UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
CAMPUS DIADEMA

UNIFESP
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO PAULO
1933

PRODUTO EDUCACIONAL

O ENSINO DE PROBABILIDADE: CONFLUÊNCIAS ENTRE MODELAGEM MATEMÁTICA, ENSINO E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Autor -1: Karl Willian Sousa Santos
Autor-2: Prof. Dra. Verilda Speridião Kluth

DIADEMA
2025

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO

Este Roteiro de Aprendizagem constitui um produto educacional vinculado à dissertação intitulada *"O ensino de probabilidade: confluências entre modelagem matemática, ensino e educação matemática"*. Seu propósito é contribuir para o ensino de probabilidade na Educação Básica por meio de uma abordagem investigativa, que favoreça a compreensão conceitual e a reflexão sobre o uso da matemática na sociedade. A proposta articula os princípios da modelagem matemática com contextos socialmente relevantes, como o universo das apostas esportivas, promovendo o desenvolvimento do pensamento probabilístico e da autonomia intelectual dos estudantes.

2. JUSTIFICATIVA

O ensino de probabilidade na Educação Básica frequentemente esbarra em desafios didáticos, como a natureza abstrata dos conceitos e uma aparente desconexão com o universo dos estudantes. Tal cenário resulta em uma aprendizagem técnica, focada na aplicação de fórmulas, mas carente de sentido e de potencial analítico. A Modelagem Matemática, em sua perspectiva pedagógica, emerge como uma abordagem potente para superar essa lacuna, pois transforma o aluno em um agente ativo que investiga, questiona e constrói representações matemáticas a partir de fenômenos do mundo real (Barbosa, 2001).

Esta sequência didática foi concebida para articular a técnica da Modelagem Matemática, a aprendizagem significativa de conceitos probabilísticos (perspectiva do Ensino) e a formação para a cidadania (perspectiva da Educação Matemática). A escolha do futebol e do universo das apostas esportivas como contexto não é aleatória; trata-se de um tema de grande apelo e presença no cotidiano dos jovens, o que garante o engajamento inicial.

Mais importante, porém, é o potencial desse contexto para transcender o mero cálculo. Ao final do processo de modelagem, os estudantes são levados a comparar seus resultados com assuntos da contemporaneidade e a refletir sobre as implicações sociais e éticas do fenômeno das apostas. Assim, a matemática deixa de ser um fim em si mesma para se tornar uma ferramenta de leitura e questionamento do mundo, capacitando os alunos a tomar decisões mais conscientes e a compreender as complexas relações entre probabilidade, risco e interesses comerciais.

3. OBJETIVOS

3.1 OBJETIVO GERAL

Promover o raciocínio probabilístico e a refletir a contemporaneidade por meio de um processo de modelagem matemática, capacitando os estudantes a construir, aplicar e analisar modelos em um contexto socialmente relevante, de modo a compreenderem o poder e as implicações da matemática na sociedade.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Compreender a probabilidade como uma medida de incerteza, aplicando os conceitos de frequência relativa e probabilidade condicional (de forma intuitiva através das cadeias de Markov).
- Entender o que é um modelo matemático, reconhecendo suas potencialidades como simplificação da realidade e suas limitações intrínsecas.
- Diferenciar probabilidade teórica, probabilidade empírica e as *odds* de um mercado de apostas.
- Coletar, organizar e sistematizar dados reais provenientes de fontes digitais.
- Construir e alimentar um modelo matemático em etapas, utilizando planilhas para realizar cálculos de frequência, transição e ponderação.
- Executar os cálculos de suavização, combinação de probabilidades e normalização para aprimorar e validar o modelo.
- Comparar os resultados do modelo (as *odds* justas) com dados do mercado real, formulando hipóteses para explicar as diferenças encontradas.
- Desenvolver uma postura crítica e investigativa diante de problemas do mundo real.
- Refletir eticamente sobre os impactos sociais do mercado de apostas, reconhecendo os riscos associados e o papel da publicidade.

- Argumentar com base em evidências matemáticas, defendendo pontos de vista durante os debates em grupo e com a turma.
- Colaborar em equipe, valorizando o processo de construção coletiva do conhecimento.

4. COMPETÊNCIAS E HABILIDADES DA BNCC

O presente roteiro de aprendizagem está alinhado às diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e contempla tanto competências gerais quanto habilidades específicas da área de Matemática para o Ensino Médio. A proposta visa não apenas o desenvolvimento de conhecimentos técnicos, como o cálculo de probabilidades e a construção de modelos matemáticos, mas também a formação integral do estudante, promovendo a reflexão crítica, o pensamento investigativo, a argumentação e o uso consciente das tecnologias.

Entre as competências gerais da BNCC, destacam-se aquelas diretamente mobilizadas no desenvolvimento das atividades propostas: (1) o uso dos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo físico e social; (2) o estímulo ao pensamento científico, crítico e criativo por meio da modelagem de situações reais; (4) a comunicação de ideias com clareza e precisão, utilizando diferentes linguagens, como a matemática e a verbal; (5) o uso ético e significativo das tecnologias digitais; (6) a valorização da autonomia e da responsabilidade nas decisões que afetam a vida pessoal e coletiva; (7) a construção de argumentos fundamentados em dados e evidências; (8) o desenvolvimento do autoconhecimento e do autocuidado, especialmente ao discutir os impactos sociais e psicológicos das apostas; e (10) o exercício da cidadania por meio de uma postura crítica diante de temas socialmente sensíveis.

No que se refere às habilidades específicas da área de Matemática, o produto articula fortemente os conteúdos de Estatística e Probabilidade, com destaque para as seguintes habilidades do Ensino Médio: EM13MAT311, EM13MAT312, EM13MAT511, EM13MAT512, EM13MAT513 e EM13MAT514, que envolvem desde a identificação de espaços amostrais até o cálculo e interpretação de probabilidades em contextos reais. Além disso, o trabalho dialoga com habilidades de Álgebra, como EM13MAT202 e EM13MAT303, ao utilizar representações algébricas e funções para construir e interpretar modelos. As habilidades EM13MAT401 e EM13MAT402 também se fazem presentes, pois os estudantes são incentivados a resolver problemas com diferentes estratégias, representações e validações.

Dessa forma, o roteiro aqui proposto configura-se como uma prática pedagógica integradora, que atende às exigências da BNCC tanto no plano conceitual quanto no formativo, contribuindo para uma educação matemática crítica, significativa e socialmente comprometida.

5. SEQUÊNCIA DIDÁTICA

5.1 ETAPA 1 – CÁLCULO DAS FREQUÊNCIAS RELATIVAS

1. Escolha dois times de futebol que já tenham se enfrentado ou que jogarão nos próximos dias.
2. Acesse um site confiável e pesquise os últimos 10 jogos de cada time.
3. Anote os resultados de cada jogo: se o time venceu (V), empatou (E) ou perdeu (D).
4. Organize esses resultados em uma tabela.
5. Calcule a frequência relativa de cada tipo de resultado. Use a fórmula:

$$Frequência\ Relativa = \frac{número\ de\ ocorrências\ do\ evento}{total\ de\ jogos}$$

6. Complete a tabela com as frequências encontradas;
7. Responda:
    - Qual resultado foi mais frequente para cada time?
    - Podemos confiar apenas nesses dados para prever o próximo jogo? Por quê?

Orientações ao professor

- Essa etapa introduz a ideia de probabilidade empírica (frequência relativa), um conceito fundamental e acessível.
- É importante orientar os estudantes na coleta de dados confiáveis e ajudá-los a interpretar a frequência como uma estimativa, não uma garantia.

- Estimule a construção de hipóteses com base nos dados e incentive a comparação entre os dois times.
- O uso de planilhas pode ser opcional, mas é recomendado para familiarizar os alunos com representações digitais e otimizar os cálculos.

5.2 ETAPA 2 – CONSTRUÇÃO DAS MATRIZES DE TRANSIÇÃO

1. Observe a sequência de resultados dos times que você escolheu. Uma transição é a passagem de um resultado para o outro, como por exemplo, de uma derrota para outra derrota. Quantas são as possibilidades?
2. Conte quantas vezes cada transição aconteceu (considere todas as possibilidades).
3. Reflita: e se uma transição nunca aconteceu nos seus dados (contagem = 0)? Isso significa que ela é impossível?
4. Para evitar esse problema, vamos usar uma técnica chamada suavização de Laplace. Construa a tabela para cada transição de estado i para j, de acordo com a fórmula:

$$p_{ij} = \frac{N_{ij} + \alpha}{N_i + \alpha \times k}$$

N_{ij}: número de transições observadas de i para j

N_i: total de ocorrências do estado i

α: parâmetro de suavização ($\alpha = 1$)

k: número de estados possíveis (V, E, D)

5. Organize essas probabilidades em matrizes de transição 3x3, uma para cada time.

Orientações ao professor

- Uma cadeia de Markov é uma ferramenta matemática usada para modelar sistemas que mudam de um estado para outro ao longo do tempo. A sua característica principal, e o que a torna tão útil para nós, é a propriedade de Markov: a probabilidade de ir para o próximo estado depende apenas do estado atual, e não de como chegamos até aqui. No nosso caso: vitória (V), empate (E) e derrota (D).

- Propriedade de Markov: a chance de o time ganhar o próximo jogo, por exemplo, depende apenas se o último resultado foi uma vitória, empate ou derrota, e não de toda a sequência de jogos anteriores. É uma simplificação da realidade, mas promissora, pois nos permite criar um modelo matemático para analisar o momento de um time.
- A suavização de Laplace é um ponto importante. Enfatize seu propósito: corrigir limitações de amostras pequenas e evitar o determinismo do "zero absoluto". Isso ensina que modelos são construções que podem ser aprimoradas.
- O foco deve ser na compreensão do processo e no porquê de cada passo, mais do que na memorização da fórmula.

5.3 ETAPA 3 – CONSTRUÇÃO DO MODELO HÍBRIDO

1. Agora temos duas informações: a frequência geral (Etapa 1) e a probabilidade de transição (Etapa 2), que representa o momento do time. Vamos combiná-las para criar um modelo mais robusto. Para isso, usaremos um peso (λ), que é um número entre 0 e 1. Ele define a importância que daremos a cada informação.
    a. Se λ for alto, daremos mais importância ao momento atual do time.
    b. Se λ for baixo, daremos mais importância ao histórico geral.
2. Calcule a probabilidade híbrida de cada time para cada resultado (V, E, D) usando a fórmula:

$$P_{Híbrida} = \lambda \times P_{Markov} + (1 - \lambda) \times P_{Freq}$$

    - P_{Markov} é a probabilidade da linha da matriz de transição que corresponde ao último resultado dos times.
    - P_{Freq} é a frequência relativa calculada na Etapa 1.

Orientações ao professor

- Discuta o conceito de ponderação. Peça aos alunos que justifiquem a escolha do seu λ. "Por que você acha que o momento atual é mais (ou menos) importante que o histórico geral?".
- Esta etapa é excelente para mostrar que a modelagem envolve tomada de decisão. Não há uma única resposta "certa" para o valor de λ, o que enriquece a discussão.
- Reforce que estamos construindo um modelo passo a passo, tornando-o cada vez mais sofisticado.

5.4 ETAPA 4 – CÁLCULO DAS PROBABILIDADES CONJUNTAS

1. Com as probabilidades híbridas de cada time em mãos, vamos calcular a chance de cada placar possível no confronto entre eles. Para simplificar, vamos assumir que os resultados dos times são independentes.
2. Calcule as probabilidades conjuntas:
    a. Vitória de A: $P(V_A) = P_{Híbrida}(V_A) \times P_{Híbrida}(D_B)$
    b. Vitória de B: $P(V_B) = P_{Híbrida}(V_B) \times P_{Híbrida}(D_A)$
    c. Empate: $P(E) = P_{Híbrida}(E_A) \times P_{Híbrida}(E_B)$

Orientações ao professor

- Aproveite para discutir a suposição de independência. Questione os alunos: vocês acham que o desempenho de um time em um jogo é realmente independente do desempenho do adversário? Por quê?
- Isso introduz outra camada de análise crítica sobre as limitações do modelo e mostra que, para tornar um problema calculável, muitas vezes precisamos fazer simplificações da realidade.

5.5 ETAPA 5 – AJUSTE FINAL: NORMALIZAÇÃO E CÁLCULO DAS *ODDs*

1. Considerando cada time, some as três probabilidades que você calculou na etapa anterior. O resultado provavelmente não será exatamente 1. Para corrigir isso, vamos normalizar os valores.
2. Divida cada uma das três probabilidades pela soma para obter as probabilidades normalizadas ($P'(X)$):

$$P'(X) = \frac{P(X)}{P(V_A) + P(E) + P(V_B)}$$

$$X \in \{V_A, E, V_B\}$$

3. Exemplo: para calcular a probabilidade normalizada da vitória do time A, usaremos a fórmula (no lugar do X, colocamos V_A):

$$P'(V_A) = \frac{P(V_A)}{P(V_A) + P(E) + P(V_B)}$$

4. Agora, transforme essas probabilidades em *odds*, que é o formato usado em sites de apostas. As *odds* justas mostram o retorno que você teria se a aposta fosse equilibrada. Calcule as *odds* para a vitória de cada time e para o empate:

$$Odd(X) = \frac{1}{P'(X)}$$

$$X \in \{V_A, E, V_B\}$$

Orientações ao professor

- A normalização é um procedimento matemático comum e importante. Explique sua necessidade de forma simples: o total de chances precisa ser de 100%.
- A conversão para *odds* é a ponte direta com o mundo real das apostas. Explique que *odds* baixas significam alta probabilidade, e vice-versa.
- Destaque o termo *odds* justas. Isso será fundamental para a discussão na próxima etapa, ao comparar com as *odds* reais das casas de apostas (que incluem a margem de lucro da casa).

5.6 ETAPA 6 – ANÁLISE CRÍTICA E REFLEXÃO ÉTICA

Em grupo, debatam e respondam às seguintes questões:

1. Validação do Modelo:
   - Os resultados e as *odds* que vocês encontraram fazem sentido? O time que o modelo apontou como favorito é o que vocês esperavam?
   - O que o nosso modelo não considerou? Como isso afeta a confiança no resultado?
2. Comparação com o Mundo Real:
   - Pesquisem as *odds* oferecidas por um site de apostas real para o jogo que vocês analisaram (ou um similar).
   - Comparem com as *odds* justas que vocês calcularam. Elas são iguais? Por que vocês acham que há diferença
3. Reflexão Ética e Social:
   - Qual a relação entre a matemática que usamos e o funcionamento das casas de apostas?
   - As apostas esportivas são apenas uma diversão ou podem trazer riscos? Quais?
   - Como a publicidade massiva de apostas pode influenciar as pessoas, especialmente os jovens?
   - De que forma a matemática pode nos ajudar a ser cidadãos mais críticos em relação a esse fenômeno?

Orientações ao professor

- Este é o momento de culminância da atividade. Nele, articulam-se as três perspectivas que estruturam esta sequência didática: a técnica (Modelagem Matemática), a aprendizagem significativa (Ensino) e a formação cidadã (Educação Matemática).
- Conduza um debate aberto, garantindo que os alunos possam expressar suas opiniões e usar os resultados do modelo para embasar seus argumentos.

- O objetivo não é chegar a uma única conclusão, mas promover a consciência crítica sobre como a matemática é usada na sociedade, seus poderes e suas implicações éticas.
- Finalize a aula reforçando que a matemática é uma ferramenta poderosa não apenas para calcular, mas para ler, interpretar e questionar o mundo.

5.7 SUGESTÃO DE DURAÇÃO DAS ATIVIDADES

- A duração total estimada para a aplicação desta sequência didática é de 4 a 6 aulas de 50 minutos. Esta estimativa pode variar conforme o ritmo da turma, o nível de aprofundamento nas discussões e o uso de ferramentas digitais. A distribuição sugerida é a seguinte:
- Etapa 1: 1 a 2 aulas. Tempo suficiente para a introdução do problema, coleta e organização inicial dos dados.
- Etapas 2 a 5 (Construção do Modelo): 2 a 4 aulas. Esta é a parte mais densa matematicamente. O tempo pode ser ajustado dependendo da familiaridade dos alunos com planilhas e da complexidade que surgir nos cálculos e discussões sobre o modelo.
- Etapa 6 (Análise Crítica e Reflexão): 1 a 2 aulas. É fundamental dedicar uma aula inteira para a discussão final, garantindo que os objetivos de formação crítica e ética sejam alcançados.

6. REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. *Anais...* Caxambu: ANPED, 2001.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília: MEC, 2017.

LOPES, C. E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Cadernos CEDES*, Campinas, v. 28, n. 74, p. 57-73, jan./abr. 2008.

MELILLO, C. R. *Modelagem matemática no futebol: uma atividade de crítica e criação encaminhada pelo método do caso*. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

SANTOS, K. W. S. *O ensino de probabilidade: confluências entre Modelagem Matemática, Ensino e Educação Matemática*. 2025. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de São Paulo, Campus Diadema, Diadema, 2025.

APÊNDICE A - EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO MODELO

Este exemplo demonstra a aplicação completa da sequência didática para um confronto entre Red Bull Bragantino e São Paulo. Neste produto, usaremos uma série histórica maior do que a apresentada na dissertação de Santos (2025).

Etapa 1 – Coleta de dados e determinação das frequências relativas

- Red Bull Bragantino: V, V, V, V, E, D, V, V, D, V;
- São Paulo: E, V, E, E, D, V, D, D, D, D;

Cálculo das Frequências Relativas

Time	Vitórias (V)	Empates (E)	Derrotas (D)
Red Bull Bragantino	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$
São Paulo	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$

Etapa 2 – Construção da matriz de transição

Red Bull Bragantino

$$\boldsymbol{M_{RBB}} = \begin{array}{cccc} & \boldsymbol{V} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{V} & \mathbf{4/9} & \mathbf{2/9} & \mathbf{3/9} \\ \boldsymbol{E} & \mathbf{1/4} & \mathbf{1/4} & \mathbf{2/4} \\ \boldsymbol{D} & \mathbf{3/5} & \mathbf{1/5} & \mathbf{1/5} \end{array}$$

São Paulo

$$\boldsymbol{M_{SÃO}} = \begin{array}{cccc} & \boldsymbol{V} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{V} & \mathbf{1/5} & \mathbf{2/5} & \mathbf{2/5} \\ \boldsymbol{E} & \mathbf{2/5} & \mathbf{2/5} & \mathbf{1/5} \\ \boldsymbol{D} & \mathbf{2/7} & \mathbf{1/7} & \mathbf{4/7} \end{array}$$

Etapa 3 – Cálculo das probabilidades pelo modelo híbrido

Aqui, adotou-se $\lambda = 0{,}6$, considerando um peso maior para as probabilidades Markovianas.

Red Bull Bragantino (último estado foi V):

- $P_H(V)_{RBB} = \left(0{,}6 \times \frac{4}{9}\right) + \left(0{,}4 \times \frac{7}{10}\right) = 0{,}264 + 0{,}280 = 0{,}544$
- $P_H(E)_{RBB} = \left(0{,}6 \times \frac{2}{9}\right) + \left(0{,}4 \times \frac{1}{10}\right) = 0{,}132 + 0{,}040 = 0{,}172$
- $P_H(D)_{RBB} = \left(0{,}6 \times \frac{3}{9}\right) + \left(0{,}4 \times \frac{2}{10}\right) = 0{,}198 + 0{,}080 = 0{,}278$

São Paulo (último estado foi D):

- $P_H(V)_{SÃO} = \left(0{,}6 \times \frac{2}{7}\right) + \left(0{,}4 \times \frac{2}{10}\right) = 0{,}174 + 0{,}080 = 0{,}254$
- $P_H(E)_{SÃO} = \left(0{,}6 \times \frac{1}{7}\right) + \left(0{,}4 \times \frac{3}{10}\right) = 0{,}084 + 0{,}120 = 0{,}204$
- $P_H(D)_{SÃO} = \left(0{,}6 \times \frac{4}{7}\right) + \left(0{,}4 \times \frac{5}{10}\right) = 0{,}342 + 0{,}200 = 0{,}542$

Etapa 4 – Cálculo das probabilidades conjuntas

- $P(V)_{RBB} = P_H(V)_{RBB} \times P_H(D)_{SÃO} = 0{,}544 \times 0{,}542 \approx 0{,}2948$
- $P(E) = P_H(E)_{RBB} \times P_H(E)_{SÃO} = 0{,}172 \times 0{,}204 \approx 0{,}0351$
- $P(V)_{SÃO} = P_H(V)_{SÃO} \times P_H(D)_{RBB} = 0{,}254 \times 0{,}278 \approx 0{,}0706$

Etapa 5 – Normalização e cálculo das *odds* justas

- $P'(V)_{RBB} = \frac{0{,}2948}{0{,}2948 + 0{,}0351 + 0{,}0706} = \frac{0{,}2948}{0{,}4005} \approx 0{,}7360$
- $P'(E) = \frac{0{,}0351}{0{,}2948 + 0{,}0351 + 0{,}0706} = \frac{0{,}0351}{0{,}4005} \approx 0{,}0876$
- $P'(V)_{RBB} = \frac{0{,}0706}{0{,}2948 + 0{,}0351 + 0{,}0706} = \frac{0{,}0706}{0{,}4005} \approx 0{,}1763$

- $Odd(V)_{RBB} = \frac{1}{P\prime(V)_{RBB}} = \frac{1}{0{,}7360} \approx 1{,}36$
- $Odd(E) = \frac{1}{P\prime(E)} = \frac{1}{0{,}0876} \approx 11{,}42$
- $Odd(V)_{SÃO} = \frac{1}{P\prime(V)_{SÃO}} = \frac{1}{0{,}1763} \approx 5{,}67$

Etapa 6 - Análise crítica e reflexão ética

1. Validação do modelo

- Possíveis perguntas para os alunos:
  - As odds que vocês calcularam no modelo indicavam o Red Bull Bragantino como favorito?
  - Isso faz sentido com o desempenho recente do time? Por quê?
  - O que vocês esperam que aconteça no jogo com base no histórico e agora?
  - Se incluíssemos outros fatores no modelo, ele ficaria mais fácil ou mais difícil de criar? Por quê?
  - Mesmo com essas limitações, o modelo pode ser útil como uma aproximação?
- Pontos a serem explicados pelo professor:
  - O modelo criado é uma simplificação da realidade. Ele considera dados históricos (frequência relativa) e o momento atual do time (matriz de transição ponderada com λ), mas não leva em conta outros fatores importantes, como mando de campo, qualidade técnica individual, lesões ou suspensões, motivação do jogo (decisão de campeonato ou amistoso), entre outros.
  - Explique que quanto mais variáveis o modelo considera, mais complexo e difícil de construir ele se torna. Além disso, é preciso ter dados confiáveis para todas essas variáveis, o que pode ser um desafio.

2. Comparação com as *odds* reais

- *Odds* calculadas pelo modelo (odds justas):

Resultado	*Odds* justas (modelo)	Probabilidade (%)
Bragantino vence	1,36	73,60%
Empate	11,42	8,76%
São Paulo vence	5,67	17,63%
Total		100%

- *Odds* oferecidas pela casa de apostas:

Resultado	*Odds* reais (casa)	Probabilidade (%)
Bragantino vence	2,22	45,05%
Empate	3,15	31,75%
São Paulo vence	3,70	27,03%
Total		103,83%

- Possíveis perguntas para os alunos:
    - Comparando as duas tabelas, o que chama a atenção em relação às *odds* e às probabilidades?
    - Por que a casa oferece odds bem diferentes das *odds* justas?
    - Se as casas de apostas oferecessem as *odds* justas, elas teriam lucro? Por quê?

- Pontos para o professor explicar:
    - As *odds* justas são puramente matemáticas, baseadas no modelo criado pelos alunos.
    - As *odds* reais da casa são ajustadas para reduzir o retorno ao apostador, garantindo o lucro da empresa.
    - Além disso, a soma das probabilidades implícitas na casa ultrapassa 100%. Esse excesso é chamado de margem de lucro ou *overround*.

3. Reflexão ética e social
    - Possíveis perguntas para os alunos:
        - Como a matemática (probabilidades e *odds*) é usada pelas casas de apostas para garantir lucro?
        - As apostas esportivas são só diversão ou podem trazer riscos? Quais?
        - Como a publicidade massiva influencia o comportamento das pessoas, especialmente dos jovens?
        - Você acha que todos entendem bem como funcionam as odds? Ou isso pode levar a decisões impulsivas?
        - O que aprendemos hoje sobre a relação entre matemática e sociedade?
        - Como podemos usar esse conhecimento para sermos cidadãos mais críticos e conscientes?
    - Pontos para o professor explicar:
        - A matemática é uma ferramenta poderosa que pode ser usada para analisar o mundo e tomar decisões mais conscientes.
        - É importante compreender os riscos associados ao fenômeno das apostas e desenvolver uma postura crítica diante das estratégias das casas para atrair clientes.
        - Modelos matemáticos nos ajudam a entender o mundo, mas precisamos sempre analisar suas limitações e as intenções por trás de quem usa os números, como as casas de apostas.