UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

RAPHAEL GOMES VALE

PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA: DESVENDANDO π - UMA JORNADA INFINITA

FORTALEZA

2025

RAPHAEL GOMES VALE

PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA: DESVENDANDO π - UMA JORNADA INFINITA

Recurso Educacional decorrente da Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia.

FORTALEZA

2025

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao longo da história, diferentes civilizações e matemáticos dedicaram-se a desvendar os segredos de π. De aproximações rudimentares na antiguidade a cálculos com precisão astronômica nos tempos modernos, a evolução da compreensão sobre esse número é um testemunho da curiosidade e do engenho humano. A descoberta de métodos para calcular π não apenas proporcionou uma maior precisão em aplicações práticas, mas também revelou conexões profundas e inesperadas dentro da própria estrutura da matemática. (Beckmann, 1993)

Nesse contexto, a Série de Leibniz para π emerge como um resultado particularmente intrigante e elegante. (Stein, 2008) Desenvolvida pelo matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz no século XVII, essa série oferece uma maneira surpreendentemente simples de expressar π através da soma de uma sequência infinita de frações. A fórmula, que relaciona $\pi/4$ à soma alternada dos inversos dos números ímpares:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

é um exemplo notável da beleza e da profundidade das séries infinitas.

Esta sequência didática propõe uma jornada investigativa de 5 aulas, destinada a alunos do Ensino Médio, que utiliza o número π como fio condutor para explorar conceitos matemáticos fundamentais de forma conectada e significativa. Partindo da definição elementar de π e de sua estimativa prática, avançamos por métodos de aproximação geométrica, introduzimos a poderosa ideia de séries infinitas através do exemplo acessível da série geométrica, e culminamos na apresentação da célebre e elegante Série de Leibniz.

Muitos conceitos importantes da matemática do Ensino Médio e que preparam para o Ensino Superior, como a noção de limite, processos infinitos e a conexão entre diferentes campos (geometria, álgebra, funções), podem parecer abstratos ou desconectados para os alunos. Abordar a Série de Leibniz para π através de uma perspectiva histórica e de construções geométricas e aproximações sucessivas oferece um contexto rico e motivador para tornar essas ideias mais concretas e acessíveis.

Objetivos da Sequência Didática

- Compreender a definição de π e sua natureza como número irracional.
- Descrever métodos históricos e práticos de aproximação de π.
- Entender a estratégia de aproximação de áreas e comprimentos curvos por meio de subdivisões e somas de elementos mais simples (retângulos, segmentos).
- Reconhecer a ideia de limite como um processo de aproximação sucessiva.
- Identificar uma série geométrica e aplicar sua condição de convergência e fórmula da soma ($|r| < 1$).
- Compreender (intuitivamente) como uma construção geométrica pode levar a uma soma infinita.
- Reconhecer a Série de Leibniz como uma representação de $\pi/4$.
- Calcular termos da Série de Leibniz e observar sua (lenta) convergência.
- Valorizar a conexão entre diferentes áreas da matemática e sua evolução histórica.

A metodologia adotada busca promover uma aprendizagem ativa e significativa, combinando diferentes abordagens: **Aprendizagem Baseada em Problemas/Investigação:** Partir de perguntas (Como medir π? Como calcular a área curva? Como somar infinitos termos?) para guiar a exploração; **Contextualização Histórica:** Apresentar conceitos e resultados inseridos em seu contexto de desenvolvimento; **Atividades Práticas e Lúdicas:** Iniciar com a medição concreta de π; **Visualização e Tecnologia Educacional:** Uso intensivo do software GeoGebra para construir figuras, visualizar aproximações e explorar o comportamento de funções e sequências; **Construção Progressiva:** Apresentar os conceitos de forma encadeada, onde cada aula se baseia nas anteriores, construindo gradualmente a compreensão até a Série de Leibniz; **Discussão e Colaboração:** Incentivar a troca de ideias entre os alunos e a discussão mediada pelo professor. A abordagem evita o formalismo excessivo do cálculo diferencial e integral, focando na intuição, na visualização e na conexão conceitual.

Esta sequência didática foi desenvolvida como um **recurso educacional** para uso em salas de aula do Ensino Médio, em consonância com os objetivos do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Ela se baseia em fundamentos teóricos sólidos, mas é apresentada de forma autossuficiente e prática para o professor. Seu foco em tópicos relevantes do currículo da Educação Básica (números, funções, geometria, sequências) e sua metodologia voltada para a exploração e a visualização visam contribuir para a melhoria do ensino de Matemática.

2 APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Público-Alvo: Alunos do Ensino Médio (preferencialmente 2ª ou 3ª série com conhecimentos básicos de geometria plana, funções e introdução à sequências).
Duração Total: 5 aulas de aproximadamente 50 minutos cada.
Objetivo Geral: Explorar o número *pi* através de métodos de aproximação histórica e geométrica, introduzir a noção de séries infinitas e limites de forma intuitiva, e apresentar a Série de Leibniz como uma forma de calcular π, conectando conceitos geométricos e algébricos.
Recursos Gerais: Lousa ou quadro branco, projetor multimídia, computadores com acesso à internet e software GeoGebra (Geogebra, 2023) (ou similar), objetos circulares variados, barbante, réguas, calculadoras, folhas de atividades.
Alinhamento com BNCC (BRASIL, 2018) (Algumas Habilidades)

– (EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
– (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
– (EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

2.1 Aula 1: O Mistério de π - Da Roda à Irracionalidade

Objetivos Específicos:

- Definir π como a razão constante entre a circunferência e o diâmetro de qualquer círculo.
- Justificar a importância histórica de encontrar valores aproximados para π.
- Estimar o valor de π através de medições práticas.
- Apresentar π como um número irracional. (infinitas casas decimais não periódicas).

Conteúdos:

Círculo, circunferência, diâmetro, razão, constante matemática, número π, história da matemática (breve menção a Arquimedes), números irracionais. (Beckmann, 1993)

Materiais:

Objetos circulares (latas, tampas, etc.), barbante, réguas, calculadoras, projetor (Opcional).

Metodologia/Procedimentos:

(5 min) Introdução: Iniciar com a pergunta: "Se tivermos círculos de tamanhos diferentes, existe algo em comum entre eles?". Guiar a discussão para a relação entre o contorno (circunferência) e a maior distância entre dois pontos do contorno passando pelo centro (diâmetro).

(15 min) Atividade Prática - Medindo π: Organizar a turma em grupos. Distribuir objetos circulares, barbante e régua. Em seguida, orientar os alunos a medir a circunferência (C) de cada objeto usando o barbante e a régua, e também o seu diâmetro (D) e pedir que calculem a razão $\frac{C}{D}$ para cada objeto e anotem os resultados.

(10 min) Discussão e Definição de π: Reunir os resultados dos grupos na lousa. Discutir a variação (devido a erros de medição) mas notar a tendência de os valores se agruparem em torno de 3,1 ou 3,2. Em seguida, apresentar que, teoricamente, essa razão é *exatamente* a mesma para *todos* os círculos, e esse número constante é chamado de π.

$$\pi = \frac{C}{D}$$

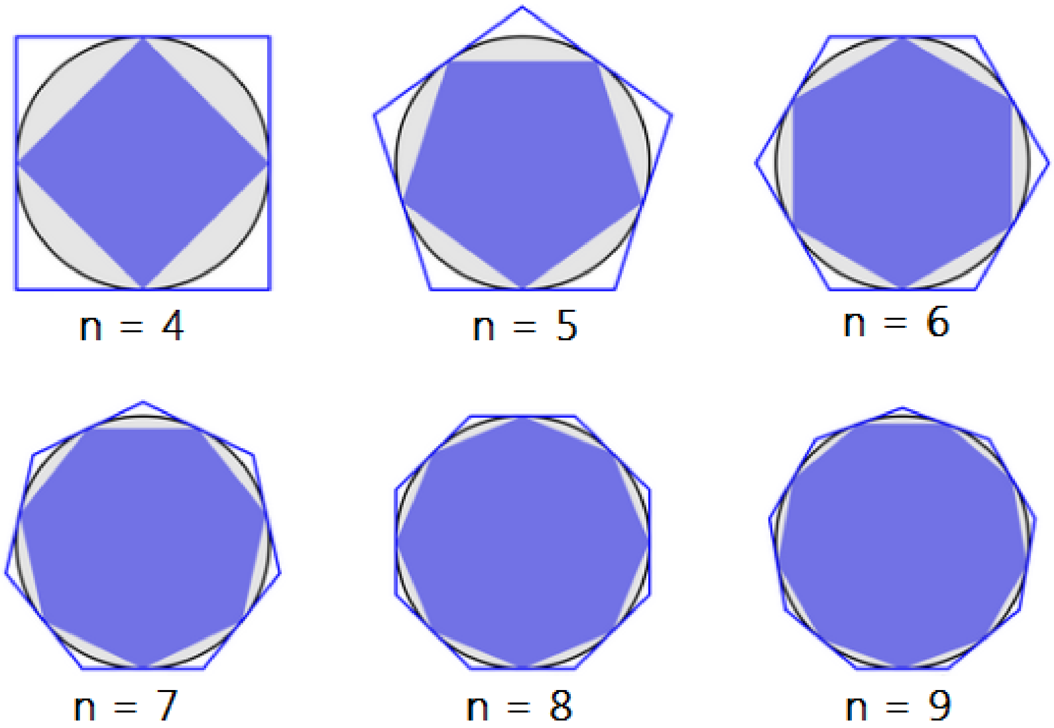
Figura 1 – Sugestão de atividades para medição de objetos e calculat π

Preencha a tabela abaixo com nome do objeto, medindo seu diâmetro e comprimento, em seguida, calcular a razão entre as medidas.			
Objeto	**Comprimento - C**	**Diâmetro - D**	**Razão C/D**

Fonte: Elaborado pelo autor

(15 min) História e Natureza de π: Comentar que encontrar o valor exato de π foi um desafio por milênios. Mencionar Arquimedes como um dos primeiros a usar um método rigoroso (aproximando o círculo por polígonos com muitos lados – mostrar uma imagem ilustrativa simples, se possível).

Figura 2 – Método de Arquimedes para estimar o valor de π por polígonos regulares inscritos e circunscritos numa circunferência.



Fonte: (Almeida, 2008)

Explicar que π é um *número irracional*: sua representação decimal é infinita e não periódica (não é dízima periódica, não pode ser escrito como fração de inteiros). Mostrar alguns dígitos: $3,14159265\ldots$.

(5 min) Fechamento: Reforçar: π é a constante universal dos círculos, um número irracional fascinante. Nas próximas aulas, veremos como ideias de “somar muitas partes pequenas"podem nos levar a ele.

Avaliação:

Observar o engajamento na atividade e a compreensão demonstrada na discussão. Verificar as anotações e cálculos da atividade.

2.2 Aula 2: Aproximando o Inatingível - A Área Sob a Curva

Objetivos Específicos:

- Visualizar o problema de calcular a área de uma região com limite curvo.
- Aplicar a estratégia de aproximação da área usando retângulos. (intuição da Soma de Riemann).
- Utilizar o GeoGebra para visualizar como a aproximação melhora com mais retângulos.
- Construir a expressão algébrica que representa a soma das áreas dos retângulos.

Conteúdos:

Área de retângulo, função quadrática ($y = x^2$), plano cartesiano, aproximação, somatório (intuitivo), limite (intuitivo). (Dolce e Pompeo, 2005)

Materiais:

Lousa, projetor, computadores com GeoGebra, folha de atividades.

Metodologia/Procedimentos:

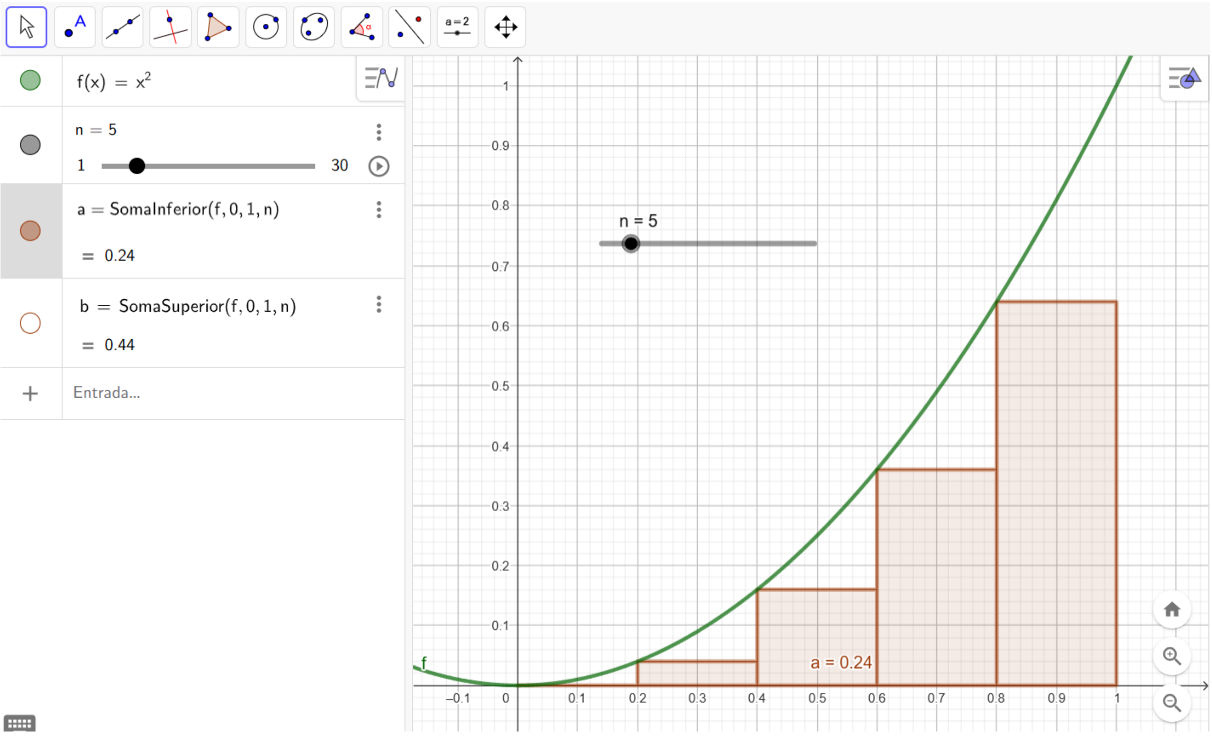
(5 min) Revisão/Introdução: Relembrar como calcular a área de retângulos. Apresentar o gráfico da função $y = x^2$ no intervalo $[0, 1]$. Questionar: "Como poderíamos calcular a área exata da região entre essa curva, o eixo x e as retas $x = 0$ e $x = 1$?".

(25 min) Exploração com GeoGebra: Guiar os alunos no GeoGebra: Plotar $f(x) = x^2$. Definir um controle deslizante 'n' para o número de retângulos (inteiro, de 1 a 50, por exemplo). Usar o comando `SomaSuperior(f, 0, 1, n)` ou `SomaInferior(f, 0, 1, n)` e fazer a conferencia.

Observação: Caso não tenha computadores na escola, construir manualmente os retângulos como sugeridos nas figuras 3 e 4 no quadro.

Observar visualmente os retângulos e como eles cobrem (ou ficam abaixo) da área desejada. Variar 'n' e observar como a *soma das áreas* dos retângulos (geralmente exibida pelo GeoGebra) muda. Perguntar: "O que acontece com a aproximação quando 'n' aumenta? O valor da soma parece se aproximar de algum número?". (Esperado: Sim, parece se aproximar de $0,333\ldots$ ou $1/3$).

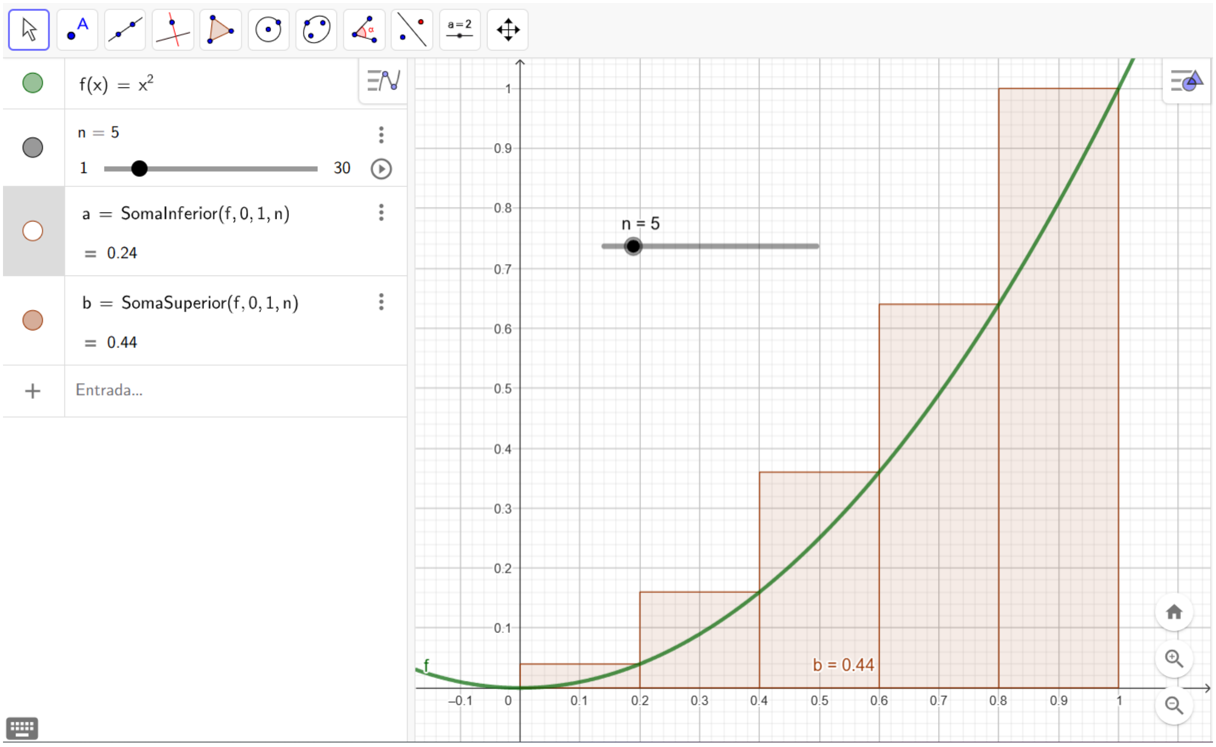
Figura 3 – Aproximação da área sob a curva $y = x^2$ usando 5 retângulos, através do recurso de soma inferior.



Fonte: Elaborado pelo autor

ou

Figura 4 – Aproximação da área sob a curva $y = x^2$ usando 5 retângulos, através do recurso de soma superior.



Fonte: Elaborado pelo autor

(15 min) Da Visualização à Expressão: Fixar um 'n' pequeno (ex: $n = 5$). E pedir para o alunos calcular a área de cada retângulo: Base = $1/n = 1/5$. Alturas (pela direita) = $(1/5)^2, (2/5)^2, (3/5)^2, (4/5)^2, (5/5)^2$, conforme a figura 4.

$$\text{Área Total} \approx \text{(Base)} \times \text{(Soma das Alturas)} = \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{5}\right)^2\right]$$

. Generalizar para 'n':

$$\text{Área} \approx \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^2\right] = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$$

. Escrever essa expressão na lousa.

(5 min) Conclusão: Vimos que podemos *aproximar* uma área curva somando áreas de retângulos. A precisão aumenta com o número de retângulos. A soma pode ser escrita como uma expressão matemática. O valor exato seria o *limite* dessa soma quando $n \to \infty$.

Avaliação:

Participação na exploração do GeoGebra; capacidade de explicar o método de aproximação; preenchimento de um exercício simples na atividades (calcular a soma para n=5).

2.3 Aula 3: Somando o Infinito? Séries Geométricas

Objetivos Específicos:

- Apresentar a ideia de somar infinitos termos (séries infinitas).
- Diferenciar séries convergentes (soma finita) de divergentes (soma infinita).
- Definir e identificar uma série geométrica.
- Aplicar a condição de convergência ($|r| < 1$) para séries geométricas.
- Utilizar a fórmula $S = a_1/(1-r)$ para calcular a soma de séries geométricas convergentes.

Conteúdos:

Séries infinitas, convergência, divergência, Progressão Geométrica (PG), razão (r), série geométrica, fórmula da soma da série geométrica convergente. (Lima, 2008)

Materiais:

Lousa, projetor, folha de atividades, calculadora.

Metodologia/Procedimentos:

(5 min) Introdução: Perguntar novamente: "Podemos somar infinitos números e obter um resultado finito?". Relembrar a ideia da Aula 2: a área exata seria uma soma de infinitos retângulos infinitesimais. **(15 min) Visualizando a Convergência/Divergência:**

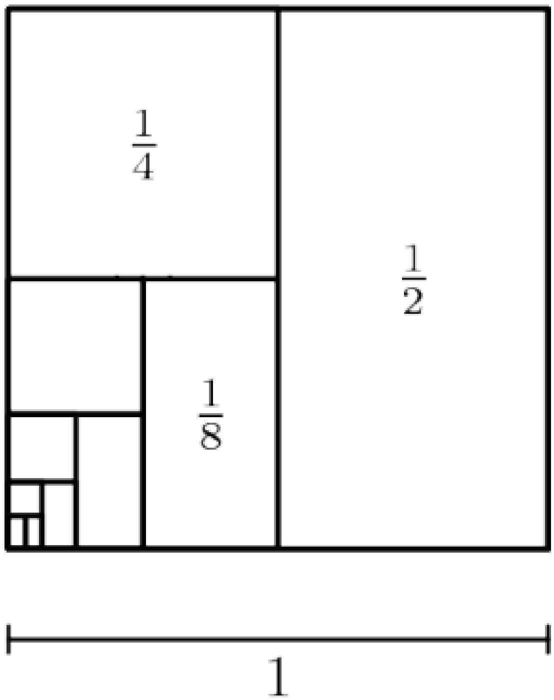
Exemplo Convergente: Apresentar a série $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$. Desenhar um quadrado unitário na lousa e mostrar como essas frações preenchem o quadrado sem ultrapassá-lo (soma = 1). Identificar como uma PG de razão $r = 1/2$. Conforme a figura 5

Exemplo Divergente: Apresentar a série $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots$. Mostrar que a soma cresce indefinidamente. Identificar como uma PG de razão $r = 2$.

Concluir que algumas somas infinitas “se acomodam"em um valor (convergem) e outras “explodem"(divergem).

(15 min) A Série Geométrica e sua Soma: Definir formalmente a série geométrica: $a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots$. Enunciar a condição de convergência: A série geométrica converge *se e somente se* a razão r estiver entre -1 e 1 (ou seja, $|r| < 1$). Apresentar a fórmula da soma para séries convergentes: $S = \frac{a_1}{1-r}$.

Figura 5 – Visualização da série geométrica $1/2+1/4+1/8+...$ através da divisão de uma unidade.



Fonte: Elaborado pelo autor

(Professor pode optar por fazer a dedução algébrica simples baseada na soma finita $S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{(1-r)}$ e argumentar que $r^n \to 0$ se $|r| < 1$, ou apresentar como um resultado estabelecido).

(10 min) Praticando: Atividade: Usando a formula $S = \dfrac{a_1}{1-r}$ as seguintes somas:

(a) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dots$

(b) $3+1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dots$

(c) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}-\dots$

(d) $1+1+1+1+\dots$

(5 min) Fechamento: A série geométrica é uma ferramenta poderosa para entender somas infinitas. A condição $|r| < 1$ é crucial. Essa ideia será útil para entender a fórmula de π na última aula.

Avaliação:

Resolução de exercícios (identificar séries geométricas, determinar convergência e calcular a soma).

2.4 Aula 4: Um Caminho Geométrico para π (Parte 1 - A Construção)

Objetivos Específicos:

- Apresentar uma construção geométrica que visa aproximar um comprimento de arco relacionado a π.
- Compreender a estratégia de usar segmentos de reta para aproximar o comprimento de um arco.
- Identificar os elementos geométricos relevantes na construção proposta.
- Utilizar o GeoGebra para visualizar e explorar a construção.

Conteúdos:

Geometria plana: arco de circunferência, aproximação de comprimentos. (Stillwell, 1989)

Materiais:

Lousa, projetor, computadores com GeoGebra.

Metodologia/Procedimentos:

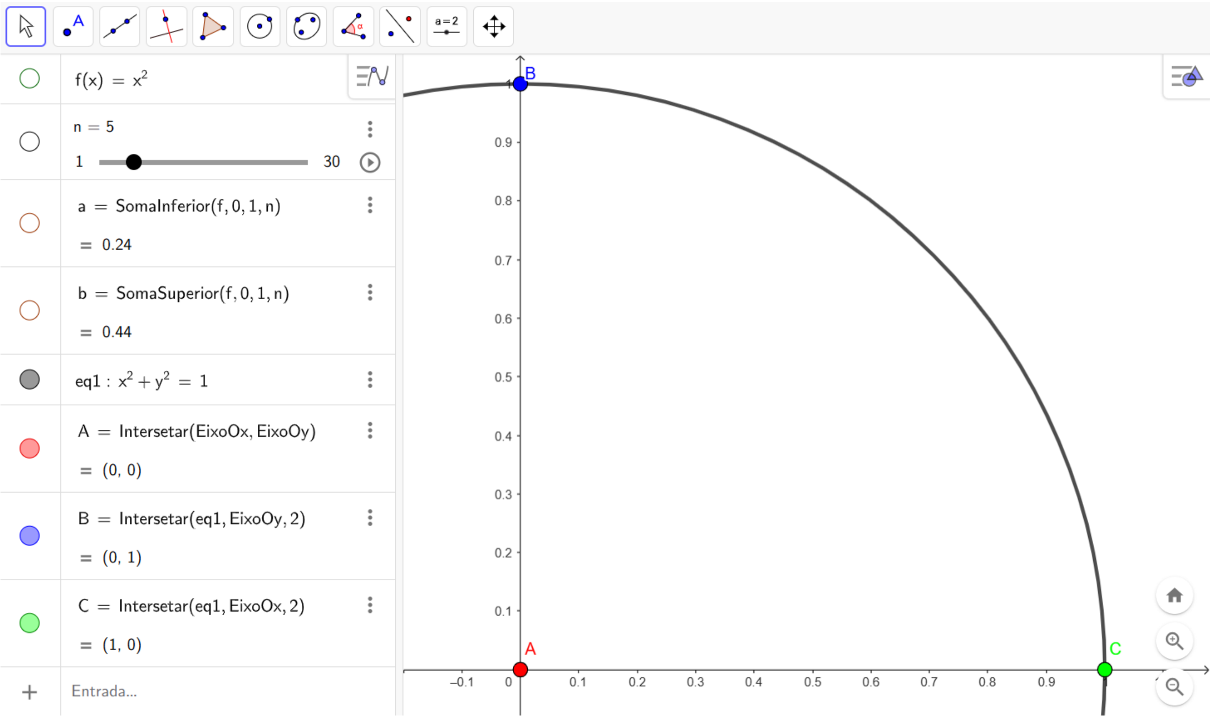
(5 min) Introdução: Relembrar o objetivo final: encontrar uma fórmula para π (ou $\pi/4$) usando ideias de soma infinita. Introduzir que farão isso através de uma aproximação geométrica do comprimento de um arco.

(30 min) Construção Geométrica Guiada (GeoGebra):

Pedir para desenhar um sistema de eixos cartesianos. Marquem a origem A=(0,0), o ponto C=(1,0) e o ponto B=(0,1). Tracem o arco de círculo centrado na origem A, com raio 1, que liga C a B. Qual o comprimento deste arco?"(Guiar para a resposta: $L = \frac{1}{4} \times 2\pi(1) = \pi/2$).

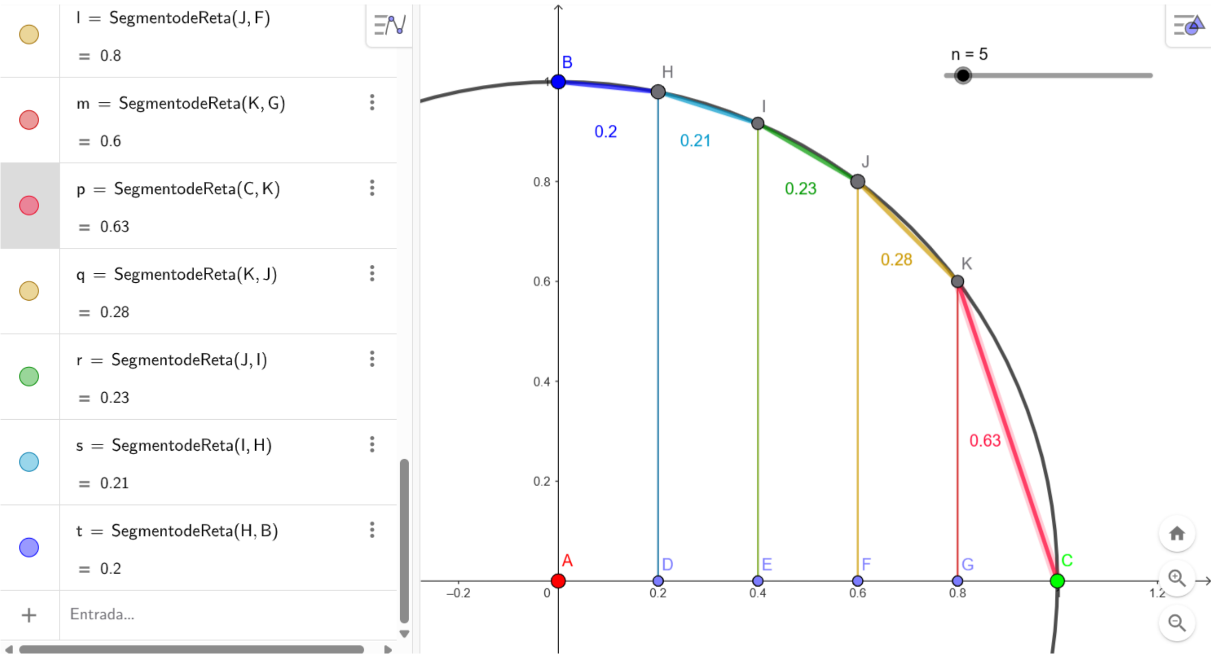
Focando na ideia principal: queremos aproximar o comprimento desse arco $\pi/2$ usando pequenos segmentos de reta. Pedir para dividir o segmento AC (eixo x de 0 a 1) em 'n' partes iguais (exemplo $n = 5$). De cada ponto de divisão, traçamos um segmento vertical até encontrar o arco. Vamos conectar os pontos consecutivos no arco por segmentos de reta. A soma dos comprimentos desses segmentos será uma aproximação do comprimento do arco. Veja o exemplo nas figuras 6 e 7.

Figura 6 – Construção de um circulo círculo centrado na origem e raio unitário



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 7 – Aproximando o arco através de segmentos poligonais



Fonte: Elaborado pelo autor

Exploração Visual: Usar o GeoGebra para mostrar que ao aumentar 'n', a poligonal formada pelos segmentos se ajusta melhor ao arco. Perguntar: "A soma dos comprimentos desses segmentos parece se aproximar de $\pi/2$ quando 'n' aumenta?".

(10 min) Foco nos Segmentos: Explicar que matemáticos conseguem encontrar uma fórmula para o comprimento de cada pequeno segmento usando geometria (semelhança de triângulos, Pitágoras) e que a soma total desses comprimentos, para 'n' subdivisões, pode ser escrita matematicamente.

(5 min) Próximo Passo: Na próxima aula, veremos qual a fórmula aproximada para a soma desses comprimentos e como, ao considerarmos infinitos segmentos ($n \to \infty$), chegamos a uma série relacionada a $\pi/4$.

Avaliação:

Observar a compreensão da construção geométrica e do princípio de aproximação. Pedir aos alunos que expliquem o método com suas palavras.

2.5 Aula 5: Um Caminho Geométrico para π (Parte 2 - A Série de Leibniz)

Objetivos Específicos:

- Apresentar a expressão resultante da soma dos comprimentos dos segmentos aproximadores.
- Introduzir (conceitualmente) a conexão dessa soma com a expansão em série de $1/(1+x^2)$.
- Apresentar a Série de Leibniz como o resultado final dessa aproximação infinita.
- Calcular termos da série para observar a aproximação de $\pi/4$.
- Refletir sobre a convergência e a beleza da fórmula.

Conteúdos:

Série de Leibniz, convergência. (Stewart, 2010)

Materiais:

Lousa, projetor, calculadora, folha de atividades.

Metodologia/Procedimentos:

(5 min) Revisão: Relembrar a construção geométrica da Aula 4 e a soma dos segmentos que aproximam o arco.

(20 min) A Conexão e a Série de Leibniz:

Relembram da série geométrica $1+r+r^2+\cdots = \dfrac{1}{1-r}$ da Aula 3. Substituir usarmos $r=-x^2$, para obter uma expansão para a função da nossa soma:

$$1-x^2+x^4-x^6+\cdots = \frac{1}{1+x^2}$$

Relembrar também a seguinte relação:

$$\tan(45^\circ) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \text{logo} \quad \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Apesar o publico alvo sendo alunos do ensino, por motivos de contextualização, por se tratar de um assunto limítrofe ao Ensino Médio, é interessante dizer (sem entrar em muitos detalhes) que existe uma relação matemática chamada de **Integral** e que, a seguinte afirmação é verdadeira:

$$\arctan(n) = \int_0^n \frac{1}{1+x}dx$$

Portanto, unindo todas as informações apresentadas temos:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^1 (1-x^2+x^4-x^6+\ldots)dx$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

Assim chega-se a um resultado fantástico, conhecido como "Série de Leibni":

Apresentar a Série de Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

ou usando somatório:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

Enfatizar: π, da geometria, conectado a uma soma alternada simples dos inversos dos ímpares!

(20 min) Explorando a Série: Pedir aos alunos para calcularem as primeiras somas parciais na calculadora e compararem com $\pi/4 \approx 0,78539\ldots$.

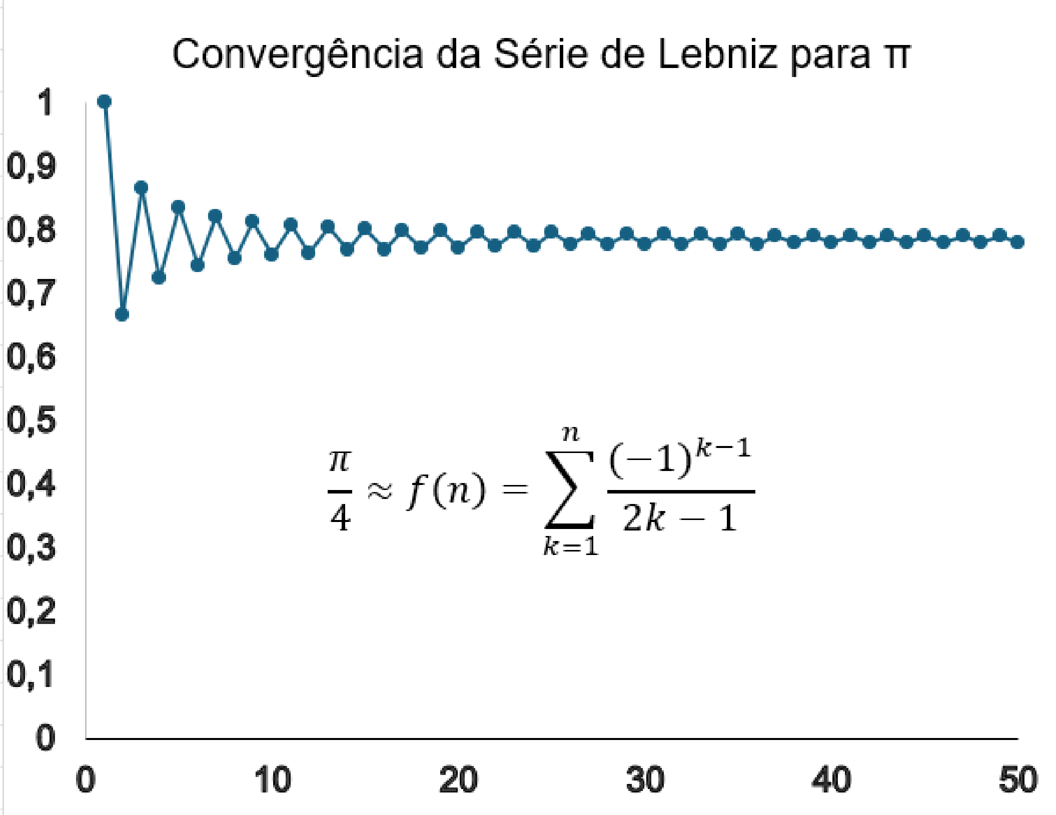
Figura 8 – Sugestão de atividade para calcular as somas parcial da série de Leibniz

Soma Parcial	Operação	Resultado
S(1) =	1	1
S(2) =	S(1) - 1/3 =	
S(3) =	S(2) + 1/5 =	
S(4) =	S(3) - 1/7 =	
S(5) =	S(4) + 1/9 =	
S(6) =	S(5) - 1/11 =	
S(7) =	S(6) + 1/13 =	
S(8) =	S(7) - 1/15 =	
S(9) =	S(8) + 1/17 =	
S(10) =	S(9) - 1/19 =	

Fonte: Elaborado pelo autor

Discutir: A soma "oscila", conforme mostrado na figura 9 em torno do valor real. Ela converge, mas muito lentamente. Mencionar que seriam necessários milhares de termos para obter apenas algumas casas decimais corretas.

Figura 9 – Gráfico mostrando a convergência da serie de Leibniz para o $\pi/4 \approx 0.78539816339$



Fonte: Elaborado pelo autor

(5 min) Conclusão da Jornada: Revisitar os passos da sequência didática. Destacar a beleza das conexões matemáticas e como ideias aparentemente simples (como somar partes) podem levar a resultados profundos sobre números como π.

Avaliação:

Cálculo das somas parciais e análise da aproximação. Discussão sobre a convergência (lenta vs rápida). Possivelmente, pedir aos alunos que escrevam um pequeno texto refletindo sobre a conexão mais surpreendente que viram nestas aulas.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, K. K. de. **Uma breve cronologia de pi**. [*S. l.*], 2008. Imagem de domínio público. Disponível em: https://www.obaricentrodamente.com/2008/12/breve-cronologia-de-pi.html. Acesso em: 06 de maio de 2025.

BECKMANN, P. **A History of pi**. [*S. l.*]: Barnes & Noble, 1993.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, DF: MEC, 2018.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar**. 8ª. ed. São Paulo: Editora Atual, 2005. v. 9.

GEOGEBRA. **Geogebra**. [*S. l.*], 2023. Disponível em: https://www.geogebra.org Acesso em: 8 de ago. de 2025.

LIMA, E. L. **Curso de análise**. 12ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. v. 1.

STEIN, S. K. **Strength in numbers**: discovering the joy and power of mathematics in everyday life. [*S. l.*]: Turner Publishing, 2008.

STEWART, J. **Cálculo**. [*S. l.*]: Cengage Learning, 2010. v. 2.

STILLWELL, J. **Mathematics and its history**. [*S. l.*]: Springer, 1989. v. 3.