



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

TEORIA DOS TETRAEDROS

Produto educacional

KEFFERSON DE SOUSA CARTAXO

FORTALEZA, CE
2025

KEFFERSON DE SOUSA CARTAXO

TEORIA DOS TETRAEDROS

Produto educacional

Produto apresentado ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologias da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro

FORTALEZA, CE
2025

Sumário

Introdução	4
1 Tetraedros	5
1.1 Cevianas notáveis de um tetraedro	6
1.2 Tetraedros especiais	9
1.3 Empacotamento	16
2 Exercícios	19
3 Soluções	23
4 Considerações Finais	28
5 Referências Bibliográficas	29

Introdução

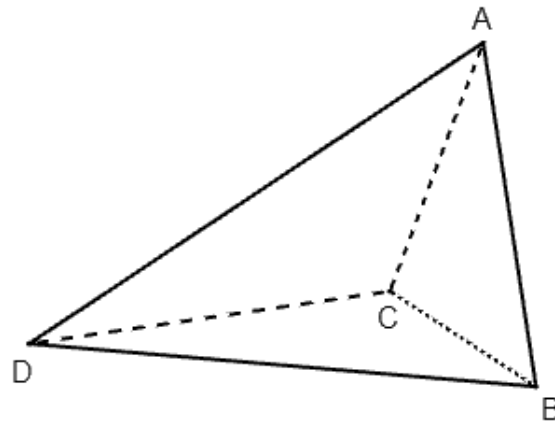
O presente trabalho é o produto educacional gerado a partir da dissertação para conclusão de mestrado intitulada *Teoria dos tetraedros*, do mesmo autor. Este material didático tem como objetivo mostrar de forma simples e elementar as principais propriedades dos tetraedros com o intuito de ser usado nas aulas de geometria espacial do ensino médio. As provas dos resultados foram omitidas para priorizar o entendimento do conteúdo. Mas para um melhor aprofundamento do assunto, pode-se ler o trabalho de origem onde tem todas as provas dos resultados aqui apresentados.

Como veremos no decorrer deste material, questões sobre tetraedros são comuns em provas de concurso e vestibulares. Mostrando, assim, a importância de se conhecer os principais resultados sobre eles. O trabalho foi dividido em três capítulos. O primeiro capítulo mostra os principais conceitos sobre tetraedros, suas propriedades e alguns tetraedros especiais. O segundo capítulo trabalha algumas questões de vestibulares e concursos, onde é visto como o conteúdo do primeiro capítulo é cobrado em provas. Este é dividido em duas sessões: exercícios resolvidos, onde mostramos como se resolve algumas questões para o leitor se habituar e usar como base para a próxima sessão; e exercícios propostos, para o leitor praticar os conceitos apresentados. O terceiro e último capítulo expõe as soluções dos exercícios propostos do segundo capítulo. É importante frisar que deve-se tentar fazer os exercícios antes de ver as soluções para garantir que o conteúdo foi fixado e aprendido.

Todos os capítulos deste trabalho podem ser compilados em um único tópico dividido por sessões para ser usado como capítulo de livro ou de apostila. Este conteúdo deve ser apresentado sequencialmente depois de conceitos iniciais de geometria espacial como triedros, prismas e pirâmides.

Tetraedros

Tetraedro é o poliedro formado por quatro faces triangulares.
Ou seja, é uma pirâmide de base triangular.



Temos que em um tetraedro ABCD:

- Os pontos A, B, C e D são chamados de **vértices**;
- Os segmentos AB, AC, BC, AD, BD e CD são chamados de **arestas**;
- Os triângulos ABC, ACD, ABD e BCD são chamados de **faces**.

Observação: Se duas arestas não têm vértices comuns, dizemos que são **arestas opostas**.

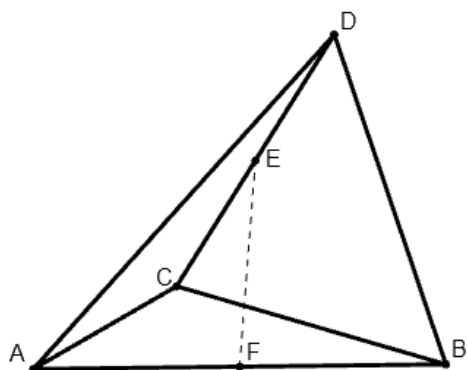
Por exemplo, na figura acima, temos

AB é oposto a CD

AC é oposto a BD

AD é oposto a BC

1.1 Cevianas notáveis de um tetraedro



Bimediana

Chamamos de **bimediana** o segmento que une os pontos médios de duas arestas opostas de um tetraedro.

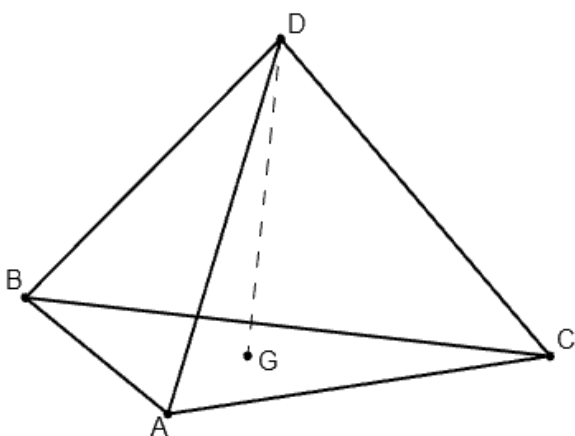
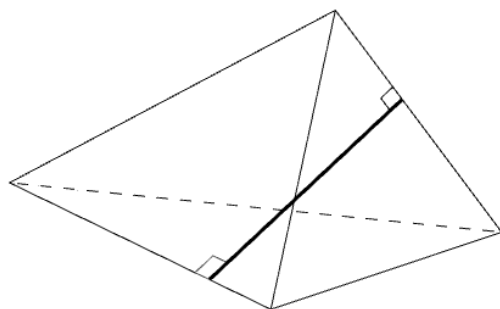
Na figura, temos que E é ponto médio de CD e F é ponto médio de AB , assim, EF é uma bimediana do tetraedro.

Note que em um tetraedro existem três bimedianas.

Bialtura

Chamamos de **bialtura** a perpendicular comum a duas arestas opostas de um tetraedro.

Note que em um tetraedro existem três bialturas.



Bariana

Uma **bariana** (ou **mediana**) de um tetraedro é o segmento que une um vértice do tetraedro ao baricentro¹ da face oposta a esse vértice.

Na figura, temos que G é o baricentro de ABC , assim, DG é uma bariana do tetraedro.

barianas.

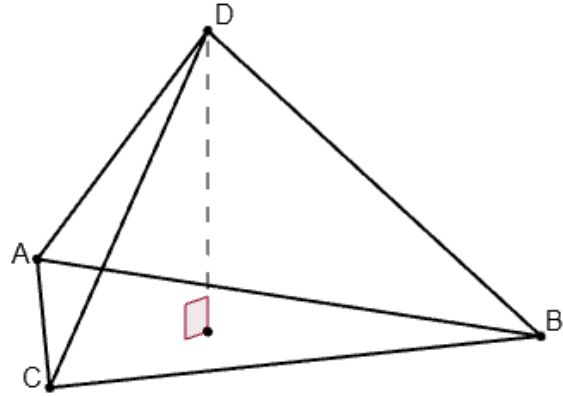
Note que em um tetraedro existem quatro

¹Lembre-se: baricentro de um triângulo é o ponto de encontro das medianas do triângulo.

Altura

Uma **Altura** de um tetraedro é um segmento unindo um vértice a um ponto da face oposta a esse vértice, sendo o segmento perpendicular à face.

Note que em um tetraedro existem quatro alturas.



Em qualquer tetraedro $ABCD$ vale que:

1. As três bimediana e as quatro barianas se interceptam em um único ponto chamado **centróide** do tetraedro.
2. O centróide divide as bimediana ao meio.
3. O centróide divide as barianas na razão 3 : 1, a partir de cada vértice.
4. Uma bialtura é perpendicular às duas bimediana que não compartilham as mesmas arestas dessa bialtura.
5. No geral, as alturas de um tetraedro não se interceptam. As alturas que incidem de B e C se interceptam, se e somente se, as arestas BC e AD são ortogonais.
6. Se duas alturas de um tetraedro se interceptam, então o ponto de interseção dessas alturas pertence a uma bialtura.
7. A distância do centróide a uma face é um quarto da altura relativa a essa face.
8. A interseção do tetraedro com um plano paralelo a um par de arestas opostas é um paralelogramo.

9. O volume de um tetraedro é igual a um terço do produto da área da base pela altura relativa a esta base, ou seja, o volume V de $ABCD$ é

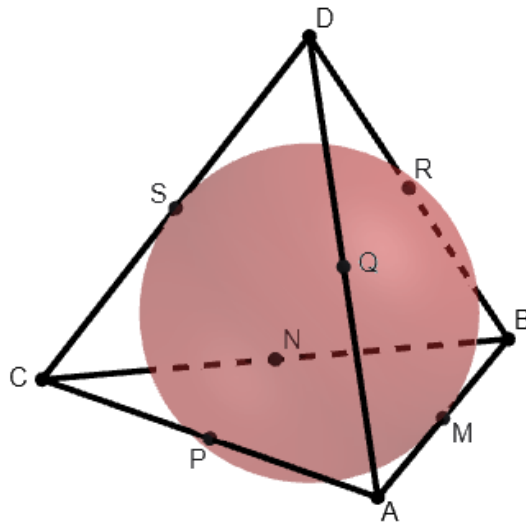
$$V = \frac{1}{3}[BCD] \cdot h$$

onde $[BCD]$ é a área da base BCD e h é a altura do tetraedro relativa a essa base.

1.2 Tetraedros especiais

Tetraedro de Crelle

Um tetraedro cujas seis arestas são tangentes à uma esfera será chamado de **tetraedro de Crelle** (ou **tetraedro circunscritível**).



Dizemos que a esfera é inscrita ao tetraedro com respeito às arestas.

1. Um tetraedro ABCD é de Crelle se, e somente se,

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{AD} + \overline{BC}$$

2. Sejam V o volume do tetraedro de Crelle ABCD e ρ o raio da esfera Γ inscrita com respeito as arestas de ABCD. Se M, N, S e R são respectivamente às interseções da esfera com as arestas AB, BC, CD e DB tais que $\overline{AM} = p$, $\overline{BN} = q$, $\overline{CS} = r$ e $\overline{DR} = s$, então

$$V = \frac{2pqrs}{3\rho}$$

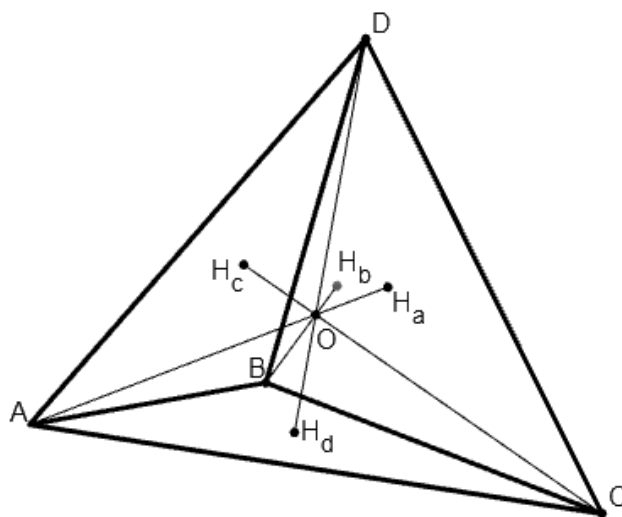
Tetraedro ortocêntrico

Um tetraedro é dito **ortocêntrico** se suas arestas opostas são ortogonais.

Em um tetraedro ortocêntrico, temos que:

1. Suas bimedias são iguais. Reciprocamente, se as bimedias são iguais, o tetraedro é ortocêntrico;
2. As quatro alturas concorrem em um único ponto chamado **ortocentro** do tetraedro;
3. Os pés das alturas de um tetraedro ortocêntrico são os ortocentros das faces;
4. O ortocentro de um tetraedro ortocêntrico é o simétrico do seu circuncentro (centro da esfera circunscrita ao tetraedro) com respeito ao centróide.

Por exemplo, na figura abaixo temos que:

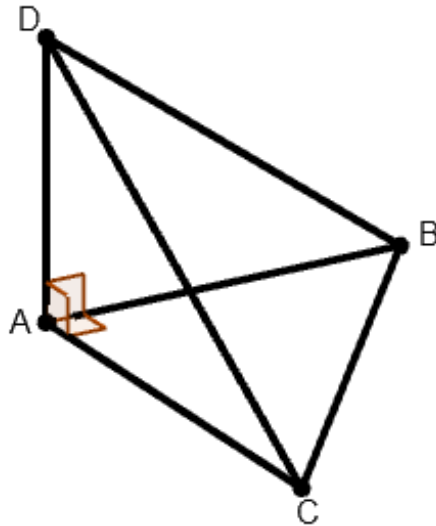


- H_a , H_b , H_c , e H_d são os ortocentros² das faces do tetraedro $ABCD$.
- O é o ortocentro do tetraedro.

²Lembre-se: O ortocentro de um triângulo é o ponto de encontro das três alturas do triângulo.

Tetraedro trirretângulo

O tetraedro que tem um ângulo triédrico reto é chamado de **tetraedro trirretângulo**.

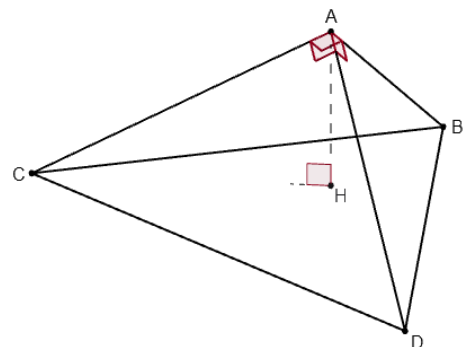


Observação:

- i) O tetraedro trirretângulo é o equivalente ao triângulo retângulo na teoria dos tetraedros.
- ii) Este ângulo triédrico será chamado de **ângulo reto do tetraedro**.
- iii) A face oposta ao vértice do ângulo reto será referida como a **base** do tetraedro.
- iv) As arestas que incidem do ângulo reto serão chamadas de **catetos** ou **pernas** do tetraedro.
- v) O segmento que incide do vértice do ângulo reto e é perpendicular a base é chamado de **altura** do tetraedro trirretângulo.

Por exemplo, na figura abaixo temos que:

- $\widehat{A}$ é o ângulo reto de $ABCD$;
- BCD é a base;
- AB , AC e AD são as pernas do tetraedro;
- AH é a altura do tetraedro.



Em um tetraedro trirretângulo $ABCD$, reto em A , temos que:

1. $ABCD$ é ortocêntrico;
2. O quadrado da área da base é igual a soma dos quadrados das áreas das outras três faces. Ou seja, se
 $[BCD]$ é a área da base BCD ;
 $[ABC]$ é a área da face ABC ;
 $[ABD]$ é a área da face ABD ;
 $[ACD]$ é a área da face ACD ;
então

$$[BCD]^2 = [ABC]^2 + [ABD]^2 + [ACD]^2.$$

3. Seu volume V é dado por

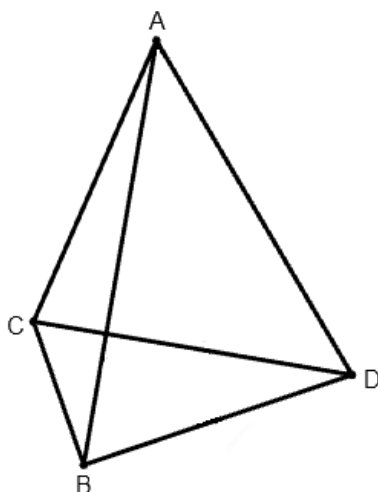
$$V = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}}{6}$$

Observação: A relação de 2. é conhecida como Teorema de De Gua. Esse resultado é uma generalização do Teorema de Pitágoras para tetraedros.

Tetraedro isofacial

Um tetraedro é dito **isofacial** se uma de suas faces é um triângulo equilátero e as faces restantes são triângulos isósceles congruentes. A face equilátera será chamada de **base** do tetraedro isofacial.

Observação: O tetraedro isofacial é o equivalente ao triângulo isósceles na teoria dos tetraedros.



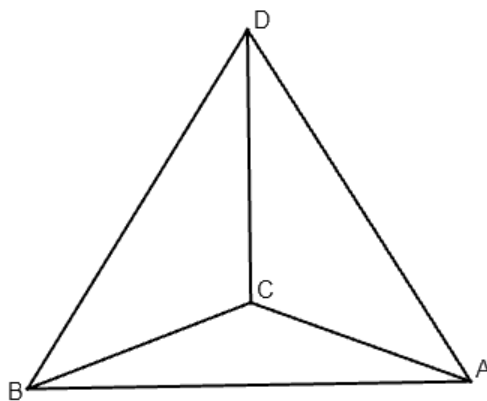
Em um tetraedro isofacial ABCD de base BCD vale:

1. Os ângulos triédricos da base são congruentes;
2. Todo tetraedro isofacial é um tetraedro de Crelle e ortocêntrico;
3. A altura e a bariana relativas a base são coincidentes;
4. Se $\overline{BC} = a$ e $\overline{AB} = b$, seu volume é dado por

$$\text{vol}(ABCD) = \frac{1}{12}a^2\sqrt{3b^2 - a^2}.$$

Tetraedro isósceles

Um tetraedro é dito **isósceles** (ou **equifacial**) se suas arestas opostas são congruentes.



Em um tetraedro $ABCD$, são equivalentes:

1. O tetraedro é isósceles;
2. Suas barianas são iguais;
3. Suas alturas são iguais;
4. Suas bimedias coincidem com as bialturas relativas ao mesmo par de arestas opostas.
5. Suas faces são congruentes;
6. Suas faces são equivalentes (ou seja, possuem áreas iguais).
7. Os quatro ângulos triédricos são congruentes.

Além disso, temos que:

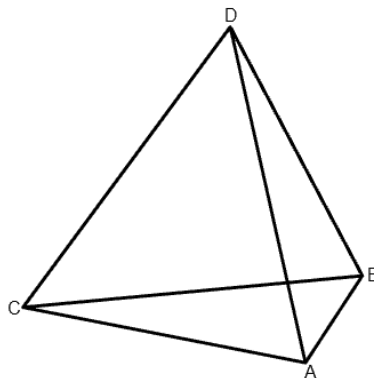
8. O centróide de um tetraedro isósceles é o centro da esfera inscrita e o centro da esfera circuncrita ao tetraedro.

9. O volume de um tetraedro isósceles $ABCD$ tal que $\overline{BC} = \overline{AD} = a$, $\overline{AC} = \overline{BD} = b$ e $\overline{AB} = \overline{CD} = c$ é dado por

$$\text{vol}(ABCD) = \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}.$$

Tetraedro regular

Um tetraedro é dito **regular** se suas faces são triângulos equiláteros.



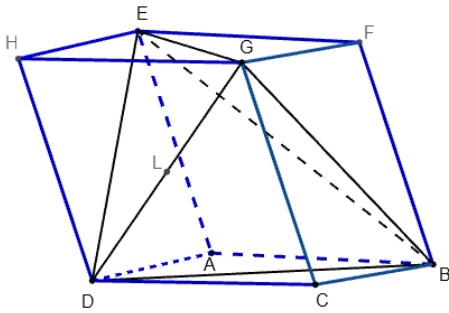
Em um tetraedro regular de aresta a , temos que:

1. Ele é isofacial, isósceles, ortocêntrico e de Crelle;
2. As bialturas coincidem com as bimedias relativas ao mesmo par de arestas opostas e medem $\frac{a\sqrt{2}}{2}$;
3. As alturas coincidem com as barias relativas a mesma face e medem $\frac{a\sqrt{6}}{3}$;
4. O volume V de um tetraedro regular de aresta a é dado por

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

1.3 Empacotamento

Dado um tetraedro $EBGD$, é possível construir de modo único um paralelepípedo $ABCD-EFGH$ em que as diagonais EB , EG , ED , BG , GD e DB são as arestas de $EBGD$. Neste caso, dizemos que o tetraedro está inscrito no paralelepípedo e dizemos que este é o **paralelepípedo circunscrito** ou o **empacotamento** do tetraedro.



Note que:

Uma bimediana de um tetraedro é congruente a uma aresta do seu empacotamento.

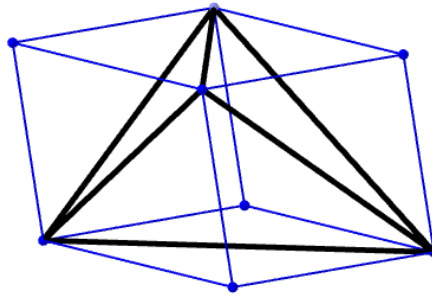
Já uma bialtura de um tetraedro é a distância de duas faces paralelas do seu empacotamento.

Para todo tetraedro vale que:

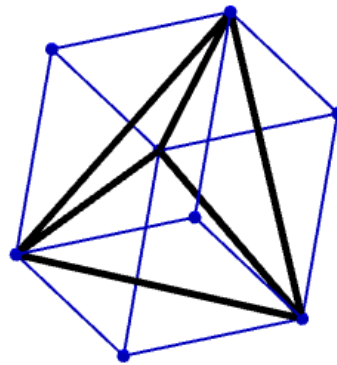
1. Cada bariana está contida em uma das diagonais do seu empacotamento;
2. As barianas são iguais a dois terços das suas respectivas diagonais;
3. O centróide coincide com o ponto de interseção das diagonais do seu empacotamento;
4. O volume de um tetraedro é igual a um terço do volume do seu empacotamento.

Exemplos:

a) O empacotamento do tetraedro ortocêntrico é um rombóide.³ De fato, como as arestas do tetraedro ortocêntrico são ortogonais, as duas diagonais de cada face do paralelepípedo circunscrito são perpendiculares, logo as suas faces são losangos.

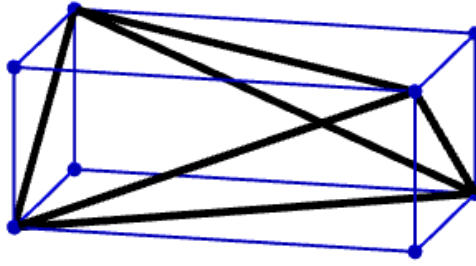


b) O empacotamento de um tetraedro isofacial é um romboedro, ou seja, um rombóide em que todas as faces são losangos congruentes. De fato, por ser ortocêntrico, o empacotamento do tetraedro isofacial A-BCD é um rombóide em que a diagonal maior e a diagonal menor das suas faces são iguais a aresta AB e BC, respectivamente. Portanto, os losangos são todos congruentes.

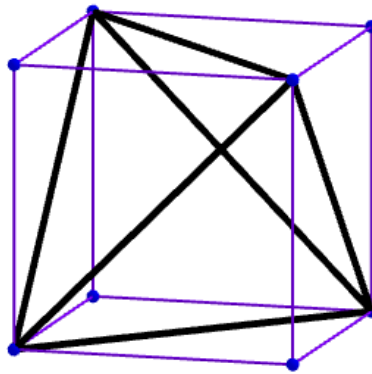


c) O empacotamento de um tetraedro isósceles é um paralelepípedo retângulo. De fato, como quaisquer duas arestas opostas são iguais, cada uma das faces do paralelepípedo circunscrito tem diagonais iguais, logo todas as faces desse paralelepípedo são retângulos.

³Um rombóide é um paralelepípedo cujas faces são losangos.



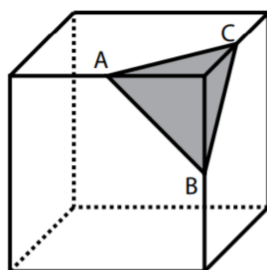
d) O empacotamento de um tetraedro regular é um cubo. De fato, sendo o tetraedro regular, ele é também isósceles e ortocêntrico. Assim, cada face do seu empacotamento deve ser um retângulo e um losango, ou seja, um quadrado. Logo, seu empacotamento é um cubo.



Exercícios Resolvidos

1. **(Mackenzie)** A figura representa um bloco com formato de um cubo de aresta a , do qual é tirada uma pirâmide. Se A , B e C são pontos médios dos lados do cubo e se o volume da peça restante é igual a $\frac{188}{3}$, o valor de $a^2 + a$ é:

- a) 16
b) 4
c) 20
d) 28
e) 8



Solução: Item c. Note que a pirâmide é um tetraedro trirretângulo. Sejam V_c o volume do cubo e V_t o volume do tetraedro. Como A , B e C são pontos médios, temos que

$$V_t = \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{6} = \frac{a^3}{48}.$$

Por outro lado, $V_c - V_t = \frac{188}{3}$. Logo,

$$V_c - V_t = \frac{188}{3} \Rightarrow a^3 - \frac{a^3}{48} = \frac{188}{3} \Rightarrow a = 4.$$

Portanto, $a^2 + a = 4^2 + 4 = 20$.

2. **(FCM Sta. Casa)** Sejam dados um tetraedro regular e um ponto interno qualquer. Sejam x , y , z e t as distâncias desse ponto às faces do tetraedro. Podemos então afirmar que:

- a) seu volume $V = \frac{1}{3}S(x + y - z + t)^2$ (com S : área de uma face).
b) sua altura $h = x + y + z + t$.
c) sua área total $A = h^2(x + y - t + z)$.
d) a área de uma face $S = \frac{1}{3}(x + y)(z - t) + x$.
e) n.d.a.

Solução: Item b. Chame de O o ponto interno ao tetraedro regular $ABCD$. Então, a soma dos volumes dos tetraedros $OBCD$, $OACD$, $OABD$ e $OABC$ é igual ao volume V de $ABCD$, ou seja,

$$V = vol(OBCD) + vol(OACD) +$$

$$\text{vol}(OABD) + \text{vol}(OABC).$$

Mas como $ABCD$ é regular, temos que $[BCD] = [ACD] = [ABD] = [ABC] = S$. Logo,

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot x + \frac{1}{3} \cdot S \cdot y + \frac{1}{3} \cdot S \cdot z + \frac{1}{3} \cdot S \cdot t$$

$$\Rightarrow \frac{3V}{S} = x + y + z + t.$$

Portanto,

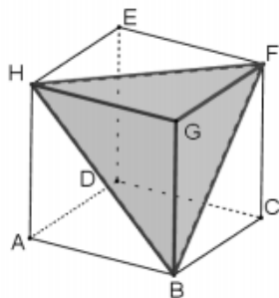
$$x + y + z + t = \frac{3V}{S} = h.$$

Esse resultado é conhecido como Teorema de Viviani para tetraedros e vale quando o tetraedro é isósceles. Ele afirma que em um ponto O interno a um tetraedro isósceles, a soma das distâncias de O as faces do tetraedro é constante e igual a altura do tetraedro.

3. (UFRGS) Considere o paralelepípedo de vértices A, B, C, D, E, F, G, H e a pirâmide de vértices B, F, G, H , inscrita no paralelepípedo, representados na figura a seguir.

A razão entre o volume da pirâmide e o volume do paralelepípedo é:

- a) $\frac{1}{6}$
- b) $\frac{1}{5}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $\frac{1}{3}$
- e) $\frac{1}{2}$



Solução: Item a. Seja h a altura do tetraedro $BFGH$ relativa a base FGH . Note

que h também é altura do paralelepípedo $(P) = ABCD - EFGH$. Daí, temos que

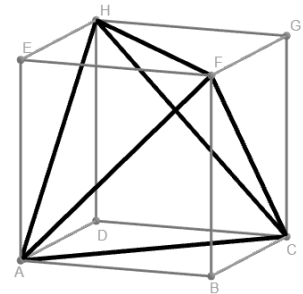
$$\frac{\text{vol}(BFGH)}{\text{vol}(P)} = \frac{\frac{[FGH] \cdot h}{3}}{[EFGH] \cdot h} = \frac{\frac{[FGH] \cdot h}{3}}{2[FGH] \cdot h} = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\frac{\text{vol}(GBFH)}{\text{vol}(P)} = \frac{1}{6}.$$

4. (Ufscar) Na figura, os pontos $ACFH$ são vértices de um tetraedro inscrito em um cubo de lado 3. O volume do tetraedro é:

- a) $\frac{27}{8}$.
- b) $\frac{9\sqrt{39}}{8}$.
- c) 9.
- d) $\frac{27\sqrt{13}}{8}$.
- e) 18.



Solução: Item c. Sejam V_c e V_t os volumes do cubo e do tetraedro, respectivamente. O cubo é o empacotamento de $ACFH$, logo,

$$V_t = \frac{V_c}{3} = \frac{3^3}{3} = 9.$$

5. (Fuvest-Adaptada) Seja $ABCD$ um tetraedro regular de lado a . Sejam E e F os pontos médios de AB e CD , respectivamente. Então, o valor de EF é:

- a) $\frac{a}{2}$
- b) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

- c) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$
 d) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
 e) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

Solução: Item b. Note que EF é uma bimediana de $ABCD$. Portanto, $\overline{EF} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Exercícios Propostos

1. **(UEPB)** A altura de um tetraedro regular que possui área total e volume numericamente iguais é:

- a) $2\sqrt{6}$
 b) 36
 c) 6
 d) $6\sqrt{2}$
 e) 12

2. **(AFA)** Uma pirâmide regular $ABCV$, de base triangular ABC , é tal que sua aresta lateral AV mede 3 cm. Sendo $\sqrt{5}$ cm a altura de tal pirâmide, a distância, em cm, de A à face BVC é igual a:

- a) $2\sqrt{2}$
 b) $\sqrt{7}$
 c) $\frac{\sqrt{26}}{2}$
 d) $\frac{\sqrt{30}}{2}$

3. **(USP)** Os vértices de um tetraedro regular são também vértices de um cubo de aresta 2. A área de uma face desse tetraedro é:

- a) $2\sqrt{3}$
 b) 4
 c) $3\sqrt{2}$
 d) $3\sqrt{3}$
 e) 6

4. **(FMJ-SP)** Os vértices de um tetraedro regular de volume 1 m^3 são centros das faces de outro tetraedro regular. O volume deste outro tetraedro vale:

- a) 1 m^3
 b) 3 m^3
 c) 9 m^3
 d) 27 m^3
 e) 81 m^3

5. **(Unicamp)** Cada aresta de um tetraedro regular mede 6 cm. Para este tetraedro, calcule:

- a) a distância entre duas arestas opostas, isto é, entre duas arestas que não têm ponto comum;

b) o raio da esfera inscrita no tetraedro.

6. (ITA) Um triedro tri-retângulo é cortado por um plano que intercepta as três arestas, formando um triângulo com lados medindo 8 m, 10 m e 12 m. O volume, em m^3 , do sólido formado é:

a) $15\sqrt{6}$

b) $5\sqrt{30}$

c) $6\sqrt{15}$

d) $30\sqrt{6}$

e) $45\sqrt{6}$

7. (UFF) No tetraedro regular representado na figura, R e S são, respectivamente, os pontos médios de NP e OM . A razão $\frac{RS}{MN}$ é igual a:

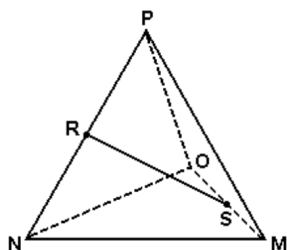
a) $\sqrt{3}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\sqrt{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $3\sqrt{2}$

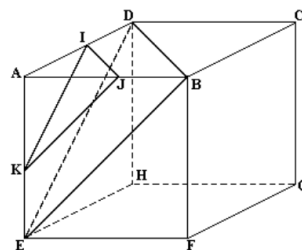


8. (Unicamp) A base de uma pirâmide é um triângulo equilátero de lado $L = 6$ cm e arestas laterais das faces $A = 4$ cm.

a) Calcule a altura da pirâmide.

b) Qual é o raio da esfera circunscrita à pirâmide?

9. (Unesp) Secciona-se o cubo $ABCD-EFGH$, cuja aresta mede 1 m, pelo plano BDE , passando por vértices do cubo, e pelo plano IJK , passando por pontos médios de lados do cubo, como na figura a seguir.



Calcule o volume do tronco de pirâmide $IJKDBE$, assim formado.

10. (UFC) Sejam P_1 e P_2 dois pontos quaisquer interiores a um tetraedro regular. Sejam d_1 , a soma das distâncias de P_1 às faces do tetraedro regular, e d_2 , a soma das distâncias de P_2 às faces do tetraedro regular. Mostre que $d_1 = d_2$.

Questão 1.

Solução: Item e. Sejam A a área total, V o volume e h a altura do tetraedro regular $ABCD$. Se a for a medida do lado de $ABCD$, temos que:

$$A = 4[ABC] = a^2\sqrt{3}, V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \text{ e } h = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Logo,

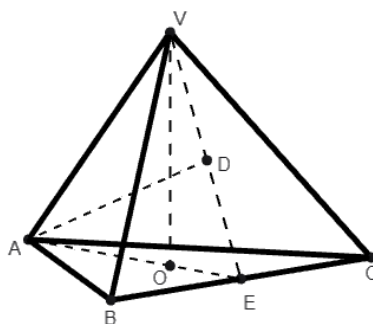
$$A = V \implies a^2\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \implies a = 6\sqrt{6}.$$

Mas,

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{(6\sqrt{6})\sqrt{6}}{3} \implies h = 12.$$

Questão 2.

Solução: Item d. Note que a pirâmide é um tetraedro isofacial. Sejam O o centro da base



de $ABCV$ e D o pé da altura relativa a face BCV . Pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$\overline{VA}^2 = \overline{VO}^2 + \overline{OA}^2 \implies 3^2 = \sqrt{5}^2 + \overline{OA}^2 \implies \overline{OA} = 2.$$

Seja E o ponto médio de BC . Como O é o baricentro do triângulo equilátero ABC , então

$$\overline{AE} = \frac{3}{2}\overline{OA} = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3.$$

Mas, E também é o pé da altura do triângulo isósceles VBC e, pelo Teorema de Pitágoras, encontramos $\overline{VE} = \sqrt{6}$. Agora, temos que os triângulos VOE e ADE são semelhantes. Assim,

$$\frac{\overline{VO}}{\overline{VE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} \implies \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\overline{AD}}{3} \implies \overline{AD} = \frac{\sqrt{30}}{2}.$$

Questão 3.

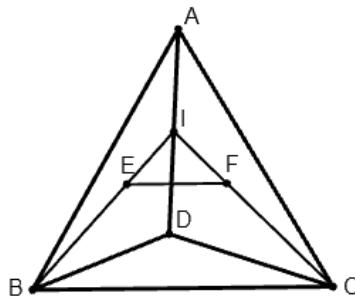
Solução: Item a. Temos que o cubo é o empacotamento do tetraedro. Logo, a medida das arestas do tetraedro é igual a medida da diagonal das faces do cubo, ou seja, $a = 2\sqrt{2}$. E como as faces do tetraedro são triângulos equiláteros iguais, denotando por A sua área, temos

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}.$$

Questão 4.

Solução: Item d. Sejam respectivamente E, F, G e H os baricentros das faces ABD, ACD, BCD e ABC do tetraedro regular $ABCD$. Se I for o ponto médio de AD , temos que E pertence a BI e F pertence a CI e, assim, os triângulos IEF e IBC são semelhantes com razão de semelhança $\frac{1}{3}$. Logo, a razão entre os volumes de $ABCD$ e $EFGH$ é dado por:

$$\frac{\text{vol}(ABCD)}{\text{vol}(EFGH)} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \implies \text{vol}(ABCD) = 27 \cdot \text{vol}(EFGH) = 27 \cdot 1^3 = 27.$$



Questão 5.

Solução: a) O que queremos calcular é a medida das bialturas, que em um tetraedro regular são iguais as bimedias. Note que a diagonal da face do cubo circunscrito ao tetraedro é igual a 6 cm, logo as faces do cubo são quadrados de lado $\frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ cm. Mas como as bimedias de um tetraedro são iguais as arestas do seu empacotamento, então as bialturas do tetraedro medem $3\sqrt{2}$ cm.

b) Seja H o pé da altura que incide de D relativa à base ABC do tetraedro regular $ABCD$. Como, em particular, um tetraedro regular é isósceles, então temos que o centróide é o centro

da esfera inscrita ao tetraedro e, assim, o raio r da esfera inscrita será igual a um quarto da altura de $ABCD$. Mas $\overline{DH} = \frac{6\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6}$ cm. Portanto,

$$r = \frac{1}{4} \cdot \overline{DH} = \frac{1}{4} \cdot 2\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ cm.}$$

Questão 6.

Solução: Item a. A interseção do triedro com o plano é um tetraedro trirretângulo. Primeiramente, iremos calcular o volume V de um tetraedro trirretângulo em função dos lados da base. Seja $DABC$ um tetraedro trirretângulo reto em D . Chame $\overline{DA} = x$, $\overline{DB} = y$, $\overline{DC} = z$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$x^2 + y^2 = c^2$$

$$x^2 + z^2 = b^2$$

$$y^2 + z^2 = a^2$$

Resolvendo o sistema com essas três equações nas incógnitas x , y e z , encontramos:

$$z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}$$

$$y = \sqrt{\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}}$$

$$x = \sqrt{\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}}$$

Portanto,

$$V = \frac{xyz}{6} = \frac{1}{24} \sqrt{2(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}.$$

Por fim, para $a = 8$ m, $b = 10$ m e $c = 12$ m, temos

$$V = \frac{1}{24} \sqrt{2(-8^2 + 10^2 + 12^2)(8^2 - 10^2 + 12^2)(8^2 + 10^2 - 12^2)} = \frac{1}{24} \sqrt{2 \cdot 180 \cdot 108 \cdot 20} = 15\sqrt{6}.$$

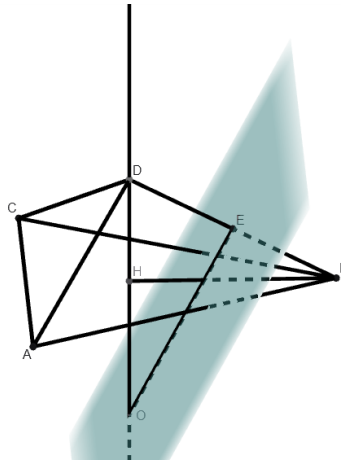
Questão 7.

Solução: Item d. Temos que RS é uma bimediana de $MNOP$. Se $MN = a$, então

$$\frac{RS}{MN} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Questão 8.

Solução: a) Seja $DABC$ a pirâmide dada. Note que $DABC$ é um tetraedro isofacial. Sejam



ABC a base e DH a altura do tetraedro. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que

$$\overline{DH}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{HB}^2.$$

Como H é o centro de um triângulo equilátero, então $\overline{HB} = \frac{2}{3} \left(\frac{6\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{3}$. Daí,

$$\overline{DH}^2 = 4^2 - (2\sqrt{3})^2 \implies \overline{DH} = 2 \text{ cm}.$$

b) O centro da esfera circunscrita é o ponto de encontro da reta medial da base ABC (ou seja, a reta que é perpendicular ao plano de ABC e equidistante dos vértices de ABC , que no nosso caso é a reta DH) com o plano mediador de DB (ou seja, o plano perpendicular a DB que passa pelo seu ponto médio). Se E for o ponto médio de DB , então o plano mediador de DB corta a reta DH em, digamos, O . Temos que $\overline{OD} = r$ é o raio da esfera circunscrita. Por semelhança,

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DO}} \implies \frac{2}{4} = \frac{2}{r} \implies r = 4 \text{ cm}.$$

Questão 9.

Solução: Note que $AKIJ$ e $AEBD$ são tetraedros trirretângulos. Logo, pelas informações da questão

$$vol(AKIJ) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{6} = \frac{1}{48}$$

e

$$vol(AEBD) = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{6} = \frac{1}{6}.$$

Mas, o volume do tronco $IJKDBE$ é

$$vol(IJKDBE) = vol(AEBD) - vol(AKIJ) = \frac{1}{6} - \frac{1}{48} = \frac{7}{48}.$$

Questão 10.

Solução: Seja O um ponto interior ao tetraedro regular $ABCD$. a soma dos volumes dos tetraedros $OBCD$, $OACD$, $OABD$ e $OABC$ é igual ao volume V de $ABCD$, ou seja,

$$V = \text{vol}(OBCD) + \text{vol}(OACD) + \text{vol}(OABD) + \text{vol}(OABC) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot [BCD] \cdot \overline{OE} + \frac{1}{3} \cdot [ACD] \cdot \overline{OF} + \frac{1}{3} \cdot [ABD] \cdot \overline{OG} + \frac{1}{3} \cdot [ABC] \cdot \overline{OH}$$

onde $\overline{OE}$, $\overline{OF}$, $\overline{OG}$ e $\overline{OH}$ são as medidas das alturas dos tetraedros $OBCD$, $OACD$, $OABD$ e $OABC$, respectivamente. Mas como $ABCD$ é regular, temos que $[BCD] = [ACD] = [ABD] = [ABC] = S$. Logo,

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot \overline{OE} + \frac{1}{3} \cdot S \cdot \overline{OF} + \frac{1}{3} \cdot S \cdot \overline{OG} + \frac{1}{3} \cdot S \cdot \overline{OH} \Rightarrow \frac{3V}{S} = \overline{OE} + \overline{OF} + \overline{OG} + \overline{OH}.$$

Como V e S são constantes temos que a soma $\overline{OE} + \overline{OF} + \overline{OG} + \overline{OH}$ é constante para qualquer ponto interno ao tetraedro. Portanto, em particular, para os pontos P_1 e P_2 temos que $d_1 = d_2$.

Note que novamente usamos o Teorema de Viviani para tetraedros.

Considerações Finais

O presente trabalho tem por finalidade mostrar de forma simples e elementar os principais resultados sobre tetraedros. Percebemos a relevância de se estudar mais aprofundadamente a teoria dos tetraedros nas aulas do ensino básico, pois questões sobre esse tema são comuns em provas de concurso e vestibulares. Mostrando, assim, a importância de se conhecer os principais resultados sobre eles. A explanação do conteúdo foi feita de modo com que a estrutura se assemelhe com uma apostila ou livro didático. Isso pode permitir que um aluno de ensino básico se sinta mais familiarizado com o material.

Referências Bibliográficas

Artigos e Livros:

[1] CARTAXO, K. S. **Teoria dos Tetraedros**. Fortaleza, 2025.

[2] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar 10: geometria espacial, posição e métrica**. São Paulo: Atual, 7^a ed., 2013.

Sites:

[3] Gran Questões. **Questões de concurso sobre pirâmide**. Disponível em: https://questoes.gran_cursosonline.com.br/questoes-de-concursos/matematica-piramides-40389. Acesso em: 1 jun. 2025.

[4] Projeto Medicina. **Pirâmide – Projeto Medicina**. Disponível em: <https://projeto medicina.com.br/material-de-estudo/piramide/>. Acesso em: 1 jun. 2025.

[5] QConcursos. **Questões de Concurso sobre Pirâmides em Matemática**. Disponível em: https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/questoes?discipline_ids%5B%5D=13&subject_ids%5B%5D=19927. Acesso em: 1 jun. 2025.