devem determinar expressões de cálculo de áreas de quadriláteros, triângulos e círculos. (p. 275 BRASIL, 2018, grifo nosso)

Desenvolvimento conceitual das fórmulas para o cálculo de Áreas de polígonos

A abordagem do desenvolvimento conceitual das fórmulas de cálculo de área destaca-se por envolver os alunos no processo real de fazer Matemática, permitindo que compreendam as ideias e relações subjacentes às fórmulas. Essa abordagem é respaldada pela BNCC, que enfatiza que o ensino de Áreas não deve se limitar à simples aplicação de fórmulas de cálculo de área (BRASIL, 2018).

Ao explorar o desenvolvimento das fórmulas de cálculo de área, buscamos proporcionar aos estudantes uma compreensão sólida e significativa dos princípios matemáticos envolvidos.



[...] os estudantes podem ver como todas as fórmulas de área estão relacionadas a uma ideia comprimento da base vezes o comprimento da altura. E os estudantes que compreendem de onde as fórmulas se originam, não as verão como algo misterioso e tenderão a se lembrar delas, além de serem reforçados na ideia de que a matemática faz sentido. O uso mecânico e memorizado de fórmulas de um livro não oferece nenhuma destas vantagens. (VAN DE WALLE, 2009, p. 429)

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, quando aplicada ao ensino de Áreas, oferece aos estudantes a oportunidade de explorar o desenvolvimento conceitual dessa temática, alinhando-se com a abordagem defendida por Van de Walle. O autor fornece um relato que apresenta como as fórmulas associadas aos paralelogramos, triângulos e trapézios estão interligadas.

Paralelogramos são realmente apenas retângulos que foram modificados para tornar seus lados inclinados. A área para ambos é $B \times h$ ou comprimento da base $\times$ altura.

Triângulos se mostram sendo simplesmente a metade de um paralelogramo com a mesma base e altura. A área de um triângulo é $\frac{1}{2} \cdot (B \times h)$.

Trapézios também estão relacionados a paralelogramos e triângulos. Por exemplo, todos os trapézios podem formar dois triângulos. As alturas de cada um deles são as mesmas. Use B para o lado paralelo mais longo e b para o menor e a área do trapézio será $\frac{1}{2} \cdot (B \times h) + \frac{1}{2} \cdot (b \times h)$ (Embora isso possa ser simplificado, essa versão da fórmula é um modo mais fácil de ser lembrado e reforça o processo utilizado). (VAN DE WALLE, 2009, p. 434)

Os polígonos explorados nos problemas geradores são: quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo, losango e trapézio. Com o objetivo de proporcionar uma visão clara das inter-relações que

pretendemos atingir ao aplicar a Metodologia proposta, seguindo a abordagem do autor, elaboramos o Quadro 2, que resume as principais conexões¹ a serem estabelecidas entre o cálculo de área dos polígonos e os problemas geradores.

Quadro 2 – Conexões entre o cálculo de área de polígonos

Polígono	Conexão associada
Quadrado e retângulo	A área de um quadrado e de um retângulo é determinada comparando a superfície da figura plana com uma unidade de medida de área. Essa área é calculada multiplicando-se a medida do comprimento da base pela medida do comprimento da altura.
Paralelogramo	A área de um paralelogramo é análoga à do retângulo, quando ambos compartilham a mesma medida de base e altura.
Triângulo	A área de um triângulo é igual à metade da área de um paralelogramo quando ambos compartilham a mesma medida de base e altura.
Losango	Ao traçar a diagonal de um losango, é possível decompor a região limitada pelo losango em dois triângulos, resultando a área do losango como a soma das áreas desses dois triângulos.
Trapézio	É possível decompor a região limitada por um trapézio ao traçar sua diagonal. A área do trapézio pode ser obtida somando as áreas dos dois triângulos resultantes dessa decomposição.

Fonte: Elaborado pela autora

¹ No material voltado ao professor apresentado no Caderno de Problemas, buscamos explorar brevemente o desenvolvimento dessas conexões.



As demonstrações e as conexões das fórmulas para o cálculo de área dos polígonos mencionados no Quadro 2, podem ser encontradas na íntegra, no texto da dissertação de Friedel (2024), no livro de Geometria escrito por Neto (2013) ou ainda no livro "Fundamentos de Matemática Elementar – Geometria Plana" escrito por Dolce e Pompeo (2013).

Etapas consideradas na elaboração dos problemas geradores

Com base nas teorias discutidas nos Capítulos 2 e 3, desenvolvemos um ciclo que orientará a implementação da sequência didática em relação ao tema áreas em sala de aula. Esse ciclo deverá ser guiado pelas etapas da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas. A Figura 3.1 ilustra esse ciclo.

O ciclo consiste em três etapas:

1. Problema Gerador: nesta etapa é apresentado um problema gerador que envolve o cálculo de áreas de polígonos, com o propósito de desafiar os estudantes e fornecer um contexto prático para a aprendizagem.
2. Cálculo da Área: durante este momento, os estudantes realizam o cálculo da área do polígono proposto no problema utilizando os conhecimentos prévios.

Com base nesse ciclo, a ordem dos problemas propostos no Caderno de Problemas terá como objetivo desenvolver noções geométricas de forma progressiva, proporcionando aos estudantes uma compreensão gradual das fórmulas de área de polígonos.

Problemas geradores envolvendo Áreas

Finalizamos este capítulo ao apresentar o Quadro 3, com a descrição dos problemas geradores, que serão abordados no Capítulo 4. Este quadro destaca a descrição dos problemas propostos, bem como, seus objetivos de aprendizagem correspondentes.

Quadro 3 – Descrição dos problemas propostos

Problemas	Objetivos de Aprendizagem	Descrição
Problema 1 – Explorando o conceito de Área na malha quadriculada	Promover a compreensão do conceito de áreas.	Determinar a quantidade de material necessário para a produção de um vitral, levando em consideração as diferentes áreas coloridas de figura apresentada em uma malha quadriculada.
Problema 2 – Explorando a Área de quadrados e retângulos em um campo de futebol.	Compreender e calcular a área do retângulo e do quadrado; Formular expressões ou estratégias para calcular a área de um retângulo qualquer.	O problema desafia os estudantes a determinar quantas peças quadradas de grama cabem em um campo de futebol retangular. Eles são incentivados a desenvolver métodos de cálculo, explorando conhecimentos prévios e, em seguida, a generalizar uma estratégia para calcular a área de um retângulo qualquer.
Problema 3 – Desvendando o paralelogramo: explorando Áreas com o Tangram.	Compreender e calcular a área do paralelogramo; Formular expressões ou estratégias para o cálculo da área de um paralelogramo qualquer.	O problema consiste em calcular a área de um paralelogramo formado pelas sete peças do Tangram. Nesse contexto, os estudantes são desafiados a demonstrar habilidades de composição e decomposição de figuras, culminando na generalização de um método para calcular a área de um paralelogramo qualquer.
Problema 4 – A área triangular em bandeirinhas .	Compreender e calcular a área de um triângulo; Formular expressões ou estratégias para o cálculo da área de um triângulo qualquer.	Este problema visa descobrir a área de papel em formato triangular desperdiçada na confecção de bandeirinhas. Posteriormente, espera-se que os estudantes estabeleçam expressões para calcular a área de um triângulo qualquer.
Problema 5 – A área de uma pipa em formato de losango	Compreender e calcular a área de um losango; Formular expressões ou estratégias para calcular a área de um losango qualquer.	Este problema envolve o cálculo da quantidade de papel necessária para confeccionar uma pipa em formato de losango. A seguir, o objetivo é encontrar uma maneira de calcular a área de um losango qualquer.
Problema 6 – A área de um terreno em formato de trapézio	Compreender e calcular a área de um trapézio; Formular expressões ou estratégias para calcular a área de um trapézio qualquer.	Neste problema, inicialmente, o objetivo é calcular a área de um jardim localizado em um terreno com formato de trapézio, considerando que uma parte já está ocupada por uma casa quadrada. Posteriormente, espera-se que os grupos desenvolvam expressões para calcular a área de um trapézio qualquer.

Fonte: Elaborado pela autora

4 CADERNO DE PROBLEMAS

O Caderno de Problemas envolvendo Áreas é composto pelos problemas apresentados no Quadro 4.

Quadro 4 – Caderno de Problemas

Problema 1- Explorando o conceito de Área na malha quadriculada
Problema 2- Explorando a Área de quadrados e retângulos em um campo de futebol
Problema 3- Desvendando o paralelogramo: explorando Áreas com o Tangram
Problema 4- A Área triangular em bandeirinhas
Problema 5- A Área de uma pipa em formato de losango
Problema 6 - A Área de um terreno em formato de trapézio

Fonte: Elaborado pela autora

Após finalizar a Resolução dos Problemas apresentados no Quadro 4, a proposta é que os estudantes elaborem seus próprios problemas relacionados ao conteúdo Áreas.

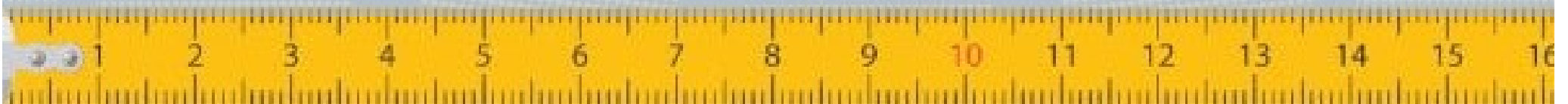
Nesse contexto, a proposição e resolução de novos problemas, é considerada a décima etapa sugerida na implementação da Metodologia detalhada na Figura 2.1, que tem como objetivo avaliar a

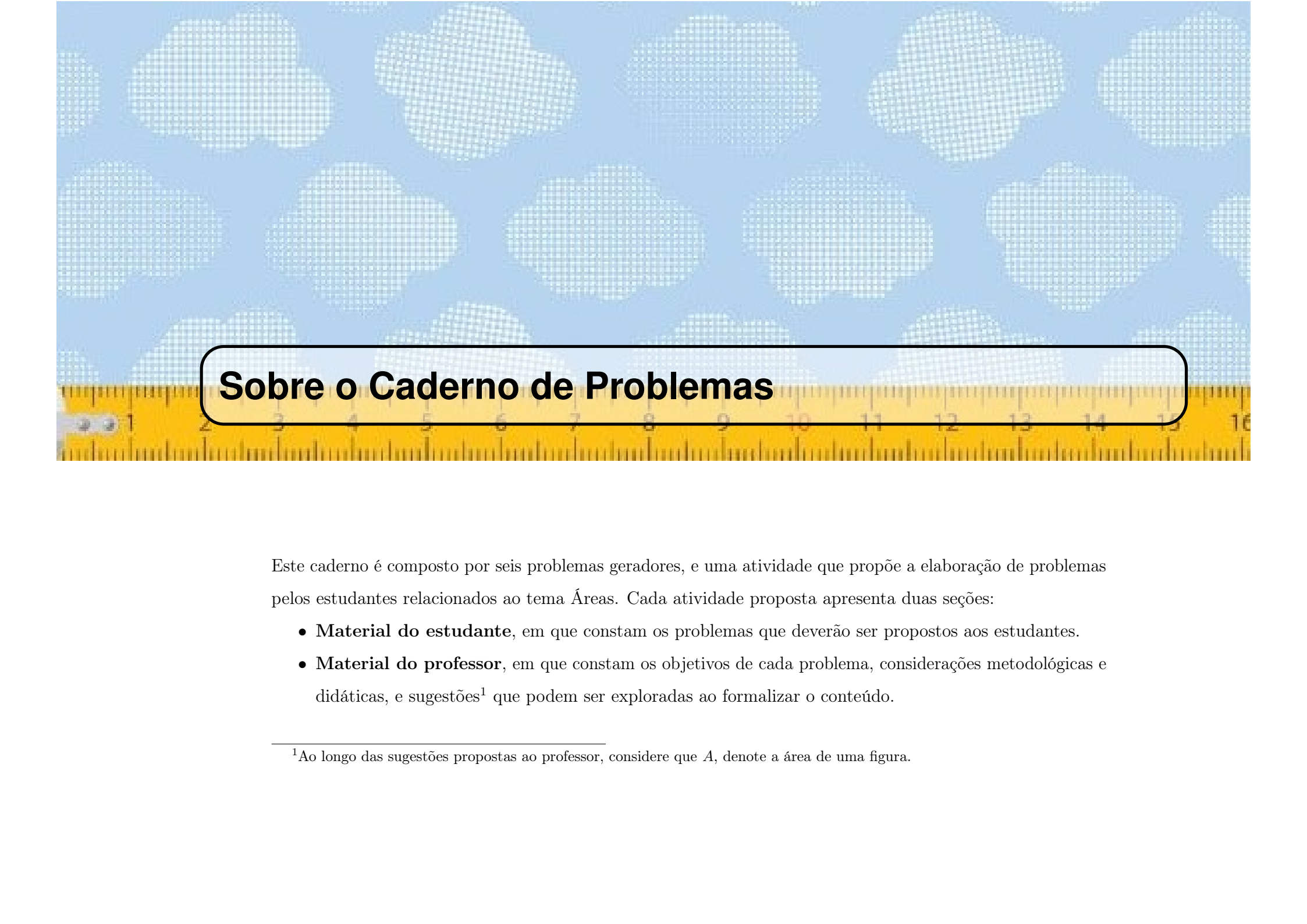
avançar nas aprendizagens decorrentes dos problemas geradores.



As atividades propostas no Caderno de Problemas foram desenvolvidas em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental, em uma escola pública do município de Rio do Sul e está documentada na dissertação de Friedel (2024). O tempo médio dedicado ao desenvolvimento de cada atividade proposta foi de duas aulas, com duração de 45 minutos cada.

Caderno de Problemas envolvendo Áreas





Sobre o Caderno de Problemas

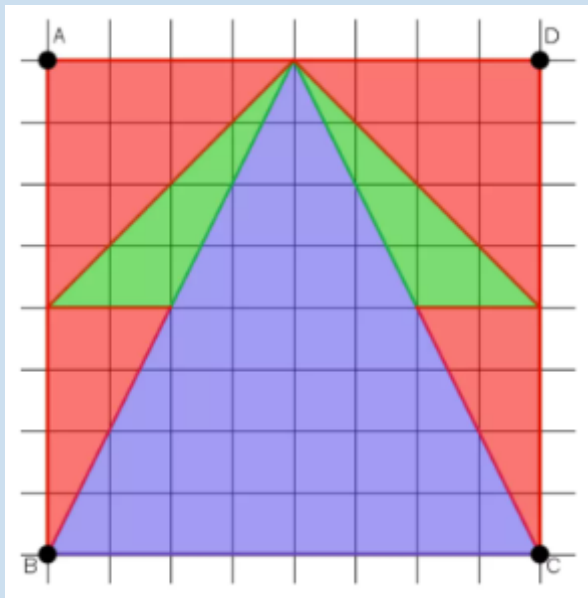
Este caderno é composto por seis problemas geradores, e uma atividade que propõe a elaboração de problemas pelos estudantes relacionados ao tema Áreas. Cada atividade proposta apresenta duas seções:

- **Material do estudante**, em que constam os problemas que deverão ser propostos aos estudantes.
- **Material do professor**, em que constam os objetivos de cada problema, considerações metodológicas e didáticas, e sugestões¹ que podem ser exploradas ao formalizar o conteúdo.

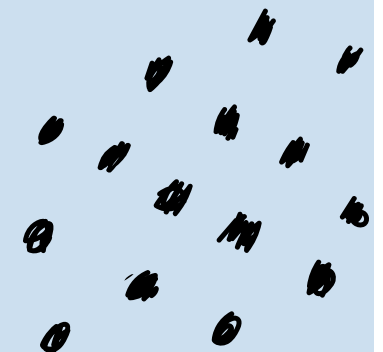
¹Ao longo das sugestões propostas ao professor, considere que A , denote a área de uma figura.

Problema 1: Explorando o conceito de Área na malha quadriculada

Marta está confeccionando um vitral com a forma representada abaixo. Cada quadrado na figura tem uma área de 1 m^2 . Qual a quantidade mínima, em metros quadrados, necessária de material nas cores vermelha, verde e roxa que Marta precisará comprar?



Fonte da imagem: <https://novaescola.org.br/>





MATERIAL DO PROFESSOR

- **Objetivo do problema**

O objetivo deste problema é determinar a quantidade de material necessário para a produção de um vitral, levando em consideração as diferentes áreas coloridas da figura. Ao analisar a figura do vitral, cada quadradinho representa 1 m^2 . A tarefa consiste em rearranjar esses quadradinhos de forma estratégica para facilitar a contagem e, por fim, determinar a quantidade de material necessário em cada cor (vermelho, verde e roxo). Essa abordagem visa promover a compreensão do conceito de áreas e a aplicação desse conhecimento em um contexto visual e criativo, como a produção de um vitral.

Considerações didáticas e metodológicas

Para implementar essa atividade em sala de aula, o problema proposto no material do estudante deve ser distribuído para cada estudante, permitindo que cada um realize uma leitura individual e busque soluções antes de se reunirem em grupos para discutir e abordar as diferentes perspectivas e estratégias de resolução.

Posteriormente, é recomendável que o professor inicie dividindo a turma em pequenos grupos, garantindo uma composição heterogênea para estimular a colaboração entre os estudantes. Nessa etapa, os estudantes em grupos buscam discutir estratégias e solucionar o problema proposto. Este processo consolida a segunda, terceira, e quarta etapa da Metodologia proposta para a resolução do problema.

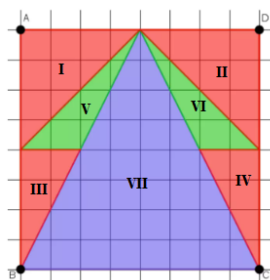
Após a conclusão da resolução do problema pelos grupos, um representante de cada grupo registra na lousa suas soluções. Em seguida, durante a plenária, as estratégias são debatidas e comparadas entre os grupos, e o professor desafia os estudantes, orientando-os para alcançar um consenso, visando a obtenção da resolução



mais coerente.

O professor deve garantir durante a discussão em plenária, que o conceito de área seja completamente compreendido pelos estudantes. No contexto deste problema, a finalidade não é saber calcular a área de cada polígono específico, já que esse será o objetivo dos próximos problemas, o objetivo é explorar a decomposição do vitral em polígonos, destacando suas particularidades. Por meio dessa decomposição, os estudantes podem determinar o cálculo da área total do vitral, promovendo uma compreensão profunda e prática do conceito de área. Neste problema, é interessante mostrar aos estudantes que o vitral² poderia ser decomposto criando as figuras I, II, III, IV, V, VI e VII que podem ser observadas na Figura 1.

Figura 1: Decomposição do vitral em polígonos



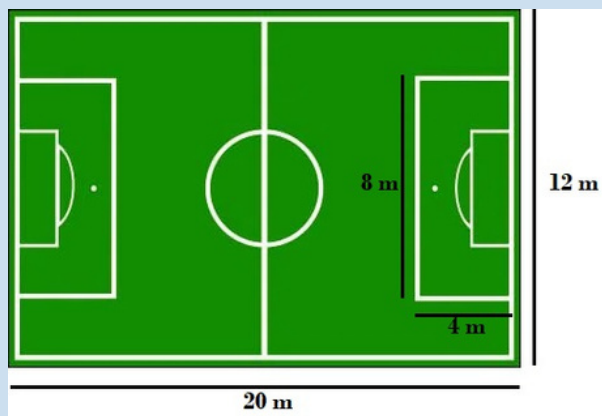
²É fácil perceber que juntando os triângulos I e II é possível compor um quadrado de área 16 m^2 , e juntando os triângulos III e IV é possível compor um retângulo de área 8 m^2 . Logo, a quantidade de material vermelho será 24 m^2 . Juntando os triângulos verdes, V e VI, formamos 8 quadradinhos completos. Logo, a quantidade de material verde será 8 m^2 . É possível dividir o triângulo roxo, de número VII, de modo a compor um retângulo composto por 32 quadradinhos, ou seja, terá área 32 m^2 . Logo, a quantidade de material roxo será 32 m^2 .



Ao formalizar o conteúdo, é fundamental que o professor leve em consideração as estratégias de resolução apresentadas pelos grupos. Ao demonstrar a decomposição do vitral em polígonos conhecidos, os estudantes podem começar a perceber padrões e estratégias. Além disso, é importante que o professor reforce que para medirmos a superfície de um polígono, precisamos compará-la com uma unidade de medida de área. Essa unidade de medida corresponde a uma figura unitária, isto é, de dimensões unitárias. A partir daí, podemos verificar quantas vezes essa figura unitária “cabe” na região que queremos medir. É importante destacar que qualquer região quadrada cujo lado meça 1 unidade de medida terá, por definição, área igual a 1 unidade de medida ao quadrado (ou unidade de área).

Problema 2: Explorando a Área de quadrados e retângulos em um campo de futebol

Pretende-se cobrir um campo de futebol retangular com peças de grama. As peças de grama tem formato quadrado, cujos lados tem 1 metro por 1 metro. As dimensões do campo estão apresentadas na figura a seguir:



Com base nessas informações, responda:

(a) É possível cobrir o campo de futebol usando peças de grama inteiras ou são necessários pedaços das peças de grama? Explique como você faria para determinar quantas peças de grama deverão ser utilizadas para cobrir todo o campo, e diga qual é a quantidade necessária.

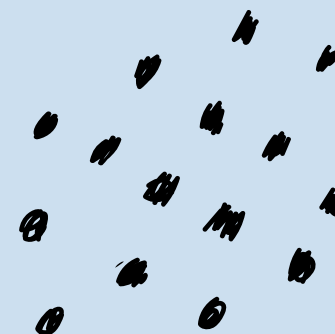
Material do Estudante



(b) Se apenas metade do campo fosse gramado, quantas peças de grama seriam necessárias? E ainda, se fossem gramadas apenas as grandes áreas, quantas peças de gramas seriam necessárias?

(c) O que aconteceria se as peças de grama medissem 50 centímetros por 50 centímetros?

(d) Você consegue encontrar uma forma para calcular a área de um retângulo qualquer? Explique.





MATERIAL DO PROFESSOR

- **Objetivo do problema**

O objetivo deste problema consiste em descobrir a quantidade de peças de grama quadradas que cabem num campo de futebol retangular. Espera-se que os estudantes mostrem a capacidade de estabelecer métodos para realizar esses cálculos, explorando seus conhecimentos prévios e, em seguida, busquem estratégias e generalizem expressões para calcular a área de um retângulo qualquer.

Considerações didáticas e metodológicas

O professor deve começar distribuindo uma cópia do problema contido no material do estudante para cada estudante. Os estudantes devem iniciar a resolução do problema através da leitura individual do enunciado, aplicando seus conhecimentos prévios na busca por uma solução. Essa fase é considerada a segunda etapa da Metodologia, em que cada estudante analisa o problema de forma independente, utilizando seus conhecimentos e habilidades para compreender a situação apresentada.

Na sequência, os estudantes são incentivados a formar grupos³, onde reexaminam o problema, compartilham ideias iniciais e desenvolvem estratégias colaborativas para abordar a resolução. Essa abordagem promove a troca de conhecimento e o desenvolvimento de habilidades de trabalho em grupo, encorajando uma compreensão mais ampla e aprofundada do desafio proposto.

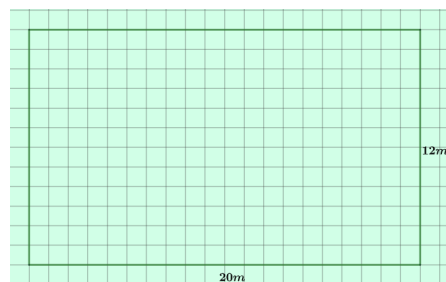
Uma tendência é que os estudantes expressem a área do campo futebol por meio de uma figura, o que torna

³É aconselhável que, ao longo dos problemas propostos, o professor mantenha os mesmos grupos formados na resolução do problema anterior, proporcionando continuidade nas interações estabelecidas entre os estudantes.



a ideia mais intuitiva, contabilizando os quadradinhos individualmente em uma malha quadriculada, como apresentado na Figura 2, evidenciando que o campo pode ser coberto por 240 quadradinhos⁴ de 1×1 , cada um com lado igual a 1 m, e área 1 m^2 . No entanto, ao formalizar o conteúdo, é importante que o professor destaque que não é necessário realizar essa contagem minuciosa, incentivando a compreensão de métodos mais eficientes para o cálculo da área do campo, em que para determinar a área de qualquer região retangular, basta multiplicar a medida do comprimento pela medida da largura. Além disso, é relevante instruir os estudantes de que a contagem desses quadradinhos é equivalente a área do campo de futebol.

Figura 2: Dimensões do campo de futebol



Cada equipe deve apresentar, durante a plenária, seus cálculos e o método utilizado para a contagem das peças de grama que cobrem todo o campo de futebol. Através dos cálculos, nos itens (a) e (b), espera-se que os estudantes percebam que todas as peças de grama se encaixarão integralmente no campo.

⁴Considerando que cada peça de grama tem formato quadrado, sua área será dada pela multiplicação das medidas de seus lados, ou seja, a área de cada peça de grama será: $A = lado \times lado = 1 \times 1 = 1$, ou seja 1 m^2 .



O item (c) propõe explorar o que aconteceria se as peças de grama medissem 50 centímetros por 50 centímetros. Essa pergunta requer atenção, pois é comum que os estudantes, de maneira imediata, sugiram que ao dividir a medida do lado pela metade, a área também seria reduzida pela metade, porém não é isso que acontece⁵. Este item permite diferentes estratégias para chegar a solução, espera-se que os estudantes usem a criatividade para solucioná-lo.

Nesse momento, o professor pode reforçar ainda que, no Sistema Internacional de Unidades, a unidade oficial de medida de área é o metro quadrado. O professor, ao formalizar os conceitos, deve explorar outras unidades de medida, principalmente em resposta ao questionamento do item (c), no qual os estudantes são instruídos a utilizar o centímetro nas dimensões da peças de grama. É relevante destacar aos estudantes que o centímetro quadrado é um submúltiplo do metro quadrado. Além disso, é importante que o professor aborde e explore as transformações entre essas unidades, garantindo uma compreensão abrangente do conteúdo.

Em relação ao item (d), espera-se que os estudantes busquem uma estratégia e generalizem uma expressão que permite calcular a área de um retângulo. Alguns grupos podem encontrar dificuldades ao formular uma expressão que represente a área de um retângulo qualquer. Nesse cenário, é papel do professor incentivar e orientar esses grupos, fornecendo o suporte necessário para que possam avançar na resolução do problema.

⁵Se for necessário, o professor pode mostrar que ao juntar 4 peças de grama, de lado medindo 50 cm, compomos uma peça de grama de dimensões 1 m $\times$ 1 m. Como 50 cm equivalem a 0,50 m, determinar área das peças de grama consiste em multiplicar suas dimensões, ou seja, $= 0,50 \times 0,50 = 0,25$, isto é 0,25 m². Como cada peça tem área 0,25 m², e para que essas peças de 0,25 m² sejam capazes de cobrir 1 m², é necessário que tenhamos 4 peças. Portanto, considerando que ao utilizar peças de 1 m², foram necessárias 240 peças para cobrir o campo, basta agora multiplicar esse valor por 4, então serão necessárias 960 peças de grama.



Ao formalizar o conteúdo, é válido procurar um acordo neste ponto, pois ao definir uma fórmula em conjunto facilitará a resolução das próximas atividades propostas. O professor deverá utilizar as nomenclaturas apropriadas referentes ao retângulo, em que poderá concluir que a área de um retângulo é o produto da medida de seu comprimento (c) pela medida da sua largura (l):

$$\text{Área do retângulo} = \text{comprimento} \cdot \text{largura} = c \cdot l.$$

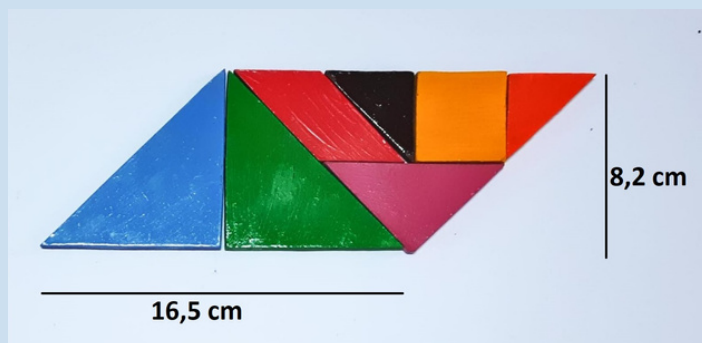
Ou ainda, o produto da medida de sua base (b) pela medida de sua altura (h):

$$\text{Área do retângulo} = \text{base} \cdot \text{altura} = b \cdot h.$$

É válido revisitar com os estudantes as estratégias dedutivas que eles desenvolveram na resolução do problema, promovendo uma reflexão conjunta sobre as resoluções construídas durante o percurso.

Problema 3: Desvendando o paralelogramo: explorando Áreas com o Tangram

A figura abaixo é um paralelogramo e foi montada a partir de sete peças do Tangram. Analise a figura, e em seguida responda:

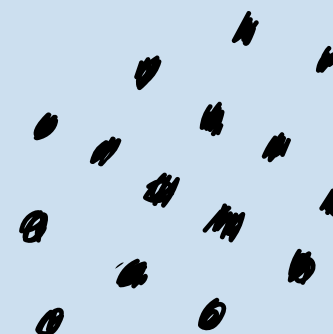


(a) O que você faria para determinar a área do paralelogramo acima? Explique e determine qual é a sua área.

Material do Estudante



(b) Você consegue encontrar uma maneira de calcular a área de um paralelogramo qualquer? Explique.





MATERIAL DO PROFESSOR

- **Objetivo do problema**

O objetivo deste problema é determinar a área de um paralelogramo formado a partir das sete peças do Tangram. Espera-se que os estudantes calculem a área do paralelogramo, explorando a figura do paralelogramo formado pelas sete peças do Tangram demonstrando a habilidade de compor e decompor figuras. Posteriormente, devem buscar estratégias e generalizar expressões para calcular a área de um paralelogramo qualquer.

Considerações didáticas e metodológicas

Para aplicar essa atividade, o professor pode distribuir o problema impresso para cada estudante. Alternativamente, para enriquecer a experiência, o professor pode fornecer o Tangram como material concreto. Nesse caso, o professor pode utilizar as medidas específicas do Tangram que trouxe para a sala de aula, podendo ser confeccionado em diferentes materiais, como madeira, papel cartão ou EVA.

O processo de resolução do problema segue as mesmas orientações dos problemas anteriores. Inicialmente, os estudantes tentam resolver o problema individualmente, e em seguida, em pequenos grupos, discutem ideias e estratégias. Em ambas as abordagens, espera-se que os estudantes percebam que ao decompor o paralelogramo formado pelas sete peças do Tangram é possível construir um retângulo.

A estrutura das perguntas foi elaborada com intuito de orientar os estudantes na construção do desenvolvimento conceitual da fórmula de cálculo da área do paralelogramo. O objetivo é utilizar o conhecimento prévio adquirido no problema anterior, transformando o paralelogramo em um retângulo, cujo cálculo da área já é conhecido, em que ao mesmo tempo que os estudantes tentam resolver o problema proposto são estimulados a



generalizar uma expressão matemática para o cálculo de área de um paralelogramo qualquer.

Ao formalizar o conteúdo, é essencial que o professor apresente todas as nomenclaturas e propriedades pertinentes ao paralelogramo. É interessante retomar com os estudantes, que a diferença entre um retângulo e um paralelogramo é que todos os ângulos internos de um retângulo são ângulos retos (90 graus), enquanto os ângulos internos de um paralelogramo não precisam ser ângulos retos.

Além disso, é importante que o professor explore a ideia que a área do paralelogramo será igual a área de um retângulo, considerando que as medidas das bases e altura dos dois quadriláteros sejam iguais, donde:

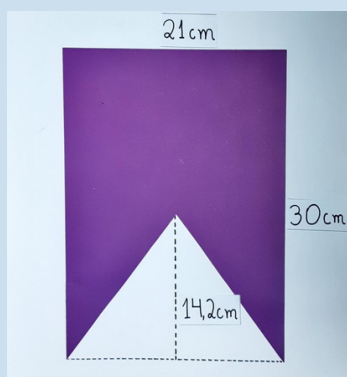
$$\text{Área do paralelogramo} = \text{Área do retângulo} = b \cdot h.$$

Portanto, para determinar a área do paralelogramo, basta multiplicar a medida da base pela medida da altura do paralelogramo⁶. Esta ideia deve ser reforçada por meio da decomposição da figura inicial do problema com o uso das peças do Tangram, em que é possível perceber que as peças que compõem o paralelogramo se encaixam perfeitamente na composição de um retângulo.

⁶Ao formalizar o conteúdo, é apropriado buscar mais uma vez um consenso nesse ponto, semelhante ao que foi realizado no problema anterior. Definir uma fórmula conjunta será benéfico para todos os envolvidos e facilitará a resolução das próximas atividades propostas.

Problema 4: A Área triangular em bandeirinhas

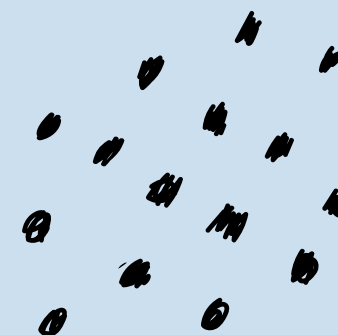
Para enfeitar a festa de uma escola, os alunos resolveram confeccionar bandeirinhas a partir de folhas de papel, com formato retangular, de dimensões 21 cm x 30 cm. De cada folha retangular foi recortado um triângulo com 14,2 cm de altura, como mostrado na figura abaixo.



Com base nas informações ao lado, responda:

(a) Qual a área das folhas de papel que foram utilizadas para confeccionar cada bandeirinhas? Qual a área de papel desperdiçada para fazer cada bandeirinha?

(b) Considerando a estratégia que você utilizou para determinar a área de papel descartada das bandeirinhas, é possível estabelecer uma forma de calcular a área de um triângulo qualquer? Explique.





MATERIAL DO PROFESSOR

- **Objetivo do problema**

O objetivo deste problema é determinar a área de papel em formato triangular desperdiçada na confecção de bandeirinhas retangulares. Posteriormente, os estudantes devem buscar estratégias e generalizar expressões para calcular a área de um triângulo qualquer.

Considerações didáticas e metodológicas

O professor deve começar preparando bandeirinhas de papel com dimensões específicas correspondentes a uma figura pré-determinada⁷. Ao apresentar as bandeirinhas, destaque o desafio para os estudantes: determinar a área desperdiçada, em formato triangular, na confecção dessas bandeirinhas. Ao explorar o problema, permita que os estudantes o analisem individualmente e, em seguida, em grupos, utilizem estratégias para calcular as áreas correspondentes.

Com as bandeirinhas em mãos, os estudantes devem trabalhar de forma independente. Eles precisam discutir entre si, elaborar estratégias e, se necessário, realizar desenhos ou recortes mais adequados para, por meio dos cálculos, determinar a área desperdiçada na confecção dessas bandeirinhas. Como os estudantes já construíram os conceitos e o cálculo da área de um paralelogramo no problema anterior, espera-se que, com este problema, eles identifiquem a relação existente entre o cálculo de área de um triângulo e de um paralelogramo.

É frequente notar que, mesmo trabalhando em grupos, os estudantes começam o processo de maneira

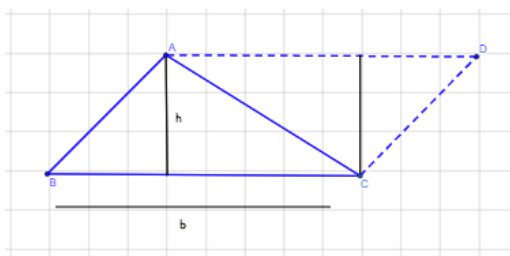
⁷Caso o professor deseje, uma bandeirinha pode ser entregue a cada estudante, ou, alternativamente, uma por grupo.



individual, criando figuras e esboços. Essa abordagem é comum e valiosa, pois cada estudante, ao concluir sua própria resposta, tem a chance de comparar e discutir com os colegas, trocando ideias, corrigindo erros e enriquecendo o entendimento do grupo. Durante esse processo, é comum que os estudantes tenham muitas dúvidas, e cabe ao professor, incentivar a troca de ideias entre os membros do grupo, orientando quando necessário, sem fornecer respostas diretas. Essa dinâmica fortalece a resolução de problemas em grupo e estimula a autonomia dos estudantes na aplicação prática de conceitos matemáticos, tornando o aprendizado mais envolvente e significativo.

Ao exemplificar, na formalização do conteúdo, o professor pode demonstrar que ao considerar um triângulo com base de medida (b) e altura em relação a base de medida (h), ao duplicar esse triângulo, rotacionar um deles em 180° , e justapô-los, obtemos um paralelogramo, o qual já sabemos calcular a área, que é denotada por: $\text{Área} = \text{base} \cdot \text{altura}$. É necessário que, ao utilizar essa estratégia de resolução, os estudantes percebam que o paralelogramo formado é composto por dois triângulos, mas estamos interessados em determinar a área de apenas um triângulo. Podemos observar essa situação na Figura 3.

Figura 3: Dois triângulos idênticos compõem um paralelogramo





Assim, quando a medida da base e a altura relativa à base de um triângulo são equivalentes às medidas correspondentes à base e altura de um paralelogramo, a área de um triângulo é igual a metade da área do paralelogramo⁸. Ou seja:

$$\text{Área do Triângulo} = \frac{(\text{Área do paralelogramo})}{2} = \frac{(\text{base} \cdot \text{altura})}{2}.$$

Ao formalizar o conteúdo, o professor precisa levar em consideração as resoluções propostas pelos estudantes e, promover uma reflexão conjunta sobre a construção de uma forma de calcular de área de um triângulo, incluindo a apresentação das nomenclaturas pertinentes aos triângulos. Além disso, é importante enfatizar que para determinar a área de um triângulo qualquer, é suficiente saber as dimensões da base e da altura relativa a base do triângulo.

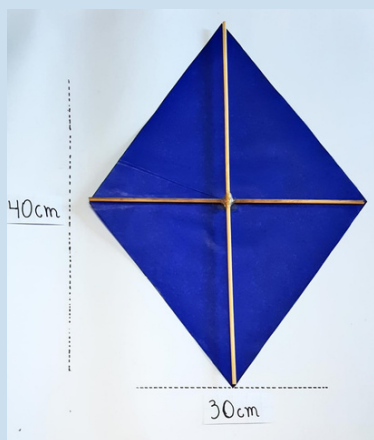
⁸No caso do problema proposto, determinar a área da parte desperdiçada na confecção das bandeirinhas consistia em calcular a área de um triângulo, em que a base mede 10 cm e a altura mede 14,2 cm. Dessa forma,

$$\text{Área do Triângulo} = \frac{(\text{base} \cdot \text{altura})}{2} = \frac{10 \cdot 14,2}{2} = \frac{142}{2} = 71.$$

Ou seja, a área desperdiçada foi de 71 cm².

Problema 5: A Área de uma pipa em formato de losango

Pedro pretende fazer uma pipa com as dimensões da figura abaixo. Para construir uma pipa são colocadas duas varetas perpendiculares, nas diagonais de um quadrilátero. Nesse caso, as duas varetas medem 40 cm e 30 cm.

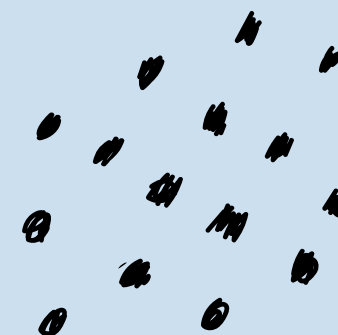


Material do Estudante



(a) Quantos centímetros de papel seda, no mínimo, Pedro deverá comprar para construir a pipa acima? Explique o que você pensou para chegar a essa conclusão.

(b) Você consegue estabelecer uma forma de calcular a área de uma figura qualquer semelhante a pipa acima, com formato de losango? Explique.





MATERIAL DO PROFESSOR

- **Objetivo do problema**

O objetivo deste problema é calcular a quantidade de papel necessário para construir uma pipa em formato de losango e, posteriormente, desenvolver estratégias e generalizar expressões para o cálculo da área de um losango qualquer. Espera-se que os estudantes percebam que é possível decompor a região limitada pelo losango em triângulos congruentes, o que pode ser feito de várias formas.

Considerações didáticas e metodológicas

O professor pode começar confeccionando pipas de papel seda com dimensões específicas correspondentes a uma figura pré-determinada⁹. Se o professor julgar inadequado produzir a pipa, pode simplesmente apresentar o problema impresso aos estudantes.

Após os alunos receberem o problema, o professor deve permitir que realizem a leitura individual do mesmo. Posteriormente, eles formarão pequenos grupos, preferencialmente mantendo os mesmos dos problemas anteriores. No caso do professor confeccionar as pipas, ele pode distribuir uma para cada grupo, e permitir que os alunos desenvolvam estratégias de resolução.

Dado o tema central do problema, da pipa em formato de losango, os grupos deverão determinar a quantidade de papel necessária na confecção da pipa. Além disso, baseando-se na fórmula do cálculo de área do triângulo desenvolvida pelos estudantes no problema anterior, eles serão desafiados a definirem uma fórmula

⁹Caso o professor deseje, uma pipa pode ser entregue para cada grupo ou ainda produzir uma única pipa para a turma. A pipa pode ser construída usando papel seda, 2 varetas com dimensões de 30 cm e 40 cm, e barbante.



que corresponda ao cálculo de área de um losango. Para solucionar o problema os estudantes têm a opção de produzir materiais visuais, como desenhos ou recortes, para melhor ilustrar e comunicar as estratégias adotadas na resolução do desafio proposto. Caso algum grupo escolha desenvolver tal material, ele também poderá ser mostrado à turma no momento das resoluções na lousa, proporcionando aos colegas a oportunidade de entender a estratégia utilizada pelo grupo. Após as apresentações, pode-se abrir uma discussão para responder dúvidas e comentar sobre as dificuldades enfrentadas.

O papel do professor é orientar os grupos quando necessário, estimulando a discussão entre os estudantes para fomentar o desenvolvimento de soluções criativas. Incentivar a discussão entre os estudantes, explorando seus conhecimentos prévios, é essencial. Após os grupos compartilharem seus resultados na lousa, inicia-se uma discussão explorando os diversos caminhos seguidos por cada grupo. A conclusão dessa interação é um consenso estabelecendo uma fórmula comum que será adotada pelos grupos.

Ao formalizar o conteúdo, é importante que o professor considere todas as resoluções propostas pelos estudantes para avançar nas estratégias dedutivas do cálculo de área de um losango, além de apresentar aos estudantes todas as nomenclaturas e propriedades pertinentes a este polígono.

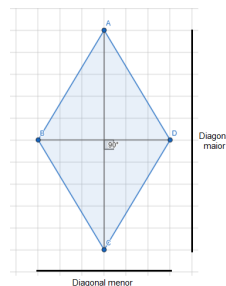
A estratégia mais comum para demonstrar a fórmula de cálculo da área de um losango, consiste em determiná-la em função da soma das áreas de dois triângulos. Nesse caso, ao considerar o losango $ABCD$ ilustrado na Figura 4, por exemplo, ao traçar sua diagonal¹⁰ $\overline{BD}$, podemos decompor a região limitada pelo losango em dois triângulos, o triângulo ABD e o triângulo CDB , ambos de base de medida de comprimento

¹⁰É importante destacar aos estudantes que as diagonais do losango cortam-se mutuamente ao meio, ou seja, o ponto de encontro das diagonais é o ponto médio de cada diagonal. Dessa forma, $\overline{BD} \perp \overline{AC}$.



$\overline{BD}$ e altura de medida de comprimento $\frac{\overline{AC}}{2}$.

Figura 4: Losango



Considerando que $\overline{BD}$ representa a diagonal menor, denotaremos essa medida de (d) , e $\overline{AC}$, que representa a medida da diagonal maior, por (D) , podemos concluir que a área do losango¹¹ será dada pela soma das áreas dos triângulos ABD e CDB :

Área do Losango = Área do triângulo ABD + Área do triângulo CDB.

$$\text{Área do Losango} = \frac{d \cdot \frac{D}{2}}{2} + \frac{d \cdot \frac{D}{2}}{2} = \frac{d \cdot D}{4} + \frac{d \cdot D}{4} = \frac{2 \cdot d \cdot D}{4} = \frac{d \cdot D}{2} = \frac{D \cdot d}{2}.$$

$$\text{Área do Losango} = \frac{(\text{Diagonal maior} \cdot \text{Diagonal menor})}{2}.$$

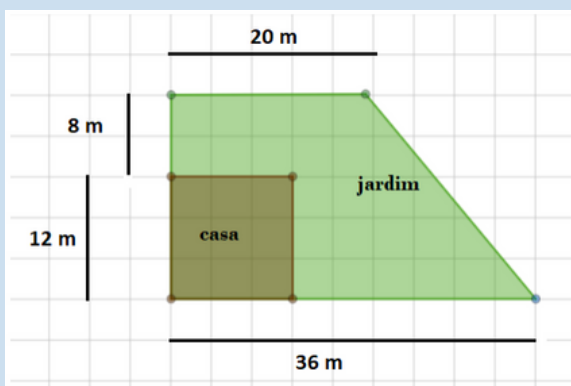
No caso de considerar os triângulos ABC e CDA , o raciocínio é análogo.

¹¹Considerando os dados do problema proposto, calcular a área da pipa equivale a calcular a área de um losango de diagonal maior medindo 40 cm, e diagonal menor medindo 30 cm. Nesse caso, Área da pipa = $\frac{(40 \cdot 30)}{2} = 600$.

Ou seja, serão necessários 600 cm² de papel para confeccionar a pipa.

Problema 6: A Área de um terreno em formato de trapézio

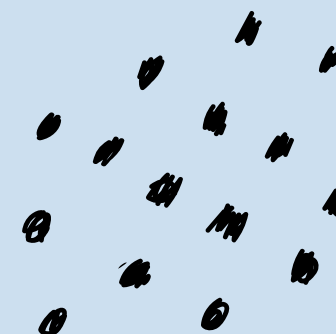
Na figura abaixo, o quadrado destacado de marrom representa a parte do terreno destinada à construção de uma casa e o restante, a parte reservada para a construção de um jardim.



Com base nessas informações responda.

(a) Qual é a área da casa? É possível determinar a área que será ocupada pelo jardim? Descreva o que você pensou para resolver esta situação.

(b) Você consegue estabelecer uma forma de calcular a área de um trapézio qualquer? Explique.





MATERIAL DO PROFESSOR

- **Objetivo do problema**

O objetivo deste problema é determinar a área ocupada por um jardim em um terreno com formato de trapézio, em que há uma parte já ocupada por uma casa quadrada. Nesse contexto, os estudantes serão desafiados a elaborar estratégias para determinar a área de um trapézio, incentivando a aplicação de conceitos de composição e decomposição do trapézio em polígonos previamente estudados. Na sequência os estudantes são desafiados a generalizar, ou seja, determinar uma maneira para calcular a área de um trapézio qualquer.

Considerações didáticas e metodológicas

Ao iniciar a atividade, o professor distribuirá uma cópia do problema que consta no material do estudante para cada estudante, apresentando uma representação visual de um terreno em forma de trapézio, no qual uma casa quadrada ocupa uma parte, e o restante é designado como o jardim. O desafio proposto consiste em determinar a área do jardim. Determinar a área da casa quadrada não será um problema para os estudantes, pois eles já desenvolveram esse conceito de calcular a área de um quadrado no problema 2, o problema do campo de futebol.

O processo de resolução do problema segue as mesmas orientações dos problemas anteriores. Ao adotar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, contamos com um roteiro pré-definido¹². Nesse contexto, cabe ao professor organizar as etapas de modo que os estudantes sigam esse

¹²Destaca-se que não é necessário abordar cada etapa detalhadamente, mas sim orientar os alunos para que sigam o percurso estabelecido.



percurso, compartilhando e aprimorando seus conhecimentos ao longo do processo.

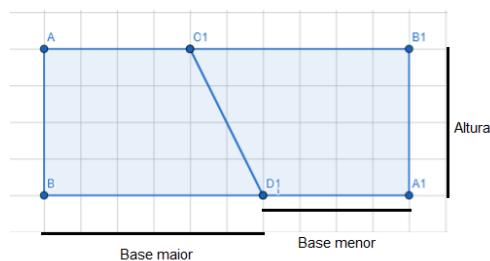
Inicialmente, os estudantes tentam resolver o problema individualmente, em seguida, em pequenos grupos, discutem ideias e estratégias. Ao utilizarem seus conhecimentos prévios, espera-se que os estudantes consigam resolver o problema proposto, o qual exige a aplicação de resultados anteriores. O professor desempenha o papel de orientador, incentivando os estudantes a utilizar seus conhecimentos prévios sobre o tema por meio de perguntas que os levem a refletir sobre o que já aprenderam.

É importante aprofundar na discussão em plenária os diferentes tipos de trapézios existentes. É fundamental destacar aos estudantes que a área do terreno do problema proposto, assume a forma de um trapézio retângulo, uma vez que possui dois ângulos retos. No caso de considerar um trapézio que não seja retângulo, por exemplo, pode-se mostrar que é possível transformá-lo num paralelogramo, e sua área será equivalente à metade da área de um paralelogramo.

Ao realizar a formalização do conteúdo, é fundamental que o professor avalie todas as abordagens apresentadas pelos estudantes. Além disso, é essencial apresentar todas as nomenclaturas e propriedades pertinentes a este polígono. A estratégia comum para derivar a fórmula de cálculo da área de um trapézio retângulo consiste em considerar dois trapézios retângulos idênticos, sendo um rotacionado em 180° . Ao justapor esses dois trapézios, percebe-se que a figura formada é um retângulo, cuja área é conhecida. Os lados do retângulo formado são determinados pelas medidas das bases e da altura do trapézio. No caso, um dos lados do retângulo é a soma da base maior e da base menor, enquanto o outro lado é representado pela altura do trapézio, como mostra a Figura 5.



Figura 5: Justaposição de dois trapézios idênticos



Portanto, a área de um trapézio retângulo¹³ pode ser dada pela metade da área do retângulo. Assim:

$$\text{Área do Trapézio} = \frac{(\text{Área do retângulo})}{2} = \frac{(\text{Base} \cdot \text{altura})}{2} = \frac{(\text{Base maior} + \text{Base menor}) \cdot \text{altura}}{2}.$$

Considerando o problema apresentado, a determinação da área total do terreno¹⁴ ($A_{\text{trapézio}}$) envolverá o uso de uma fórmula para calcular a área de um trapézio, enquanto a área ocupada pela casa (A_{casa}) será estabelecida pela área do quadrado. A solução para determinar a área do jardim (A_{jardim}) será alcançada através da diferença entre essas duas áreas. Este contexto incentiva os estudantes a explorar estratégias de resolução, aplicando conceitos geométricos previamente aprendidos.

¹³É importante mostrar aos estudantes que o retângulo formado na Figura 5 é composto por dois trapézios, mas estamos interessados em determinar a área de apenas um trapézio.

¹⁴Utilizando os dados do problema proposto, temos que: $\text{Área do Trapézio} = \frac{(36+20) \cdot 12}{2} = \frac{1120}{2} = 560$.

Como $A_{\text{jardim}} = A_{\text{trapézio}} - A_{\text{casa}}$, e $A_{\text{casa}} = 144$, segue que $A_{\text{jardim}} = 560 - 144 = 416$.

Ou seja, a área do jardim é de 416 m².

Proposição de Problemas

Proponha dois problemas relacionados ao conteúdo Áreas, um que você considere fácil de resolver e outro difícil, levando em consideração as atividades que realizamos até o momento com a resolução de problemas. A seguir, apresentamos um checklist com os temas dos problemas já solucionados nas aulas anteriores.



**PROBLEMA 1 - EXPLORANDO O
CONCEITO DE ÁREA NA MALHA
QUADRICULADA**

**PROBLEMA 2 - EXPLORANDO A ÁREA DE
QUADRADOS E RETÂNGULOS EM UM
CAMPO DE FUTEBOL**

**PROBLEMA 3 - DESVENDANDO O
PARALELOGRAMO: EXPLORANDO
ÁREAS COM O TANGRAM**

**PROBLEMA 4 - A ÁREA TRIANGULAR EM
BANDEIRINHAS**

**PROBLEMA 5 - A ÁREA DE UMA PIPA
EM FORMATO DE LOSANGO**

**PROBLEMA 6 - A ÁREA DE UM TERRENO
EM FORMATO DE TRAPÉZIO**





MATERIAL DO PROFESSOR

- **Objetivo da Atividade**

O objetivo desta atividade é que os estudantes, a partir das aulas anteriores, proponham problemas matemáticos tendo em vista as novas habilidades adquiridas nesse processo.

Considerações didáticas e metodológicas

Considerando que na implementação desta sequência didática a ideia é utilizar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, um fato que merece destaque é que essa proposta teve uma adaptação, em relação a décima etapa da Metodologia. Na implementação dessa sequência didática a ideia é que a décima etapa, que sugere a proposição e resolução de novos problemas, ocorra após a resolução dos seis problemas propostos.

Ao propor problemas, o estudante desenvolve habilidades cognitivas mais profundas, como a análise crítica, a criatividade e a compreensão conceitual. Além disso, a prática na Resolução de Problemas prepara o terreno para que os estudantes desenvolvam habilidades na proposição de problemas. Dessa forma, nesta última atividade proposta, espera-se verificar se os conceitos essenciais referentes ao cálculo de áreas, desenvolvidos nas aulas anteriores, foram, de fato, compreendidos pelos estudantes, a fim de que eles sejam capazes de propor os próprios problemas.

Os estudantes devem ser informados de que forma os problemas propostos por eles serão resolvidos. Quando os estudantes têm a certeza de que os problemas por eles propostos serão resolvidos por outros colegas, o desafio de criar um problema verdadeiramente difícil se torna aparente.



Se for viável, o professor pode utilizar os problemas propostos pelos estudantes como problemas geradores, como base para a construção de novos conhecimentos matemáticos.

5 CONSIDERAÇÕES AO LEITOR

Caro Leitor!

Ao longo deste material, buscamos proporcionar uma abordagem inovadora para enriquecer a experiência de aprendizagem dos estudantes no ensino de Áreas, promovendo uma compreensão mais profunda e significativa da Matemática.

Ao optarmos pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas como eixo central deste material, nosso objetivo foi claro, transformar o processo de ensino em uma experiência dinâmica e enriquecedora. Esta escolha fundamenta-se na convicção de que desafiar os estudantes a aplicar seus conhecimentos prévios em situações problema não apenas fortalece a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também os capacita como protagonistas ativos de sua própria aprendizagem.

Convido você, professor, a explorar e adaptar essas estratégias, permitindo que seus estudantes aprendam Matemática através da Resolução de Problemas. Ao ensinar pela Resolução de Problemas, descobrimos uma abordagem que não apenas desafia os estudantes, mas também transforma o processo de ensino. Experimente implementar essa Metodologia em suas aulas e perceber como ela pode transformar sua prática pedagógica. Estou confiante de que, ao ensinar por meio da Resolução de Problemas, você também descobrirá uma nova paixão pelo processo educacional.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Resolução de Problemas: Teoria e Prática. *In*: 2. ed. Jundiaí: Paco e Littera, 2021. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: Por que através da resolução de problemas?, p. 37–58.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CAI, J.; LESTER, F. K. Por que o ensino com resolução de problemas é importante para a aprendizagem do aluno? **Boletim GEPEM**, n. 60, p. 147–162, 2012. Tradução: BASTOS, A. S. A. M.; ALLEVATO, N. S. G.

DOLCE, O.; POMPEO, J.N. **Fundamentos de matemática elementar - Volume 9: Geometria plana**. 9ª ed. São Paulo: Atual, 2013. 468 p.

ECHEVERRÍA, M. P. P.; POZO, J. I. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender. *In*: POZO, J. I. (Ed.). **A solução de problemas: Aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 13–42.

- FRIEDEL, C. **O Ensino do Conceito de Área através da Resolução de Problemas**. 2024. Dissertação PROFMAT – MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – Universidade Federal de Santa Catarina, Blumenau.
- NETO, A. C. M. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).
- ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, v. 33, n. 55, p. 133–156, 2009.
- ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática**, p. 73–98, 2011.
- VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula**. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. 583 p. Tradução: Paulo Henrique Colonese.