UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

CLÉBIO OLIVEIRA DA SILVA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE A INTERSECÇÃO ENTRE BINÔMIO DE NEWTON E PROBLEMAS DE CONTAGEM

CAMPINA GRANDE
2025

CLÉBIO OLIVEIRA DA SILVA

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE A INTERSECÇÃO ENTRE BINÔMIO DE NEWTON E PROBLEMAS DE CONTAGEM

Produto educacional apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT, da Universidade Estadual da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

Área de concentração: Matemática na Educação Básica.

Orientador: Prof. Dr. Sílvio Fernando Alves Xavier Junior

CAMPINA GRANDE

2025

SUMÁRIO

1 PRODUTO EDUCACIONAL

Esse produto educacional traz uma proposta de sequência didática sobre o a relação e o uso do Binômio de Newton em problemas de Contagem, composta por orientações para docentes utilizarem e aplicarem em suas aulas de Matemática, afim de obter uma melhor entendimento na aprendizagem de seus alunos. A proposta didática é formada por uma sequência de atividades para os professores desenvolverem, ela é organizada para ser aplicada nas 2ª série do Ensino Médio, explorando definição e fórmula do Binômio de Newton, o Triângulo de Pascal, coeficientes binomiais e aplicações práticas.

O conteúdo deste produto didático educacional é resultante da dissertação de mestrado profissional intitulada "A intersecção entre Binômio de Newton e problemas de contagem". A dissertação tem como objetivo investigar a intersecção entre o Binômio de Newton, os problemas de contagem e as funções geradoras no Ensino Médio. Com base em uma revisão teórica e na análise de práticas pedagógicas, buscamos demonstrar como a integração desses conceitos no currículo escolar pode enriquecer o aprendizado dos alunos, promovendo habilidades cruciais para a resolução de problemas matemáticos.

O Binômio de Newton, ao permitir a expansão de potências de binômios, não apenas se apresenta como uma ferramenta para simplificar cálculos, mas também se destaca como um ponto de partida para a compreensão de padrões numéricos e relações combinatórias, que se revelam essenciais para a formação de estudantes críticos e criativos.

2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA: A INTERSECÇÃO ENTRE BINÔMIO DE NEWTON E PROBLEMAS DE CONTAGEM.

Público alvo:
Alunos da 2ª série do Ensino Médio.

Pré-requisitos dos estudantes

- Conhecimento de expressões algébricas e polinômio.
- Conhecimento sobre produtos notáveis.
- Noções sobre princípios básicos de contagem.

Objetivos

- Fornecer aos alunos uma compreensão clara e concisa do conceito de Binômio de Newton e problemas de Contagem, suas aplicações e importância na matemática.
- Desenvolver a habilidade dos alunos de resolver problemas que envolvam o Binômio de Newton e problemas de Contagem, através de exemplos práticos e exercícios.
- Estimular o pensamento crítico dos alunos, incentivando-os a aplicar o conhecimento adquirido para resolver problemas do mundo real que possam ser modelados usando o Binômio de Newton.
- Promover a interação entre os alunos, através de atividades em grupo e discussões, para aprimorar suas habilidades de comunicação e colaboração.
- Incentivar a pesquisa e o estudo autônomo, fornecendo recursos adicionais para os alunos que desejam aprofundar seu entendimento sobre o tópico.

Habilidades (BNCC):

(EF09MA09): Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

(EM13MAT310): Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore.

Quantidade estimada de aulas:
8 aulas de aproximadamente 50 minutos cada.

2.1 Desenvolvimento da sequência didática

2.1.1 Aulas 1 e 2 - Introdução: Revisão de conteúdos prévios, situação-problema, contextualização, introdução ao tópico e como ganhar a atenção do aluno.

Duração: 100 minutos.
Local: Sala de aula.
Material necessário: Quadro branco, marcadores, notebook, smart TV.

Revisão de conteúdos prévios: O professor deve começar a aula relembrando os alunos sobre os conceitos de potenciação, fatorial e combinação simples. Estes são fundamentais para o entendimento do Binômio de Newton. O professor pode utilizar exemplos simples para reforçar estes conceitos.

Situações-problema: Após a revisão, o professor pode propor duas situações que envolvam o Binômio de Newton. Por exemplo, como calcular o valor de $(a+b)^2$ ou $(a-b)^3$. O objetivo aqui é preparar os alunos para o conteúdo que será abordado, mostrando-lhes a relevância prática do Binômio de Newton.

Contextualização: O professor deve explicar aos alunos que o Binômio de Newton tem aplicações em várias áreas da ciência, como a física e a engenharia, especialmente em situações que envolvem a expansão de um polinômio. Isso ajudará os alunos a compreenderem a importância do tópico.

Introdução ao tópico: O professor deve introduzir o tópico, explicando que o Binômio de Newton é uma fórmula usada para calcular a expansão de uma expressão do tipo $(a + b)^n$, onde n é um número natural. O professor pode compartilhar curiosidades sobre o matemático Isaac Newton, que deu nome a este tópico. Por exemplo, que Newton é conhecido por suas contribuições não só para a matemática, mas também para a física e a astronomia.

Ganhar a atenção dos alunos: Para finalizar a Introdução, o professor pode propor um desafio envolvendo o Binômio de Newton. Por exemplo, pedir aos alunos que tentem descobrir a expansão de $(a + b)^4$. Este desafio irá instigar a curiosidade dos alunos e prepará-los para o desenvolvimento do tópico.

2.1.2 Aulas 3 e 4 - Desenvolvimento: Apresentação da teoria, resolução de exemplos práticos, prática guiada, discussão e esclarecimentos de dúvidas.

Duração: 100 minutos.
Local: Sala de aula.
Material necessário: Quadro branco, marcadores, notebook, smart TV.

Apresentação da teoria: O professor deve começar explicando o que é o Binômio de Newton e como ele é representado matematicamente. Deve ser destacado que a fórmula geral do Binômio de Newton é dada por:

Se x e a são números reais e n é um inteiro positivo, segue que

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} a^p = \binom{n}{0} x^n a^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} a^1 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 a^n \tag{2.1}$$

onde o coeficiente binomial $\binom{n}{p}$ é definido pela expressão:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{2.2}$$

A equação (2.1) é válida para $\forall n, p \in \mathbb{N}$, com $p \leq n$. Para $n \in \mathbb{N}$, define-se o fatorial de n, cuja notação é $n!$, da seguinte forma:

$$0! = 1 \quad e \quad n! = n(n-1)!, \qquad \forall n > 1.$$

Assim,

$$2! = 2 \cdot 1 = 2, \quad 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6, \quad 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Em geral, usando a igualdade $n! = n(n-1)$, tem-se

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

É conveniente entender a definição de $n!$ para o caso $n = 0$, pondo $0! = 1$.

Por exemplo, para $n = 4$ e $0 \leqslant p \leqslant 3$ temos:

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0! \cdot 4!} = 1, \qquad \binom{4}{1} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6, \qquad \binom{4}{3} = \frac{4}{3! \cdot 1!} = 4.$$

Resolução de exemplos práticos: O professor deve então resolver exemplos práticos, utilizando a fórmula do Binômio de Newton. Os exemplos devem variar em dificuldade, começando com exemplos simples e gradualmente avançando para exemplos mais complexos. O professor deve explicar cada etapa da resolução, sempre reforçando a aplicação da fórmula e a importância de cada elemento.

Exemplo 1: Mostre que $9^n - 1$ é um múltiplo de 8 para todo n natural.

Há muitas maneiras de resolver esse problema, por aritmética, por indução. Neste caso a resolução será aplicando o Binômio de Newton.

Solução: Como

$$9^n = (8+1)^n = \binom{n}{0}8^n1^0 + \binom{n}{1}8^{n-1}1^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}8^11^{n-1} + \binom{n}{n}8^01^n$$

$$9^n = 8k+1 \quad com \quad k \in \mathbb{N}$$

Logo,

$$9^n - 1 = 8k + 1 - 1 = 8k$$

.

Exemplo 2: No desenvolvimento $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2n+1}$, sendo n inteiro positivo, pela formula do binômio de Newton, existe um termo que não depende de x?

Solução: O termo geral é:

$$\binom{2n+1}{p}x^{2n+1-p} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^p = \binom{2n+1}{p}x^{2n+1-2p}$$

Tomando $2n+1-2p = 0 \Rightarrow p = n + \frac{1}{2}$. Como n é natural, resulta que p não é inteiro, o que não convém. Logo, não há termo independente de x.

Exemplo 3: Demonstre que para todo n inteiro positivo que

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

Solução:

$$\begin{aligned} 0 = [1+(-1)]^n &= \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}(-1) + \binom{n}{2}1^{n-2}(-1)^2 + \cdots + \binom{n}{n}(-1)^n \\ &= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}, \end{aligned}$$

Exemplo 4: Determine o valor da soma $\binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + +3^2\binom{n}{2} + \cdots + 3^n\binom{n}{n}$.

$$\begin{aligned} S &= \binom{n}{0} + 3\binom{n}{1} + +3^2\binom{n}{2} + \cdots + 3^n\binom{n}{n} \\ &= \binom{n}{0}1^n3^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}3^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}3^2 + \cdots + \binom{n}{n}1^03^n \\ &= (1+3)^n \\ &= 4^n. \end{aligned}$$

Prática guiada: Após a resolução dos exemplos, o professor deve propor que os alunos resolvam um problema similar, mas com a orientação do professor.

O professor deve caminhar pela sala, auxiliando os alunos conforme necessário e esclarecendo dúvidas.

Esta atividade serve para consolidar o aprendizado e verificar a compreensão dos alunos.

Discussão e esclarecimento de dúvidas: Por fim, o professor deve abrir espaço para discussão e esclarecimento de dúvidas.

Os alunos devem ser encorajados a compartilhar suas percepções, dificuldades e estratégias de resolução.

O professor deve esclarecer quaisquer dúvidas restantes e fornecer feedback aos alunos.

Este desenvolvimento da aula permitirá que os alunos compreendam o conceito do Binômio de Newton, saibam aplicar a fórmula e resolvam problemas que envolvam a sua utilização. Além disso, a prática guiada e a discussão ajudarão a consolidar o aprendizado e a desenvolver habilidades de pensamento crítico e resolução de problemas.

2.1.3 Aulas 5 e 6 - Desenvolvimento: Revisão de aula, conexão com a prática e a teoria, resolução de exemplos práticos, reflexão individual, feedback e encerramento.

Duração: 100 minutos.

Local: Sala de aula

Material necessário: Quadro branco, marcadores, notebook, smart TV.

Revisão da Aula: O professor deve começar fazendo uma revisão dos principais pontos abordados na aula. Isso ajudará os alunos a consolidar o conhecimento adquirido e a ver a conexão entre os diferentes aspectos do Binômio de Newton. O professor pode fazer perguntas de revisão, como: O que é o Binômio de Newton? Qual sua relação com problemas de Contagem? Como escrever as linhas do triângulo de Pascal?. Os alunos devem ser incentivados a participar, respondendo às perguntas e compartilhando suas próprias reflexões.

Conexão com a Prática e a Teoria: O professor deve então explicar como a aula conecta a teoria do Binômio de Newton com sua relação com problemas de Contagem na aplicação prática. O professor pode usar exemplos de problemas resolvidos na aula para ilustrar como a teoria é aplicada na prática. Por exemplo, o professor pode mostrar como a fórmula do Binômio de Newton foi utilizada para resolver um problema específico. Isso ajudará os alunos a ver a relevância do que aprenderam e a compreender melhor como aplicar o Binômio de Newton em situações reais.

Resolução de exemplos práticos: O professor deve então resolver exemplos práticos, utilizando o triângulo de Pascal, explicando sua construção e propriedades. Os exemplos devem variar em dificuldade, começando com exemplos simples e gradualmente avançando para exemplos mais complexos. O professor deve explicar cada etapa da resolução, sempre reforçando a aplicação da fórmula e a importância de cada elemento.

Exemplo 1: Calcule $\binom{30}{12}+\binom{30}{17}+\binom{31}{14}$

Solução: Como

$$\binom{30}{12}+\binom{30}{17}=\binom{30}{12}+\binom{30}{13}=\binom{31}{13}$$

logo,

$$\binom{31}{13}+\binom{31}{14}=\binom{32}{14}.$$

Exemplo 2: Se A possui 512 subconjuntos, qual é o número de elementos de A ?

Solução: O número total de subconjuntos é $2^n = 512 \Rightarrow 2^n = 2^9 \Rightarrow n = 9$.

Exemplo 3: Em uma sala há 7 lâmpadas. De quantos modos pode ser iluminada a sala?

Solução:

$$\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\cdots+\binom{7}{7}=2^7-\binom{7}{0}=128-1=127$$

Exemplo 4: Calcule $\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k}$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(k+1)\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}+2^n\\
&= \sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}+2^n\\
&= \sum_{k=1}^{n}n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+2^n\\
&= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}+2^n\\
&= n\left[\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\cdots+\binom{n-1}{n-1}\right]+2^n\\
&= n\cdot 2^{n-1}+2^n\\
&= 2^{n-1}(n+2).
\end{aligned}$$

Reflexão Individual: O professor deve então propor que os alunos façam uma reflexão individual sobre o que aprenderam. Os alunos devem ser incentivados a pensar sobre as seguintes perguntas:

Qual foi o conceito mais importante que você aprendeu hoje? Quais questões você ainda tem sobre o Binômio de Newton? Como você pode aplicar o que aprendeu em sua vida diária ou em outras disciplinas? Os alunos devem ter um minuto para pensar sobre suas respostas. Após este tempo, o professor pode pedir para alguns alunos compartilharem suas reflexões. O objetivo desta atividade é encorajar os alunos a pensar criticamente sobre o que aprenderam e a identificar possíveis áreas de melhoria. Além disso, ao refletir sobre como podem aplicar o que aprenderam, os alunos estarão desenvolvendo habilidades valiosas para a vida além da sala de aula.

Feedback e Encerramento: Por fim, o professor deve agradecer aos alunos pela participação e pelo esforço durante a aula. O professor pode então dar feedback geral sobre a aula, destacando os pontos fortes e as áreas que podem ser melhoradas. O professor deve encorajar os alunos a continuar estudando o Binômio de Newton, fornecendo recursos adicionais, como problemas extra para casa ou links para vídeos explicativos.

Esta fase de retorno é crucial para consolidar o aprendizado, avaliar a eficácia da aula e preparar os alunos para o estudo independente. Ao refletir sobre o que aprenderam e identificar possíveis áreas de melhoria, os alunos estarão se tornando mais conscientes de seu próprio processo de aprendizado e estarão melhor preparados para futuras aulas.

2.1.4 Aulas 7 e 8 - Resumo dos conteúdos, conexão teoria-prática, sugestão de materiais extras e aplicação no dia a dia.

Duração: 100 minutos.
Local: Sala de aula
Material necessário: Quadro branco, marcadores, notebook, smart TV.

Resumo dos Conteúdos: O professor deve recapitular os principais pontos abordados durante a aula. Isso inclui a definição do Binômio de Newton, a fórmula geral para a expansão de um binômio, o triângulo de Pascal e a importância dos coeficientes binomiais e sua relação com problemas de Contagem. O professor pode utilizar esquemas ou diagramas para reforçar visualmente estes conceitos.

Conexão Teoria-Prática: Em seguida, o professor deve destacar como a aula conectou a teoria com a prática. O professor pode relembrar exemplos de problemas que foram resolvidos durante a aula e mostrar como a fórmula do Binômio de Newton foi aplicada na prática. Isso permitirá aos alunos entender a relevância do que aprenderam e como podem usar este conhecimento para resolver problemas reais.

Sugestão de Materiais Extras: O professor deve então sugerir materiais extras para os alunos que desejam aprofundar seu entendimento sobre o Binômio de Newton. Isso pode incluir livros de matemática, sites educacionais, vídeos online e aplicativos de matemática. O professor pode, por exemplo, recomendar um vídeo que explique a fórmula do Binômio de Newton de uma maneira diferente ou um site que ofereça exercícios interativos para praticar.

Aplicação no Dia a Dia: Por fim, o professor deve explicar brevemente como o Binômio de Newton pode ser aplicado no dia a dia. O professor pode mencionar que esta fórmula é usada em várias áreas da ciência e da engenharia para modelar e resolver problemas. Por exemplo, na física, a fórmula do Binômio de Newton pode ser usada para calcular a trajetória de um objeto em um campo gravitacional. Ao destacar estas aplicações, o professor pode ajudar os alunos a ver a relevância do que aprenderam e a motivá-los a continuar estudando.

A conclusão desta sequência didática é uma oportunidade importante para consolidar o aprendizado, reforçar a conexão entre a teoria e a prática, e preparar os alunos para o estudo independente. Ao resumir os conteúdos, sugerir materiais extras e discutir as aplicações do Binômio de Newton e sua relação com problemas de Contagem, o professor pode ajudar os alunos a solidificar seu entendimento e a desenvolver um interesse duradouro no assunto.

3 ATIVIDADE PROPOSTA

Problema 1: Uma pastelaria vende pastéis de carne, queijo e palmito. De quantas formas uma pessoa pode comer 5 pastéis?

Problema 2: Considerando o desenvolvimento de $(a+b)^n$, em que a e b são reais e n é natural, julgue o item. Se $n = 5$, então a média dos coeficientes da expansão desse binômio é maior que 5.

Problema 3: Sabendo que a soma dos coeficientes de $(a+b)^m$ é 512, calcule o número de permutações de $\frac{m}{3}$ elementos.

Problema 4: Considere a representação de um número binomial conforme a seguir: $\binom{n}{p}$, com n e $p \in \mathbb{N}$ e $0 \leq p \leq n$. Assinale a alternativa que representa uma expressão que corresponde a soma $\binom{23}{13} + \binom{23}{12} + \binom{24}{11}$.

Problema 5: Quantas comissões de 5 pessoas, contendo pelo menos duas mulheres, podemos escolher de um grupo de 8 homens e 3 mulheres?

Problema 6: Usando o binômio de Newton é correto afirmar que a aproximação, a menos de um centésimo, de $(1,003)^{20}$ vale 1,06?

Problema 7: Sabendo que: $\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} = 63$, então $n = 10$?

Problema 8: Determine o valor da expressão $99^5 + 5(99)^4 + 10(99)^3 + 10(99)^2 + 5(99) + 1$.

Problema 9: (ENEM-2024) Um hospital tem 7 médicos cardiologistas e 6 médicos neurologistas em seu quadro de funcionários. Para executar determinada atividade, a direção do hospital formará uma equipe com 3 médicos, sendo pelo menos 2 cardiologistas. Desenvolva a expressão numérica que representa o número máximo de maneiras distintas de formar essa equipe.

Problema 10 Calcule o valor numérico do polinômio:

$$x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 6xy^3 + y^4 \quad para \quad x = \frac{1+\sqrt{6}}{\sqrt[4]{5}} \quad e \quad y = \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt[4]{5}}$$

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Caro leitor, esperamos que este trabalho tenha oferecido uma experiência enriquecedora para sua sala de aula. Ao explorarmos o Binômio de Newton e sua ligação com problemas de Contagem, nosso objetivo foi proporcionar uma abordagem de fácil acesso e envolvente as identidades binomiais se revelam como uma estrutura que perpassa diversas áreas da matemática, tornando-se uma ponte entre teoria e prática, que se estabelece como fundamental para a compreensão dos conceitos matemáticos.

A interdisciplinaridade entre álgebra e combinação se estabelece como um ambiente rico para o aprendizado e a descoberta, que se revela essencial para a formação de estudantes mais críticos e criativos, que se beneficiam de uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. Conclui-se que a inclusão desses temas no currículo do ensino médio pode se mostrar como uma oportunidade para que os estudantes se desenvolvam de forma mais integral, que se tornam mais preparados para enfrentar os desafios do século XXI.

Análise da aplicação do Binômio de Newton no ensino médio se apresenta como uma oportunidade para que os educadores sejam capazes de avaliar a eficácia desses conceitos em diferentes contextos, que se mostram fundamentais para a formação de estudantes capacitados.

REFERÊNCIAS

[1] BRASIL, M. D. E. *Base Nacional Com Curricular.* Brasília: Ministério da Educação, 2018.

[2] Grimaldi, R. P. Discrete and combinatorial mathematics: An applied introduction, ser, 1994.

[3] Hazzan, S. Fundamentos de Matemática elementar, 5: combinatória, probabilidade. São Paulo: Atual, 2013. *LOVÀSZ, László.*

[4] MORGADO, A. C., CARVALHO, J. B. P. D., CARVALHO, P. C. P., AND FERNANDEZ, P. Análise combinatória e probabilidade; com as soluções dos exercícios. *Coleção do professor de Matemática, ed 9* (2006).

[5] Vieira, V. L. *Um curso básico em teoria dos números.* Editora Livraria da Física, 2020.