

INSTITUTO FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
CAMPUS CANOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT

**ESTUDO DE FUNÇÕES POR MEIO DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS NO
SOFTWARE GEOGEBRA**

Mestrando: Paulo Roberto Martins Berndt
Orientador: Prof. Dr. Bruno Brogni Uggioni
Coorientadora: Profa. Dra. Juliana Sanches

Produto Educacional
Canoas, 2025

RESUMO

A presente proposta tem como objetivo integrar o ensino de Funções Reais de variável real ao de Geometria e Trigonometria, articulando diferentes representações de relações funcionais a partir da resolução de problemas geométricos. Elaboramos duas propostas didáticas voltadas a alunos do Ensino Médio integrado, com apoio do software GeoGebra como recurso pedagógico. O principal objetivo é proporcionar aos estudantes situações de aprendizagem que favoreçam a construção de conhecimento sobre Funções a partir do estudo de áreas de figuras planas. Pretende-se, ainda, estimular a percepção do potencial pedagógico na integração dos conteúdos de Geometria e Funções por meio de uma abordagem não convencional, que valoriza a intuição e a experimentação. O uso do GeoGebra permite a criação de gráficos dinâmicos, promovendo uma nova forma de compreender e relacionar as representações gráficas e algébricas. Ao observar essas representações em movimento, os estudantes têm a oportunidade de visualizar transformações e identificar propriedades invariantes nas construções geométricas. Em vez de analisarem uma única figura estática, entram em contato com uma família de infinitas figuras geradas pelas sucessivas posições ao longo do movimento, o que pode favorecer a formulação de conjecturas e a construção de argumentos dedutivos.

Palavras-chave: Geometria. Funções. GeoGebra. Geometria Dinâmica.

SUMÁRIO

1.	Introdução	2
2.	Sequências Didáticas	4
2.1	Primeira sequência de atividades – para estudantes do 1º ano do Ensino Médio	7
2.2	Segunda sequência de atividades – para estudantes do 3º ano do Ensino Médio	18
3	Discussão e resolução das Sequências Didáticas	26
3.1	Primeira Sequência de atividades – para estudantes do 1º ano do Ensino Médio	26
3.1.1	Problema nº 01.	26
3.1.2	Problema nº 02.	29
3.1.3	Problema nº 03.	33
3.1.4	Problema nº 04.	36
3.1.5	Problema nº 05.	40
3.1.6	Problema nº 06.	44
3.1.7	Problema nº 07.	49
3.1.8	Problema nº 08.	54
3.1.9	Problema nº 09.	58
3.2	Segunda Sequência de atividades – para estudantes do 3º ano do Ensino Médio	64
3.2.1	Problema nº 01.	64
3.2.2	Problema nº 02.	70
3.2.3	Problema nº 03.	77
3.2.4	Problema nº 04.	87
3.2.5	Problema nº 05.	94
	Referências.....	104

1. Introdução

Este produto educacional é fruto da pesquisa “Estudo de funções por meio de construções geométricas no software GeoGebra”, realizada no âmbito do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto Federal do Rio Grande do Sul (IFRS) sob a orientação do Professor Doutor Bruno Brogni Uggioni e coorientação da Professora Doutora Juliana Sanches.

Este produto educacional é destinado a professores do Ensino Médio e contém duas sequências de atividades que totalizam 14 problemas. Essas sequências podem ser adaptadas conforme as necessidades dos estudantes e têm como foco a resolução de tarefas desafiadoras e significativas, relacionadas ao processo de ensino-aprendizagem de Funções reais de variável real e Áreas de figuras planas.

Após a exposição do planejamento referente a cada atividade, o professor encontrará uma seção destinada às resoluções detalhadas, cujas soluções pressupõem o domínio prévio, por parte dos estudantes, de conceitos relacionados à Geometria e às Funções.

As atividades foram organizadas considerando a progressão dos conteúdos ao longo do Ensino Médio. A primeira sequência é voltada para alunos do 1º ano, com foco nas funções polinomiais e no conceito de área, por meio de situações-problema contextualizadas geometricamente. Já a segunda sequência é direcionada para alunos do 3º ano, e trabalha problemas mais complexos, que exigem a articulação de conceitos de Geometria e Trigonometria, preparando os estudantes para os desafios futuros do ensino superior.

As atividades foram elaboradas com o objetivo de oferecer subsídios que contribuam para o aprofundamento dos conhecimentos dos estudantes, ao mesmo tempo em que sugerem uma metodologia baseada em práticas investigativas. Essa abordagem busca ser mais intuitiva, favorecendo o desenvolvimento da argumentação lógica e do raciocínio dedutivo.

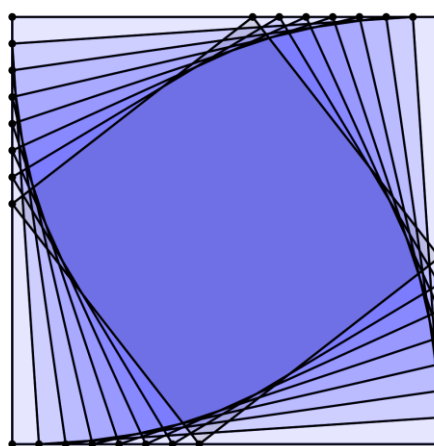
Os problemas de modelagem geométrica que resultam em funções reais de variável real se revelam instrumentos potentes para o ensino da Matemática, funcionando como verdadeiros laboratórios do ensino de Geometria. A exploração dessa área pode ser ainda mais eficaz com o uso de recursos computacionais, como os softwares de Geometria Dinâmica. Neles, a animação dos objetos não é apenas um atrativo visual, mas parte integrante do processo de construção e compreensão.

Neste material, as propostas didáticas são desenvolvidas com o apoio do software GeoGebra, aproveitando seus múltiplos recursos. A intenção é utilizá-lo não apenas como uma ferramenta de desenho, mas como um ambiente digital voltado à investigação e à aprendizagem significativa. Espera-se que este material contribua com o trabalho do professor ao oferecer não apenas um conjunto de atividades, mas também uma proposta metodológica que articula teoria e prática, conteúdo e tecnologia, desafio e significado. Assim, o presente produto educacional pretende ser um instrumento eficaz na construção de uma aprendizagem mais ativa, crítica e reflexiva.

2. Sequências Didáticas

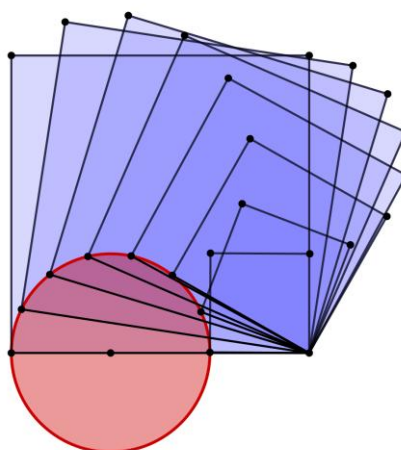
Apresentam-se, neste trabalho, duas sequências didáticas compostas por conjuntos de problemas geométricos, todos relacionados ao cálculo de áreas de figuras planas. As construções envolvidas caracterizam-se pela presença de um ponto móvel, isto é, um ponto que se desloca continuamente ao longo de um segmento, reta ou circunferência, cujo movimento implica em transformações nas configurações geométricas iniciais. O objetivo principal é fazer com que o aluno investigue a variação da área definida inicialmente e associe esta variação com uma função real de variável real. Importante ressaltar que os próprios estudantes realizarão as construções geométricas propostas por meio do software GeoGebra, desenvolvendo assim um papel ativo e participante.

Figura 1 - Sequência de quadrados em movimento (Problema nº 06, 1ª sequência).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Figura 2 - Sequência de Quadrados em movimento (Problema nº 04, 2ª sequência)



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A Figura 1 ilustra a variação da área de um quadrado construído internamente a outro, à medida que um de seus vértices se desloca ao longo de um dos lados do quadrado externo. Foram representadas sete posições iniciais e sucessivas desse movimento. Já a Figura 2 mostra como varia a área de um quadrado com um vértice fixo, enquanto outro vértice percorre uma circunferência. Oito posições iniciais e sucessivas do movimento foram desenhadas para ilustrar essa variação. Esses exemplos ilustram os tipos de problemas geométricos que serão modelados.

Cada um dos problemas destas sequências segue o seguinte roteiro básico, com poucas variações: (1) Apresentação do problema; (2) Construção geométrica; (3) Perguntas norteadoras; (4) Construção do gráfico cartesiano, (5) Dedução algébrica da lei da função e (6) Análise da função.

Cada problema é apresentado por meio de um enunciado textual, onde são definidas as características geométricas da construção. É também apresentada uma figura que ilustra o problema a fim de tornar sua interpretação inicial mais imediata.

A construção geométrica segue o princípio de “estabilidade sob ação de movimento”, em que a construção dos objetos geométricos está relacionada às suas propriedades. Assim, são utilizados pontos, retas, segmentos, retas perpendiculares e paralelas, círculos etc. com o objetivo de auxiliarem a definir as características da figura a ser construída.

Depois de concluída a construção geométrica, são propostas perguntas sobre a figura construída, de forma a incentivar o estudante a calcular sua área para valores particulares da variável independente. Para realizar estes cálculos, o estudante deverá relembrar os conhecimentos de Geometria Plana e ou Trigonometria. Para que o aluno possa compreender como se dá variação da área da figura proposta em função da medida de um segmento cuja extremidade é móvel, a 2ª etapa da construção trata de gerarmos um gráfico cartesiano diretamente relacionado à figura construída. Para isto deverá ser criado um ponto móvel P tal que sua abscissa seja a medida do segmento que representa a variável independente e sua ordenada seja o valor da área da figura a ser estudada. Uma vez criado este ponto móvel P, vamos habilitar o seu rastro, através do comando do GeoGebra que permite a exibição do caminho percorrido pelo ponto durante a ação de movimento. Este rastro representa graficamente a relação entre variável dependente e variável independente, isto é, trata-se do gráfico cartesiano da função que modela o problema. A partir desta experiência e de acordo com o desenho descrito pelo rastro do

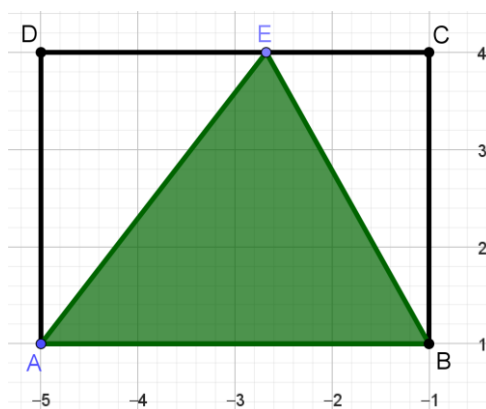
ponto móvel P (gráfico citado acima), espera-se que os estudantes utilizem seus conhecimentos prévios para conjecturarem sobre o tipo de função que expressa a variação da área a ser investigada. A seguir, novas perguntas são apresentadas ao estudante, direcionando-o a deduzir a expressão algébrica que representa a área da figura proposta. Para isto, deverá recorrer aos mesmos procedimentos numericamente utilizados em passo anterior. Agora se pede que em vez de um número, utilize em seus cálculos a variável x , que representa a medida do segmento com extremidade móvel. Finalizados os cálculos, pede-se que o aluno reflita sobre o resultado alcançado. A função encontrada é condizente com o gráfico cartesiano gerado pelo ponto P? Em caso afirmativo, novas perguntas podem ser realizadas: quais são os conjuntos que representam o domínio e a imagem da função encontrada? Essa função apresenta máximo ou mínimo? Como calcular estes pontos? Estes são exemplos de perguntas que podem despertar o interesse e a curiosidade do aluno no sentido de explorar o modelo gráfico construído.

2.1 Primeira sequência de atividades – para estudantes do 1º ano do Ensino Médio

Esta sequência se constitui como um conjunto de nove problemas geométricos sobre áreas de figuras planas, todos eles resultando em funções dos seguintes tipos: função constante, função afim, função quadrática ou função de várias sentenças.

Problema nº 01: *Construir um retângulo de dimensões 4 e 3 unidades de comprimento. Marcar um ponto arbitrário em um dos lados maiores. Determinar a área do triângulo cujos vértices são o ponto arbitrário e as extremidades do lado oposto do retângulo.*

Figura 3 - Ilustração do Problema nº 01.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª etapa

Construa o retângulo ABCD tal que $\overline{AB} = 4$ e $\overline{BC} = 3$. Marque o ponto E pertencente ao segmento CD e construa o triângulo ABE. Investigue a variação da área em função da medida do segmento DE.

Questões propostas:

1. Calcule a área do retângulo ABCD.
2. Caso o ponto E coincida com o ponto médio de CD, como classificamos o triângulo ABE em relação aos lados?
3. Caso o ponto E coincida com o ponto C, ou com o ponto D, como classificamos o triângulo ABE em relação aos ângulos?

Construção: 2ª etapa.

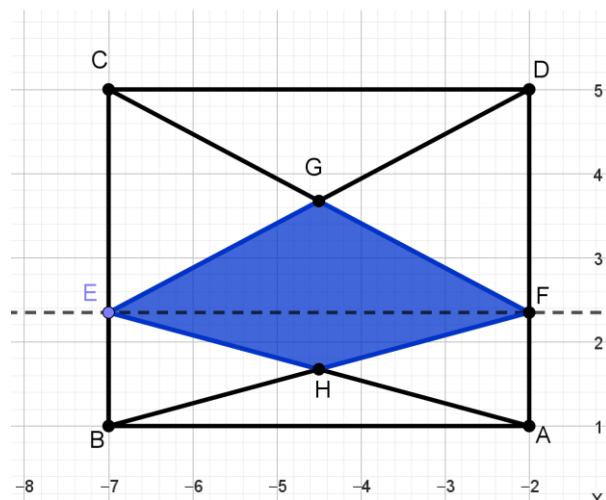
Construa um gráfico cartesiano que represente a variação da área do triângulo ABE em função da medida do segmento DE. Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digite no campo de entrada as coordenadas de um ponto P cuja abscissa é a medida do segmento DE, e a ordenada é a medida da área do triângulo ABE. Movimente o ponto E sobre o segmento DC e observe o rastro deixado pelo ponto P.

Questões propostas:

4. Sendo ABCD um retângulo, e sendo E um ponto sobre DC, mostre que a área do triângulo ABE não varia, independentemente da escolha do ponto E.
5. Considerando $DE = x$ e a função $f(x) = A_{ABE}$, determine o domínio e o conjunto imagem desta função.

Problema nº 02: Construir um retângulo cujos lados têm medidas 5 e 4 unidades de comprimento. Por um ponto arbitrário de um dos lados menores, traçar uma reta perpendicular a este lado, reta esta que dividirá o retângulo inicial em dois retângulos cujas diagonais serão traçadas. Determinar a área do quadrilátero que é limitado pelas quatro diagonais.

Figura 4 - Ilustração do Problema nº 02.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª Etapa.

Construa o retângulo ABCD tal que $\overline{AB} = 5$ e $\overline{BC} = 4$. Marque o ponto E pertencente ao segmento BC e trace uma reta perpendicular a BC passando por E. Marque o ponto F de intersecção desta reta com o segmento AD. Trace os segmentos AE, BF, e ED e FC e seus pontos de intersecção G e H, como na figura. Construa o quadrilátero EHFG e investigue a variação da sua área em função da medida do segmento BE.

Questões propostas:

1. Qual a área do retângulo ABCD?
2. Supondo que $BE = 1$ unidade, qual a área do quadrilátero EHFG?

Construção: 2ª Etapa.

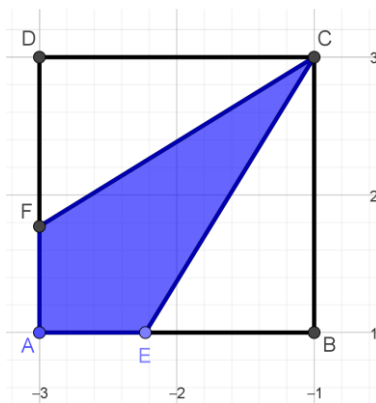
Construa um gráfico cartesiano que represente a variação da área do quadrilátero EHFG em função da medida do segmento BE. Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digite no campo de entrada as coordenadas de um ponto P cuja abscissa é a medida do segmento BE, e a ordenada é a medida da área do quadrilátero EHGF. Movimente o ponto E sobre o segmento BC e observe o rastro deixado pelo ponto P.

Questões propostas:

3. Considerando $\overline{BE} = x$, calcule a área do quadrilátero EHFG em função de x.
4. Escreva o Domínio e o Conjunto Imagem da função encontrada no item anterior.
5. Descreva a interpretação sobre a variação da área de EHFG que o modelo encontrado fornece.

Problema nº 03: Construir um quadrado ABCD cujos lados medem 2 unidades de comprimento. Marcar um ponto arbitrário E do lado AB, e determinar o ponto F sobre o lado AD, tal que $AE = AF$. Determinar a área do quadrilátero AECF, em função da medida de AE.

Figura 5 - Ilustração do Problema nº 03.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª Etapa.

Construa o quadrado ABCD tal que $\overline{AB} = 2$. Marque um ponto E qualquer pertencente ao segmento AB e trace uma circunferência de centro A passando por E. Marque o ponto F de intersecção desta circunferência com o segmento AD. Construa o quadrilátero AECF e investigue a variação da sua área em função da medida do segmento AE.

Questões propostas:

1. Qual a área do quadrado ABCD?

2. Considerando $AE = 1$ unidade, calcule a área do quadrilátero AECF.

Construção: 2ª Etapa.

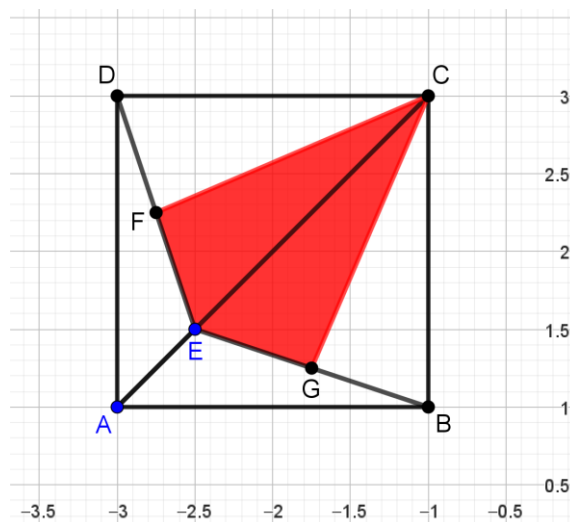
Construa um gráfico cartesiano que represente a variação da área do quadrilátero AECF em função da medida do segmento AE. Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digite no campo de entrada as coordenadas de um ponto P cuja abscissa é a medida do segmento AE, e a ordenada é a medida da área do quadrilátero AECF. Movimente o ponto E sobre o segmento AB e observe o rastro deixado pelo ponto P.

Questões propostas:

3. Considerando $AE = x$, calcule a área do quadrilátero AECF em função de x .
4. Escreva o domínio e o conjunto imagem desta função.
5. Qual é o tipo de função encontrada neste problema?

Problema nº 04: Construir um quadrado ABCD cujos lados medem 2 unidades de comprimento. Por um ponto arbitrário E da diagonal AC, traçar os segmentos ED e EB, e seus pontos médios, F e G, respectivamente. Determinar a área do quadrilátero EGCF, em função da medida de AE.

Figura 6 - Ilustração do Problema nº 04.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª Etapa.

Construa o quadrado ABCD tal que $\overline{AB} = 2$. Trace a diagonal AC e marque um ponto E qualquer pertencente à diagonal AC. Trace os segmentos ED e EB e marque seus respectivos pontos médios: os pontos F e G. Construa o quadrilátero EFCG e investigue a variação da sua área em função da medida do segmento AE.

Questões propostas:

1. Qual a área do quadrado ABCD?
2. Qual a medida da diagonal AC?
3. Qual a distância entre os pontos F e G?
4. Supondo que $AE = \frac{\sqrt{2}}{2}$ unidades, qual a área do quadrilátero EFCG?

Construção: 2ª etapa.

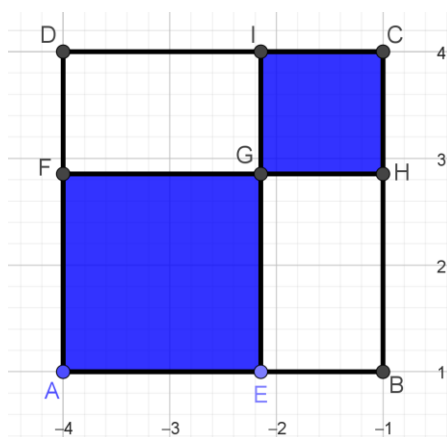
Construa um gráfico cartesiano que represente a variação da área do quadrilátero EFCG em função da medida do segmento AE. Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digite no campo de entrada as coordenadas de um ponto P cuja abscissa é a medida do segmento AE, e a ordenada é a medida da área do quadrilátero EFCG. Movimente o ponto E sobre a diagonal AC e observe o rastro deixado pelo ponto P.

Questões propostas:

5. Considerando $AE = x$, calcule a área do quadrilátero EFCG em função de x .
6. Escreva o domínio e o conjunto imagem desta função.
7. Escreva os valores máximo e mínimo desta função.

Problema nº 05: Construir um quadrado ABCD cujos lados medem 3 unidades de comprimento. Marcar um ponto E arbitrário no segmento AB. Construir o quadrado AEGF, tal que $F \in AD$. Prolongar EG até obter o ponto de intersecção I com o lado CD e prolongar FG até obter o ponto de intersecção H com o lado BC. Determinar a soma das áreas de AEGF e GHCI em função da medida do segmento AE.

Figura 7 - Ilustração do Problema nº 05.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª Etapa.

Construa o quadrado ABCD tal que $\overline{AB} = 3$. Marque um ponto E qualquer pertencente ao lado AB e marque $F \in AD$ tal que $\overline{AF} = \overline{AE}$. Trace os segmentos EI e FH tais que $EI \perp AB$ e $FH \perp AD$, com $H \in BC$ e $I \in CD$. Marque o ponto G de intersecção de EI e FH. Construa os quadriláteros AEGF e GHCI e investigue a variação da soma de suas áreas em função da medida do segmento AE.

Questões propostas:

1. Qual a área do quadrado ABCD?
2. Mostre que GHCI é também um quadrado.
3. Considerando $AE = 2$ unidades, calcule a soma das áreas dos quadrados AEGF e GHCI.
4. O que ocorre com a soma das áreas dos quadrados AEGF e GHCI quando o ponto E coincide com o ponto A? E quando o ponto E coincide com o ponto B?

Construção: 2ª Etapa.

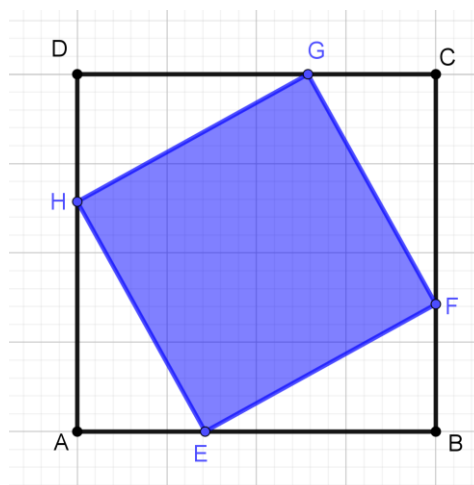
Construa um gráfico cartesiano que represente a variação da área do quadrilátero EFCG em função da medida do segmento AE. Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digite no campo de entrada as coordenadas de um ponto P cuja abscissa é a medida do segmento AE, e a ordenada é a soma das medidas das áreas dos quadriláteros AEGF e GHCI. Movimente o ponto E sobre o lado AB e observe o rastro deixado pelo ponto P.

Questões propostas:

9. Calcular a soma das áreas dos quadrados AEGF e GHCI em função da medida x do segmento AE.
10. Qual é o valor de x que minimiza a soma das áreas de AEGF e GHCI e qual o valor mínimo desta soma?
11. Sendo $f(x)$ a função que representa a soma das áreas de AEGF e GHCI, determine o domínio e a imagem desta função.

Problema nº 06: Construir um quadrado ABCD com lado medindo 2 unidades e marcar os pontos E, F, G e H, com $E \in AB$, $F \in BC$, $G \in CD$ e $H \in DA$, de maneira tal que $AE=BF=CG=DH$, conforme figura abaixo.

Figura 8 Ilustração do Problema n° 06.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª Etapa.

Construa o quadrado ABCD tal que $\overline{AB} = 2$. Marque um ponto E qualquer pertencente ao lado AB e marque os pontos $F \in BC$, $G \in CD$ e $H \in DA$ tais que $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH}$. Construa o quadrilátero EFGH e investigue a variação de sua área em função da medida do segmento AE.

Questões propostas:

1. Mostre que o quadrilátero EFGH é um quadrado.
2. Calcule a área do quadrado EFGH considerando que $AE = 0,5$ unidades.
3. Qual a área de EFGH quando E coincide com o ponto A? E com o ponto B?

Construção: 2ª Etapa.

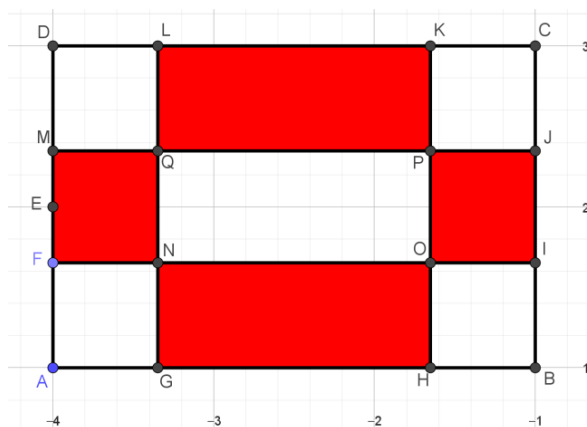
Construa um gráfico cartesiano que represente a variação da área do quadrilátero EFGH em função da medida do segmento AE. Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digite no campo de entrada as coordenadas de um ponto P cuja abscissa é a medida do segmento AE, e a ordenada é a medida da área do quadrilátero EFGH. Movimente o ponto E sobre o lado AB e observe o rastro deixado pelo ponto P.

Questões propostas:

4. Considerando $AE = x$, determine uma expressão para a área do quadrado EFGH.
5. Determine as coordenadas do ponto P que minimizam a área de EFGH.
6. Escreva o domínio e o conjunto imagem da função $f(x) = A_{EFGH}$.

Problema nº 07: Construir um retângulo $ABCD$ tal que $AB = 3$ unidades e $BC = 2$ unidades. Nos quatro vértices A, B, C e D , construa quadrados congruentes, cuja medida do lado seja menor que a metade da medida de BC . Assim, serão criados os quadrados $AGNF, BIOH, CKPJ$ e $DMQL$, conforme figura abaixo. Determinar a variação da soma das áreas dos quadriláteros $GHON, IJPO, KLQP$ e $MFNQ$ em função da medida do segmento AF .

Figura 9 - Ilustração do Problema nº 07.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª Etapa.

Construa o retângulo $ABCD$ tal que $\overline{AB} = 3$ e $\overline{BC} = 2$. Marque E , o ponto médio de AD , e construa o segmento AE . Marque o ponto F qualquer, pertencente ao segmento AE e marque os pontos $G, H \in AB$; $I, J \in BC$; $K, L \in CD$; $M \in AD$, tais que $\overline{AF} = \overline{AG} = \overline{BH} = \overline{BI} = \overline{CJ} = \overline{CK} = \overline{DL} = \overline{DM}$. Trace os segmentos FI, MJ, GL e HK . Marque os pontos de intersecção: $FI \cap GL = \{N\}$, $FI \cap HK = \{O\}$, $MJ \cap HK = \{P\}$ e $MJ \cap GL = \{Q\}$. Construa os quadriláteros $GHON, IJPO, KLQP$ e $MFNQ$ e investigue a variação da soma de suas áreas em função da medida do segmento AF .

Questões propostas:

1. Mostre que $GHON, IJPO, KLQP$ e $MFNQ$ são retângulos.
2. Calcule a soma das áreas de $GHON, IJPO, KLQP$ e $MFNQ$ quando $AF = 0,5$ unidades.

Construção: 2ª Etapa.

Construa um gráfico cartesiano que represente a variação da área do quadrilátero $EFCG$ em função da medida do segmento AF . Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digite no campo de entrada as coordenadas de um ponto R cuja abscissa é a medida do segmento AF , e a ordenada é a soma das medidas das áreas

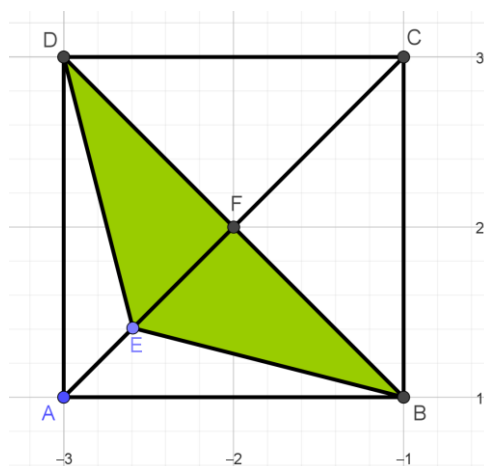
dos quadriláteros GHON, IJPO, KLQP e MFNQ. Movimente o ponto F sobre o segmento AE e observe o rastro deixado pelo ponto R.

Questões propostas:

3. Deduza uma expressão algébrica para a soma das áreas dos retângulos GHON, IJPO, KLQP e MFNQ, em função da medida x do segmento AF.
4. Determine as coordenadas de R que maximizam a soma das áreas dos retângulos GHON, IJPO, KLQP e MFNQ.
5. Sendo $f(x) = A_{GHON} + A_{IJPO} + A_{KLQP} + A_{MFNQ}$, determine o domínio e o conjunto imagem de $f(x)$.

Problema nº 08: Construir um quadrado ABCD cujos lados medem 2 unidades. Traçar suas diagonais AC e BD. Marcar um ponto E qualquer sobre a diagonal AC. Determinar a área do triângulo EBD em função da medida do segmento AE.

Figura 10 - Ilustração do Problema nº 08.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª Etapa.

Construa o quadrado ABCD tal que $\overline{AB} = 2$. Trace a diagonal AC e, sobre ela, marque um ponto E qualquer. Construa o triângulo EBD e investigue a variação de sua área em função da medida do segmento AE.

Questões propostas:

1. Calcule a medida da diagonal AC do quadrado ABCD.
2. Mostre que EBD é um triângulo isósceles ou um segmento.
3. Calcule a área do triângulo EDB quando $AE = \frac{\sqrt{2}}{2}$ unidades.
4. Calcule a área do triângulo EDB quando $AE = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ unidades.

Construção: 2ª Etapa.

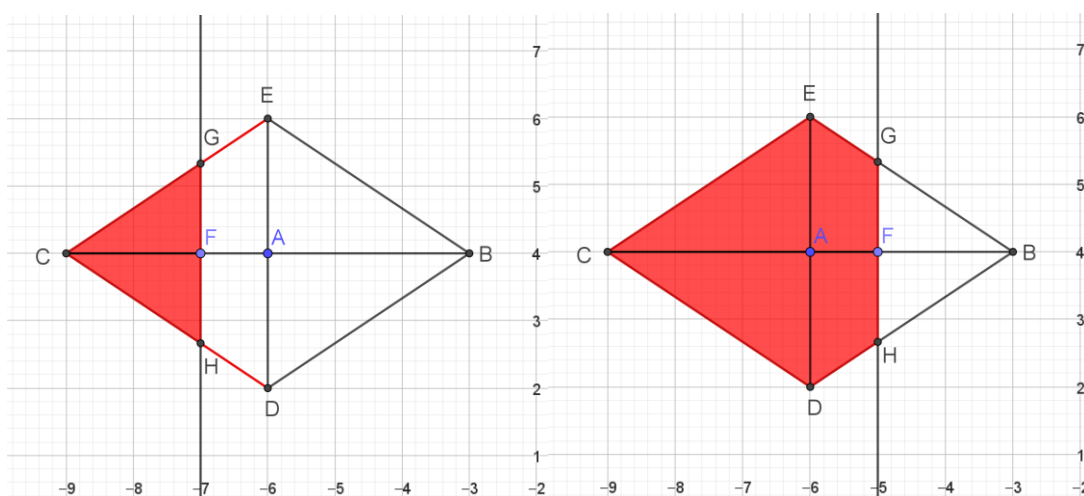
Construa um gráfico cartesiano que represente a variação da área do triângulo EBD em função da medida do segmento AE. Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digite no campo de entrada as coordenadas de um ponto P cuja abscissa é a medida do segmento AE, e a ordenada é a medida da área do quadrilátero EFGH do triângulo EBD. Movimente o ponto E sobre a diagonal AC e observe o rastro deixado pelo ponto P.

Questões propostas:

5. Determine expressões para a altura EF relativa à base BD do triângulo EBD em função da medida x do segmento AE.
6. Determine expressões para a área do triângulo EBD em função da medida x do segmento AE.
7. Sendo $f(x) = A_{EBD}$ determine o domínio e o conjunto imagem de $f(x)$.

Problema nº 09: Construir um losango BECD de centro A, traçando suas duas diagonais de medidas $\overline{BC} = 6$ e $\overline{DE} = 4$ unidades de comprimento. Por um ponto arbitrário F da diagonal maior, traçar uma reta perpendicular a esta e determinar a área da região que é interior ao losango e que se situa à esquerda da reta construída, em função da medida do segmento CF.

Figura 11 - Ilustração do Problema nº 09.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª Etapa.

Construa o losango BECD a partir de seu centro A, tal que $\overline{AB} = \overline{AC} = 3$ e $\overline{AD} = \overline{AE} = 2$. Trace as diagonais BC e DE, e os caminhos poligonais CEB e CDB. Marque um ponto F qualquer sobre a diagonal BC. Trace uma reta perpendicular à diagonal BC, passando por F. Marque os pontos G e H de intersecção desta perpendicular com os caminhos poligonais CEB e CDB, respectivamente. Posicione F entre os pontos A e B e construa o pentágono GECDH. Note que ao movimentar o ponto F de modo que fique localizado entre A e C, a área do pentágono GECDH se transforma na área do triângulo GCH. Investigue a variação da área desta região em função da medida do segmento CF.

Questões propostas:

1. Como calcular a área do losango BECD?
2. Considerando $\overline{CF} = 1,5$ calcular a área da região interior ao losango e à esquerda da reta considerada.
3. Considerando $\overline{CF} = 4,5$ calcular a área da região interior ao losango e à esquerda da reta considerada.

Construção: 2ª etapa.

Construa um gráfico cartesiano que represente a variação da área da região interna ao losango BECD e situada à esquerda da perpendicular à BC passando por F, em função da medida do segmento CF. Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digite no campo de entrada as coordenadas de um ponto P cuja abscissa é a medida do segmento CF, e a ordenada é a medida da área do pentágono GECDH. Movimente o ponto F sobre a diagonal BC e observe o rastro deixado pelo ponto P.

Questões propostas:

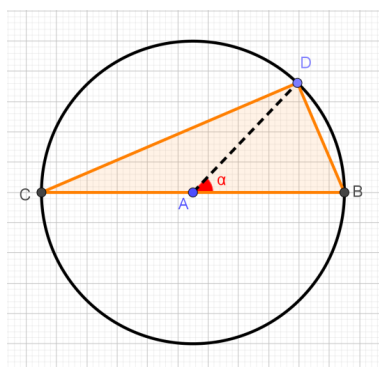
4. Considerando $\overline{CF} = x$, calcular a medida do segmento GH.
5. Considerando $\overline{CF} = x$, calcular expressões para a área da região interior ao losango e à esquerda da reta considerada.
6. Denominando f a função que associa a medida x do segmento CF à área da região R, determine o domínio e o conjunto Imagem de f .

2.2 Segunda sequência de atividades – para estudantes do 3º ano do Ensino Médio

Esta sequência se constitui como um conjunto de cinco problemas geométricos sobre áreas de figuras planas, todos eles resultando em funções trigonométricas dos seguintes tipos: função seno, função cosseno e função tangente, em alguns casos combinadas com a função modular. Estas atividades foram planejadas para estudantes do 3º ano do ensino médio.

Problema nº 01: Construir um círculo unitário de centro A e diâmetro BC . Seja D um ponto qualquer do círculo e seja $\alpha = \widehat{BAD}$ marcado no sentido anti-horário, sendo α um arco da 1ª volta. Determine a área do triângulo BCD em função de α .

Figura 12 - Ilustração do Problema nº 01.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Construção: 1ª etapa.

Trace um círculo de centro A e raio unitário. Trace uma reta passando pelo centro A . Marque B e C , pontos de intersecção do círculo com a reta traçada. Marque um ponto qualquer D sobre o círculo e marque o ângulo $\widehat{BAD} = \alpha$. Construa o triângulo BCD .

Questões propostas:

1. Como são classificados os triângulos ABD e ADC em relação aos lados?
2. Qual a medida do ângulo $\widehat{DAC}$ em função de α ?
3. Quais as medidas dos ângulos $\widehat{ADC}$ e $\widehat{ADB}$ em função de α ?
4. Como podemos classificar o triângulo BCD em relação aos ângulos?
5. Considerando $\alpha = 30^\circ$, calcule a área do triângulo BCD .
6. Considerando $\alpha = 120^\circ$, calcule a área do triângulo BCD .
7. Considerando $\alpha = 225^\circ$, calcule a área do triângulo BCD .
8. Considerando $\alpha = 330^\circ$, calcule a área do triângulo BCD .

Construção: 2ª etapa.

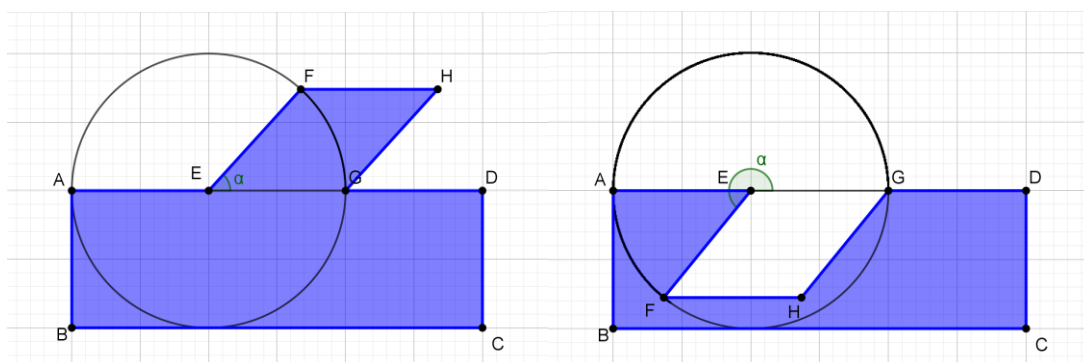
Construa um gráfico cartesiano que represente a variação da área triângulo BCD em função da medida do ângulo $\widehat{BAD} = \alpha$. Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digite no campo de entrada as coordenadas de um ponto P cuja abscissa é a medida do ângulo α , e cuja ordenada é a medida da área do triângulo BCD. Movimente o ponto D sobre o círculo e observe o rastro deixado pelo ponto P.

Questões propostas:

9. Calcule uma expressão para a altura h do triângulo BCD, relativa à hipotenusa BC. Calcule a expressão para a área do triângulo BCD.
10. Para quais valores de α temos que BCD possui área máxima? Qual o valor desta área máxima?
11. Para quais valores de α temos a área mínima de BCD? Qual o valor desta área mínima?
12. Escreva o domínio, a imagem e o período da função $f(\alpha) = A_{BCD}$.

Problema nº 02: Construir uma região poligonal formada pela composição de duas formas: um retângulo ABCD com dimensões $AB = 1$ unidade e $BC = 3$ unidades e um losango EFHG cujo lado mede 1 unidade e cujo ângulo interno $\widehat{GEF} = \alpha$ tem medida variando no sentido anti-horário, sendo α um arco da 1ª volta. Os pontos E e G pertencem ao segmento AD e $AE = EG = GD = 1$. Determine a área da região poligonal ABCDGHFE em função de α .

Figura 13 - Ilustração do Problema nº 03.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª etapa.

Construa um retângulo ABCD tal que $\overline{AB} = 1$ e $\overline{BC} = 3$. Marque o ponto $E \in AD$ tal que $AE = 1$. Trace um círculo com centro em E e raio $\overline{EA} = 1$ e, sobre ele, marque um

ponto arbitrário F. Marque o ponto G de intersecção deste círculo com AD, sendo A e G distintos. Construa o losango EFHG por meio de retas paralelas. Construa o polígono ABCDGHFE e investigue a variação da área da região poligonal ABCDGHFE em função da medida do ângulo $\widehat{GEF} = \alpha$.

Questões propostas:

Calcule a área da região poligonal ABCDGHFE quando:

1. $\alpha = 30^\circ$.
2. $\alpha = 90^\circ$.
3. $\alpha = 135^\circ$.
4. $\alpha = 240^\circ$.
5. $\alpha = 270^\circ$.
6. $\alpha = 330^\circ$.
7. $\alpha = 0^\circ$ ou $\alpha = 180^\circ$.

Construção: 2ª etapa.

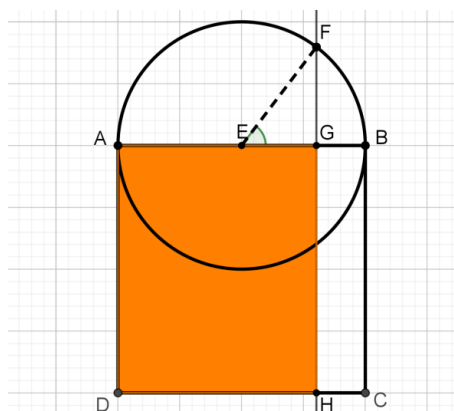
Construa o gráfico cartesiano diretamente a partir da figura construída na 1ª etapa. Crie o ponto P digitando suas coordenadas no campo de entrada. Sua abscissa é $\alpha = \widehat{GEF}$ e sua ordenada é a área da região poligonal ABCDGHFE. Habilite o rastro do ponto P e movimente o ponto F sobre o círculo. Observe a trajetória descrita pelo ponto P.

Questões propostas:

8. Determine uma expressão para a área da região ABCDGHFE.
9. Para quais valores de α temos que ABCDGHFE possui área máxima? Qual o valor desta área máxima?
10. Para quais valores de α temos a área mínima de ABCDGHFE? Qual o valor desta área mínima?
11. Escreva o domínio e a imagem da função $f(\alpha) = A_{ABCDGHFE}$.

Problema nº 03: Construir um quadrado ABCD cujo lado mede 2 unidades e um círculo de centro E e raio $\overline{EA}$, onde E é ponto médio de AB. Marcar um ponto qualquer F sobre o círculo, de modo que $\widehat{BEF} = \alpha$ tem medida variando no sentido anti-horário, sendo α um arco da 1ª volta. Por F traçar uma perpendicular ao lado AB, tal que essa perpendicular interseccione os lados AB e CD nos pontos G e H, respectivamente. Determine a área do quadrilátero AGHD em função de α .

Figura 14 - Ilustração do Problema nº 03.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Construção: 1ª Etapa.

Construa o quadrado $ABCD$, cujo lado mede 2 unidades. A seguir, marque o ponto médio E do lado AB e trace o círculo de centro E e raio $\overline{EA}$. Marque um ponto arbitrário F sobre o círculo e marque o ângulo $\alpha = \widehat{BEF}$ no sentido anti-horário. Pelo ponto F baixe uma perpendicular ao lado AB e marque os pontos de intersecção desta reta com os lados AB e CD , os pontos G e H , respectivamente. Construa o quadrilátero $ADHG$ e investigue a variação da sua área em função da medida do ângulo $\alpha = \widehat{BEF}$.

Questão proposta:

1. Explique por que o quadrilátero $ADHG$ é um retângulo.

Calcule a área do quadrilátero $ADHG$ quando:

2. $\alpha = 0^\circ$.
3. $\alpha = 30^\circ$.
4. $\alpha = 90^\circ$.
5. $\alpha = 120^\circ$.
6. $\alpha = 180^\circ$.
7. $\alpha = 225^\circ$.
8. $\alpha = 270^\circ$.
9. $\alpha = 300^\circ$.
10. $\alpha = 360^\circ$.

Construção: 2ª etapa.

Construa o gráfico cartesiano diretamente a partir da figura construída na 1ª etapa. Crie o ponto P digitando suas coordenadas no campo de entrada. Sua abscissa é $\alpha = \widehat{BEF}$

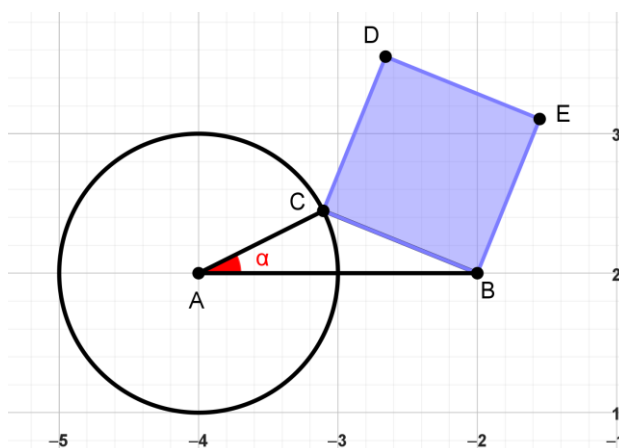
e sua ordenada é a área do retângulo ADHG. Habilite o rastro do ponto P e movimente o ponto F sobre o círculo. Observe a trajetória descrita pelo ponto P.

Questões propostas:

11. Deduza uma fórmula que expresse a área do retângulo ADHG em função de α .
12. Para quais valores de α temos que ADHG possui área máxima? Qual o valor desta área máxima?
13. Para quais valores de α temos a área mínima de ADHG? Qual o valor desta área mínima?
14. Escreva o domínio e a imagem da função $f(\alpha) = A_{ADHG}$.

Problema n° 04: Construir um triângulo ABC com $\overline{AB} = 2$ unidades, sendo A e B pontos fixos e C um ponto qualquer sobre o círculo de centro A e raio unitário. Seja o ângulo $B\hat{A}C = \alpha$ com medida variando no sentido anti-horário, sendo α um arco da 1ª volta. Construir o quadrado BCDE, e determinar sua área em função de α .

Figura 15 - Ilustração do Problema n° 04.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Construção: 1ª etapa.

Traçar o segmento AB, de modo que $\overline{AB} = 2$ unidades. Construir um círculo de raio unitário com centro em A e marcar um ponto C arbitrário sobre este círculo. Marcar o ângulo $\alpha = B\hat{A}C$ no sentido anti-horário. Por fim, construir o quadrado BCDE. Investigar a variação da área de BCDE em função de α .

Questão proposta:

Calcule a área do quadrado ABCD nos seguintes casos:

1. $\alpha = 0^\circ$
2. $\alpha = 45^\circ$

3. $\alpha = 90^\circ$
4. $\alpha = 120^\circ$
5. $\alpha = 180^\circ$
6. $\alpha = 210^\circ$
7. $\alpha = 270^\circ$
8. $\alpha = 300^\circ$
9. $\alpha = 360^\circ$

Construção: 2ª Etapa

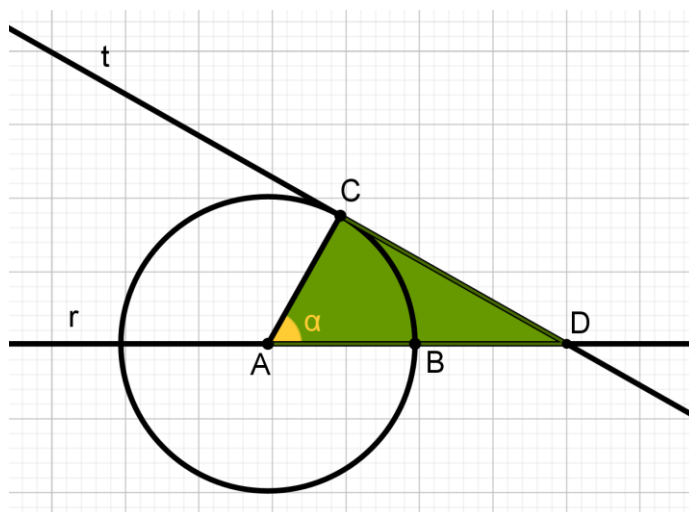
Construa o gráfico cartesiano diretamente a partir da figura construída na 1ª etapa. Crie o ponto P digitando suas coordenadas no campo de entrada. Sua abscissa é $\alpha = \widehat{BAC}$ e sua ordenada é a área do quadrado BCDE. Habilite o rastro do ponto P e movimente o ponto C sobre o círculo. Observe a trajetória descrita pelo ponto P.

As questões propostas são:

10. Deduza uma fórmula que expresse a área do quadrado BCDE em função de α .
11. Para quais valores de α temos que BCDE possui área máxima? Qual o valor desta área máxima?
12. Para quais valores de α temos a área mínima de ADHG? Qual o valor desta área mínima?
13. Escreva o domínio e a imagem da função $f(\alpha) = A_{BCDE}$.

Problema nº 05: Construir um círculo de centro A e raio medindo 2 unidades, e uma reta r , que passa por A e intersecciona o círculo em B. Seja C um ponto qualquer sobre este círculo, por este ponto traçamos uma reta t , tangente ao círculo. Seja D o ponto de intersecção das retas r e t e seja o ângulo $\widehat{DAC} = \alpha$ com medida variando no sentido anti-horário, sendo α um arco da 1ª volta. Determinar a área do triângulo ACD em função de α .

Figura 16 - Ilustração do Problema n° 05.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª etapa.

Trace um círculo de centro A e raio $\overline{AB} = 2$ unidades. Trace a reta r que passa pelos pontos A e B , sendo B um ponto fixo do círculo. Marque um ponto C arbitrário sobre o círculo. Trace o segmento AC e trace a reta t , tangente ao círculo e que passa pelo ponto C , para isto basta construir a reta perpendicular à AC que passa por C . Marque o ponto D de intersecção das retas r e t . Marque o ângulo $\alpha = \widehat{DAC}$, medido no sentido anti-horário. Investigue a área do triângulo ACD em função de α .

Questões propostas:

Calcule a área do triângulo ACD quando:

1. $\alpha = 0^\circ$
2. $\alpha = 45^\circ$
3. $\alpha = 60^\circ$
4. $\alpha = 90^\circ$
5. $\alpha = 150^\circ$
6. $\alpha = 180^\circ$
7. $\alpha = 240^\circ$
8. $\alpha = 270^\circ$
9. $\alpha = 330^\circ$
10. $\alpha = 360^\circ$

Construção: 2ª etapa.

Construa um gráfico cartesiano que represente a variação da área do triângulo ACD em função da medida do ângulo $\alpha = \widehat{DAC}$. Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digite no campo de entrada as coordenadas de um ponto P cuja abscissa é a medida do ângulo α , e a ordenada é a medida da área do triângulo ACD. Movimente o ponto C sobre círculo e observe o rastro deixado pelo ponto P.

Questões propostas:

11. Deduza uma fórmula que expresse a área do triângulo ACD em função de α .
12. Para quais valores de α temos que ACD possui área máxima? Qual o valor desta área máxima?
13. Para quais valores de α temos que ACD possui área mínima? Qual o valor desta área mínima?
14. Escreva o domínio e a imagem da função $f(\alpha) = A_{ACD}$.

3 Discussão e resolução das Sequências Didáticas

3.1 Primeira Sequência de atividades – para estudantes do 1º ano do Ensino Médio

Esta sequência é composta por um conjunto de nove problemas geométricos sobre áreas de figuras planas, todos eles resultando em funções dos seguintes tipos: função constante, função afim, função quadrática ou função de várias sentenças. Estas atividades foram planejadas para estudantes do 1º ano do Ensino Médio.

Sugerimos que, durante a aplicação da sequência didática, os nove problemas sejam vistos na ordem em que aparecem, um após o outro, pois eles seguem uma ordem crescente de dificuldade. Sugere-se também que as questões dentro de cada problema sejam resolvidas na ordem em que aparecem; e que as construções dentro de cada problema sejam feitas pelo estudante, na ordem em que aparecem.

3.1.1 Problema nº 01.

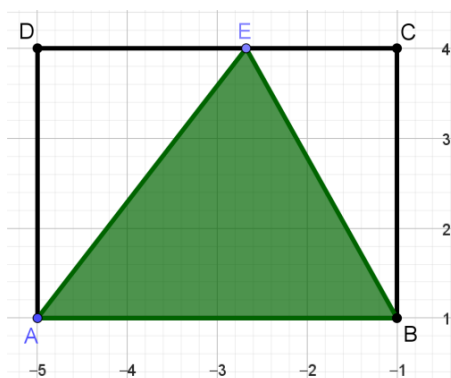
Objetivos de aprendizagem:

- Reconhecer propriedades de retângulos e triângulos a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de retângulos e triângulos.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função constante no plano cartesiano.

Duração: 2 horas/aula.

Problema nº 01: *Construir um retângulo de dimensões 4 e 3 unidades de comprimento. Marcar um ponto arbitrário em um dos lados maiores. Determinar a área do triângulo cujos vértices são o ponto arbitrário e as extremidades do lado oposto do retângulo.*

Figura 17 – Ilustração do Problema nº 01.

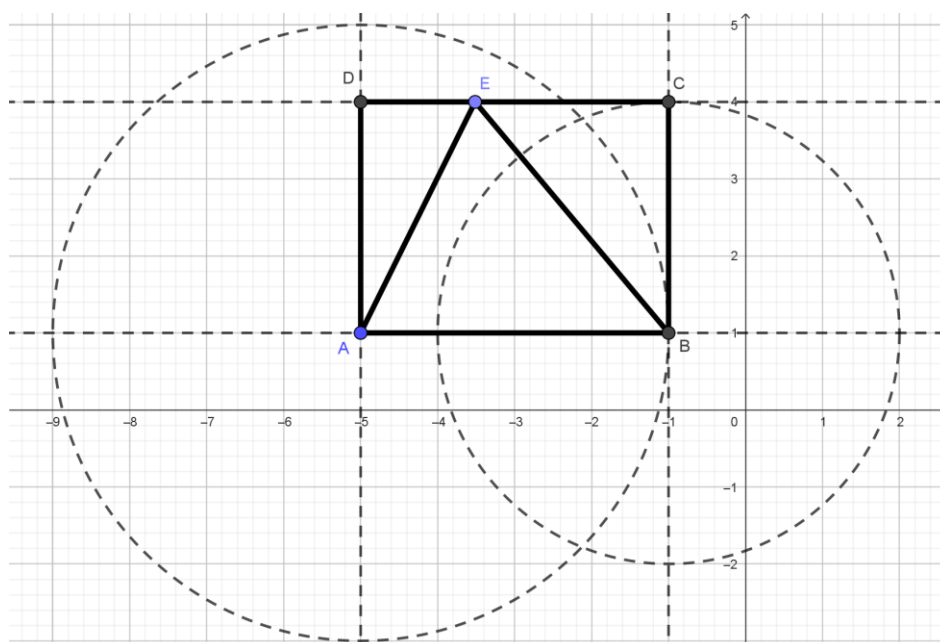


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª etapa

Por um ponto A traçamos duas retas perpendiculares entre si. Traçamos um círculo de centro A e raio medindo 4 unidades. Marcamos o ponto B em uma das intersecções deste círculo com uma das perpendiculares. Por B traçamos uma perpendicular ao segmento AB. Traçamos um círculo de centro B e raio medindo 3 unidades. Marcamos o ponto C em uma das intersecções deste círculo com a última perpendicular traçada. Por C traçamos uma perpendicular ao segmento BC e marcamos o ponto D de intersecção entre esta perpendicular e a perpendicular ao segmento AB que passa por A. Assim, ABCD é um retângulo. Marcamos um ponto E arbitrário sobre CD e traçamos os lados do triângulo AEB, do qual queremos investigar a variação da área em função da medida do segmento DE.

Figura 18 - Construção geométrica do Problema nº 01.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Questões propostas:

6. Calcule a área do retângulo ABCD.
7. Caso o ponto E coincida com o ponto médio de CD, como classificamos o triângulo ABE em relação aos lados?
8. Caso o ponto E coincida com o ponto C, ou com o ponto D, como classificamos o triângulo ABE em relação aos ângulos?

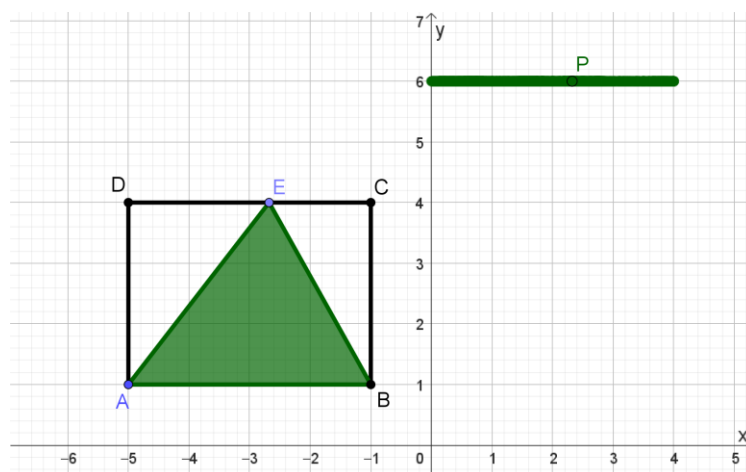
As respostas esperadas para estas questões são:

1. A área do retângulo ABCD é dada por: $A_{ABCD} = AB \cdot BC = 4 \cdot 3 = 12$ unidades quadradas.
2. Caso E coincida com o ponto médio de CD, temos que $CE = ED$ e assim os triângulos ADE e BCE são congruentes pelo caso LAL. Portanto, $AE = BE$ e assim, o triângulo ABE é isósceles.
3. Caso E coincida com C, temos que $BE \perp AB$. Caso E coincida com D, temos que $AE \perp AB$. Nos dois casos temos que ABE é um triângulo retângulo.

Construção: 2ª etapa.

Pretendemos construir um gráfico cartesiano que represente a variação da área do triângulo ABE em função da medida do segmento DE. Este gráfico será relacionado à figura construída na 1ª etapa. Para isto, digitamos no campo de entrada as coordenadas de um ponto P móvel, tal que a abscissa de P é igual a medida do segmento DE (Figura 100), e a ordenada de P é igual a medida da área do triângulo ABE. Ao movimentarmos o ponto E sobre o segmento DC, o aluno poderá perceber que o ponto P descreve uma trajetória horizontal, o que sugere que a área do triângulo não varia, independentemente da escolha do ponto E sobre o segmento DC.

Figura 19 - Construção do gráfico dinâmico do Problema nº 01.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

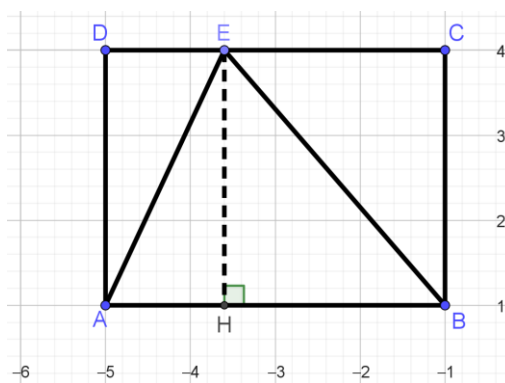
Questões propostas:

9. Sendo ABCD um retângulo, e sendo E um ponto sobre DC, mostre que a área do triângulo ABE não varia, independentemente da escolha do ponto E.
10. Considerando $DE = x$ e a função $f(x) = A_{ABE}$, determine o domínio e o conjunto imagem desta função.

As soluções esperadas são:

4. Pode-se traçar a altura EH relativa ao lado AB e analisar o seu comprimento.

Figura 20 - Traçado Auxiliar da altura do triângulo ABE.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Como AHED é um retângulo, os lados opostos EH e AD são congruentes, logo, $\overline{EH} = 3$ unidades, independentemente da posição escolhida para o ponto E. Outro argumento que poderia ser utilizado é que a distância entre retas paralelas é sempre constante, e AB e CD são segmentos paralelos, logo, como EH é uma altura, temos $EH \perp AB$, e consequentemente, $EH \perp CD$, assim, $\overline{EH} = 3$ unidades. Assim $A_{ABE} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{EH}}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$ unidades quadradas.

5. O aluno deve perceber que $f(x) = A_{ABE} = 6$ é uma função constante, isto é, seus valores independem da medida x . Dessa forma, o domínio é o conjunto dos possíveis valores de $x = \overline{DE}$, isto é, $D(f) = [0; 4]$ e o conjunto imagem é um conjunto unitário $Im(f) = \{6\}$.

3.1.2 Problema nº 02.

Objetivos de aprendizagem:

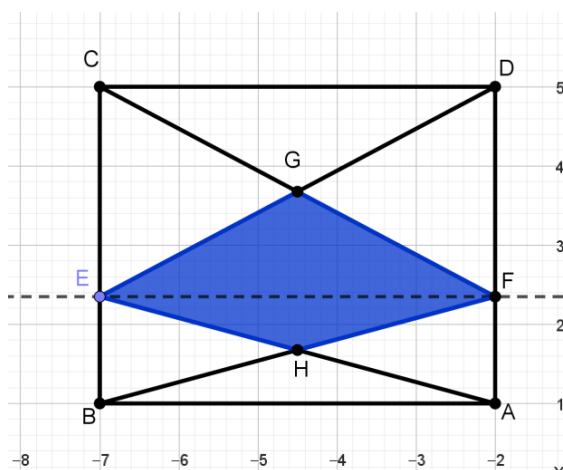
- Reconhecer propriedades de retângulos e triângulos a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.

- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de retângulos e triângulos.
- Compreender e aplicar conceitos de proporcionalidade em figuras semelhantes.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função constante no plano cartesiano.

Duração: 2 horas/aula.

Problema nº 02: *Construir um retângulo cujos lados têm medidas 5 e 4 unidades de comprimento. Por um ponto arbitrário de um dos lados menores, traçar uma reta perpendicular a este lado, reta esta que dividirá o retângulo inicial em dois retângulos cujas diagonais serão traçadas. Determinar a área do quadrilátero que é limitado pelas quatro diagonais.*

Figura 21 - Ilustração do Problema nº 02.



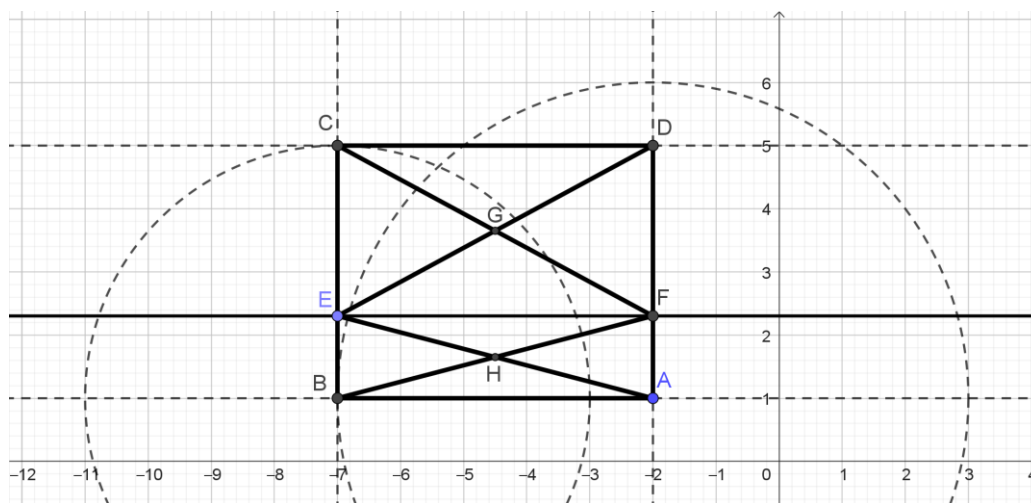
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª Etapa.

Por um ponto A construímos duas retas perpendiculares entre si, retas estas que serão retas suporte de dois lados do retângulo. Traçamos um círculo de centro A e raio medindo 5 unidades e marcamos o ponto B, que é intersecção deste círculo com uma das retas. Agora traçamos um novo círculo, com centro em B e raio medindo 4 unidades. Por B traçamos uma nova reta, que é perpendicular à AB e interseccionará o círculo menor em C. Por fim, traçamos por C uma perpendicular à BC, que interseccionará a primeira reta em D. Unindo os vértices A, B, C e D, temos o retângulo procurado. Marcamos um ponto E qualquer sobre o segmento BC. Por E traçamos uma reta perpendicular à BC, que interseccionará o lado AD no ponto F. Traçamos as diagonais AE, BF, CF e DE. Marcamos

os pontos G e H de intersecção dos pares de diagonais dos retângulos ABEF e ECDF. Assim temos o quadrilátero procurado, de vértices EGFH.

Figura 22 - Construção geométrica do problema nº 02.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Algumas questões são propostas:

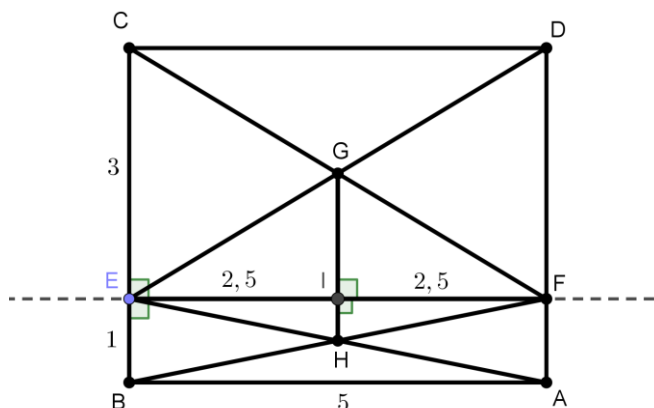
1. Qual a área do retângulo ABCD?
2. Supondo que $BE = 1$ unidade, qual a área do quadrilátero EHFG?

As soluções esperadas são:

1. Pode-se empregar a fórmula da área do retângulo: $A = b \cdot h$, onde b é a medida da base e h é a medida da altura. Assim, $A = 5 \cdot 4 = 20$ unidades quadradas.
2. Pode-se dividir o quadrilátero EHGF em dois triângulos: EGF e EHF. Ambos com mesma base $EF = 4$ unidades. Resta então calcular as alturas destes triângulos em relação à base EF. Estamos partindo do princípio de que, em um retângulo, as diagonais são congruentes e interceptam-se em seu ponto médio. Portanto $\overline{EG} = \overline{GD} = \overline{CG} = \overline{GF}$ e $\overline{EH} = \overline{HA} = \overline{BH} = \overline{HF}$. Como EGF e EHF são triângulos isósceles as alturas relativas à base EF serão também medianas. Logo, se I é ponto médio de EF então GI e HI são as alturas procuradas. Temos as semelhanças dos triângulos: $CEF \sim GIF$ e $BEF \sim HIF$. Logo:

$$\frac{CE}{GI} = \frac{EF}{IF} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{GI}{2,5} \Rightarrow GI = \frac{3}{2} \text{ e } \frac{BE}{HI} = \frac{EF}{IF} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{HI}{2,5} \Rightarrow HI = \frac{1}{2}.$$

Figura 23 - Solução particular, considerando $BE = 1$ unidade.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

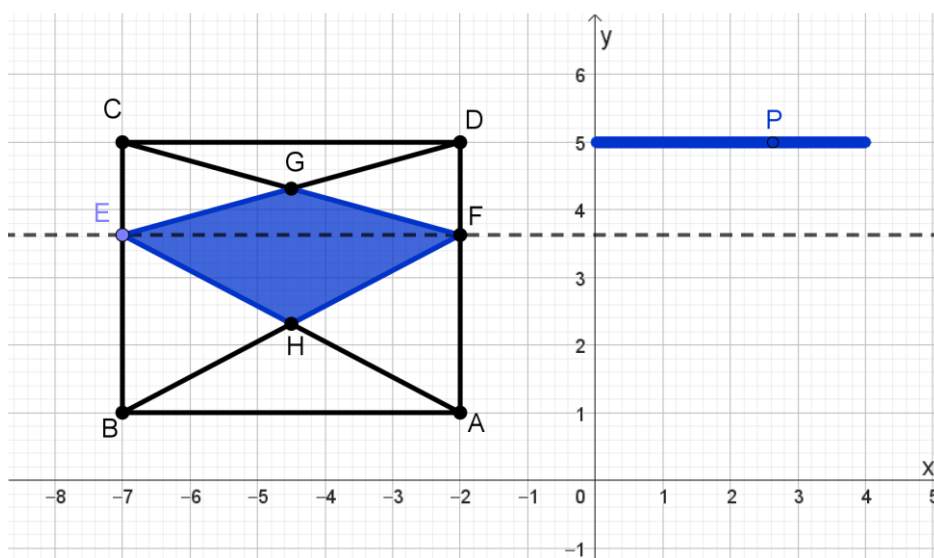
Assim, $A_{EGF} = \frac{EF \cdot GI}{2} = \frac{5 \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{15}{4}$ e $A_{EHF} = \frac{EF \cdot HI}{2} = \frac{5 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$ e, finalmente:

$$A_{EGFH} = A_{EGF} + A_{EHF} = \frac{15}{4} + \frac{5}{4} = \frac{20}{4} = 5 \text{ unidades quadradas.}$$

Construção: 2ª Etapa.

Desejamos investigar a variação da área do quadrilátero EHFG em função do comprimento do segmento BE. Para isto, criamos um ponto móvel de coordenadas $P = (k, q1)$, em que k é a medida do segmento BE e $q1$ é o valor da área do quadrilátero EHFG, variáveis estas que foram atribuídas pelo próprio software quando da criação dos objetos. Selecionamos o ponto P e com a ferramenta “Habilitar rastro” passamos a exibir as sucessivas posições de P quando o ponto E é movimentado sobre o segmento BC.

Figura 24 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 02.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Novas questões são propostas:

3. Considerando $BE = x$, calcule a área do quadrilátero EHFG em função de x .
4. Escreva o Domínio e o Conjunto Imagem da função encontrada no item anterior.
5. Descreva a interpretação sobre a variação da área de EHFG que o modelo encontrado fornece.

As soluções esperadas são:

3. Deve-se fazer a dedução de uma fórmula para a área procurada. Para isso, o estudante deverá refazer os mesmos passos da questão nº 2, porém utilizando a incógnita x que representa a medida do segmento BE . Assim, temos as semelhanças dos triângulos: $BEF \sim HIF$ e $CEF \sim GIF$.

$$\text{Logo } \frac{\overline{BE}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{IF}} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{\overline{HI}}{2,5} \Rightarrow \overline{HI} = \frac{x}{2} \text{ e } \frac{\overline{CE}}{\overline{GI}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{IF}} \Rightarrow \frac{4-x}{5} = \frac{\overline{GI}}{2,5} \Rightarrow \overline{GI} = \frac{4-x}{2}.$$

$$\text{Assim, } A_{EHF} = \frac{\overline{EF} \cdot \overline{HI}}{2} = \frac{5 \cdot \frac{x}{2}}{2} = \frac{5x}{4} \text{ e } A_{EGF} = \frac{\overline{EF} \cdot \overline{GI}}{2} = \frac{5 \cdot \frac{4-x}{2}}{2} = \frac{20-5x}{4} \text{ e, finalmente,}$$

$$A_{EGFH} = A_{EHF} + A_{EGF} = \frac{5x}{4} + \frac{20-5x}{4} = \frac{20}{4} = 5 \text{ unidades quadradas.}$$

4. O aluno deve refletir sobre os valores do domínio e do conjunto imagem da função encontrada. Considerando a função $f(x) = 5$. Como $x = \overline{BE} \leq \overline{BC} = 4$ unidades, temos: $D(f) = [0; 4]$ e $Im(f) = \{5\}$.
5. O aluno deve fazer a interpretação do modelo encontrado. A função $f(x) = 5$ não depende da variável x , e é denominada função constante justamente pelo fato de que todas as imagens apresentam o mesmo valor, independentemente do valor do domínio escolhido. Dessa forma, conclui-se que a área do quadrilátero EGFH não varia, pois para qualquer valor de $\overline{BE} = x$ escolhido, temos sempre que $A_{EGFH} = 5$.

3.1.3 Problema nº 03.

Objetivos de aprendizagem:

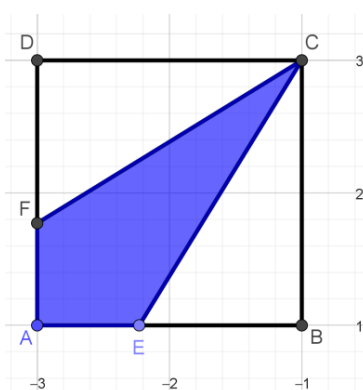
- Reconhecer propriedades de quadrados e triângulos a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de quadrados e triângulos.
- Compreender e aplicar conceitos de congruência em figuras simétricas.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.

- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função linear no plano cartesiano.

Duração: 2 horas/aula.

Problema nº 03: Construir um quadrado $ABCD$ cujos lados medem 2 unidades de comprimento. Marcar um ponto arbitrário E do lado AB , e determinar o ponto F sobre o lado AD , tal que $AE = AF$. Determinar a área do quadrilátero $AECF$, em função da medida de AE .

Figura 25 - Ilustração do problema nº 03.

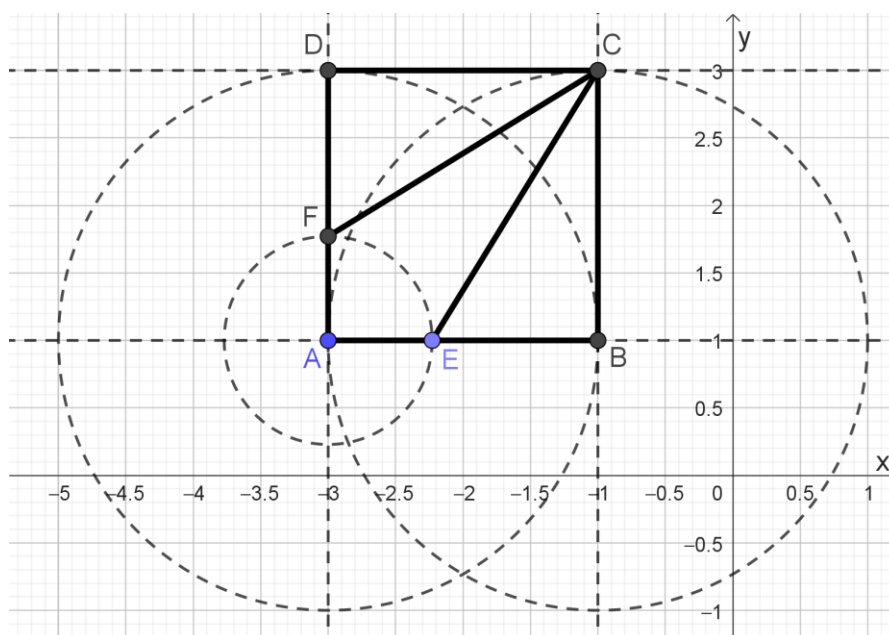


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª Etapa.

Traçamos duas retas perpendiculares entre si, ambas passando por um ponto A. Traçamos um círculo de centro A e raio medindo 2 unidades e marcamos um ponto B de intersecção deste círculo com uma das retas anteriores. Pelo ponto B, traçamos uma reta perpendicular ao segmento AB e, com centro em B e raio medindo 2 unidades traçamos outro círculo. Marcamos um ponto C de intersecção desta perpendicular com o último círculo e, por este ponto, traçamos uma perpendicular ao segmento BC. Marcamos o ponto D de intersecção desta perpendicular com a perpendicular ao segmento AB e que passa por A. Assim temos o quadrado ABCD construído. Marcamos agora um ponto E qualquer sobre o segmento AB. Traçamos um círculo de centro A e raio AE e marcamos o ponto F de intersecção deste círculo com o lado AD. Assim fica determinado o quadrilátero AECF.

Figura 26 - Construção geométrica do problema nº 03.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

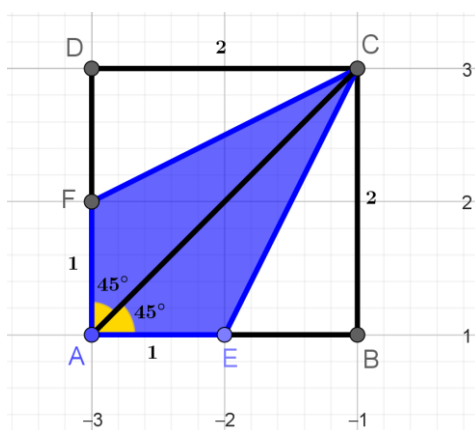
Algumas questões:

1. Qual a área do quadrado ABCD?
2. Considerando $\overline{AE} = 1$ unidade, calcule a área do quadrilátero AECF.

As soluções esperadas são:

1. Pode-se utilizar a fórmula $A = \ell^2 = 2^2 = 4$ unidades quadradas.
2. O estudante deve perceber que o quadrilátero é simétrico, isto é, a diagonal AC é um eixo de simetria e os triângulos AFC e AEC são congruentes (caso LAL), portanto $A_{AEC} = A_{AFC}$ e $A_{AECF} = 2 \cdot A_{AEC}$. Segue daí que $A_{AECF} = 2 \cdot \left(\frac{\overline{AE} \cdot \overline{BC}}{2} \right) = 2 \cdot \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right) = 2$ unidades quadradas.

Figura 27 - Solução particular, para $AE = 1$ unidade.

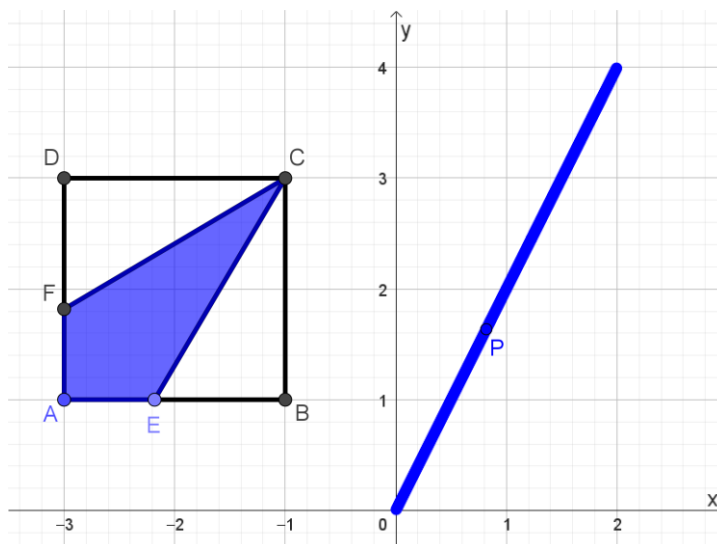


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 2ª Etapa.

Para gerar o gráfico cartesiano que representa a variação da área de AECF, criamos o ponto móvel $P = (j, q1)$, em que $AE = j$ e $A_{AECF} = q1$. Habilitando o rasto do ponto P, temos o resultado apresentado abaixo.

Figura 28 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 03.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Algumas questões:

3. Considerando $\overline{AE} = x$, obtenha a expressão da área do quadrilátero AECF em função de x .
4. Escreva o domínio e o conjunto imagem desta função.
5. Qual é o tipo de função encontrada neste problema?

As soluções esperadas são:

3. O estudante deve seguir o mesmo raciocínio utilizado na questão nº2, e sendo $\overline{AE} = x$, então $A_{AECF} = 2 \cdot \left(\frac{\overline{AE} \cdot \overline{BC}}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{x \cdot 2}{2}\right) = 2x$.
4. Sabe-se que x pode assumir qualquer valor real entre 0 e a medida do lado AB do quadrado ABCD. Assim, temos o domínio $D(f) = [0, 2]$ e a imagem $Im(f) = [0, 4]$.
5. A função encontrada neste problema é do tipo linear, um caso particular da função afim $f(x) = ax + b$, quando $b = 0$.

3.1.4 Problema nº 04.

Objetivos de aprendizagem:

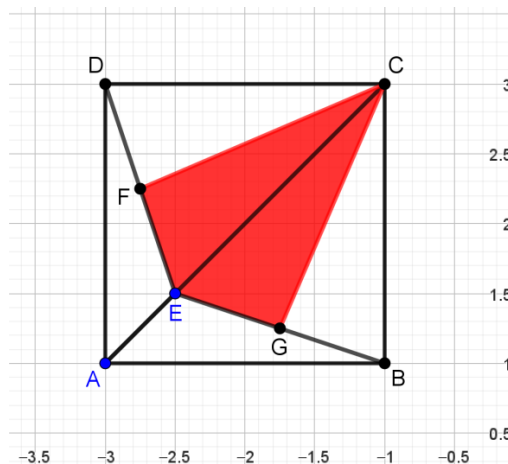
- Reconhecer propriedades de quadrados e triângulos a partir de suas definições e características.

- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de quadrados e triângulos.
- Compreender e aplicar conceitos de congruência em figuras simétricas.
- Compreender e aplicar conceitos de proporcionalidade em figuras semelhantes.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função afim no plano cartesiano.

Duração: 2 horas/aula.

Problema nº 04: *Construir um quadrado ABCD cujos lados medem 2 unidades de comprimento. Por um ponto arbitrário E da diagonal AC, traçar os segmentos ED e EB, e seus pontos médios, F e G, respectivamente. Determinar a área do quadrilátero EGCF, em função da medida de AE.*

Figura 29 - Ilustração do problema nº 04.

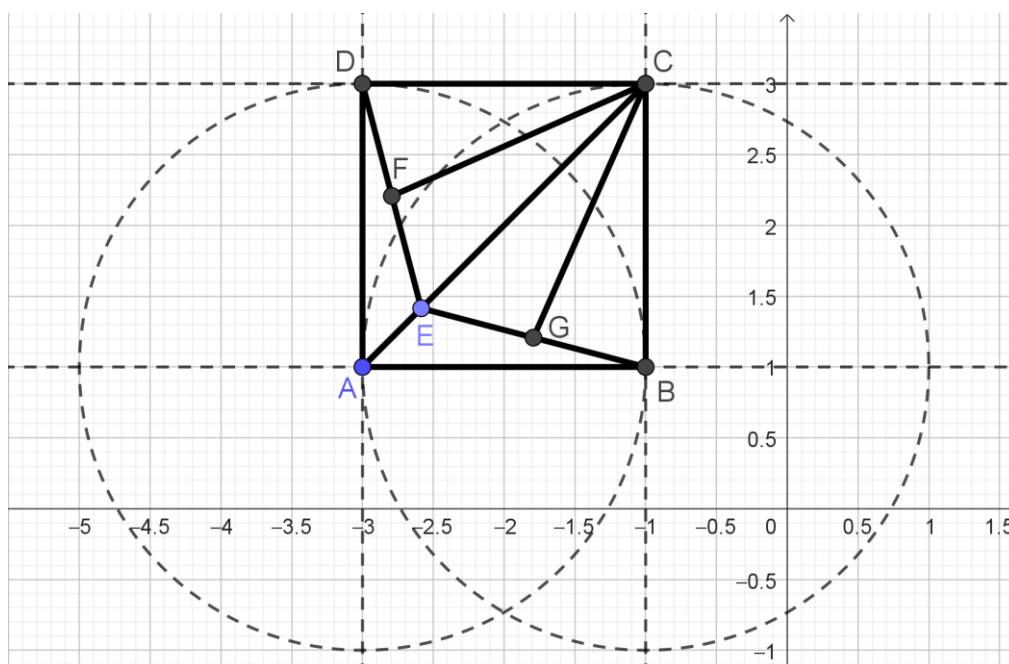


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª Etapa.

Construímos o quadrado ABCD exatamente como no problema anterior. Traçamos agora a diagonal AC e marcamos sobre ela um ponto qualquer E. Traçamos os segmentos AE, DE e EB e, destes dois últimos, marcamos os seus respectivos pontos médios, F e G. Assim fica determinado o quadrilátero EGCF.

Figura 30 - Construção geométrica do problema nº 04.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

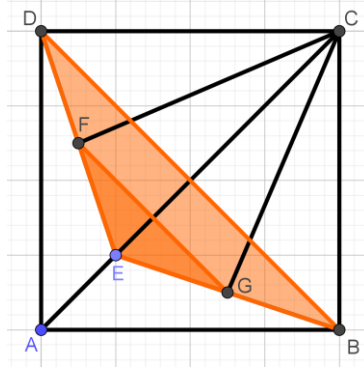
Algumas questões são propostas:

1. Qual a área do quadrado ABCD?
2. Qual a medida da diagonal AC?
3. Qual a distância entre os pontos F e G?
4. Supondo que $AE = \frac{\sqrt{2}}{2}$ unidades, qual a área do quadrilátero EFCG?

As soluções esperadas são:

1. Pode-se utilizar a fórmula $A = \ell^2 = 2^2 = 4$ unidades quadradas.
2. Aplica-se o Teorema de Pitágoras. Assim, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, logo $\overline{AC} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ unidades.
3. Aplica-se a semelhança de triângulos: $DEB \sim FEG$ (caso LAL). Assim $\frac{\overline{FG}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{EB}} = \frac{1}{2}$ e, portanto, $\overline{FG} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Observe que a medida de FG não depende da escolha do ponto E .

Figura 31 - Triângulos semelhantes presentes na construção.



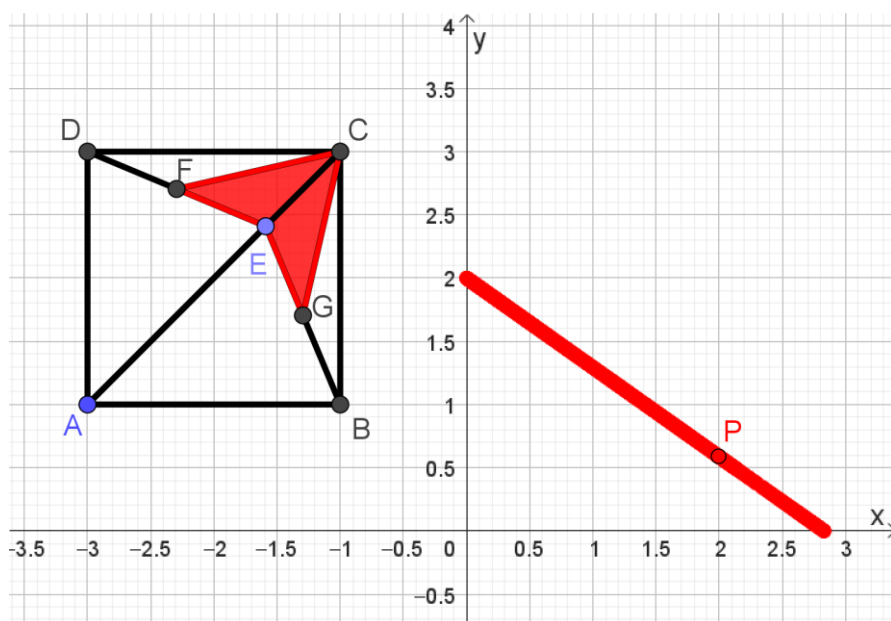
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

4. Divide-se a área de EFCG em dois triângulos: EFC e EGC, ambos de base $\overline{EC} = \overline{AC} - \overline{AE} = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Podemos mostrar que $\overline{ED} = \overline{EB}$, já que $AED \equiv AEB$ (caso LAL). Daí segue que $\overline{EF} = \overline{EG}$ e assim temos $EFC \equiv EGC$ (caso LAL). Como $FG \parallel BD$ e $BD \perp AC$, então $FG \perp AC$. Isso implica que as alturas dos triângulos EFC e EGC, ambas relativas à base EC, têm medida $\frac{\overline{FG}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Daí concluímos que $A_{EFCG} = 2 \cdot A_{EFC} = 2 \cdot \left(\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \right) = \frac{3 \cdot 2}{4} = \frac{3}{2}$ unidades quadradas.

Construção: 2ª etapa.

Com o objetivo de gerar um gráfico cartesiano de uma função que represente a variação da área do quadrilátero EFCG, criamos um ponto cujas coordenadas são: $P = (p, q_1)$, em que $AE = p$ e $A_{EFCG} = q_1$. Habilitando o rastro de P e movimentando o ponto E sobre AC, é possível observar que P percorre o trajeto ilustrado a seguir.

Figura 32 - Construção do gráfico dinâmico do problema n° 04.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Mais questões são propostas:

5. Considerando $\overline{AE} = x$, calcule a área do quadrilátero EFCG em função de x .
6. Escreva o domínio e o conjunto imagem desta função.
7. Escreva os valores máximo e mínimo desta função.

As soluções esperadas são:

5. Utiliza-se os mesmos princípios utilizados na questão n° 4, considerando que se $\overline{AE} = x$ então $\overline{EC} = 2\sqrt{2} - x$. Já foi mostrado que $\overline{FG} = \sqrt{2}$ é uma medida invariante em relação ao movimento do ponto E. Isso implica que as alturas dos triângulos EFC e EGC, ambas relativas à base EC, têm medida $\frac{\overline{FG}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$A_{EFCG} = 2 \cdot A_{EFC} = 2 \cdot \left(\frac{(2\sqrt{2} - x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \right) = \frac{(2\sqrt{2} - x) \cdot \sqrt{2}}{2} = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x$$

6. Considera-se que os possíveis valores de x variam de 0 ($E \equiv A$), até $2\sqrt{2}$, ($E \equiv C$). Assim, $D(f) = [0; 2\sqrt{2}]$. Analisando o gráfico, temos que $Im(f) = [0; 2]$.
7. O valor máximo de f é 2 e o valor mínimo de f é 0.

3.1.5 Problema n° 05.

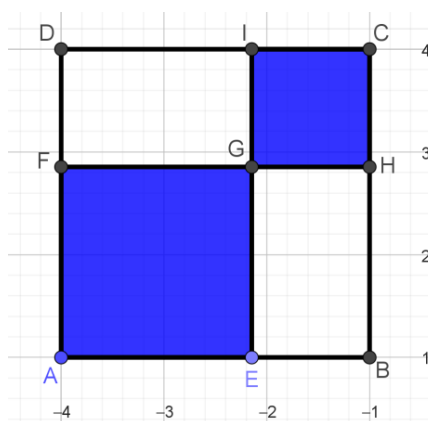
Objetivos de aprendizagem:

- Reconhecer propriedades de quadrados a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de quadrados.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função quadrática no plano cartesiano.
- Explorar o comportamento da função quadrática (crescimento, decrescimento, máximo ou mínimo).

Duração: 2 horas/aula.

Problema nº 05: Construir um quadrado $ABCD$ cujos lados medem 3 unidades de comprimento. Marcar um ponto E arbitrário no segmento AB . Construir o quadrado $AEGF$, tal que $F \in AD$. Prolongar EG até obter o ponto de intersecção I com o lado CD e prolongar FG até obter o ponto de intersecção H com o lado BC . Determinar a soma das áreas de $AEGF$ e $GHCI$ em função da medida do segmento AE .

Figura 33 - Ilustração do problema nº 05.



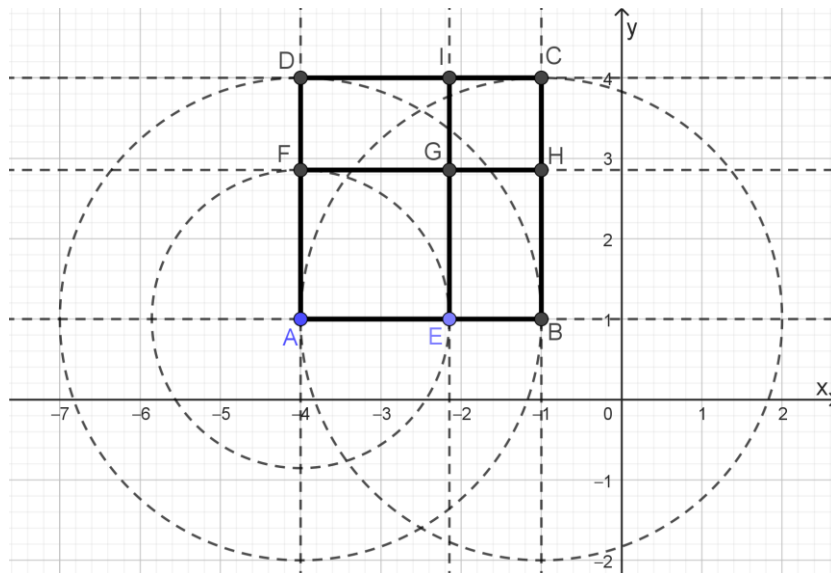
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª Etapa.

Construímos o quadrado $ABCD$ tal como fizemos no problema nº 03 com a única diferença que os círculos centrados em A e B agora possuem raio medindo 3 unidades, pois desejamos neste caso que o quadrado tenha essa medida para o lado. Marcamos um ponto E qualquer sobre o segmento AB . Construímos um círculo de centro A passando

pelo ponto E. Marcamos o ponto de intersecção F deste círculo com o segmento AD. Por E traçamos uma reta perpendicular a AB e por F traçamos uma reta perpendicular a AD. Marcamos o ponto G de intersecção destas duas perpendiculares. Além disso marcamos os pontos de intersecção H e I, tais que $\overline{FG} \cap BC = \{H\}$ e $\overline{EG} \cap CD = \{I\}$. Assim, ficam determinados os quadriláteros AEGF e GHCI, como ilustra a figura abaixo.

Figura 34 - Construção geométrica do problema nº 05.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

São propostas as seguintes questões:

1. Qual a área do quadrado ABCD?
2. Mostre que GHCI é também um quadrado.
3. Considerando $AE = 2$ unidades, calcule a soma das áreas dos quadrados AEGF e GHCI.
4. O que ocorre com a soma das áreas dos quadrados AEGF e GHCI quando o ponto E coincide com o ponto A? E quando o ponto E coincide com o ponto B?

As soluções esperadas são:

1. $A = \ell^2 = 3^2 = 9$ unidades quadradas.
2. Por construção, as perpendiculares traçadas garantem que $\widehat{GHC}$ e $\widehat{CIG}$ são ângulos retos. Como $\widehat{HCI} = \widehat{BCD} = 90^\circ$ (ângulo interno do quadrado ABCD), então necessariamente $\widehat{IGH}$ também é ângulo reto. Assim, GHCI é retângulo. Analisando agora as medidas dos lados deste retângulo: Temos que $\overline{AE} = \overline{FG} = \overline{DI} = x$ e, portanto, $\overline{EB} = \overline{GH} = \overline{IC} = 3 - x$. Analogamente $\overline{AF} = \overline{EG} = \overline{BH} = x$ implica em $\overline{FD} = \overline{GI} = \overline{CH} = 3 - x$. Como $\overline{GH} = \overline{IC} = \overline{GI} = \overline{CH}$, então GHCI é

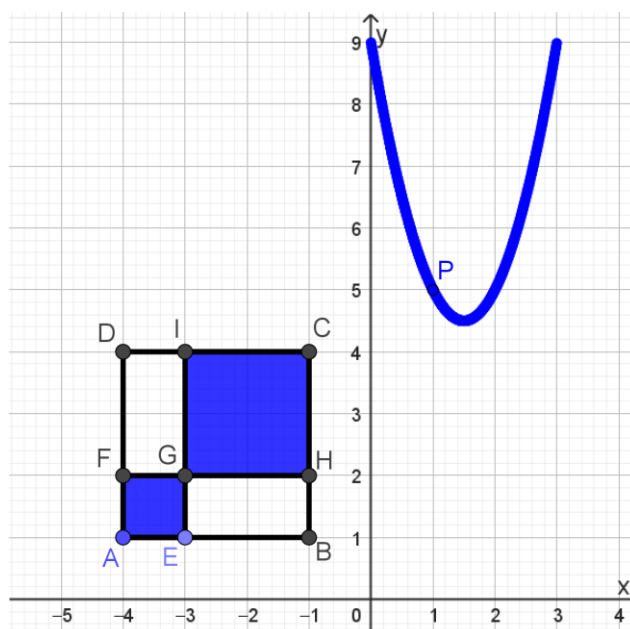
losango. Daí segue que GHCI é simultaneamente retângulo e losango, portanto GHCI é quadrado.

3. Como $AE = 2$, AEGF é um quadrado de área $A_{AEGF} = 2^2 = 4$ unidades quadradas. Daí segue que GHCI é um quadrado cujo lado mede 1 unidade. Assim, $A_{GHCI} = 1^2 = 1$ unidade quadrada. Logo, $A_{AEGF} + A_{GHCI} = 4 + 1 = 5$ unidades quadradas.
4. Quando o ponto E coincide com o ponto A, o quadrado AEGF degenera-se em um único ponto. Assim sua área é nula. O quadrado GHCI coincide com o quadrado ABCD, logo sua área é 9 unidades quadradas. Assim, $A_{AEGF} + A_{GHCI} = 0 + 9 = 9$ unidades quadradas. Quando o ponto E coincide com o ponto B, o quadrado AEGF coincide com o quadrado ABCD, logo sua área é 9 unidades quadradas. O quadrado GHCI degenera-se em um único ponto. Assim sua área é nula. Logo, $A_{AEGF} + A_{GHCI} = 9 + 0 = 9$ unidades quadradas.

Construção: 2ª Etapa.

Criamos um ponto móvel P e atribuímos às suas coordenadas (x, y) os valores $(q, q1 + q2)$ em que q representa a medida do segmento AE e $q1$ e $q2$ são as áreas dos quadrados AEGF e GHCI, respectivamente. Movimentando o ponto E sobre AB, é perceptível o movimento parabólico do ponto P. Habilitando-se o rastro deste ponto os alunos podem intuir que a curva desenhada é uma parábola com concavidade para cima, como na figura abaixo.

Figura 35 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 05.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Mais algumas questões são propostas:

5. Calcular a soma das áreas dos quadrados AEGF e GHCI em função da medida x do segmento AE.
6. Qual é o valor de x que minimiza a soma das áreas de AEGF e GHCI e qual o valor mínimo desta soma?
7. Sendo $f(x)$ a função que representa a soma das áreas de AEGF e GHCI, determine o domínio e a imagem desta função.

Algumas possíveis respostas:

5. Como o lado do quadrado AEGF mede x , e como o lado do quadrado ABCD mede 3, então o lado do quadrado GHCI é dado por $3 - x$. Assim a soma das áreas dos quadrados AEGF e GHCI é dada por:

$$A_{AEGF} + A_{GHCI} = x^2 + (3 - x)^2 = x^2 + 9 - 6x + x^2 = 2x^2 - 6x + 9.$$

Isto é, a função que modela este problema é do tipo quadrática.

6. Para determinar as coordenadas do ponto que minimiza a soma das áreas é necessário determinar as coordenadas do vértice desta parábola, a saber:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad y_V = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 9 = \frac{9}{2} - 9 + 9 = \frac{9}{2}. \text{ Isto é,}$$

quando $AE = 1,5$ unidades, a soma das áreas atinge seu valor mínimo de 4,5 unidades quadradas. Portanto, quando o ponto E está situado no ponto médio de AB, os quadrados AEGF e GHCI são congruentes e a soma de suas áreas é mínima.

7. Os possíveis valores de $x = AE$ variam de 0 até 3, logo, o domínio é $D(f) = [0; 3]$ e o conjunto imagem é $Im(f) = \left[\frac{9}{2}, 9\right]$.

3.1.6 Problema nº 06

Objetivos de aprendizagem:

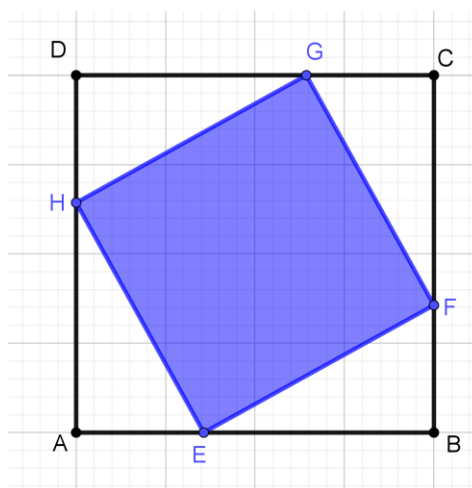
- Reconhecer propriedades de quadrados e triângulos a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de quadrados e triângulos.
- Compreender e aplicar conceitos de congruência em figuras simétricas.

- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função quadrática no plano cartesiano.
- Explorar o comportamento da função quadrática (crescimento, decrescimento, máximo ou mínimo).

Duração: 2 horas/aula.

Problema nº 06: Construir um quadrado $ABCD$ com lado medindo 2 unidades e marcar os pontos E, F, G e H , com $E \in AB, F \in BC, G \in CD$ e $H \in DA$, de maneira tal que $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH}$, conforme figura abaixo.

Figura 36 - Ilustração do problema nº 06.

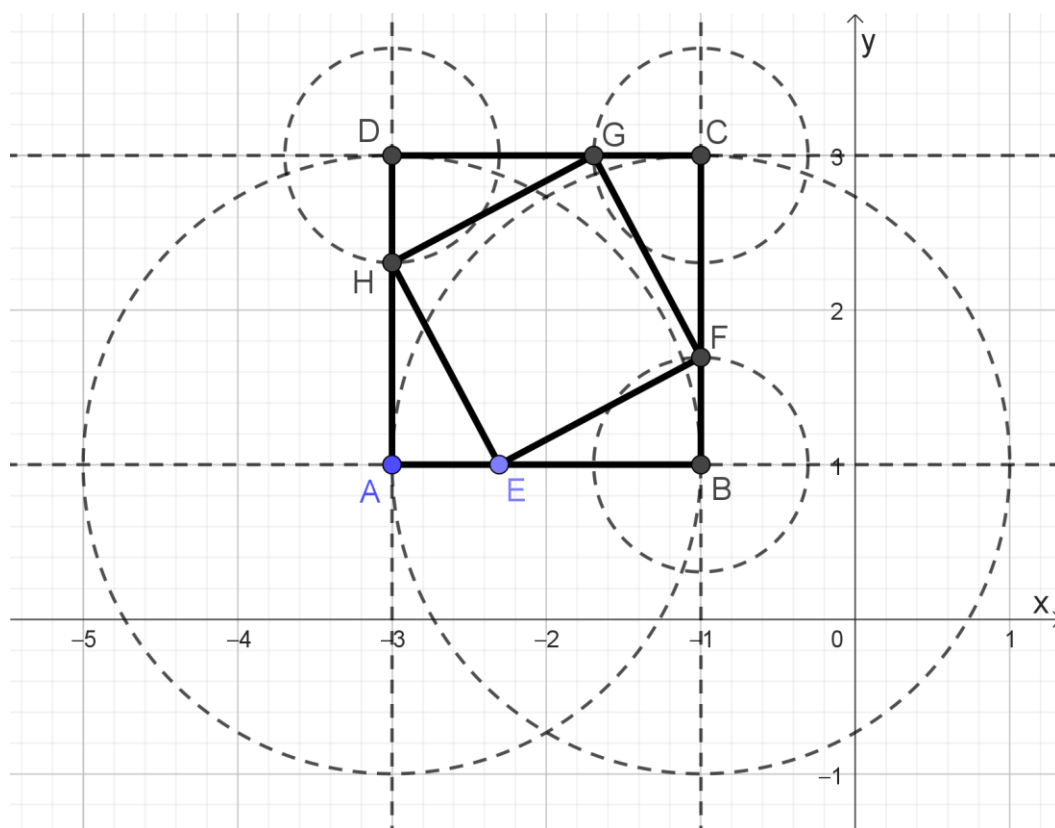


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª Etapa.

A construção do quadrado $ABCD$ se dá de forma idêntica à construção feita no problema nº 03. Sobre o segmento AB marcamos um ponto E arbitrário. Com a ferramenta “Compasso”, clicamos nos pontos A e E e criamos círculos de centros B, C e D , todos congruentes, e cuja medida do raio é igual a medida do segmento AE . Desta forma, se movimentarmos E sobre AB percebemos a alteração simultânea nas dimensões destes três últimos círculos. Marcamos o ponto F de intersecção do círculo centrado em B com o segmento BC . Marcamos o ponto G de intersecção do círculo centrado em C com o segmento CD . Marcamos o ponto H de intersecção do círculo centrado em D com o segmento DA . Traçando os segmentos EF, FG, GH e HE , fica determinado o quadrilátero $EFGH$.

Figura 37 - Construção geométrica do problema n° 06.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

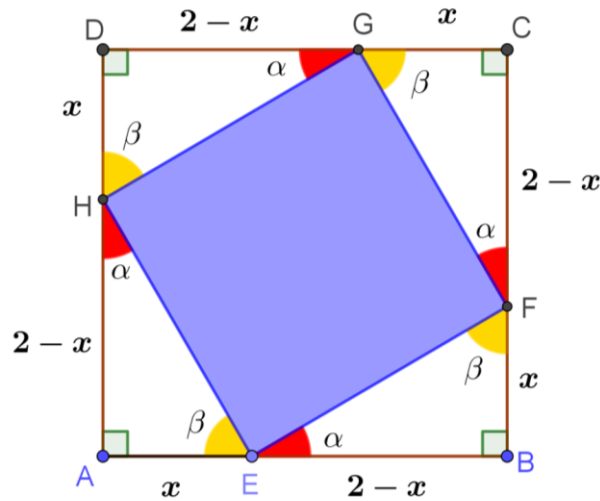
São apresentadas algumas questões:

1. Mostre que o quadrilátero EFGH é um quadrado.
2. Calcule a área do quadrado EFGH considerando que $\overline{AE} = 0,5$ unidades.
3. Qual a área de EFGH quando E coincide com o ponto A? E com o ponto B?

As soluções esperadas são:

1. Como $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = x$, segue que $\overline{EB} = \overline{FC} = \overline{GD} = \overline{HA} = 2 - x$. E, como os quatro triângulos são retângulos, logo são congruentes pelo caso LAL. Daí conclui-se que $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE}$. Logo EFGH é um losango. Destas congruências também deduzimos que $\widehat{AHE} = \widehat{BEF} = \widehat{CFG} = \widehat{DGH} = \alpha$ e $\widehat{AEH} = \widehat{BFE} = \widehat{CGF} = \widehat{DHG} = \beta$. Cada ângulo interno do quadrilátero EFGH tem medida $180^\circ - \alpha - \beta$. Como $\alpha + \beta = 90^\circ$, então cada ângulo interno mede 90° . Portanto, EFGH é também um retângulo e, consequentemente, um quadrado.

Figura 38 - Triângulos congruentes presentes na construção.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

2. Se $\overline{AE} = 0,5 = \frac{1}{2}$, então $\overline{EB} = 2 - 0,5 = 1,5 = \frac{3}{2}$. Assim, temos: $A_{AEH} = A_{BFE} = A_{CGF} = A_{DHG} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{8}$. Então: $A_{EFGH} = A_{ABCD} - 4 \cdot A_{AEH} = 2^2 - 4 \cdot \frac{3}{8} = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ unidades quadradas.

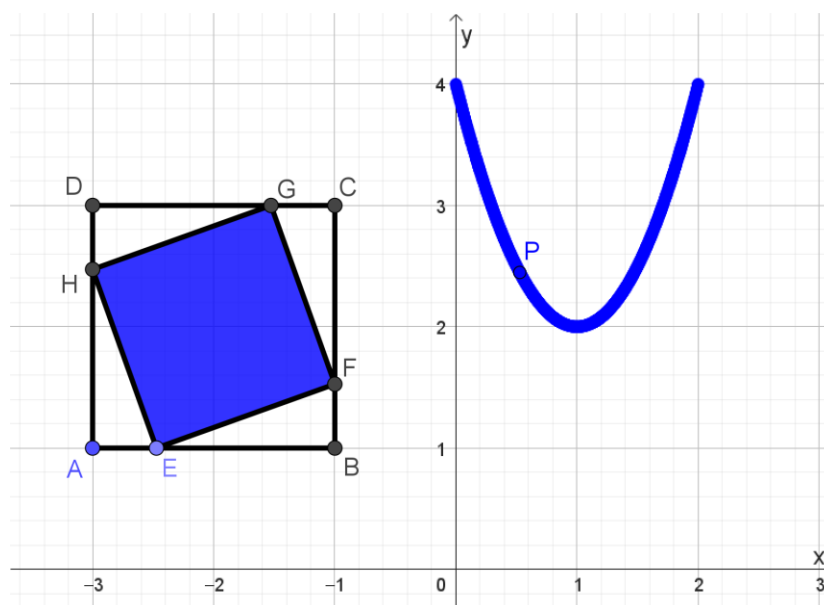
Outra maneira de encontrarmos este resultado seria aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AEH, por exemplo. Assim temos $\overline{EH}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AH}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ unidades quadradas, que é o valor da área procurada.

3. Quando E coincide com o ponto A temos que os quadrados EFGH e ABCD são coincidentes. Quando E coincide com o ponto B, temos que os quadrados EFGH e BCDA são coincidentes. Portanto, nestas duas situações temos a área máxima que é igual a $2^2 = 4$ unidades quadradas.

Construção: 2ª Etapa.

Para investigarmos a variação da área de EFGH em função da medida x do segmento AE, criamos o ponto P cuja abscissa x é a distância entre os pontos A e E, e cuja ordenada é igual à área de EFGH. Movimentando o ponto E sobre o segmento AB, obtemos o gráfico que é resultado da trajetória do ponto P no plano.

Figura 39 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 06.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

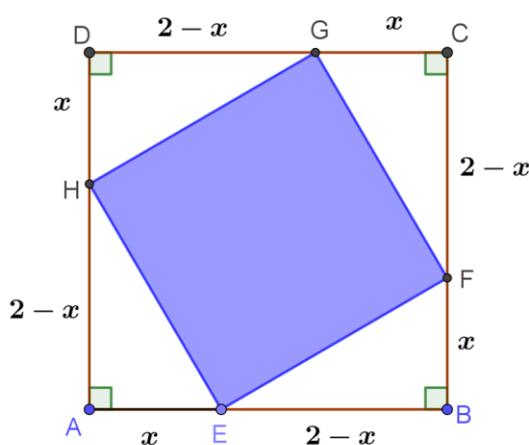
Mais algumas questões:

4. Considerando $\overline{AE} = x$, determine uma expressão para a área do quadrado EFGH.
5. Determine as coordenadas do ponto P que minimizam a área de EFGH.
6. Escreva o domínio e o conjunto imagem da função $f(x) = A_{EFGH}$.

Algumas possibilidades de respostas:

4. Para deduzir a expressão da área do quadrilátero EFGH pode-se operar por meio de uma decomposição de áreas, isto é, pode-se subtrair da área do quadrado ABCD as áreas dos triângulos congruentes AEH, BFE, CGF e DHG.

Figura 40 - Decomposição do quadrado ABCD.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Portanto, fazendo a dedução algébrica, temos:

$$A_{EFGH} = A_{ABCD} - (A_{AEH} + A_{BFE} + A_{CFG} + A_{DGH})$$

$$A_{EFGH} = 2^2 - 4 \cdot \left(\frac{x \cdot (2 - x)}{2} \right)$$

$$A_{EFGH} = 4 - 2 \cdot (2x - x^2)$$

$$A_{EFGH} = 2x^2 - 4x + 4.$$

5. Sobre o ponto que minimiza esta função, é esperado o cálculo das coordenadas do vértice: $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2 \cdot 2} = 1$ e $y_V = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 2$. Assim, os alunos podem constatar que a área do quadrado EFGH é mínima quando o ponto E está situado sobre o ponto médio de AB.
6. O domínio é $D(f) = [0; 2]$ e o conjunto imagem é $Im(f) = [2; 4]$.

3.1.7 Problema nº 07

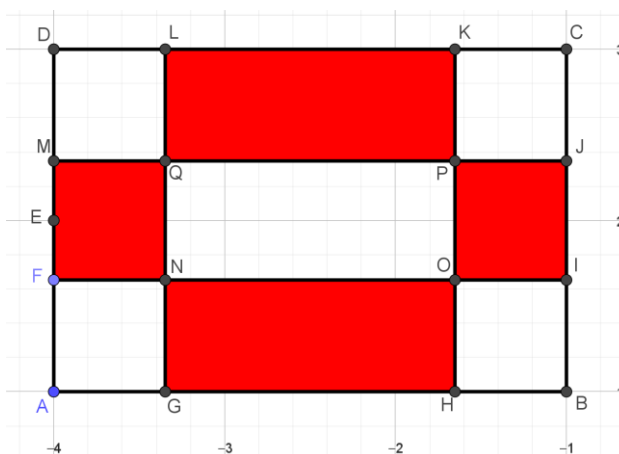
Objetivos de aprendizagem:

- Reconhecer propriedades de retângulos e quadrados a partir de suas definições e características.
- Utilizar softwares de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de retângulos e quadrados.
- Compreender e aplicar conceitos de congruência em figuras simétricas.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função quadrática no plano cartesiano.
- Explorar o comportamento da função quadrática (crescimento, decrescimento, máximo ou mínimo).

Duração: 2 horas/aula.

Problema nº 07: Construir um retângulo ABCD tal que $\overline{AB} = 3$ unidades e $\overline{BC} = 2$ unidades. Nos quatro vértices A, B, C e D, construa quadrados congruentes, cuja medida do lado seja menor do que a metade da medida de BC. Assim, serão criados os quadrados AGNF, BIOH, CKPJ e DMQL, conforme figura abaixo. Determinar a variação da soma das áreas dos quadriláteros GHON, IJPO, KLQP e MFNQ em função da medida do segmento AF.

Figura 41 - Ilustração do problema nº 07.

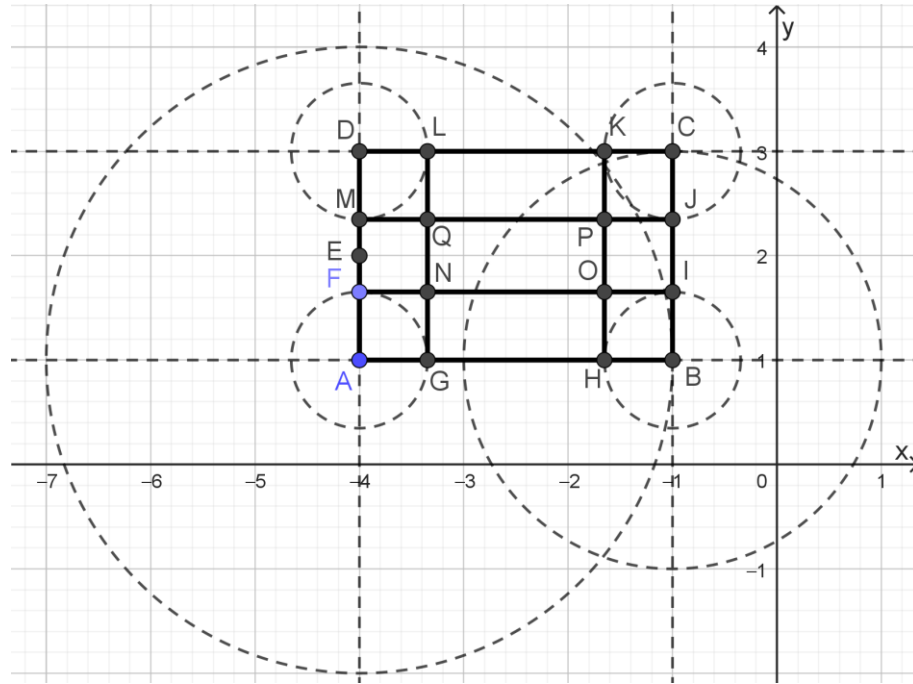


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª Etapa.

Para a construção do retângulo ABCD utilizaremos os mesmos procedimentos adotados no Problema nº 01, com o círculo de centro A de raio medindo 3 unidades e o círculo de centro B de raio medindo 2 unidades. Construído o retângulo ABCD, vamos marcar o ponto E, que é ponto médio do segmento AD. Traçamos o segmento AE, sobre o qual marcamos um ponto arbitrário F. Desta forma, a medida de AF não será maior do que a metade da medida do menor lado do retângulo. Traçamos um círculo de centro A e raio AF e marcamos o ponto G de intersecção deste círculo com AB. Com a ferramenta compasso, criamos mais um círculo, congruente a este último, mas com centro no ponto B. Marcamos os pontos de intersecção H e I deste círculo com os segmentos AB e BC, respectivamente. Procedendo de forma análoga nos vértices C e D, obtemos os pontos J, K, L e M. Note que quando movimentamos o ponto F sobre o segmento AE, os quatro pequenos círculos variam suas dimensões, mas permanecem sempre congruentes. Traçamos os segmentos FI, MJ, GL e HK e marcamos os seus pontos de intersecção: $FI \cap GL = \{N\}$, $FI \cap HK = \{O\}$, $MJ \cap HK = \{P\}$ e $MJ \cap GL = \{Q\}$. Assim ficam determinados os quadriláteros GHON, IJPO, KLQP e MFNQ, cuja variação da soma das áreas pretende-se investigar.

Figura 42 - Construção geométrica do problema nº 07.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

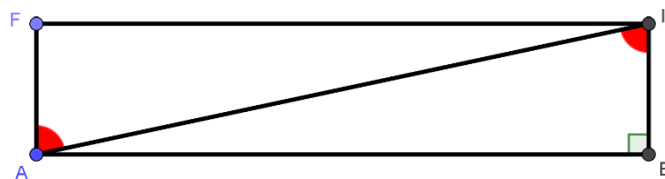
Algumas questões:

1. Mostre que GHON, IJPO, KLQP e MFNQ são retângulos.
2. Calcule a soma das áreas de GHON, IJPO, KLQP e MFNQ quando $\overline{AF} = 0,5$ unidades.

Algumas possíveis respostas:

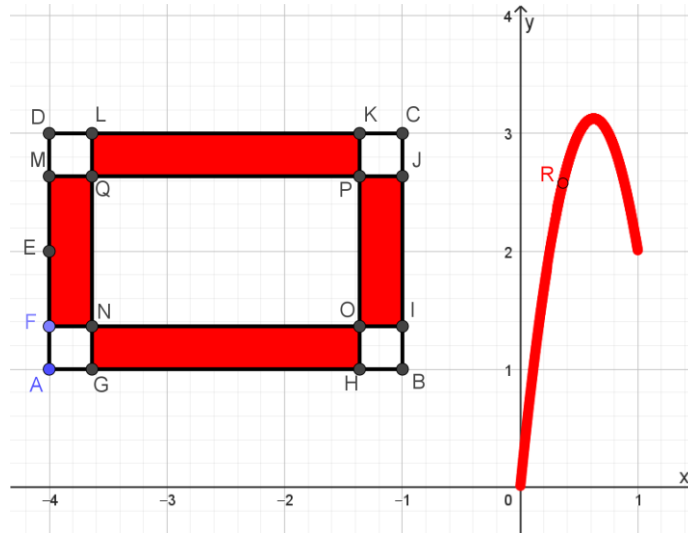
1. Começaremos mostrando que ABIF é retângulo e, para isso, devemos notar que os triângulos ABI e IFA são congruentes pelo caso LAL já que temos $\overline{BI} = \overline{FA}$ (por construção), $\overline{AI} = \overline{IA}$ (lado comum) e $\hat{AIB} = \hat{IFA}$ (alternos internos, pois $BI \parallel FA$). Assim $\overline{AB} = \overline{IF}$ e $\hat{ABI} = \hat{IFA} = 90^\circ$. Como três ângulos internos de ABIF são retos, necessariamente o ângulo $\hat{BIF}$ também será e daí segue que ABIF é um retângulo.

Figura 43 - Triângulos congruentes ABI e IFA.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 45 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 07.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

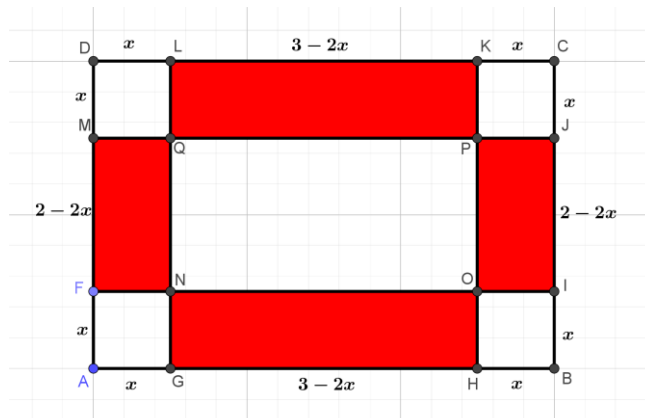
Algumas questões são propostas:

3. Deduza uma expressão algébrica para a soma das áreas dos retângulos GHON, IJPO, KLQP e MFNQ, em função da medida x do segmento AF.
4. Determine as coordenadas de R que maximizam a soma das áreas dos retângulos GHON, IJPO, KLQP e MFNQ.
5. Sendo $f(x) = A_{GHON} + A_{IJPO} + A_{KLQP} + A_{MFNQ}$, determine o domínio e o conjunto imagem de $f(x)$.

Algumas possíveis soluções:

3. A fim de deduzirmos uma fórmula para a soma das áreas em vermelho, devemos perceber que $\overline{AG} = \overline{HB} = x$ implica em $\overline{GH} = 3 - 2x$. Da mesma forma, temos que $\overline{AF} = \overline{MD} = x$ implica em $\overline{FM} = 2 - 2x$. Além disso, temos que GHON e KLQP são congruentes, assim como IJPO e MFNQ.

Figura 46 - Análise das dimensões dos retângulos vermelhos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Desta forma, a soma das áreas dos retângulos vermelhos em função da medida x do segmento AF é:

$$\begin{aligned} f(x) &= A_{GHON} + A_{IJPO} + A_{KLQP} + A_{MFNQ} = 2 \cdot A_{GHON} + 2 \cdot A_{IJPO} \\ &= 2 \cdot (3 - 2x) \cdot x + 2 \cdot x \cdot (2 - 2x) \\ &= 6x - 4x^2 + 4x - 4x^2 \\ &= 10x - 8x^2 \end{aligned}$$

4. Sobre o ponto que maximiza a soma das áreas em vermelho, sabe-se que se trata do vértice da parábola que representa a função quadrática encontrada.

$$\text{Então: } x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2 \cdot (-8)} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \text{ e } y_V = 10 \cdot \left(\frac{5}{8}\right) - 8 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{4} - \frac{25}{8} = \frac{25}{8}.$$

Portanto, quando $AF = \frac{5}{8} = 0,625$ unidades temos a soma máxima das áreas em vermelho que é igual a $\frac{25}{8} = 3,125$ unidades quadradas.

5. Sobre o domínio da função, são os possíveis valores da medida x dos lados dos quadrados construídos nos vértices do retângulo ABCD. Então x pode variar entre 0, no mínimo e a metade da medida BC, isto é, 1, no máximo. Assim, $D(f) = [0; 1]$. A imagem desta função é o conjunto $Im(f) = \left[0; \frac{25}{8}\right]$.

3.1.8 Problema nº 08

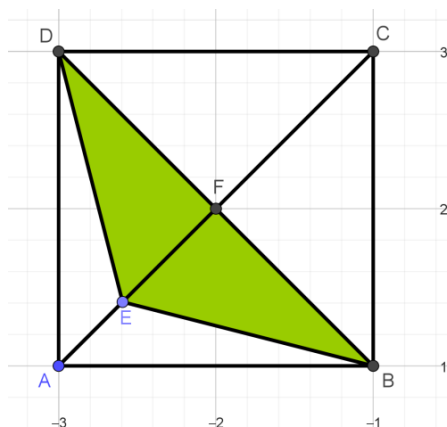
Objetivos de aprendizagem:

- Reconhecer propriedades de quadrados e triângulos a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de quadrados e triângulos.
- Resolver problemas que envolvam relações métricas em triângulos retângulos.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função de várias sentenças no plano cartesiano.
- Explorar o comportamento da função de várias sentenças (crescimento, decrescimento, máximo ou mínimo).

Duração: 2 horas/aula.

Problema nº 08: Construir um quadrado $ABCD$ cujos lados medem 2 unidades. Traçar suas diagonais AC e BD . Marcar um ponto E qualquer sobre a diagonal AC . Determinar a área do triângulo EBD em função da medida do segmento AE .

Figura 47 - Ilustração do problema nº 08.

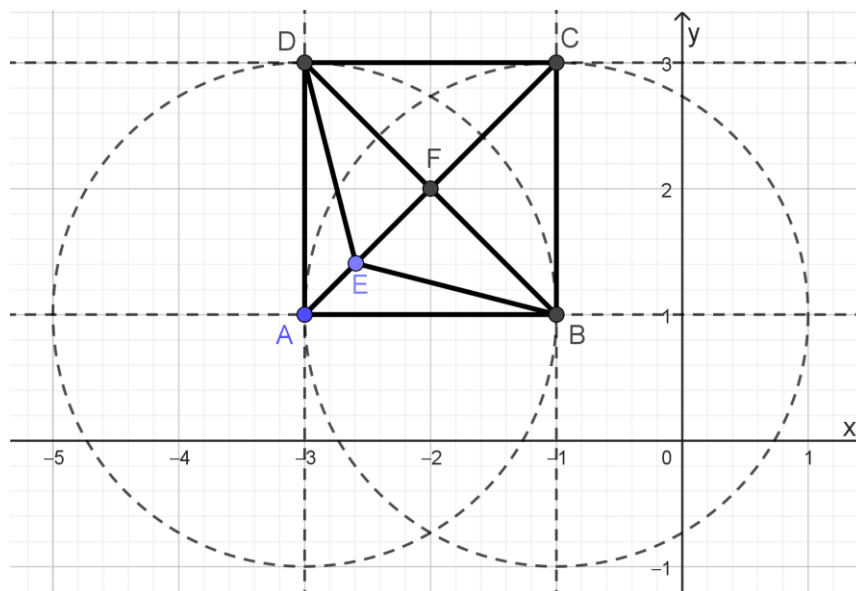


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª Etapa.

Para construir o quadrado $ABCD$, basta seguir os mesmos procedimentos adotados no problema nº 03. Depois de construir o quadrado, traçamos as diagonais AC e BD . Marcamos um ponto E qualquer sobre a diagonal AC e assim fica determinado o triângulo EBD , do qual desejamos investigar a variação da área em função da medida do segmento AE . Marcamos também o ponto F , de intersecção entre as diagonais AC e BD .

Figura 48 - Construção geométrica do problema nº 08.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Algumas questões são propostas:

1. Calcule a medida da diagonal AC do quadrado ABCD.
2. Mostre que EBD é um triângulo isósceles ou um segmento.
3. Calcule a área do triângulo EDB quando $\overline{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ unidades.
4. Calcule a área do triângulo EDB quando $\overline{AE} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ unidades.

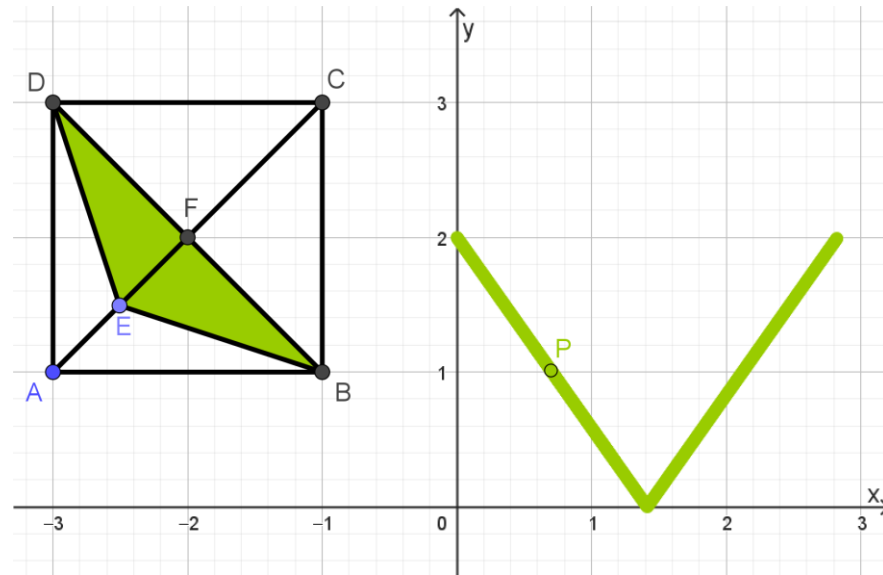
Algumas possíveis soluções:

1. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, temos: $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$. Logo, $\overline{AC} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ unidades.
2. Seja F o ponto de intersecção das diagonais AC e BD. Sabemos que em um quadrado as diagonais são perpendiculares entre si e interceptam-se em seu ponto médio. Dessa forma, temos $DF = FB$ e $\widehat{EFB} = \widehat{EFD} = 90^\circ$. Portanto os triângulos EFB e EFD são congruentes pelo caso LAL. Daí segue que $EB = ED$ e, portanto, EBD é um triângulo isósceles. No caso em que E coincide com F, temos que E, B e D são colineares e, portanto, o triângulo EBD se degenera no segmento BD.
3. Da primeira questão temos que $\overline{AC} = 2\sqrt{2}$ e como F é ponto médio de AC, então $\overline{AF} = \frac{AC}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. Se $\overline{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, então $E \in AF$ e $\overline{EF} = \overline{AF} - \overline{AE} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Logo, $A_{EBD} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{EF}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ unidade quadrada.
4. Se $\overline{AE} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, então $E \in FC$ e $\overline{EF} = \overline{AE} - \overline{AF} = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Logo, $A_{EBD} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{EF}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ unidade quadrada.

Construção: 2ª Etapa.

Com o objetivo de gerar um gráfico cartesiano diretamente a partir da construção geométrica realizada na 1ª Etapa, vamos criar um ponto móvel $P = (n; t1)$, em que $n = \overline{AE}$ e $t1 = A_{EBD}$. Dessa forma, movimentando o ponto E sobre AC, o ponto P descreve uma trajetória que representa a variação da área de EBD em função da medida de AE, como ilustra a figura abaixo.

Figura 49 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 08.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Mais algumas questões são propostas:

5. Determine expressões para a altura EF relativa à base BD do triângulo EBD em função da medida x do segmento AE.
6. Determine expressões para a área do triângulo EBD em função da medida x do segmento AE.
7. Sendo $f(x) = A_{EBD}$ determine o domínio e o conjunto imagem de $f(x)$.

Algumas possíveis soluções:

5. Sabemos que $\overline{AC} = 2\sqrt{2}$ e que $\overline{AF} = \sqrt{2}$. Se $E \in AF$ então $\overline{EF} = \overline{AF} - \overline{AE} = \sqrt{2} - x$. Se $E \in FC$ então $\overline{EF} = \overline{AE} - \overline{AF} = x - \sqrt{2}$.
6. Se $E \in AF$ então $\overline{EF} = \sqrt{2} - x$. Logo, $A_{EBD} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{EF}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - x)}{2} = 2 - \sqrt{2} \cdot x$ unidades quadradas. Se $E \in FC$ então $\overline{EF} = x - \sqrt{2}$. Logo, $A_{EBD} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{EF}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot (x - \sqrt{2})}{2} = \sqrt{2} \cdot x - 2$ unidades quadradas. Desta forma, podemos escrever a função $f(x)$ que representa a área do triângulo EBD em função da medida x do segmento AE: $f(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{2} \cdot x, & \text{se } 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \cdot x - 2, & \text{se } \sqrt{2} < x \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$. Utilizando o conceito de função modular, poderíamos escrever mais resumidamente que a função f é dada por $f(x) = |\sqrt{2} \cdot x - 2|$.
7. O domínio da função f é o conjunto de todas as possíveis medidas do segmento AE, que variam entre 0 e $2\sqrt{2}$. Assim, $D(f) = [0; 2\sqrt{2}]$. O conjunto imagem é o

conjunto de todos os possíveis valores para a área de EBD que varia de 0 (quando o triângulo se degenera em um segmento) até 2 unidades quadradas (metade da área do quadrado, quando E coincide com os vértices B ou D).

3.1.9 Problema nº 09

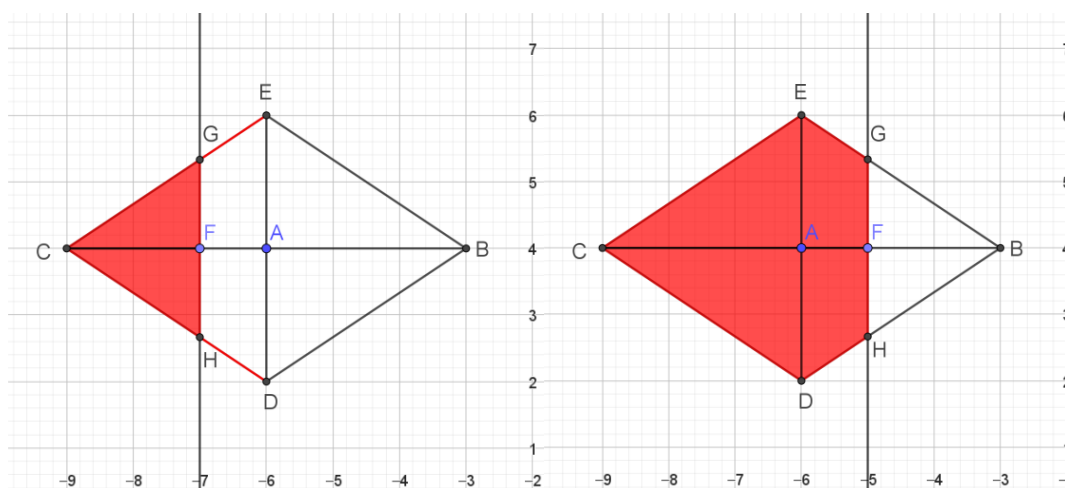
Objetivos de aprendizagem:

- Reconhecer propriedades de losangos e triângulos a partir de suas definições e características.
- Utilizar softwares de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de losangos e triângulos.
- Compreender e aplicar conceitos de proporcionalidade em figuras semelhantes.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função de várias sentenças no plano cartesiano.
- Explorar o comportamento da função de várias sentenças (crescimento, decrescimento, máximo e mínimo).

Duração: 2 horas/aula.

Problema nº 09: *Construir um losango $BECD$ de centro A , traçando suas duas diagonais de medidas $\overline{BC} = 6$ e $\overline{DE} = 4$ unidades de comprimento. Por um ponto arbitrário F da diagonal maior, traçar uma reta perpendicular a esta e determinar a área da região que é interior ao losango e que se situa à esquerda da reta construída, em função da medida do segmento CF .*

Figura 50 - Ilustração do problema n° 09.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª Etapa.

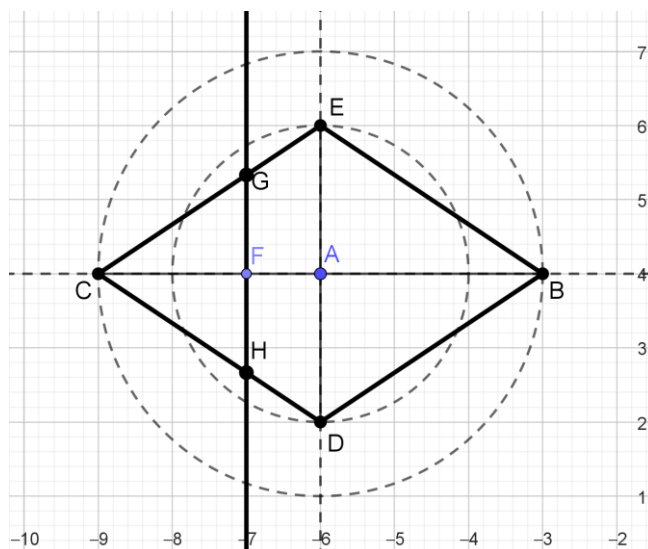
A construção do losango a partir das medidas de suas diagonais baseia-se em duas propriedades do losango, a saber:

1. As diagonais de um losango são perpendiculares entre si;
2. As diagonais de um losango interceptam-se em seu ponto médio.

Considerando os conceitos acima, marca-se o ponto A e, por ele, traçam-se duas retas perpendiculares entre si, retas estas que serão as retas-suporte das diagonais. Constrói-se um círculo de centro A e raio 3 e marca-se seus dois pontos de intersecção (B e C) com uma das retas, obtendo-se a diagonal maior. Constrói-se um outro círculo de centro A e raio 2 e marca-se seus dois pontos de intersecção (D e E) com a outra reta, obtendo-se a diagonal menor. Traçamos os caminhos poligonais CEB e CDB, obtendo o losango procurado. Marca-se um ponto qualquer F pertencente à diagonal maior. Por este ponto traça-se uma reta perpendicular à diagonal maior, marcando-se os dois pontos de intersecção desta com os lados do losango (G e H). A região definida no interior do losango e situada à esquerda da reta apresenta dois comportamentos: quando F pertence ao segmento CA, então a região é o triângulo CGH e, quando F pertence ao segmento AB, então a região é o pentágono CEGHD. É importante esclarecer a razão pela qual optamos por construir os lados do losango com caminhos poligonais, em vez de utilizar segmentos de reta. Caso os vértices fossem unidos por segmentos, os pontos G e H deixariam de existir de forma contínua ao longo do movimento do ponto F sobre a diagonal CB, pois haveria uma descontinuidade quando F cruzasse a posição do ponto A. Por outro lado, a construção dos caminhos poligonais CEB e CDB assegura a continuidade geométrica da

figura, garantindo que as interseções G e H permaneçam bem definidas durante toda a trajetória de F.

Figura 51 - Construção geométrica do problema nº 09.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Feita a construção geométrica, são apresentadas as seguintes questões:

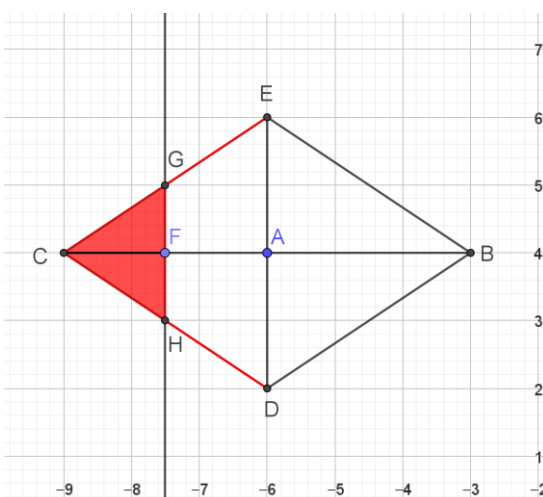
1. Como calcular a área do losango BECD?
2. Considerando $\overline{CF} = 1,5$, calcular a área da região interior ao losango e à esquerda da reta considerada.
3. Considerando $\overline{CF} = 4,5$, calcular a área da região interior ao losango e à esquerda da reta considerada.

As respostas esperadas são:

1. Espera-se que os alunos utilizem a fórmula $A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, em que d_1 e d_2 representam as medidas das duas diagonais, assim $A = \frac{6 \cdot 4}{2} = \frac{24}{2} = 12$. Outra forma de realizar este cálculo seria por meio da decomposição do losango em quatro triângulos retângulos congruentes, calcular a área de um desses triângulos e multiplicar este valor por 4, encontrando-se o mesmo resultado.
2. O aluno pode recorrer à semelhança de triângulos, para isto deve perceber que $\triangle CGH \sim \triangle CED$, pois ambos são triângulos isósceles e possuem o mesmo ângulo do vértice C. Assim:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{ED}} \Rightarrow \frac{1,5}{3} = \frac{\overline{GH}}{4} \Rightarrow \overline{GH} = \frac{4 \cdot 1,5}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Figura 52 - Solução particular para $CF = 1,5$ unidades.



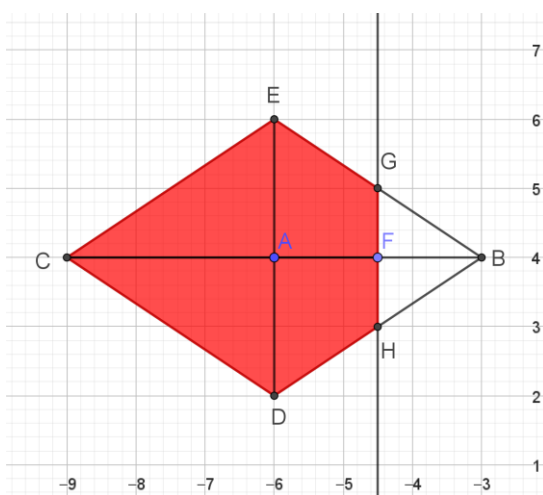
Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

$$A_{CGH} = \frac{\overline{GH} \cdot \overline{CF}}{2} = \frac{2 \cdot 1,5}{2} = 1,5 \text{ u. a.}$$

3. O aluno pode recorrer à semelhança de triângulos, para isto deve perceber que $BGH \sim BED$, pois ambos são triângulos isósceles e possuem o mesmo ângulo do vértice B. Assim:

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{ED}} \Rightarrow \frac{6 - 4,5}{3} = \frac{\overline{GH}}{4} \Rightarrow \overline{GH} = \frac{4 \cdot 1,5}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Figura 53 - Solução particular para $CF = 4,5$ unidades.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

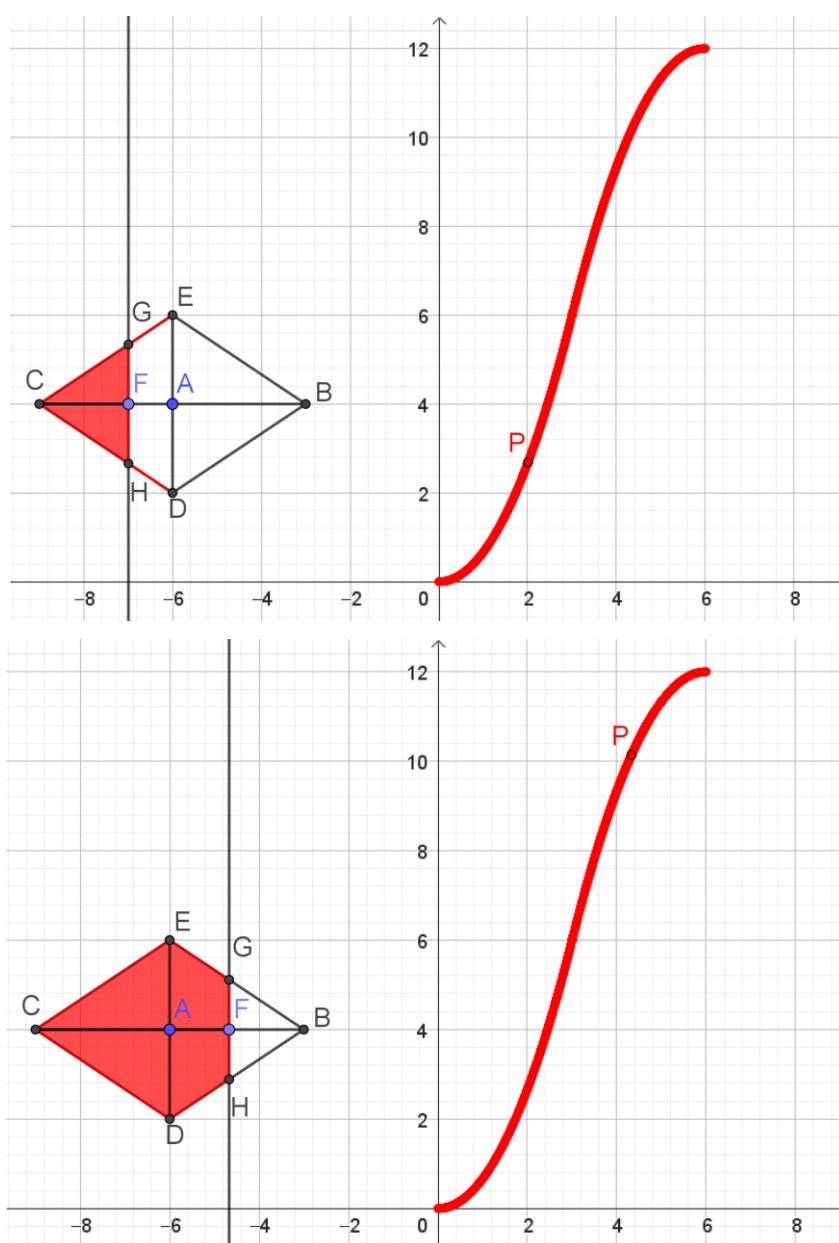
Para o cálculo da área do pentágono CEGHD o aluno pode recorrer ao raciocínio por subtração, de forma que a área do triângulo BGH seja retirada da área total do losango BECD.

$$A_{CEGHD} = A_{BECD} - A_{BGH} = 12 - \frac{\overline{GH} \cdot \overline{BF}}{2} = 12 - \frac{2 \cdot 1,5}{2} = 10,5 \text{ u. a.}$$

Construção: 2ª etapa.

A partir do losango BECD construído na 1ª etapa, vamos agora construir um ponto P móvel, cuja abscissa é a medida do segmento CF e, cuja ordenada, é a medida da área da região definida no interior do losango e situada à esquerda da reta que passa por F e é perpendicular à BC, vamos denominar esta região de R. Habilitando o rastro do ponto P, na medida em que o ponto F é movimentado sobre a diagonal BC, o ponto P descreve o gráfico de uma função que representa a variação da área da região R em função do comprimento variável x do segmento CF.

Figura 54 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 09.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

A partir desta 2ª construção, são apresentadas as seguintes questões:

4. Considerando $\overline{CF} = x$, calcular a medida do segmento GH.
5. Considerando $\overline{CF} = x$, calcular expressões para a área da região interior ao losango e à esquerda da reta considerada.
6. Denominando $f(x)$ a função que associa a medida x do segmento CF à área da região R, determine o domínio e o conjunto Imagem de $f(x)$.

As respostas esperadas são:

4. O aluno deve recorrer às mesmas semelhanças utilizadas nas questões de números 2 e 3:

Se $F \in CA$, isto é, se $x \leq 3$:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{ED}} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{\overline{GH}}{4} \Rightarrow \overline{GH} = \frac{4x}{3}$$

Se $F \in AB$, isto é, se $3 < x \leq 6$:

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{ED}} \Rightarrow \frac{6-x}{3} = \frac{\overline{GH}}{4} \Rightarrow \overline{GH} = \frac{24-4x}{3}$$

5. O aluno deve recorrer aos mesmos cálculos de área utilizados nas questões 2 e 3:

Se $F \in CA$, isto é, se $0 \leq x \leq 3$:

$$A_{CGH} = \frac{\overline{GH} \cdot \overline{CF}}{2} = \frac{\left(\frac{4x}{3}\right) \cdot x}{2} = \frac{4x^2}{6} = \frac{2x^2}{3}$$

Se $F \in AB$, isto é, se $3 < x \leq 6$:

$$\begin{aligned} A_{CEGHD} &= 12 - \frac{\overline{GH} \cdot \overline{BF}}{2} = 12 - \frac{\left(\frac{24-4x}{3}\right) \cdot (6-x)}{2} = 12 - \frac{144 - 48x + 4x^2}{6} = \\ &= 12 - \frac{72 - 24x + 2x^2}{3} = \frac{36 - 72 + 24x - 2x^2}{3} = \frac{-2x^2 + 24x - 36}{3} \end{aligned}$$

Assim, a lei da função que representa a variação da área da região R é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2}{3}, & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{-2x^2 + 24x - 36}{3}, & \text{se } 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

6. O aluno necessita perceber às variações de x e $f(x)$ no gráfico gerado. Assim, o domínio e o conjunto imagem procurados são os intervalos: $D(f) = [0; 6]$ e $Im(f) = [0; 12]$.

Uma vez feita a modelagem da função, os estudantes são convidados a refletirem sobre o tipo de função encontrada, que é uma função de duas sentenças, ambas definidas

por funções quadráticas, representadas por arcos de parábolas que se unem no ponto de coordenadas (3; 6).

3.2 Segunda Sequência de atividades – para estudantes do 3º ano do Ensino Médio

Esta sequência é composta por um conjunto de cinco problemas geométricos sobre áreas de figuras planas, todos eles resultando em funções trigonométricas dos seguintes tipos: função seno, função cosseno e função tangente, em alguns casos combinadas com a função modular. Estas atividades foram planejadas para estudantes do 3º ano do Ensino Médio.

Recomendamos que, durante a aplicação da sequência didática, os cinco problemas sejam trabalhados na ordem em que são apresentados, uma vez que seguem uma progressão crescente de complexidade. Da mesma forma, sugere-se que as questões internas de cada problema sejam resolvidas sequencialmente, respeitando a ordem proposta. Além disso, é importante que as construções solicitadas em cada etapa sejam realizadas pelo próprio estudante, também na sequência em que aparecem.

3.2.1 Problema nº 01

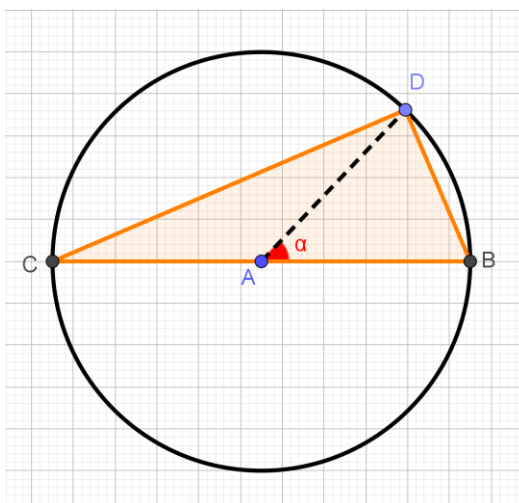
Objetivos de aprendizagem:

- Reconhecer propriedades de triângulos e círculos a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de triângulos retângulos.
- Resolver problemas que envolvam relações trigonométricas em triângulos retângulos.
- Identificar arcos simétricos em diferentes quadrantes do ciclo trigonométrico.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função seno no plano cartesiano.
- Explorar o comportamento da função seno (crescimento, decrescimento, máximos e mínimos).

Duração: 3 horas/aula.

Problema nº 01: Construir um círculo unitário de centro A e diâmetro BC . Seja D um ponto qualquer do círculo e seja $\alpha = \widehat{BAD}$ marcado no sentido anti-horário, sendo α um arco da 1ª volta. Determine a área do triângulo BCD em função de α .

Figura 55 - Ilustração do problema nº 01.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Construção: 1ª etapa.

Por um ponto A traçamos um círculo de centro A e raio unitário. Traçamos uma reta passando pelo ponto A . Marcamos B e C , pontos de intersecção do círculo a reta traçada. Traçamos o diâmetro BC . Marcamos um ponto qualquer D sobre o círculo e criamos o ângulo $\widehat{BAD} = \alpha$. Por fim construímos o triângulo BCD .

A fim de explorarmos a figura construída, são propostas as seguintes questões:

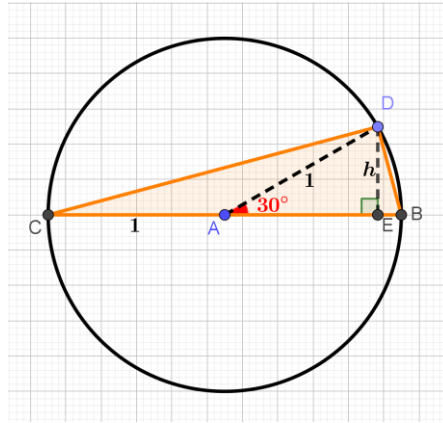
1. Como são classificados os triângulos ABD e ADC em relação aos lados?
2. Qual a medida do ângulo $\widehat{DAC}$ em função de α ?
3. Quais as medidas dos ângulos $\widehat{ADC}$ e $\widehat{ADB}$ em função de α ?
4. Como podemos classificar o triângulo BCD em relação aos ângulos?
5. Considerando $\alpha = 30^\circ$, calcule a área do triângulo BCD .
6. Considerando $\alpha = 120^\circ$, calcule a área do triângulo BCD .
7. Considerando $\alpha = 225^\circ$, calcule a área do triângulo BCD .
8. Considerando $\alpha = 330^\circ$, calcule a área do triângulo BCD .

As respostas esperadas são:

1. Como $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 1$, que é o raio do círculo, então os triângulos ABD e ADC são isósceles.
2. Como $\widehat{BAC}$ é um ângulo raso, então $\widehat{DAC} = \widehat{BAC} - \widehat{BAD} = 180^\circ - \alpha$.

3. Como ABD e ADC são isósceles, temos que $\widehat{ADB} = \widehat{ABD}$ e $\widehat{ADC} = \widehat{ACD}$. Utilizando a soma dos ângulos internos em cada um desses triângulos temos: $\widehat{ADB} = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ e $\widehat{ADC} = \frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$.
4. Como $\widehat{CDB} = \widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$. Assim, BCD é um triângulo retângulo.
5. Vamos considerar como base do triângulo BCD a hipotenusa $\overline{BC} = 2$. Logo é necessário calcularmos a altura traçada do vértice D até a base BC. Seja E o pé da perpendicular traçada do ponto D até o lado BC. Denominaremos h a medida da altura DE .

Figura 56 - Solução particular para $\alpha = 30^\circ$.

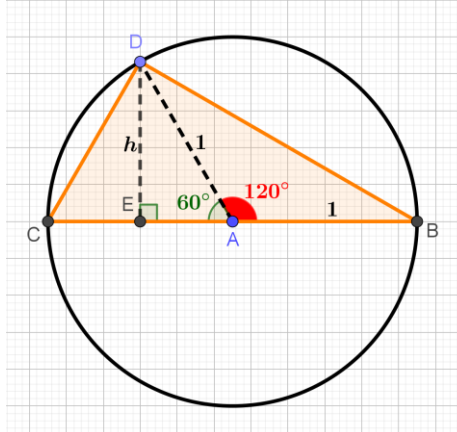


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Assim, $\sin 30^\circ = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{h}{1} = h$. Logo $h = \frac{1}{2}$. Desta forma a área do triângulo BCD é dada por $A_{BCD} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DE}}{2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$ unidade quadrada.

6. Considerando agora a situação em que $\alpha = 120^\circ$ temos o seguinte desenho:

Figura 57 - Solução particular para $\alpha = 120^\circ$.

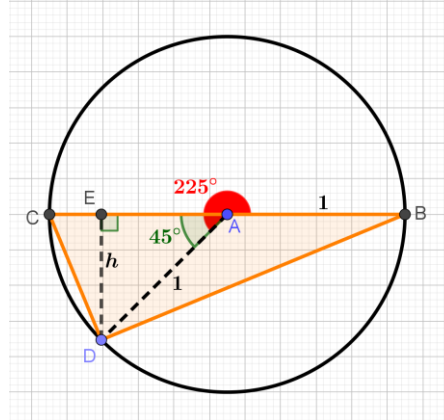


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Neste caso, $\widehat{DAE} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ e $\sin 60^\circ = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{h}{1} = h$. Logo $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Desta forma a área do triângulo BCD é dada por $A_{BCD} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DE}}{2} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ unidade quadrada.

7. Considerando agora a situação em que $\alpha = 225^\circ$ temos o seguinte desenho:

Figura 58 - Solução particular para $\alpha = 225^\circ$.

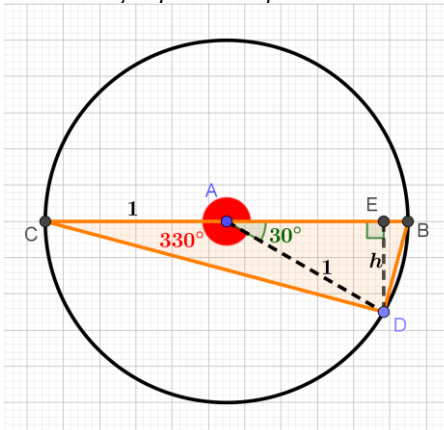


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Neste caso, $\widehat{DAE} = 225^\circ - 180^\circ = 45^\circ$ e $\sin 45^\circ = \frac{DE}{AD} = \frac{h}{1} = h$. Logo $h = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Desta forma a área do triângulo BCD é dada por $A_{BCD} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DE}}{2} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ unidade quadrada.

8. Considerando agora a situação em que $\alpha = 330^\circ$ temos o seguinte desenho:

Figura 59 - Solução particular para $\alpha = 330^\circ$.

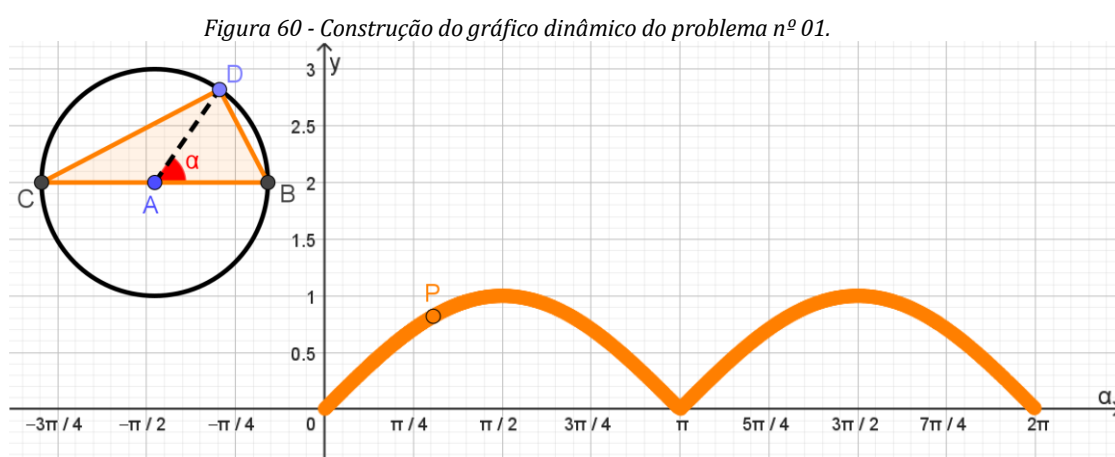


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Neste caso, $D\hat{A}E = 360^\circ - 330^\circ = 30^\circ$ e $\sin 30^\circ = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{h}{1} = h$. Logo $h = \frac{1}{2}$. Desta forma a área do triângulo BCD é dada por $A_{BCD} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DE}}{2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$ unidade quadrada.

Construção: 2ª etapa.

Com o objetivo de construir um gráfico cartesiano gerado a partir da construção realizada na 1ª etapa, vamos criar um ponto P cuja abscissa seja α e a ordenada seja a área do triângulo BCD. O software GeoGebra automaticamente tomará as medidas de α em radianos. Movimentando o ponto D no círculo, então o ponto P descreve o gráfico cartesiano procurado:



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Observação: Cabe ressaltar que ao criarmos ou renomearmos um objeto, este software não aceita que denominemos qualquer medida utilizando as letras x e y, já que estas possuem a função específica de designar abscissa e ordenada, respectivamente. Desta forma, o ângulo α será a variável independente da função procurada.

Mais algumas questões são propostas:

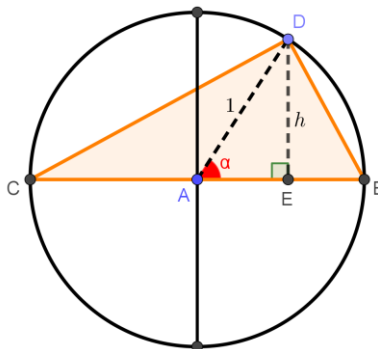
9. Calcule uma expressão para a altura h do triângulo BCD, relativa à hipotenusa BC.
10. Calcule a expressão para a área do triângulo BCD.
11. Para quais valores de α temos que BCD possui área máxima? Qual o valor desta área máxima?
12. Para quais valores de α temos a área mínima de BCD? Qual o valor desta área mínima?
13. Escreva o domínio, a imagem e o período da função $f(\alpha) = A_{BCD}$.

São esperadas as seguintes respostas:

9. Pode-se imaginar o círculo unitário da questão como o ciclo trigonométrico.

Quando $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ temos que $h = \sin \alpha$.

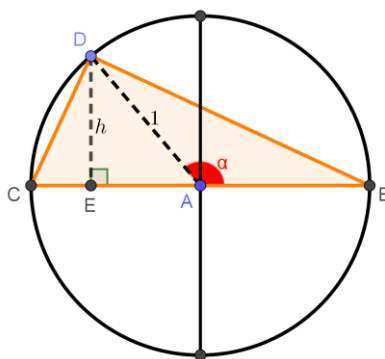
Figura 61 - Análise da altura quando α está no 1º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Quando $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ temos que $h = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

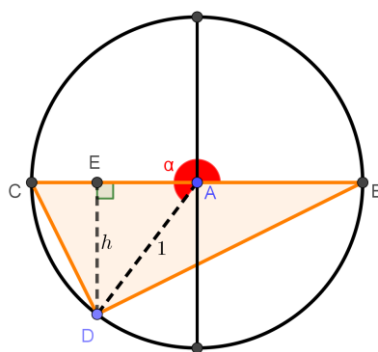
Figura 62 - Análise da altura quando α está no 2º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Quando $\pi < \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$ temos que $h = \sin(\alpha - 180^\circ) = -\sin \alpha$.

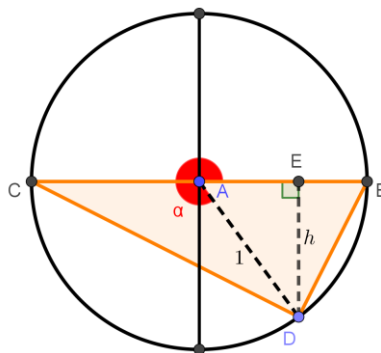
Figura 63 - Análise da altura quando α está no 3º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Quando $\frac{3\pi}{2} < \alpha \leq 2\pi$ temos que $h = \sin(360^\circ - \alpha) = -\sin \alpha$.

Figura 64 - Análise da altura quando α está no 4º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Portanto, $h = \begin{cases} \text{sen } \alpha, & \text{se } 0 \leq \alpha \leq \pi \\ -\text{sen } \alpha, & \text{se } \pi < \alpha \leq 2\pi \end{cases} = |\text{sen } \alpha|$ unidades.

$$10. A_{BCD} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DE}}{2} = \frac{2 \cdot |\text{sen } \alpha|}{2} = |\text{sen } \alpha| \text{ unidades quadradas.}$$

11. A_{BCD} será máxima quando $|\text{sen } \alpha| = 1$. Isto implica que $\text{sen } \alpha = \pm 1$. Daí concluímos que $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \frac{3\pi}{2}$. O valor destas áreas máximas é igual a 1 unidade quadrada.

12. A_{BCD} será mínima quando $|\text{sen } \alpha| = 0$, isto é, $\text{sen } \alpha = 0$. Portanto, temos $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$ ou $\alpha = 2\pi$. O valor destas áreas mínimas é igual a 0 unidade quadrada. Nestes pontos o triângulo BCD degenera-se em um segmento e, portanto, tem área nula.

13. Como α é um arco da 1ª volta, temos que $D(f) = [0, 2\pi]$. O conjunto imagem é $Im(f) = [0, 1]$. A função $f(\alpha)$ repete seus valores de π em π unidades.

3.2.2 Problema nº 02

Objetivos de aprendizagem:

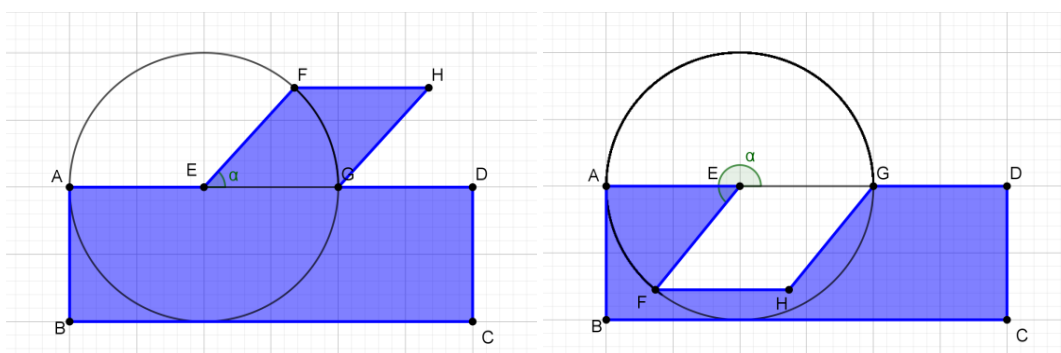
- Reconhecer propriedades de retângulos, losangos e círculos a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de retângulos e losangos.
- Resolver problemas que envolvam fórmulas trigonométricas para a área de losangos.
- Identificar arcos simétricos em diferentes quadrantes do ciclo trigonométrico.

- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função seno no plano cartesiano.
- Explorar o comportamento da função seno (crescimento, decrescimento, máximos e mínimos).

Duração: 3 horas/aula.

Problema nº 02: Construir uma região poligonal formada pela composição de duas formas: um retângulo $ABCD$ com dimensões $AB = 1$ unidade e $BC = 3$ unidades e um losango $EFHG$ cujo lado mede 1 unidade e cujo ângulo $\widehat{GEF} = \alpha$ tem medida variando no sentido anti-horário, sendo α um arco da 1ª volta. Os pontos E e G pertencem ao segmento AD tais que $AE = EG = GD = 1$. Determine a área da região poligonal $ABCDGHFE$ em função de α .

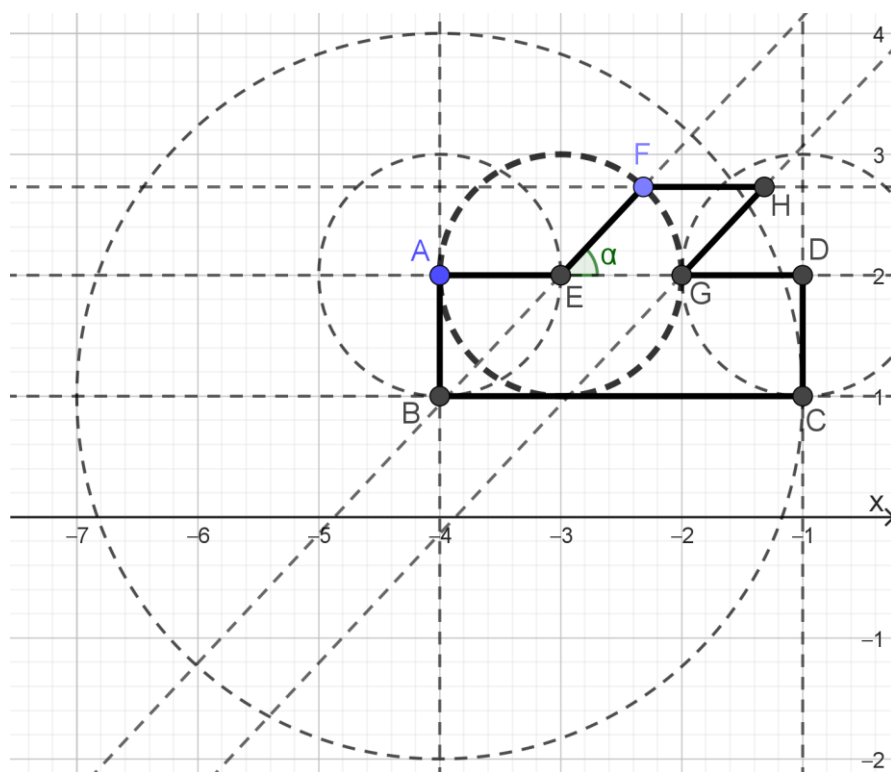
Figura 65 - Ilustração do problema nº 02.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª etapa.

Figura 66 - Construção geométrica do problema nº 02.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Nesta construção, iniciamos com a criação de um retângulo $ABCD$ com $\overline{AB} = 1$ e $\overline{BC} = 3$, conforme procedimento descrito no problema nº 1 da 1ª sequência didática. Em seguida, criamos o ponto $E \in AD$ de tal forma que $AE = 1$, criando um círculo de raio 1 e centro em A , e marcamos E como o ponto de intersecção deste círculo com AD . Com centro em E e raio $\overline{EA} = 1$, traçamos um círculo e, sobre ele, marcamos um ponto arbitrário F . Marcamos o ponto G de intersecção deste último círculo com AD , sendo que A e G são pontos distintos. Traçamos a reta EF e sua paralela passando pelo ponto G . Traçamos, pelo ponto F , uma reta paralela ao segmento EG . Na intersecção da reta paralela a EF que passa por G com a reta paralela a EG que passa por F , marcamos o ponto H . Construimos o polígono $ABCDGHFE$. Desejamos investigar a variação da área da região poligonal $ABCDGHFE$ em função da medida do ângulo $\widehat{GEF} = \alpha$, medido no sentido anti-horário.

Algumas questões para explorar a figura construída:

Calcule a área da região poligonal $ABCDGHFE$ quando:

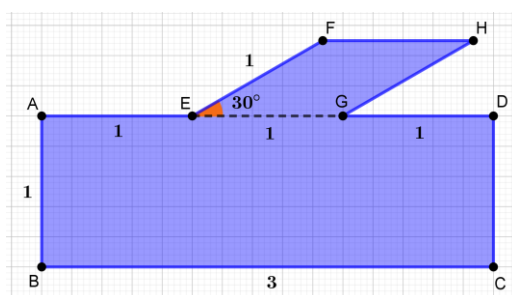
1. $\alpha = 30^\circ$.
2. $\alpha = 90^\circ$.
3. $\alpha = 135^\circ$.
4. $\alpha = 240^\circ$.

5. $\alpha = 270^\circ$.
6. $\alpha = 330^\circ$.
7. $\alpha = 0^\circ$ ou $\alpha = 180^\circ$.

Respostas esperadas:

1. Quando $\alpha = 30^\circ$, a área procurada é a soma das áreas do retângulo ABCD e do losango EFHG. Assim, $A_{ABCDGHFE} = A_{ABCD} + A_{EFHG} = 3 \cdot 1 + 1^2 \cdot \text{sen } 30^\circ = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ unidades quadradas.

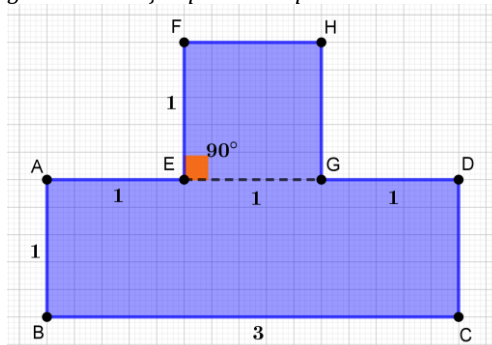
Figura 67 - Solução particular para $\alpha = 30^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

2. Quando $\alpha = 90^\circ$, a área procurada é a soma das áreas do retângulo ABCD e do quadrado EFHG. Assim, $A_{ABCDGHFE} = A_{ABCD} + A_{EFHG} = 3 \cdot 1 + 1^2 = 3 + 1 = 4$ unidades quadradas.

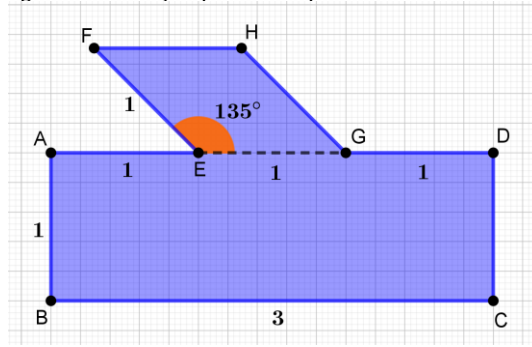
Figura 68 - Solução particular para $\alpha = 90^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

3. Quando $\alpha = 135^\circ$, a área procurada é a soma das áreas do retângulo ABCD e do losango EFHG. Assim, $A_{ABCDGHFE} = A_{ABCD} + A_{EFHG} = 3 \cdot 1 + 1^2 \cdot \text{sen } 135^\circ = 3 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6+\sqrt{2}}{2}$ unidades quadradas.

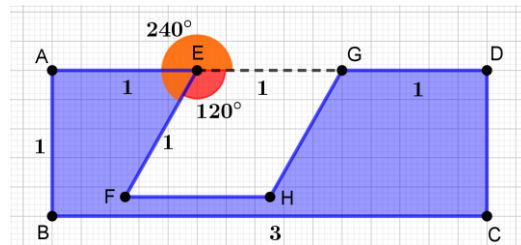
Figura 69 - Solução particular para $\alpha = 135^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

4. Quando $\alpha = 240^\circ$, a área procurada é a diferença das áreas do retângulo ABCD e do losango EFHG. Assim, $A_{ABCDGHFE} = A_{ABCD} - A_{EFHG} = 3 \cdot 1 - 1^2 \cdot \sin 120^\circ = 3 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6-\sqrt{3}}{2}$ unidades quadradas.

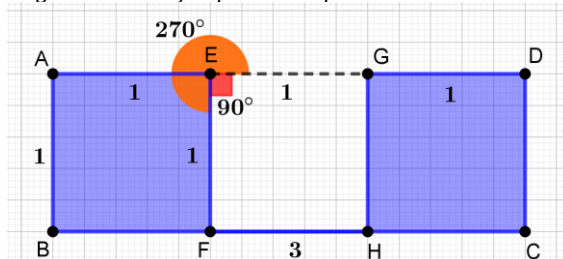
Figura 70 - Solução particular para $\alpha = 240^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

5. Quando $\alpha = 270^\circ$, a área procurada é a diferença das áreas do retângulo ABCD e do quadrado EFHG. Assim, temos: $A_{ABCDGHFE} = A_{ABCD} - A_{EFHG} = 3 \cdot 1 - 1^2 = 3 - 1 = 2$ unidades quadradas.

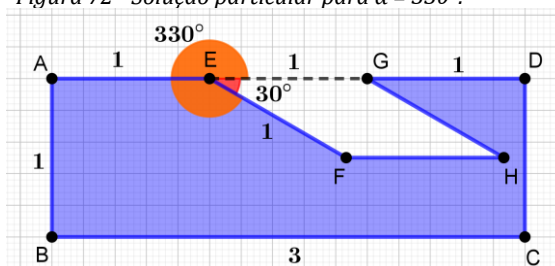
Figura 71 - Solução particular para $\alpha = 270^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

6. Quando $\alpha = 330^\circ$, a área procurada é a diferença das áreas do retângulo ABCD e do losango EFHG. Assim, temos: $A_{ABCDGHFE} = A_{ABCD} - A_{EFHG} = 3 \cdot 1 - 1^2 \cdot \sin 30^\circ = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ unidades quadradas.

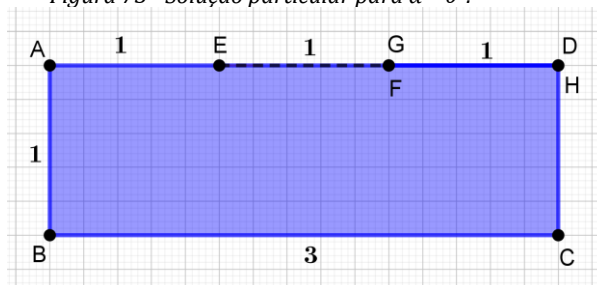
Figura 72 - Solução particular para $\alpha = 330^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

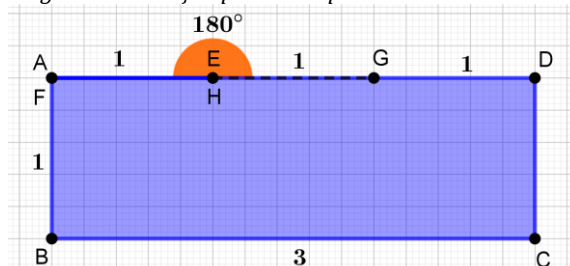
7. Quando $\alpha = 0^\circ$ ou $\alpha = 180^\circ$ os vértices E, F, G e H do losango ficam alinhados e, portanto, o losango degenera-se em um segmento cuja área é zero. Desta forma a área da região procurada resume-se à área do retângulo ABCD, isto é, $A_{ABCDGHFE} = A_{ABCD} = 3 \cdot 1 = 3$ unidades quadradas.

Figura 73 - Solução particular para $\alpha = 0^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Figura 74 - Solução particular para $\alpha = 180^\circ$.

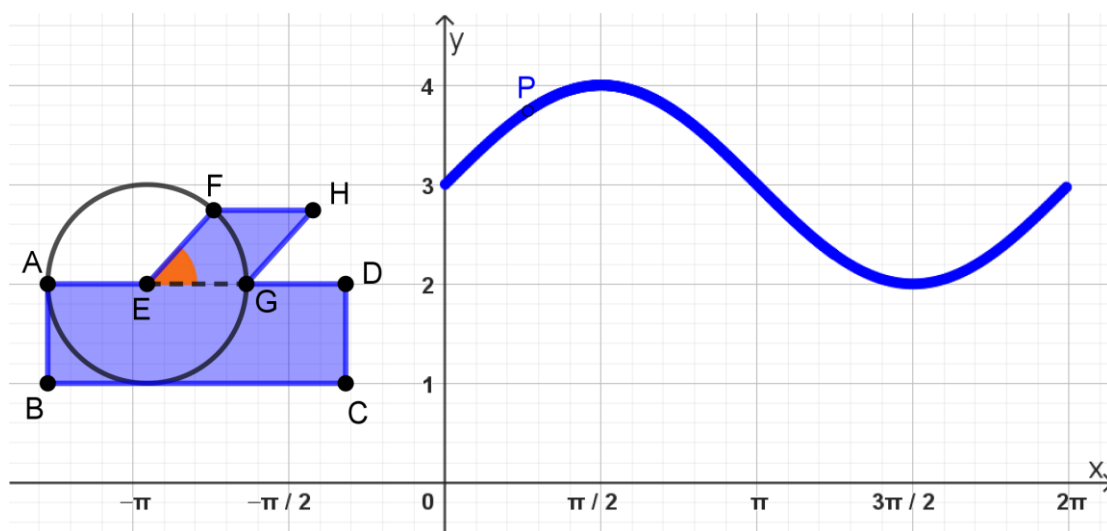


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 2ª etapa.

A fim de construirmos um gráfico cartesiano a partir da construção realizada na 1ª etapa, vamos criar um ponto P cuja abscissa seja α e a ordenada seja a área da região poligonal ABCDGHFE. Movimentando o ponto F no círculo, então o ponto P descreve o gráfico cartesiano procurado:

Figura 75 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 02.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

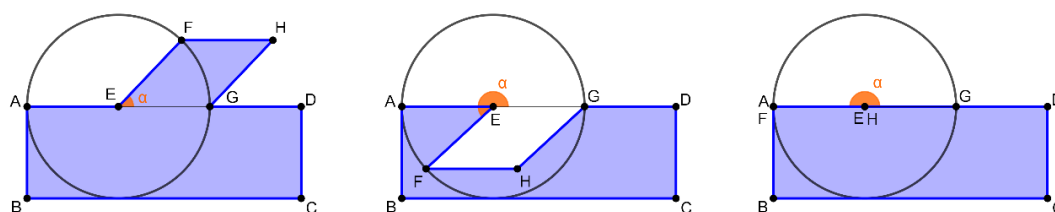
Na sequência são propostas as seguintes questões:

8. Determine uma expressão para a área da região ABCDGHFE.
9. Para quais valores de α temos que ABCDGHFE possui área máxima? Qual o valor desta área máxima?
10. Para quais valores de α temos a área mínima de ABCDGHFE? Qual o valor desta área mínima?
11. Escreva o domínio e a imagem da função $f(\alpha) = A_{ABCDGHFE}$.

As respostas esperadas são:

8. Primeiramente observamos que existem três situações: ou os pontos F e H são pontos externos ao retângulo ABCD e, portanto, a área procurada é dada por $A_{ABCD} + A_{EFHG}$, ou os pontos F e H são pontos internos ao retângulo ABCD e, neste caso a área procurada é expressa como $A_{ABCD} - A_{EFHG}$, ou ainda, quando os pontos F e H estão sobre o segmento AD e neste caso a área procurada se reduz apenas à área do retângulo ABCD.

Figura 76 - Análise da variação da área em função de α .



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Sabemos que ABCD é um retângulo de dimensões 1 e 3, portanto $A_{ABCD} = 3 \cdot 1 = 3$ unidades quadradas e o quadrilátero EFGH é um losango, pois é um paralelogramo com quatro lados congruentes. Para calcular a área deste losango podemos utilizar a expressão $A_{EFGH} = a^2 \cdot \sin \alpha$, em que a é a medida do lado e α é um ângulo interno qualquer do losango.

Se os pontos F e H são externos ao retângulo ABCD, e se $\widehat{GEF} = \alpha$, então $0 < \alpha < \pi$ e $A_{EFGH} = 1^2 \cdot \sin \alpha = \sin \alpha$. Portanto, no primeiro caso, temos que $A = 3 + \sin \alpha$.

Caso os pontos F e H sejam internos ao retângulo ABCD, então $\pi < \alpha < 2\pi$, logo $A_{EFGH} = 1^2 \cdot \sin (2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$. Portanto, no segundo caso, temos que $A = 3 - (-\sin \alpha) = 3 + \sin \alpha$.

Se os pontos F e H pertencem ao segmento AD então $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$, ou $\alpha = 2\pi$. Então, como $\sin 0 = \sin \pi = \sin 2\pi = 0$, temos que, nestes casos, a área $A_{EFGH} = 0$ e, portanto, a fórmula $A = 3 + \sin \alpha$ permanece válida. Como nas três situações encontramos a mesma expressão, podemos afirmar que a função procurada tem expressão $y = 3 + \sin \alpha$, sendo $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

9. O ponto que corresponde à área máxima é $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $A_{max} = 4$.
10. O ponto que corresponde à área mínima é $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ e $A_{min} = 2$.
11. Como α é um arco da 1ª volta, temos que $D(f) = [0, 2\pi]$. O conjunto imagem pode ser obtido por meio do cálculo:

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow 3 + (-1) \leq 3 + \sin \alpha \leq 3 + 1 \Rightarrow 2 \leq f(\alpha) \leq 4$$

Logo, $Im(f) = [2, 4]$.

3.2.3 Problema nº 03

Objetivos de aprendizagem:

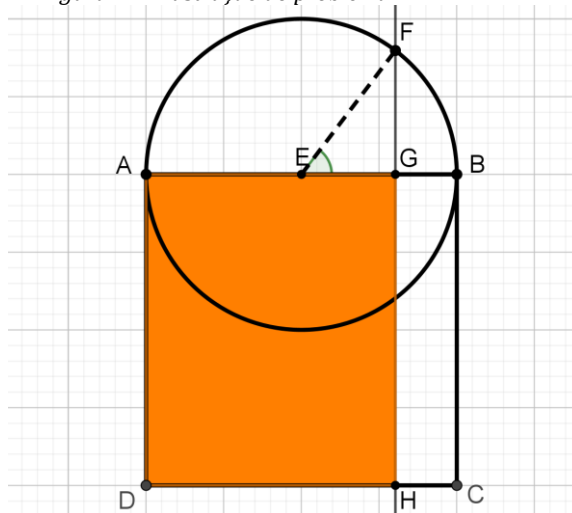
- Reconhecer propriedades de quadrados, retângulos e círculos a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de retângulos.
- Resolver problemas que envolvam relações trigonométricas em triângulos retângulos.

- Identificar arcos simétricos em diferentes quadrantes do ciclo trigonométrico.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função cosseno no plano cartesiano.
- Explorar o comportamento da função cosseno (crescimento, decrescimento, máximos e mínimos).

Duração: 3 horas/aula.

Problema nº 03: Construir um quadrado $ABCD$ cujo lado mede 2 unidades e um círculo de centro E e raio $\overline{EA}$, onde E é ponto médio de AB . Marcar um ponto qualquer F sobre o círculo, de modo que $\widehat{BEF} = \alpha$ tem medida variando no sentido anti-horário, sendo α um arco da 1ª volta. Por F traçar uma perpendicular ao lado AB , tal que essa perpendicular interseccione os lados AB e CD nos pontos G e H , respectivamente. Determine a área do quadrilátero $AGHD$ em função de α .

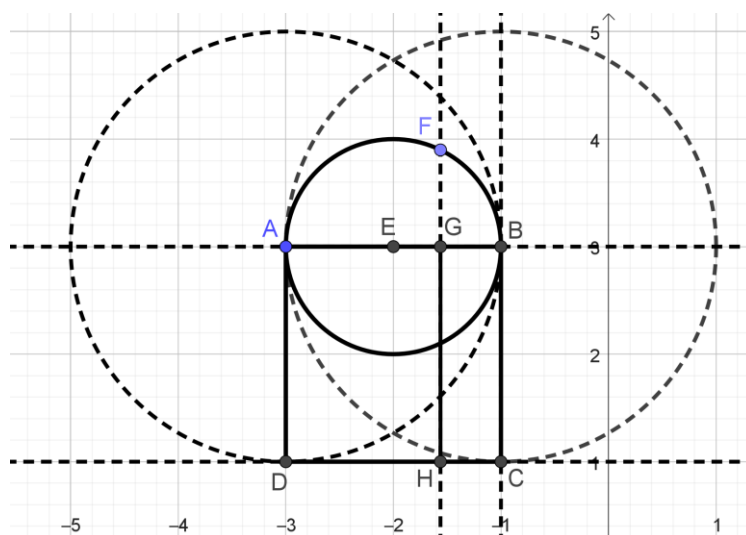
Figura 77 - Ilustração do problema nº 03.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A construção se inicia com a criação de um quadrado $ABCD$, cujo lado mede 2 unidades. A seguir, marcamos o ponto médio E do lado AB e traçamos o círculo de centro E e raio $\overline{EA}$. Então escolhemos um ponto arbitrário F sobre o círculo. Seja $\alpha = \widehat{BEF}$. Pelo ponto F baixamos uma perpendicular ao lado AB e esta reta interseccionará os lados AB e CD nos pontos G e H , respectivamente. Desejamos investigar a variação da área do quadrilátero $ADHG$ em função da medida do ângulo $\widehat{BEF}$, medido no sentido anti-horário.

Figura 78 - Construção geométrica do problema nº 03.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Algumas questões para explorar a figura construída:

1. Explique por que o quadrilátero ADHG é um retângulo.

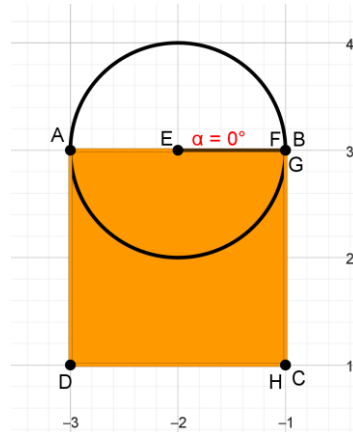
Calcule a área do quadrilátero ADHG quando:

2. $\alpha = 0^\circ$.
3. $\alpha = 30^\circ$.
4. $\alpha = 90^\circ$.
5. $\alpha = 120^\circ$.
6. $\alpha = 180^\circ$.
7. $\alpha = 225^\circ$.
8. $\alpha = 270^\circ$.
9. $\alpha = 300^\circ$.
10. $\alpha = 360^\circ$.

As respostas esperadas são:

1. Considerando o quadrilátero ADHG, temos que os ângulos dos vértices A e D são os mesmos do quadrado ABCD, logo $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$. Por construção, FG é perpendicular a AB, logo $\hat{G} = 90^\circ$ e, por consequência, $\hat{H} = 90^\circ$. Assim, ADHG é um retângulo.
2. Quando $\alpha = 0^\circ$, então os pontos de intersecção G e H coincidem com os vértices B e C do quadrado, respectivamente. Assim, $A_{ADHG} = A_{ABCD} = 2^2 = 4$ unidades quadradas.

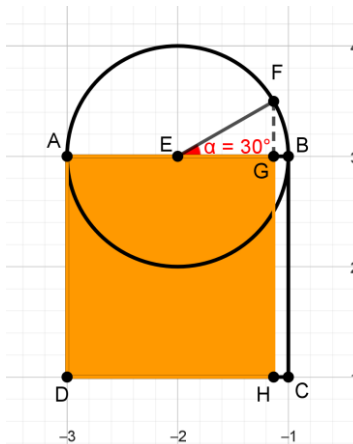
Figura 79 - Solução particular para $\alpha = 0^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

3. Quando $\alpha = 30^\circ$, então devemos considerar o triângulo retângulo EFG, reto em G e com $\widehat{GEF} = 30^\circ$. Sabemos que $\overline{EF} = 1$ (raio do círculo) e, portanto, $\overline{EG} = 1 \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Assim, $\overline{AG} = \overline{AE} + \overline{EG} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$. Logo, $A_{ADHG} = \overline{AD} \cdot \overline{AG} = 2 \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$ unidades quadradas.

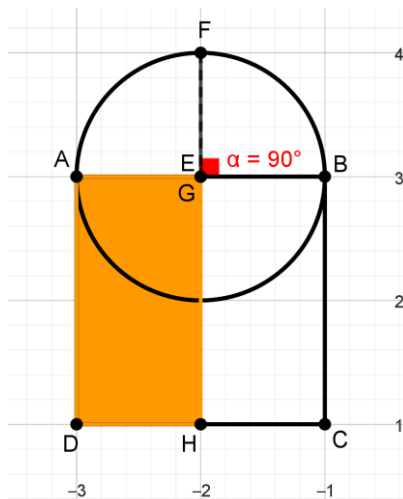
Figura 80 - Solução particular para $\alpha = 30^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

4. Quando $\alpha = 90^\circ$, então o ponto de intersecção G coincide com o ponto médio E do lado AB, então $\overline{AG} = \overline{AE} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Assim, $A_{ADHG} = \overline{AD} \cdot \overline{AG} = 2 \cdot 1 = 2$ unidades quadradas.

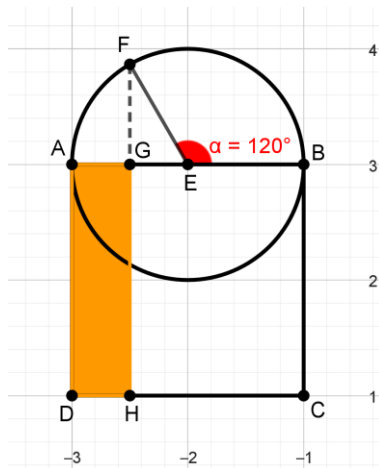
Figura 81 - Solução particular para $\alpha = 90^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

5. Quando $\alpha = 120^\circ$, então devemos considerar o triângulo retângulo EFG, reto em G e com $\widehat{GEF} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Sabemos que $\overline{EF} = 1$ e, portanto, $\overline{EG} = 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Assim, $\overline{AG} = \overline{AE} - \overline{EG} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Logo, $A_{ADHG} = \overline{AD} \cdot \overline{AG} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ unidade quadrada.

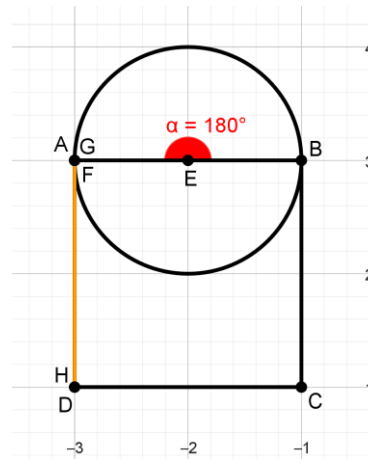
Figura 82 - Solução particular para $\alpha = 120^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

6. Quando $\alpha = 180^\circ$, então os pontos de intersecção G e H coincidem com os vértices A e D do quadrado, respectivamente. Assim, o retângulo ADHG se degenera em apenas um segmento e assim, sua área é zero.

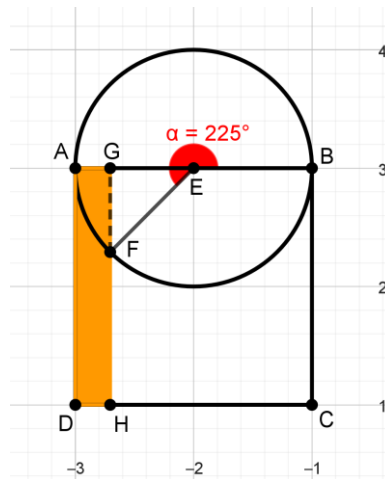
Figura 83 - Solução particular para $\alpha = 180^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

7. Quando $\alpha = 225^\circ$, então devemos considerar o triângulo retângulo EFG, reto em G e com $\widehat{GEF} = 225^\circ - 180^\circ = 45^\circ$. Sabemos que $\overline{EF} = 1$ e, portanto, $\overline{EG} = 1 \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, $\overline{AG} = \overline{AE} - \overline{EG} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$. Logo, $A_{ADHG} = \overline{AD} \cdot \overline{AG} = 2 \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$ unidades quadradas.

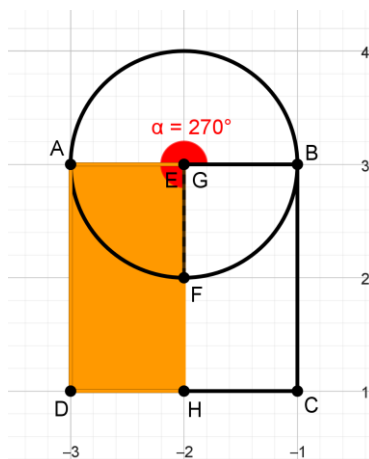
Figura 84 - Solução particular para $\alpha = 225^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

8. Quando $\alpha = 270^\circ$, então o ponto de intersecção G coincide com o ponto médio E do lado AB, então $\overline{AG} = \overline{AE} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2}{2} = 1$. Assim, $A_{ADHG} = \overline{AD} \cdot \overline{AG} = 2 \cdot 1 = 2$ unidades quadradas.

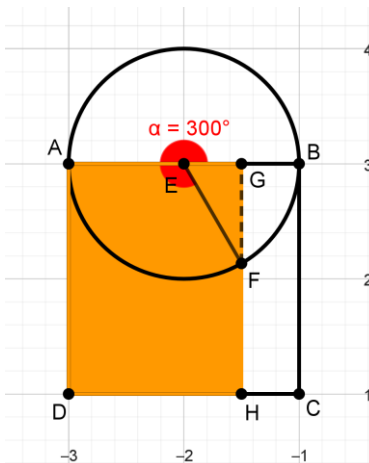
Figura 85 - Solução particular para $\alpha = 270^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

9. Quando $\alpha = 300^\circ$, então devemos considerar o triângulo retângulo EFG, reto em G e com $\widehat{GEF} = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$. Sabemos que $\overline{EF} = 1$ e, portanto, $\overline{EG} = 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Assim, $\overline{AG} = \overline{AE} + \overline{EG} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Logo, $A_{ADHG} = \overline{AD} \cdot \overline{AG} = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$ unidades quadradas.

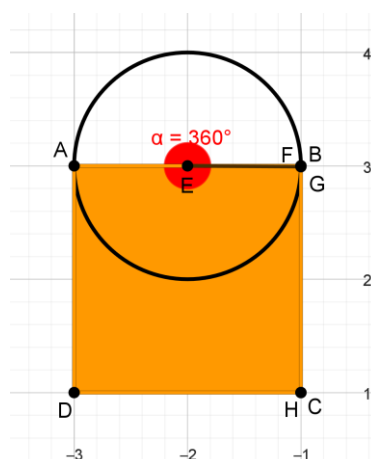
Figura 86 - Solução particular para $\alpha = 300^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

10. Quando $\alpha = 360^\circ$, então os pontos de intersecção G e H coincidem com os vértices B e C do quadrado, respectivamente. Assim, $A_{ADHG} = A_{ABCD} = 2^2 = 4$ unidades quadradas.

Figura 87 - Solução particular para $\alpha = 360^\circ$.

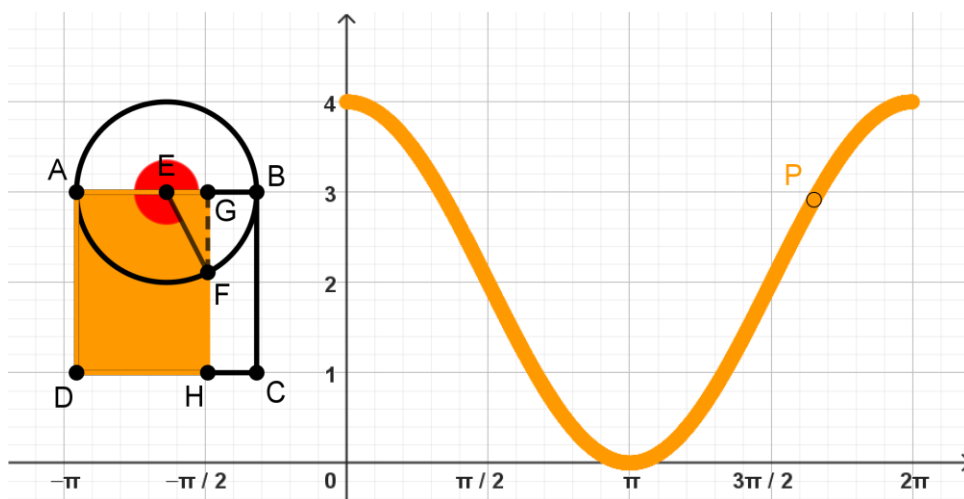


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Construção: 2ª etapa.

Vamos gerar um gráfico cartesiano diretamente relacionado à construção da 1ª etapa. Então criamos um ponto P cuja abscissa é α e cuja ordenada é a área do retângulo $ADHG$. Habilitamos o rastro do ponto P e, quando movimentamos o ponto F sobre o círculo, observamos que P deixa como rastro a seguinte curva:

Figura 88 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 03.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Na sequência, são propostas as seguintes questões:

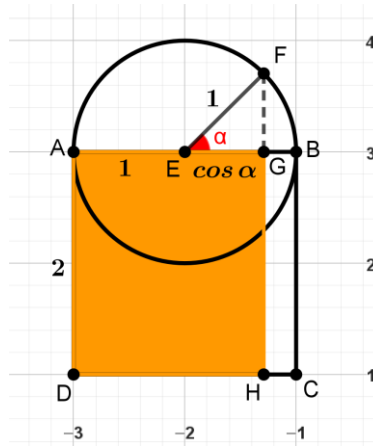
11. Deduza uma fórmula que expresse a área do retângulo $ADHG$ em função de α .
12. Para quais valores de α temos que $ADHG$ possui área máxima? Qual o valor desta área máxima?
13. Para quais valores de α temos a área mínima de $ADHG$? Qual o valor desta área mínima?
14. Escreva o domínio e a imagem da função $f(\alpha) = A_{ADHG}$.

As respostas esperadas são:

11. Primeiramente observamos que existem quatro situações: quando F está localizado em cada um dos quatro quadrantes.

No primeiro caso temos que $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Nesta situação, considerando o triângulo EFG , EG é o cateto adjacente ao ângulo $\widehat{GEF} = \alpha$. Portanto $\overline{EG} = \overline{EF} \cdot \cos \alpha$. Como $\overline{EF} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2}{2} = 1$, então $\overline{EG} = 1 \cdot \cos \alpha$ e $\overline{AG} = \overline{AE} + \overline{EG} = 1 + \cos \alpha$.

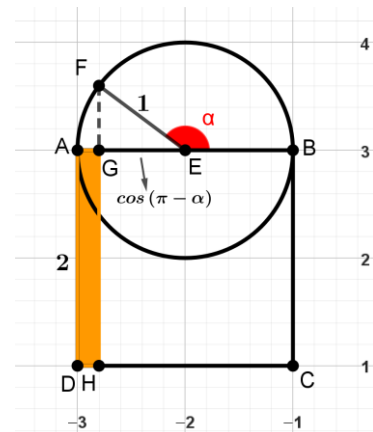
Figura 89 - Análise da medida de AG quando α está no 1º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

No segundo caso, quando $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$, temos que $\widehat{GEF} = \pi - \alpha$, então $\overline{EG} = 1 \cdot \cos(\pi - \alpha) = 1 \cdot (-\cos \alpha) = -\cos \alpha$ e $\overline{AG} = \overline{AE} - \overline{EG} = 1 - (-\cos \alpha) = 1 + \cos \alpha$.

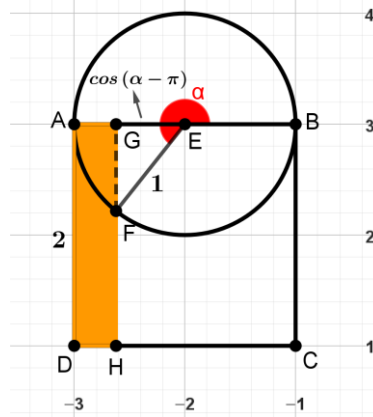
Figura 90 - Análise da medida de AG quando α está no 2º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

No 3º caso, quando $\pi < \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$, temos que $\widehat{GEF} = \alpha - \pi$, então $\overline{EG} = 1 \cdot \cos(\alpha - \pi) = -\cos \alpha$ e $\overline{AG} = \overline{AE} - \overline{EG} = 1 - (-\cos \alpha) = 1 + \cos \alpha$.

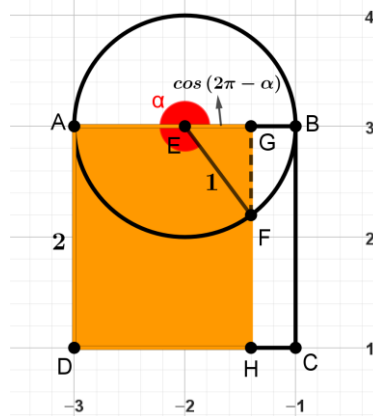
Figura 91 - Análise da medida de AG quando α está no 3º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

No 4º caso, quando $\frac{3\pi}{2} < \alpha \leq 2\pi$, temos que $\widehat{GEF} = 2\pi - \alpha$, então $\overline{EG} = 1 \cdot \cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$ e $\overline{AG} = \overline{AE} + \overline{EG} = 1 + \cos \alpha$.

Figura 92 - Análise da medida de AG quando α está no 4º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Assim, em cada um dos quatro casos, temos que $A_{ADHG} = \overline{AD} \cdot \overline{AG} = 2 \cdot (1 + \cos \alpha)$, isto é, $A_{ADHG} = 2 + 2 \cdot \cos \alpha$.

12. Podemos afirmar que a área máxima ocorre quando o ponto G coincide com o ponto B, isto é, quando $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2\pi$ e $A_{max} = 2 \cdot 2 = 4$ unidades quadradas.
13. Sobre a área mínima, sabemos que ocorre quando o ponto G coincide com o ponto A, isto é, quando $\alpha = \pi$, e $A_{min} = 0$ unidades quadradas.
14. Como α é um arco da 1ª volta, temos que $D(f) = [0, 2\pi]$. O conjunto imagem pode ser obtido por meio do cálculo:

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos \alpha \leq 1 &\Rightarrow 2 \cdot (-1) \leq 2 \cdot \cos \alpha \leq 2 \cdot 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \cdot \cos \alpha \leq 2 \\ &\Rightarrow -2 + 2 \leq 2 + 2 \cdot \cos \alpha \leq 2 + 2 \Rightarrow 0 \leq f(\alpha) \leq 4 \end{aligned}$$

Logo, $Im(f) = [0, 4]$.

3.2.4 Problema nº 04

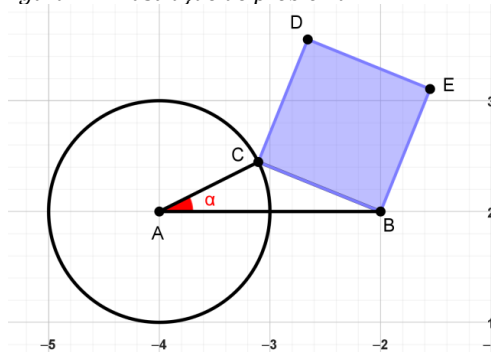
Objetivos de aprendizagem:

- Reconhecer propriedades de quadrados, triângulos e círculos a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de quadrados.
- Resolver problemas que envolvam relações trigonométricas em triângulos quaisquer (Lei dos Cossenos).
- Identificar arcos simétricos em diferentes quadrantes do ciclo trigonométrico.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função cosseno no plano cartesiano.
- Explorar o comportamento da função cosseno (crescimento, decrescimento, máximos e mínimos).

Duração: 3 horas/aula.

Problema nº 04: Construir um triângulo ABC com $\overline{AB} = 2$ unidades, sendo A e B pontos fixos e C um ponto qualquer sobre o círculo de centro A e raio unitário. Seja o ângulo $B\hat{A}C = \alpha$ com medida variando no sentido anti-horário, sendo α um arco da 1ª volta. Construir o quadrado $BCDE$, e determinar sua área em função de α .

Figura 93 - Ilustração do problema nº 04.



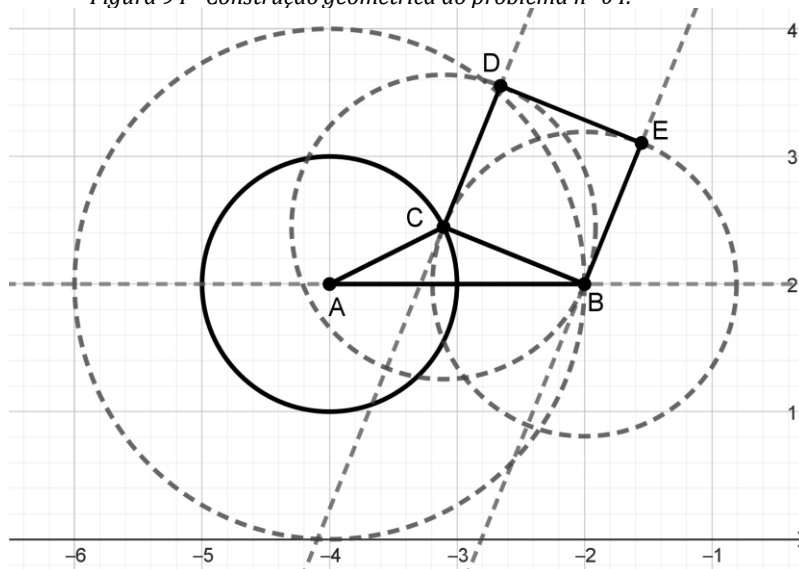
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Construção: 1ª etapa.

Marcamos um ponto A e traçamos dois círculos de raios de medidas 1 e 2, com centro neste ponto. Traçamos uma reta passando pelo ponto A , e marcamos o ponto B

como uma das intersecções desta reta com o círculo maior. Sobre o círculo unitário criamos um ponto C qualquer e, unindo estes três pontos por segmentos, temos o triângulo ABC. Construimos um círculo de centro C e passando pelo ponto B e traçamos uma reta perpendicular à BC passando pelo ponto C. Marcamos D como ponto de intersecção deste último círculo e da perpendicular passando por C. Construimos um círculo de centro B e passando pelo ponto C e traçamos uma reta perpendicular à BC passando pelo ponto B. Marcamos E como ponto de intersecção deste último círculo e da perpendicular passando por B. Assim temos o quadrado BCDE, conforme figura abaixo.

Figura 94 - Construção geométrica do problema nº 04.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Sobre a figura construída, é proposta a seguinte questão:

Calcule a área do quadrado ABCD nos seguintes casos:

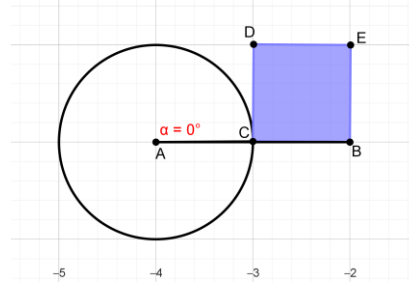
1. $\alpha = 0^\circ$
2. $\alpha = 45^\circ$
3. $\alpha = 90^\circ$
4. $\alpha = 120^\circ$
5. $\alpha = 180^\circ$
6. $\alpha = 210^\circ$
7. $\alpha = 270^\circ$
8. $\alpha = 300^\circ$
9. $\alpha = 360^\circ$

São esperadas as seguintes respostas:

1. Quando $\alpha = 0^\circ$, temos que o ponto C está localizado sobre o ponto médio de AB.

Assim, $\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2}{2} = 1$ e, portanto, $A_{BCDE} = \overline{BC}^2 = 1^2 = 1$ unidade quadrada.

Figura 95 - Solução particular para $\alpha = 0^\circ$.

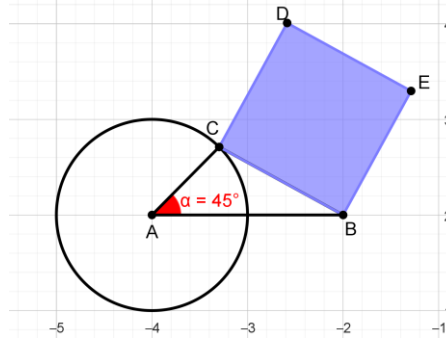


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

2. Quando $\alpha = 45^\circ$, podemos calcular a área do quadrado BCDE utilizando a Lei dos Cossenos:

$$\begin{aligned} A_{BCDE} &= \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \alpha = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 45^\circ \\ &= 5 - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 - 2\sqrt{2} \text{ unidades quadradas.} \end{aligned}$$

Figura 96 - Solução particular para $\alpha = 45^\circ$.

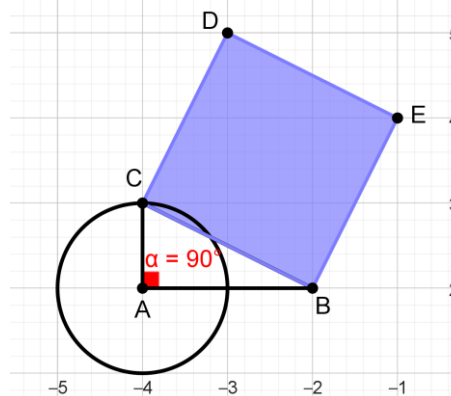


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

3. Quando $\alpha = 90^\circ$, podemos calcular a área de BCDE:

$$\begin{aligned} A_{BCDE} &= \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \alpha = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ \\ &= 5 - 4 \cdot 0 = 5 \text{ unidades quadradas.} \end{aligned}$$

Figura 97 - Solução particular para $\alpha = 90^\circ$.

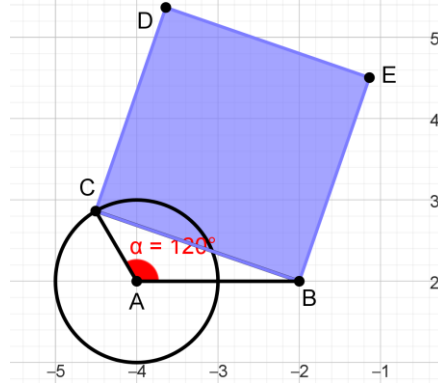


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

4. Quando $\alpha = 120^\circ$, vamos calcular a área de medida $\overline{BC}^2$:

$$\begin{aligned} A_{BCDE} &= \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \alpha = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ \\ &= 5 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 5 + 2 = 7 \text{ unidades quadradas.} \end{aligned}$$

Figura 98 - Solução particular para $\alpha = 120^\circ$.

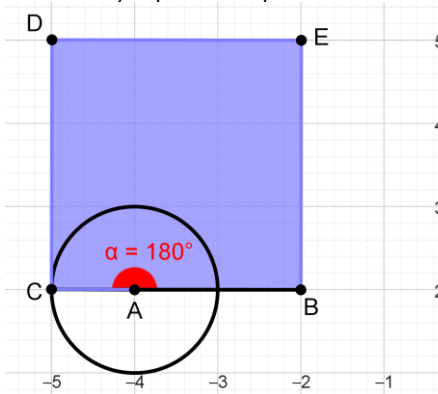


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

5. Quando $\alpha = 180^\circ$, o ponto C fica alinhado com os pontos A e B. Assim, temos:

$$\overline{BC} = \overline{AB} + \overline{AC} = 2 + 1 = 3 \text{ e, portanto, } A_{BCDE} = \overline{BC}^2 = 3^2 = 9 \text{ unidades quadradas.}$$

Figura 99 - Solução particular para $\alpha = 180^\circ$.

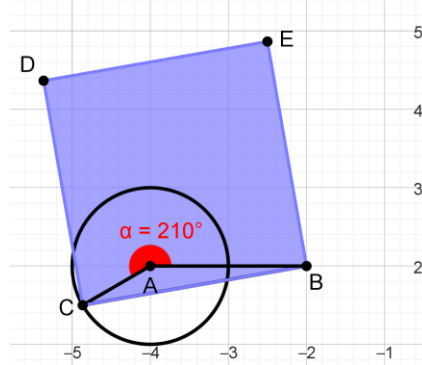


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

6. Quando $\alpha = 210^\circ$, então o ângulo interno $B\hat{A}C = 360^\circ - 210^\circ = 150^\circ$. Assim, podemos calcular a área do quadrado BCDE:

$$\begin{aligned} A_{BCDE} &= \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos(360^\circ - \alpha) \\ &= 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 150^\circ = 5 - 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5 + 2\sqrt{3} \end{aligned} \quad \text{unidades quadradas.}$$

Figura 100 - Solução particular para $\alpha = 210^\circ$.

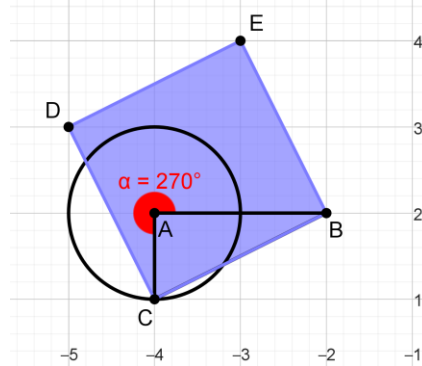


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

7. Quando $\alpha = 270^\circ$, então o ângulo interno do triângulo ABC, $\hat{BAC} = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$. Assim, podemos calcular a área do quadrado BCDE:

$$\begin{aligned} A_{BCDE} &= \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos(360^\circ - \alpha) \\ &= 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 5 - 4 \cdot 0 = 5 \text{ unidades quadradas.} \end{aligned}$$

Figura 101 - Solução particular para $\alpha = 270^\circ$.

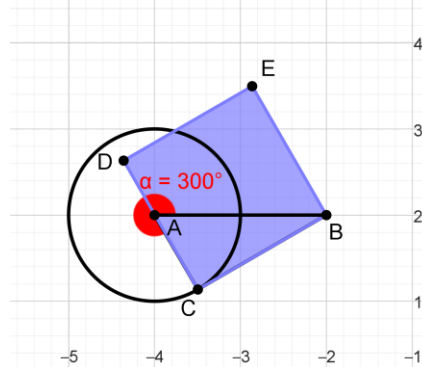


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

8. Quando $\alpha = 300^\circ$, então o ângulo interno $\hat{BAC} = 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$. Assim, podemos calcular a área do quadrado BCDE:

$$\begin{aligned} A_{BCDE} &= \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos(360^\circ - \alpha) \\ &= 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 5 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 5 - 2 = 3 \text{ unidades quadradas.} \end{aligned}$$

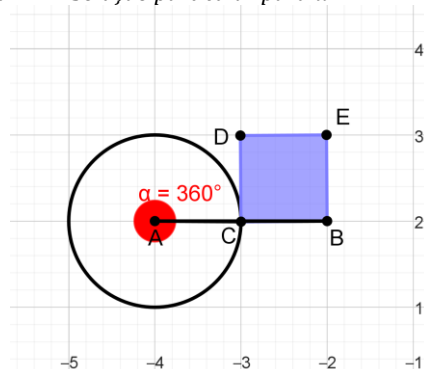
Figura 102 - Solução particular para $\alpha = 300^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

9. Quando $\alpha = 360^\circ$, temos que o ponto C está novamente localizado sobre o ponto médio de AB. Assim, $\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2}{2} = 1$ e, portanto, $A_{BCDE} = \overline{BC}^2 = 1^2 = 1$ unidade quadrada.

Figura 103 - Solução particular para $\alpha = 360^\circ$.

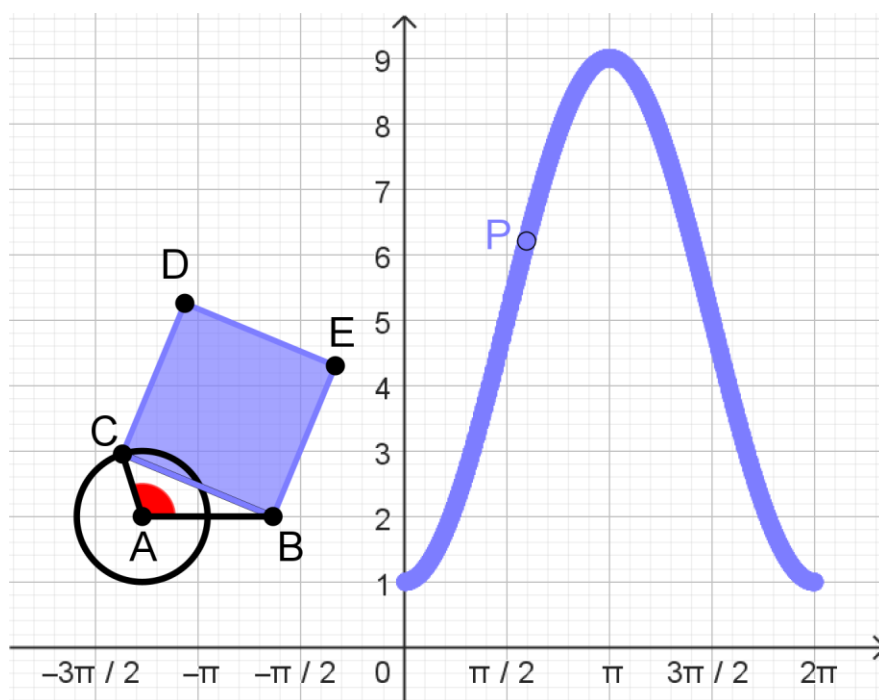


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Construção: 2ª Etapa

Com o objetivo de gerar um gráfico cartesiano diretamente a partir da figura construída na 1ª etapa, vamos criar um ponto P cuja abscissa é $\alpha = \widehat{BAC}$ e cuja ordenada é a área do quadrado BCDE. Habilitamos o rastro do ponto P e movimentamos o ponto C sobre o círculo. Observamos que P descreve uma curva, que é o gráfico procurado.

Figura 104 - Construção do gráfico dinâmico do problema nº 04.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

As questões propostas são:

10. Deduza uma fórmula que expresse a área do quadrado BCDE em função de α .

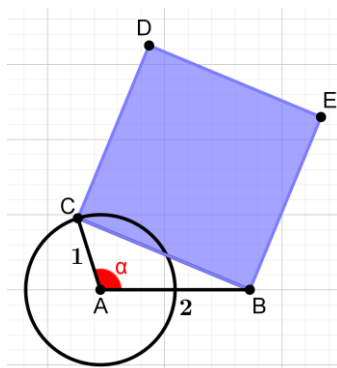
11. Para quais valores de α temos que BCDE possui área máxima? Qual o valor desta área máxima?
12. Para quais valores de α temos a área mínima de ADHG? Qual o valor desta área mínima?
13. Escreva o domínio e a imagem da função $f(\alpha) = A_{BCDE}$.

As respostas esperadas são:

10. Há duas situações a serem analisadas: quando $0 \leq \alpha < \pi$ e quando $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$.
Se $0 \leq \alpha < \pi$ então podemos aplicar a Lei dos Cossenos no triângulo ABC, assim:

$$\begin{aligned} A_{BCDE} &= \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \alpha \\ &= 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos \alpha = 5 - 4 \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Figura 105 - Análise da área de BCDE quando α está no 1º ou 2º quadrante.

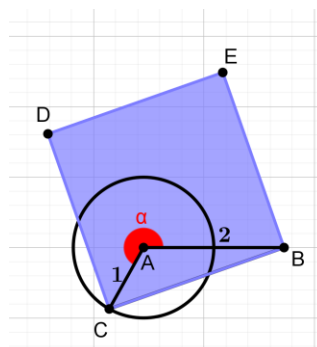


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Se $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ então podemos aplicar a Lei dos Cossenos no triângulo ABC, assim:

$$\begin{aligned} A_{BCDE} &= \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \cos(2\pi - \alpha) \\ &= 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos \alpha = 5 - 4 \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Figura 106 - Análise da área de BCDE quando α está no 3º ou 4º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Como nas duas situações encontramos a mesma expressão, então, podemos afirmar que a função procurada é $f(\alpha) = 5 - 4 \cdot \cos \alpha$, para $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

11. A área máxima ocorre quando $\alpha = \pi$ e $A_{Max} = 5 - 4 \cdot \cos \pi = 5 - 4 \cdot (-1) = 5 + 4 = 9$ unidades quadradas.

12. A área mínima ocorre quando $\alpha = 0$ ou $\alpha = 2\pi$ e $A_{Min} = 5 - 4 \cdot \cos 0 = 5 - 4 \cdot 1 = 5 - 4 = 1$ unidade quadrada.

13. Como α é um arco da 1ª volta, temos que $D(f) = [0, 2\pi]$. O conjunto imagem pode ser obtido por meio do cálculo:

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos \alpha \leq 1 &\Rightarrow -1 \leq -\cos \alpha \leq 1 \Rightarrow 4 \cdot (-1) \leq 4 \cdot (-\cos \alpha) \leq 4 \cdot 1 \\ \Rightarrow -4 \leq -4 \cdot \cos \alpha \leq 4 &\Rightarrow -4 + 5 \leq 5 - 4 \cdot \cos \alpha \leq 4 + 5 \Rightarrow 1 \leq f(\alpha) \leq 9. \end{aligned}$$

Logo, $Im(f) = [1, 9]$.

3.2.5 Problema nº 05

Objetivos de aprendizagem:

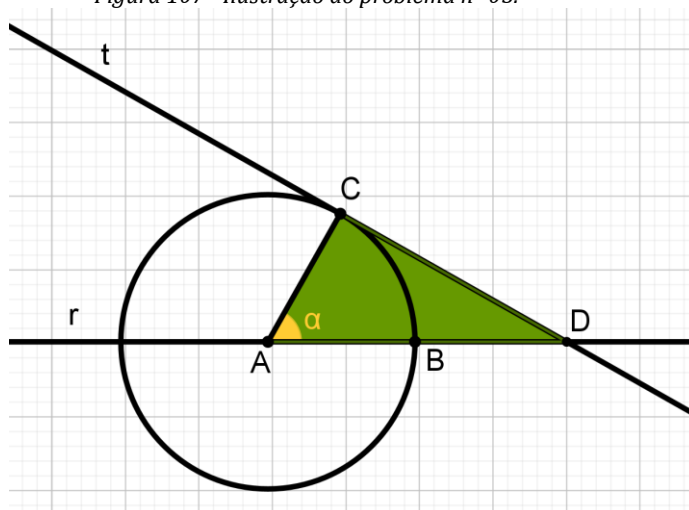
- Reconhecer propriedades de triângulos, círculos e retas tangentes a partir de suas definições e características.
- Utilizar software de geometria dinâmica para construir e analisar figuras geométricas planas.
- Resolver situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos sobre áreas de triângulos retângulos.
- Resolver problemas que envolvam relações trigonométricas em triângulos retângulos.
- Identificar arcos simétricos em diferentes quadrantes do ciclo trigonométrico.
- Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas.
- Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
- Identificar e representar graficamente a função tangente no plano cartesiano.
- Explorar o comportamento da função tangente (domínio, conjunto imagem, crescimento, descontinuidades, máximos e mínimos).

Duração: 3 horas/aula.

Problema nº 05: *Construir um círculo de centro A e raio medindo 2 unidades, e uma reta r, que passa por A e intersecciona o círculo em B. Seja C um ponto qualquer sobre este círculo, por este ponto traçamos uma reta t, tangente ao círculo. Seja D o ponto*

de intersecção das retas r e t e seja o ângulo $D\hat{A}C = \alpha$ com medida variando no sentido anti-horário, sendo α um arco da 1ª volta. Determinar a área do triângulo ACD em função de α .

Figura 107 - Ilustração do problema nº 05.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 1ª etapa.

Vamos iniciar traçando um círculo de centro A e raio $\overline{AB} = 2$ unidades. Seja r a reta que passa pelos pontos A e B . Marcamos um ponto C arbitrário sobre o círculo. Vamos chamar de α o ângulo $D\hat{A}C$, medido no sentido anti-horário. Pelo ponto C traçamos uma reta t , que é perpendicular ao raio AC . Como o raio é perpendicular à reta tangente no ponto de tangência, então t é a tangente procurada. Seja D o ponto de intersecção das retas r e t . Queremos investigar a área do triângulo ACD em função de α .

São apresentadas as seguintes questões:

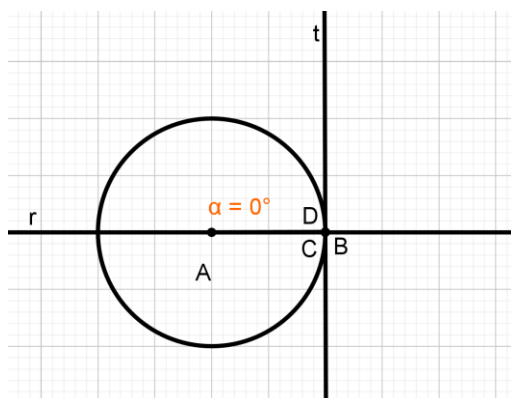
Calcule a área do triângulo ACD quando:

1. $\alpha = 0^\circ$
2. $\alpha = 45^\circ$
3. $\alpha = 60^\circ$
4. $\alpha = 90^\circ$
5. $\alpha = 150^\circ$
6. $\alpha = 180^\circ$
7. $\alpha = 240^\circ$
8. $\alpha = 270^\circ$
9. $\alpha = 330^\circ$
10. $\alpha = 360^\circ$

As respostas esperadas são:

1. Quando $\alpha = 0^\circ$, os pontos B, C e D coincidem, as retas r e t são perpendiculares, de forma que o triângulo ACD se degenera em um segmento, tendo área zero.

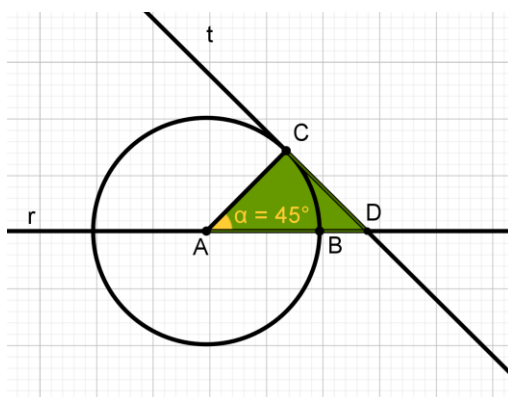
Figura 108 - Solução particular quando $\alpha = 0^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

2. Quando $\alpha = 45^\circ$, devemos considerar o triângulo retângulo ACD, reto em C. Como $\tan \alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \tan 45^\circ = 1 = \frac{\overline{CD}}{2} \Rightarrow \overline{CD} = 2$. Logo $A_{ACD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$ unidades quadradas.

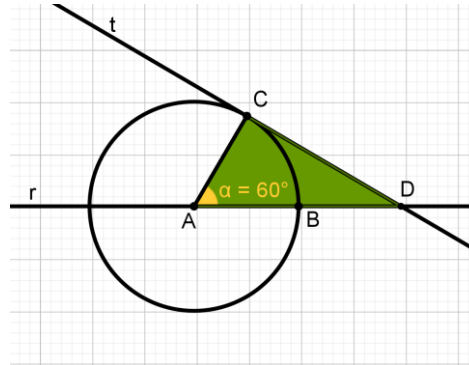
Figura 109 - Solução particular quando $\alpha = 45^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

3. Quando $\alpha = 60^\circ$, devemos considerar o triângulo retângulo ACD, reto em C. Como $\tan \hat{DAC} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \tan 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{\overline{CD}}{2} \Rightarrow \overline{CD} = 2\sqrt{3}$. Logo $A_{ACD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ unidades quadradas.

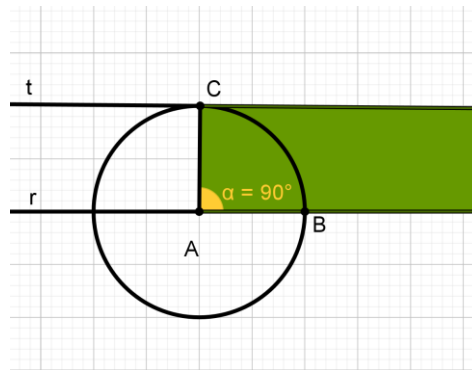
Figura 110 - Solução particular quando $\alpha = 60^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

4. Quando $\alpha = 90^\circ$, as retas r e t são paralelas, de forma que o triângulo ACD se degenera em uma faixa de área infinita.

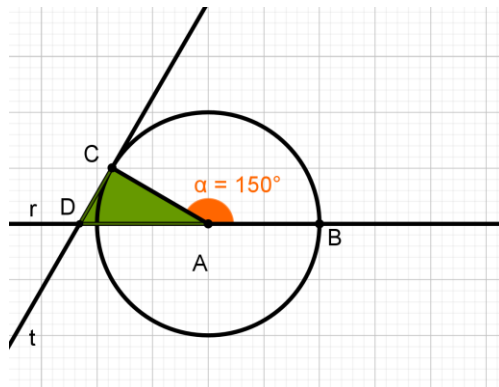
Figura 111 - Solução particular quando $\alpha = 90^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

5. Quando $\alpha = 150^\circ$, então $\widehat{DAC} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$. Considerando o triângulo retângulo ACD , reto em C , temos: $\tan \widehat{DAC} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{CD}}{2} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Logo $A_{ACD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ unidades quadradas.

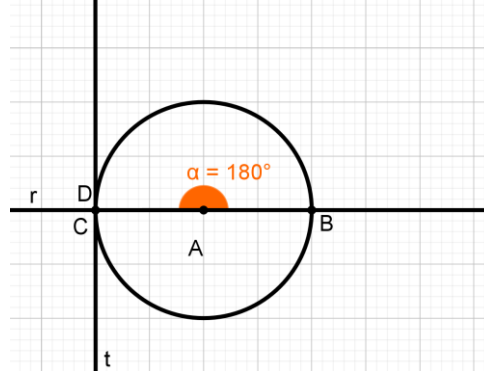
Figura 112 - Solução particular quando $\alpha = 150^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

6. Quando $\alpha = 180^\circ$, os pontos C e D coincidem, as retas r e t são perpendiculares, de forma que o triângulo ACD se degenera em um segmento, tendo área zero.

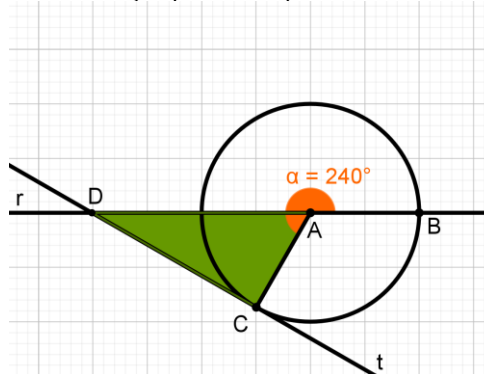
Figura 113 - Solução particular quando $\alpha = 180^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

7. Quando $\alpha = 240^\circ$, então $D\hat{A}C = 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$. Considerando o triângulo retângulo ACD, reto em C, temos: $\tan D\hat{A}C = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \tan 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{\overline{CD}}{2} \Rightarrow \overline{CD} = 2\sqrt{3}$. Logo $A_{ACD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ unidades quadradas.

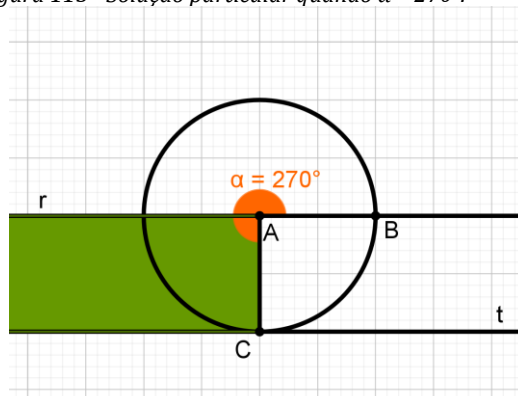
Figura 114 - Solução particular quando $\alpha = 240^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

8. Quando $\alpha = 270^\circ$, as retas r e t são paralelas, de forma que o triângulo ACD se degenera em uma faixa de área infinita.

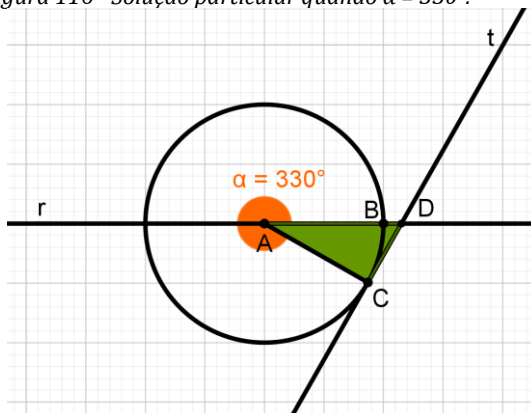
Figura 115 - Solução particular quando $\alpha = 270^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

9. Quando $\alpha = 330^\circ$, então $D\hat{A}C = 360^\circ - 330^\circ = 30^\circ$. Considerando o triângulo retângulo ACD, reto em C, temos: $\tan D\hat{A}C = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\overline{CD}}{2} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Logo $A_{ACD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ unidades quadradas.

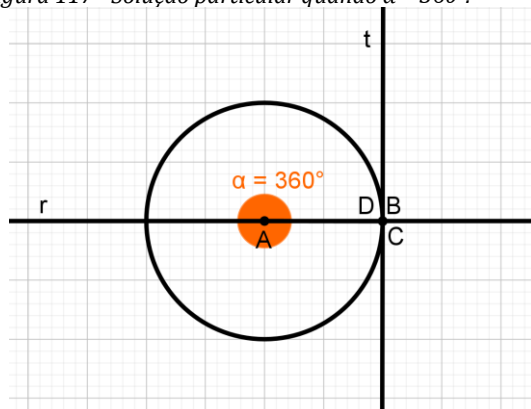
Figura 116 - Solução particular quando $\alpha = 330^\circ$.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

10. Quando $\alpha = 360^\circ$, os pontos B, C e D novamente coincidem, as retas r e t são perpendiculares, de forma que o triângulo ACD se degenera em um segmento, tendo área zero.

Figura 117 - Solução particular quando $\alpha = 360^\circ$.

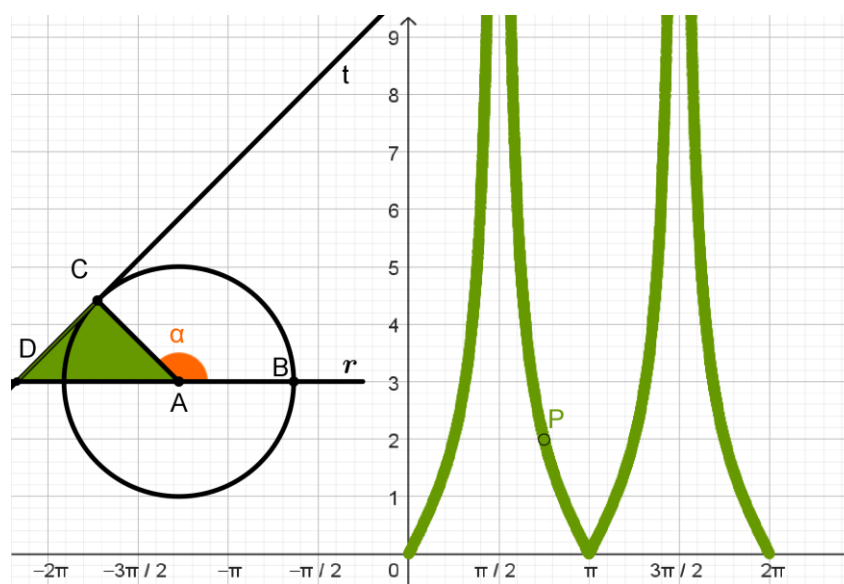


Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Construção: 2ª etapa.

Será gerado um gráfico cartesiano da função que relaciona o ângulo α com a área do triângulo retângulo ACD. Para que este gráfico fique vinculado à construção da 1ª etapa, criamos o ponto P, cuja abscissa é α e cuja ordenada é a área do triângulo ACD. Habilitamos o rastro do ponto P e movimentamos o ponto C sobre o círculo, observando que o ponto P descreve uma curva, que é o gráfico cartesiano procurado.

Figura 118 - Construção do gráfico cartesiano do problema nº 05.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

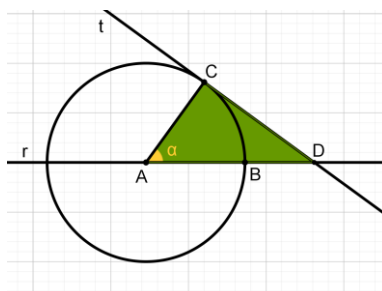
São propostas as seguintes questões:

11. Deduza uma fórmula que expresse a área do triângulo ACD em função de α .
12. Para quais valores de α temos que ACD possui área máxima? Qual o valor desta área máxima?
13. Para quais valores de α temos que ACD possui área mínima? Qual o valor desta área mínima?
14. Escreva o domínio e a imagem da função $f(\alpha) = A_{ACD}$.

As respostas esperadas, são:

11. Sabemos que ACD é um triângulo retângulo, que $\overline{AC} = \overline{AB} = 2$, portanto para determinarmos a área de ACD, resta-nos determinar a medida do cateto $\overline{CD}$. Quando $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, considerando o triângulo retângulo ACD, temos que CD é cateto oposto a α e AC é cateto adjacente a α . Portanto $\overline{CD} = \overline{AC} \cdot \tan \alpha = 2 \cdot \tan \alpha$.

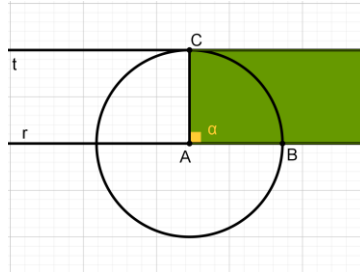
Figura 119 - Análise da medida de CD quando α está no 1º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Quando $\alpha = \frac{\pi}{2}$, as retas r e t tornam-se paralelas, de forma que o ponto D de intersecção deixa de existir e o triângulo ACD torna-se uma figura degenerada, cuja área é um valor infinito.

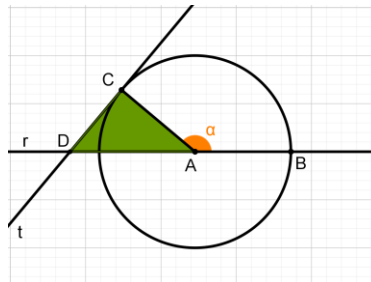
Figura 120 - Quando $\alpha = 90^\circ$, o triângulo ACD se degenera em uma faixa infinita.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Quando $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$, temos que CD é cateto oposto a $\hat{D}AC = \pi - \alpha$ e AC é cateto adjacente a $\pi - \alpha$. Portanto $\overline{CD} = \overline{AC} \cdot \tan(\pi - \alpha) = 2 \cdot (-\tan \alpha) = -2 \cdot \tan \alpha$. Devemos lembrar que se α é um ângulo do 2º quadrante, então $\tan \alpha \leq 0$. Logo $\overline{CD} = -2 \tan \alpha \geq 0$.

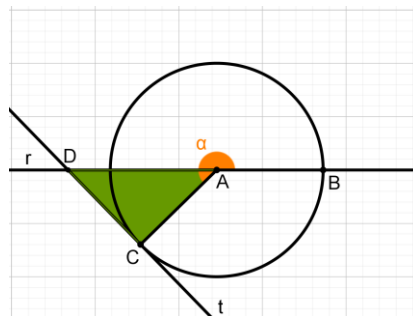
Figura 121 - Análise da medida de CD quando α está no 2º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Quando $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, temos que CD é cateto oposto a $\hat{D}AC = \alpha - \pi$ e AC é cateto adjacente a $\alpha - \pi$. Portanto $\overline{CD} = \overline{AC} \cdot \tan(\alpha - \pi) = 2 \cdot \tan \alpha$.

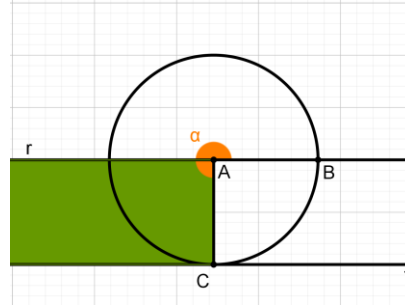
Figura 122 - Análise da medida de CD quando α está no 3º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Quando $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, as retas r e t tornam-se novamente paralelas, de forma que o ponto D de intersecção deixa de existir e o triângulo ACD torna-se uma figura degenerada, cuja área é um valor infinito.

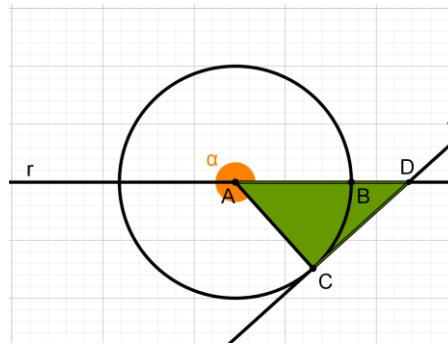
Figura 123 - Quando $\alpha = 270^\circ$, o triângulo ACD se degenera em uma faixa infinita.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Quando $\frac{3\pi}{2} < \alpha \leq 2\pi$, temos que CD é cateto oposto a $\widehat{DAC} = 2\pi - \alpha$ e AC é cateto adjacente a $2\pi - \alpha$. Portanto $\overline{CD} = \overline{AC} \cdot \tan(2\pi - \alpha) = 2 \cdot (-\tan \alpha) = -2 \cdot \tan \alpha$. Devemos lembrar que se α é um ângulo do 4º quadrante, então $\tan \alpha \leq 0$. Logo $\overline{CD} = -2 \cdot \tan \alpha \geq 0$.

Figura 124 - Análise da medida de CD quando α está no 4º quadrante.



Fonte: Elaborado pelo autor (2024).

Desta forma, podemos afirmar que $\overline{CD} = |2 \cdot \tan \alpha|$ e, portanto, o cálculo da área de ACD é dado por: $A_{ACD} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CD}}{2} = \frac{2 \cdot |2 \cdot \tan \alpha|}{2} = 2 \cdot |\tan \alpha|$.

12. Observando o gráfico cartesiano gerado, notamos que a função encontrada é ilimitada superiormente, pois não existem os limites $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} A_{ACD} = +\infty$ e

$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{3\pi}{2}} A_{ACD} = +\infty$. Ou seja, $f(\alpha) = A_{ACD}$ não possui valor máximo.

13. O valor mínimo para a área de ACD é zero, e este valor ocorre para $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$ ou $\alpha = 2\pi$.

14. O gráfico apresenta assíntotas verticais quando $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ou quando $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, logo estes valores não fazem parte do domínio da função. Assim, temos o domínio $D(f) = \left[0, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]$. O conjunto imagem é formado por todos os valores reais não negativos, isto é, $Im(f) = [0, +\infty[$.

Referências

- ARCAVI, Abraham.** Modelling with graphical representations. *For the Learning of Mathematics*, v. 28, n. 2, 2008. Disponível em: <https://flm-journal.org/Articles/31EB1897C65B5744BB83799F2FFE09.pdf>. Acesso em: mar. 2024.
- BRASIL.** Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio* – PCNEM. Brasília: MEC, 2002a.
- BRASIL.** Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros curriculares nacionais* – PCN+. Brasília: MEC, 2002b.
- BRASIL.** Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEB, 2006. 135 p.
- COSTA, Viviana Angélica; RÍO, Laura Sombra del.** Aportes de la Geometría Dinámica al estudio de la noción de función a partir de un problema geométrico: un análisis praxeológico. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*, 2019. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/wcyvMKMXXckVq5wGsz6VmwC/?lang=es>. Acesso em: mar. 2024.
- FERRAGINA, Rosa Ana; LUPINACCI, Leonardo José.** La noción de función mediada por entornos dinámicos. El caso del punto dinámico. *XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática – CIAEM*, 2015. Disponível em: https://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/555/254. Acesso em: mar. 2024.
- GIRALDO, Victor.** Integrando Geometria e Funções: gráficos dinâmicos. *Revista do Professor de Matemática (RPM)*, São Paulo, v. 30, n. 79, p. 39-46, 2012.
- GIRALDO, Victor; CAETANO, Paulo; MATTOS, Francisco.** *Recursos computacionais no ensino de Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- GRAVINA, Maria Alice; STORMOWSKI, Vandoir; LIMA, José Valdeni.** Formação de professores de matemática para o uso efetivo de tecnologias em sala de aula. *Renote*, 2015. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/61455>. Acesso em: mai. 2024.
- GRAVINA, Maria Alice.** Geometria Dinâmica: Uma Nova Abordagem para O Aprendizado da Geometria. *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, p. 1-13, Belo Horizonte, 1996. Disponível em: https://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/pdf/maria-alice_geometria-dinamica1996-vii_sbie.pdf. Acesso em: mar. 2024.
- GRAVINA, Maria Alice; CONTIERO, Lucas O.** Modelagem com o GeoGebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar? *Revista Novas Tecnologias na Educação*, v. 9, n. 1, 2011. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/21917>. Acesso em: mar. 2024.

MACHADO, Aline de Lima Guedes; MACHADO, Leandro da Silva. Geometria e funções: uma abordagem computacional a partir de problemas da OBMEP. *REMAT: Revista Eletrônica de Matemática*, 2018. Disponível em: <https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/3216>. Acesso em: mar. 2024.

SALIM, Eliana Bevilacqua. Matemática Dinâmica: uma abordagem para o ensino de Funções Afim e Quadrática a partir de situações geométricas. 2014. 206 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

STORMOWSKI, Vandoir. Modelagem geométrica e gráficos de funções “sem lei”: criando sequências didáticas em um GeoGebrabook. *XII Encontro Gaúcho de Educação Matemática – EGEM*, Porto Alegre, 2015. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/283307930_Modelagem_geometrica_e_graficos_de_funcoes_sem_lei_criando_sequencias_didaticas_em_um_GeoGebraBook. Acesso em: mar. 2024.