CONSTRUINDO SABERES GEOMÉTRICOS: APRENDIZAGENS DIGITAIS E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA EJA-EPT

William Gonçalves Meireles

Mauricio Ramos Lutz

ORGANIZADORES

Organizadores

William Gonçalves Meireles e Mauricio Ramos Lutz.

Projeto gráfico e diagramação

William Gonçalves Meireles e Mauricio Ramos Lutz.

Imagens e ícones

Acervo pessoal dos autores; Canva Educação; Imagens geradas por Inteligência Artificial (Canva AI).

1ª edição – Dezembro de 2024

2ª edição – Outubro de 2025

Jaguari/RS

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)

M437c Meireles, William Gonçalves.
Construindo saberes geométricos: aprendizagens digitais e resolução de problemas na EJA-EPT / William Gonçalves Meireles, Mauricio Ramos Lutz. (Orgs.). — Jaguari, 2025.
115 f. : il.

Recurso educacional digital.
Acesso em: https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/1000483

1. Geometria. 2. Resolução de problemas. 3. Aprendizagem digital. 4. EJA-EPT. 5. Ensino profissional. I. Mauricio Ramos Lutz. II. Título.

CDU 37.091.3

Bibliotecário responsável: Josef de Aquino Peruck — CRB-10/002653/O

ALGUMAS PALAVRAS INICIAIS

Este caderno didático, intitulado “Construindo Saberes Geométricos: Aprendizagens Digitais e Resolução de Problemas na EJA-EPT”, constitui um Produto Educacional (PE) resultante da pesquisa de mestrado de William Gonçalves Meireles, desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação Profissional e Tecnológica (ProfEPT) do Instituto Federal Farroupilha (IFFar) – Campus Jaguari, sob a orientação do professor Dr. Mauricio Ramos Lutz.

A pesquisa que originou esse material intitula-se “Resolução de Problemas e Tecnologias Digitais: reflexões sobre práticas educativas em uma turma da EJA-EPT” e integra a Linha 1 – Práticas Educativas em Educação Profissional e Tecnológica (EPT), vinculada ao Macroprojeto 1 – Propostas metodológicas e recursos didáticos em espaços formais e não formais de ensino na Educação Profissional e Tecnológica (EPT).

O presente caderno foi pensado como uma ferramenta de apoio para professores e estudantes, especialmente voltado para a promoção de aprendizagens em Geometria mediadas por Tecnologias Digitais (TD) e pela metodologia de Resolução de Problemas (RP). Dessa forma, ele busca contribuir para a superação de dificuldades frequentemente encontradas no ensino deste conteúdo, tornando as atividades mais dinâmicas, contextualizadas e próximas do cotidiano dos estudantes da EJA-EPT.

A realização deste trabalho só foi possível graças ao empenho e à colaboração de diversas pessoas e instituições. Manifestamos nossa gratidão ao ProfEPT e ao IFFar, que proporcionaram os recursos e o espaço acadêmico necessários para o desenvolvimento da pesquisa; aos estudantes da turma de Eletromecânica da EJA-EPT do Colégio Técnico Industrial de Santa Maria (CTISM), cuja participação ativa foi fundamental para a aplicação, análise e avaliação das propostas didáticas aqui

apresentadas; e aos colegas docentes e pesquisadores que, direta ou indiretamente, contribuíram com sugestões, críticas construtivas e incentivo durante todo o processo.

Espera-se que este caderno didático inspire novas práticas e reflexões no campo da Educação Profissional e Tecnológica, especialmente na EJA-EPT, e que possa ser adaptado, ampliado e ressignificado conforme as necessidades de cada contexto educativo.

Sumário

AULA 1 – Geometria: diagnóstico inicial

Nesta aula, vamos responder ao Questionário de Sondagem, cujo objetivo é diagnosticar seus conhecimentos prévios sobre Geometria e identificar possíveis dificuldades no aprendizado desse conteúdo. Essa sondagem ajudará a compreender suas percepções, experiências e expectativas em relação ao estudo da Geometria, bem como suas opiniões sobre o uso da Resolução de Problemas (RP) e das Tecnologias Digitais (TD) no processo de aprendizagem. Ao final desta atividade, espera-se que você tenha preenchido o questionário aplicado no início da aula.

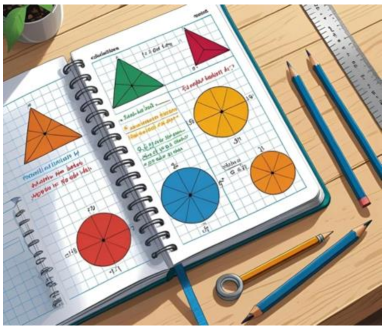
A Geometria está presente em diversos aspectos do nosso cotidiano, desde a construção civil até a concepção de objetos e tecnologias. No contexto da Eletromecânica, seu uso é essencial para a leitura e interpretação de esquemas técnicos, o cálculo de medidas e ângulos, além da montagem e manutenção de equipamentos. A precisão geométrica é fundamental para garantir o funcionamento correto de máquinas e sistemas.

Antes de avançarmos no estudo dos conceitos geométricos, é importante conhecer melhor sua relação com a Geometria e suas experiências anteriores.

Por que esse questionário é importante?

➢ Perguntas fechadas: ajudam a captar informações objetivas, como idade, tempo de estudo na EJA-EPT e familiaridade com a Geometria.

➢ Perguntas abertas: incentivam você a compartilhar suas percepções e expectativas pessoais, proporcionando um entendimento mais profundo de suas necessidades.



Momento de reflexão

Antes do preenchimento do questionário, vamos conversar sobre Geometria. Pense e responda:

O que vem à sua mente quando falamos de Geometria?

Você já encontrou dificuldades específicas ao aprender Geometria?

Você já usou Geometria sem perceber? Se sim, em quais situações?

Essa reflexão ajudará a perceber como a Geometria já faz parte da sua vida.

Preenchimento do questionário

Agora é o momento de responder ao Questionário de Sondagem. Cada estudante receberá uma versão impressa para preencher individualmente.

Instruções para o preenchimento:

- Leia cada pergunta com atenção e escolha a resposta que melhor representa sua opinião ou experiência.
- Nas perguntas abertas, escreva suas respostas de forma clara e detalhada.
- O tempo estimado para o preenchimento do questionário é de aproximadamente 25 minutos.

Dicas para responder:

- Não existem respostas certas ou erradas. O importante é refletir sobre suas experiências e conhecimentos.
- Caso não saiba responder alguma pergunta, não se preocupe. O questionário serve para compreender seu ponto de partida no estudo da Geometria.
- Se tiver dúvidas, levante a mão e o professor ajudará no que for necessário.

Questionário de sondagem

Importante: você pode optar por não responder a qualquer uma das perguntas, caso não se sinta confortável.

Instruções: leia cada pergunta cuidadosamente e escolha a resposta que melhor reflete sua opinião ou experiência. Este questionário levará aproximadamente 25 minutos para ser concluído.

1) Idade:
(   ) 18 – 25 anos
(   ) 26 – 35 anos
(   ) 36 – 45 anos
(   ) 46 – 55 anos
(   ) 56 anos ou mais

2) Gênero:
(   ) Masculino
(   ) Feminino
(   ) Outro
(   ) Prefiro não responder

3) Tempo de estudo na EJA-EPT:
(   ) Menos de 1 ano
(   ) 1 – 2 anos
(   ) 3 – 4 anos
(   ) Mais de 4 anos

4) Em geral, como você se sente em relação à Geometria?
(   ) Gosto muito
(   ) Gosto um pouco
(   ) Não gosto muito
(   ) Não gosto

5) Na sua opinião, qual a importância da Geometria na sua vida?

(   ) Muito importante

(   ) Importante

(   ) Pouco importante

(   ) Nada importante

6) Você se lembra de ter estudado Geometria em outros momentos da sua vida?

(   ) Sim

(   ) Não

7) Se sim, como foi essa experiência?

(   ) Positiva

(   ) Negativa

(   ) Indiferente

8) Você utiliza a Geometria em seu cotidiano? Em quais situações?

9) Você já ouviu falar da metodologia de Resolução de Problemas (RP)?

(   ) Sim

(   ) Não

10) Se sim, você acha que a RP pode te ajudar a aprender Geometria?

(   ) Sim

(   ) Não

(   ) Talvez

11) Você já utilizou algum *software* ou aplicativo para aprender Geometria? Se sim, qual(is)?

____
____
____
____
____
____

12) Você acha que o uso de Tecnologias Digitais (TD), como computadores, tablets ou celulares, pode tornar o aprendizado da Geometria mais interessante?

( ) Sim
( ) Não
( ) Talvez

13) Você se sente confortável em utilizar Tecnologias Digitais (TD) para aprender?

( ) Sim
( ) Não
( ) Depende

14) Se você pudesse utilizar algum recurso tecnológico para aprender Geometria, qual seria sua primeira opção?

( ) *Software* de Geometria
( ) Vídeos educacionais
( ) Aplicativos
( ) Simulações
( ) Outros: ____

15) Pensando nas próximas aulas de Geometria, o que você espera aprender?

____
____
____
____
____

16) Você tem alguma expectativa em relação ao uso da Resolução de Problemas (RP) e das Tecnologias Digitais (TD) nessas aulas?

____

17) Você gostaria de aprender Geometria de forma mais prática e relacionada com o seu cotidiano?

( ) Sim
( ) Não
( ) Talvez

18) Quais atividades ou recursos você acredita que poderiam ajudar no aprendizado de Geometria?

AULA 2 – Geometria: familiarização com a metodologia de Resolução de Problemas

Nesta aula, vamos conhecer a metodologia de Resolução de Problemas (RP) de George Polya e explorar alguns problemas relacionados aos conceitos geométricos de ponto, reta e plano. Esta aula será preparatória, com o objetivo de familiarizá-los com a metodologia de RP e estabelecer uma base para sua aplicação em aulas futuras.

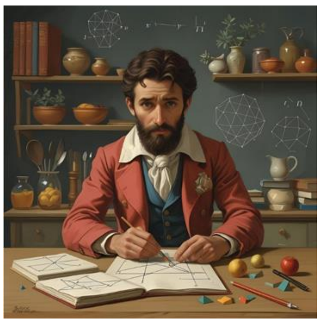
Na aula anterior, realizamos um diagnóstico dos seus conhecimentos prévios sobre Geometria. Agora, vamos dar continuidade ao estudo, introduzindo a metodologia de Resolução de Problemas (RP) de George Polya. Essa metodologia não se aplica apenas à Matemática, mas também a situações do cotidiano, como o planejamento de tarefas, a organização de atividades e a tomada de decisões. Nesta aula, exploraremos problemas relacionados aos conceitos de ponto, reta e plano, utilizando a RP como guia.

O que é um problema?

Um problema é qualquer situação que exija reflexão e ação para ser solucionada. Na Matemática, um problema geralmente envolve um desafio que requer a aplicação de conceitos e estratégias para encontrar uma solução. Por exemplo:

- Calcular a distância entre dois pontos;
- Determinar o ângulo entre duas retas.

Mas como resolver um problema de forma eficiente? É aí que entra a metodologia de George Polya.

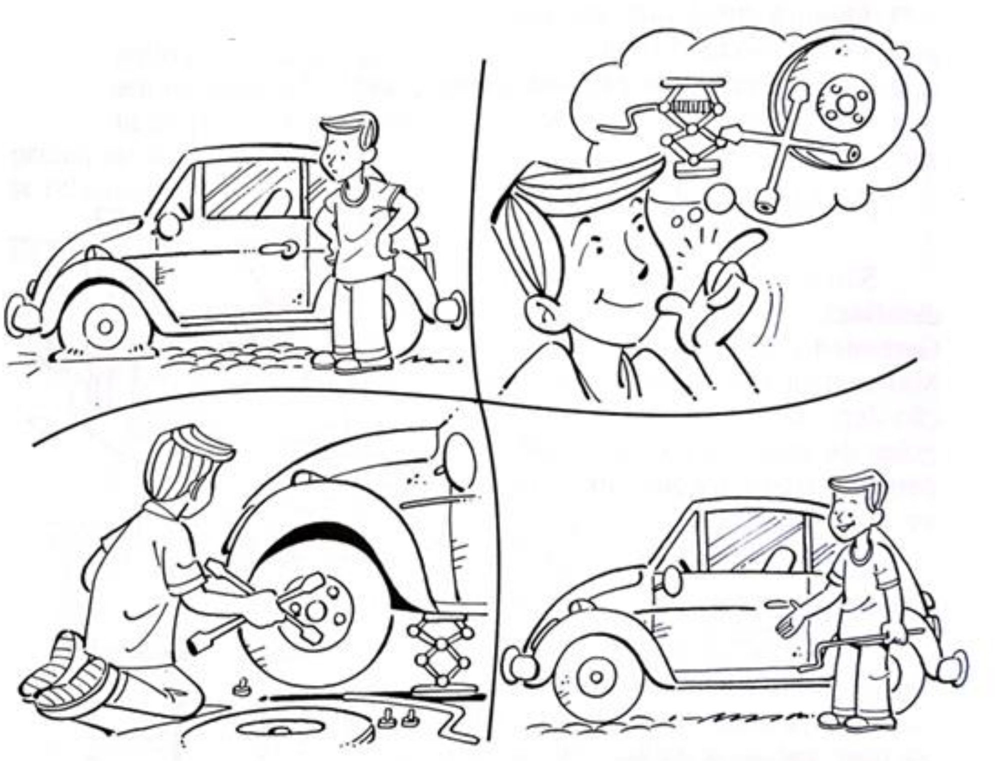


A metodologia de Resolução de Problemas (RP) de George Polya

George Polya, um renomado matemático, propôs uma metodologia composta por quatro etapas para resolver problemas. Essas etapas são:

1) Compreender o problema;
2) Estabelecer um plano;
3) Executar o plano;
4) Examinar a solução obtida.

Figura 1 – Etapas de Polya



Fonte: Dante (2007, p. 22).

Vamos explorar, em detalhes, cada uma dessas etapas, juntamente com algumas perguntas e sugestões que, segundo Polya, auxiliam na abordagem eficiente de problemas. Observe o Quadro 1.

Quadro 1 – Como resolver um problema

COMPREENSÃO DO PROBLEMA	
Primeiro É preciso compreender o problema.	Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória? Trace uma figura. Adote uma notação adequada. Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?
ESTABELECIMENTO DE UM PLANO	
Segundo Encontre a conexão entre os dados e a incógnita. É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata. É preciso chegar afinal a um plano para a resolução.	Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente? Conhece um problema correlato? Conhece um problema que lhe poderia ser útil? Considere a incógnita e procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante. Eis um problema correlato e já antes resolvido. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização? É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições. Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema correlato. É possível! imaginar um problema correlato mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita, ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?
EXECUÇÃO DO PLANO	
Terceiro Execute o seu plano.	Ao executar o seu plano de resolução, verifique cada passo. É possível verificar claramente que o passo está correto? É possível demonstrar que ele está correto?
RETROSPECTO	
Quarto Examine a solução obtida.	É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Fonte: Polya (2006, p. XII e XIII).

Aplicando a metodologia de Polya

Agora, vamos resolver alguns problemas usando essas quatro etapas.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1) O segmento de reta AB representa dois pontos situados a 63 m um do outro. A partir de A até B, serão colocados postes de 10,5 m em 10,5 m.

a) Quantos postes serão colocados no total?

b) Desenhe todos os postes na figura a seguir.

Resolução:

1) Compreender o problema

Dados:

Distância total entre os pontos A e B: 63 metros.

Espaçamento entre os postes: 10,5 metros.

Objetivos:

Calcular o número total de postes necessários, considerando a colocação nas extremidades.

Representar graficamente a posição dos postes ao longo do segmento AB.

2) Estabelecer um plano

1ª Estratégia:

Dividir a distância total (63 m) pelo espaçamento entre os postes (10,5 m) para encontrar o número de intervalos.

Como há um poste em cada extremidade, o total de postes será igual ao número de intervalos mais um.

2ª Estratégia:

Construir um desenho representando o segmento AB e marcar, com régua, os pontos onde cada poste será posicionado a cada 10,5 m.

3) Executar o plano

Cálculo dos intervalos:

$$63 \div 10{,}5 = 6 \text{ intervalos}$$

Número total de postes:

$$6 + 1 = 7 \text{ postes}$$

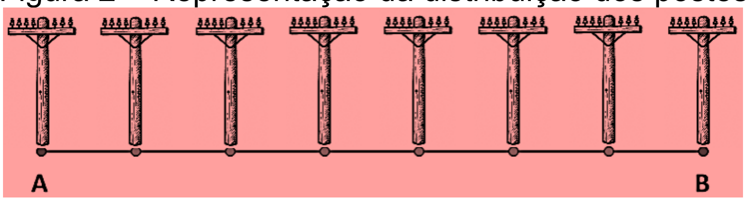
Posições dos postes:

0 m (ponto A); 10,5 m; 21 m; 31,5 m; 42 m; 52,5 m; 63 m (ponto B)

Representação gráfica:

Desenhar o segmento AB com os 7 postes posicionados nos pontos indicados.

Figura 2 – Representação da distribuição dos postes



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

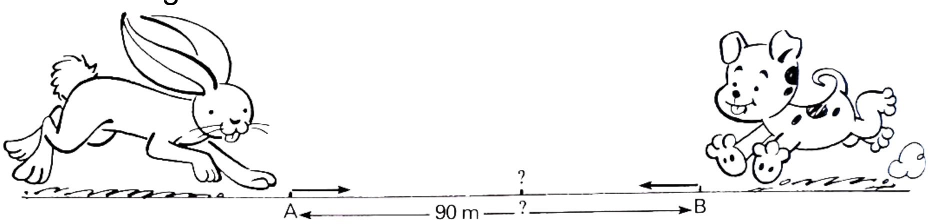
(7−1) × 10,5 = 6 × 10,5 = 63 m → confere com o enunciado.

Resposta:

Serão colocados 7 postes, um a cada 10,5 metros, começando em A (0 m) e terminando em B (63 m).

Exemplo 2) De dois pontos A e B, distantes 90 m, soltam-se, ao mesmo tempo e em sentidos contrários, uma lebre a 10 m/s e um cachorro a 5 m/s.

Figura 3 – Distância entre a lebre e o cachorro



Fonte: Dante (2007, p. 113).

a) Depois de quanto tempo eles se encontrarão?

b) Em que lugar isso ocorrerá?

Resolução:

1) Compreender o problema

Dados:

Distância total entre os pontos A e B: 90 metros.

Velocidade da lebre: 10 m/s.

Velocidade do cachorro: 5 m/s.

Ambos partem ao mesmo tempo, em sentidos contrários.

Objetivos:

Determinar o tempo necessário até que a lebre e o cachorro se encontrem.

Determinar a posição em que ocorre o encontro, em relação ao ponto A (ou ao ponto B).

2) Estabelecer um plano

1ª Estratégia:

A cada segundo, a distância entre a lebre e o cachorro diminui 15 metros (10 m + 5 m).

Dividir a distância total (90 m) pela redução por segundo: $90 \div 15$

2ª Estratégia:

Representar a situação com um segmento de 90 metros, dividido em partes de 5 metros.

Marcar as posições da lebre e do cachorro a cada segundo:

A lebre parte do ponto A (0 m) e avança 10 m/s.

O cachorro parte do ponto B (90 m) e avança 5 m/s em direção à lebre.

A cada segundo, os dois se aproximam 15 metros.

Após 6 segundos:

A lebre terá percorrido: 6×10

O cachorro terá percorrido: 6×5

Soma das distâncias: $60 + 30$

3) Executar o plano

Cálculo do tempo até o encontro:

$$90 \div (10 + 5) = 6 \text{ segundos}$$

Posição do encontro:

A lebre percorre: $10 \times 6 = 60$ metros

O encontro ocorre a 60 metros do ponto A ou a 30 metros do ponto B.

4) Retrospecto (verificação)

Verificação do tempo e da posição:

Soma dos deslocamentos: 60 m (lebre) + 30 m (cachorro) = 90 m → confere com a distância total.

Ambos partiram ao mesmo tempo e se moveram em sentidos opostos → confere.

Tempo e posições compatíveis com os dados do problema → confere.

Resposta:

a) Eles se encontrarão após 6 segundos.

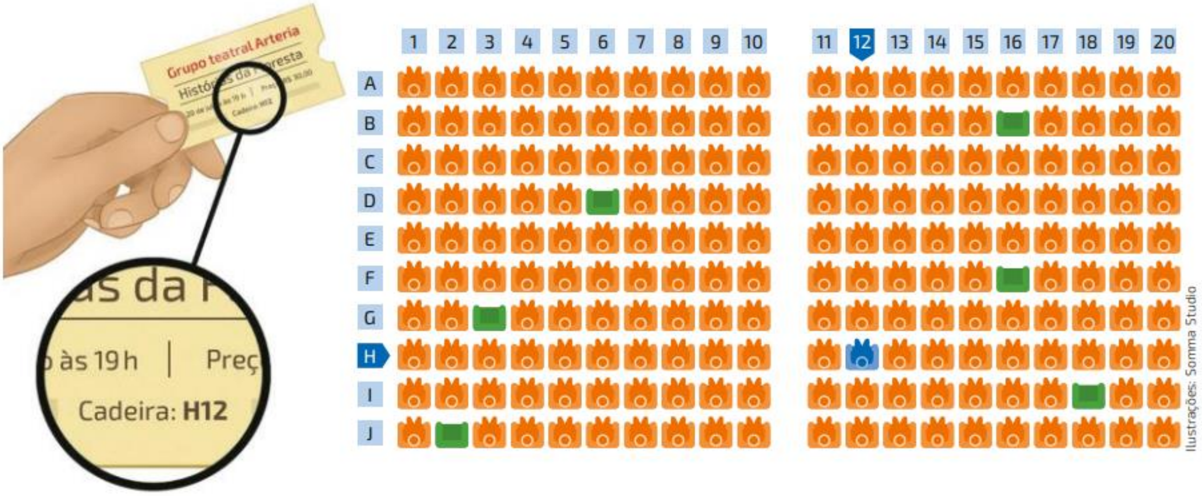
b) O encontro ocorrerá a 60 metros do ponto A, ou a 30 metros do ponto B.

Atividade de aprendizagem

Atividade 1

Denise comprou um ingresso para assistir a uma peça de teatro. No ingresso está registrada a localização da cadeira em que Denise vai se sentar. O código H12 indica a cadeira localizada na linha H e coluna 12.

Figura 4 – Disposição das cadeiras no teatro



Fonte: Pataro (2018, p. 174).

Sabendo que as cadeiras desocupadas estão indicadas em verde, qual o código de localização das cadeiras ainda desocupadas da coluna 16?

Resolução esperada:

1) Compreender o problema

Dados:

Cadeiras identificadas por letra (linha) e número (coluna).

O código H12 refere-se à linha H, coluna 12.

Deseja-se saber quais cadeiras da coluna 16 estão desocupadas (em verde).

Objetivos:

Observar a coluna 16 da imagem.

Identificar as cadeiras verdes (desocupadas) dessa coluna.

Anotar os códigos conforme o modelo: [linha][coluna].

2) Estabelecer um plano

Estratégia:

Localizar visualmente a coluna 16 na imagem do teatro.

Verificar, uma a uma, quais cadeiras dessa coluna estão marcadas em verde.

Anotar os códigos das cadeiras desocupadas, combinando a letra da linha com o número da coluna.

3) Executar o plano

Análise da imagem:

As cadeiras da coluna 16 aparecem em várias linhas.

As cadeiras desocupadas (verdes) nesta coluna são: B16 e F16

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

Os códigos B16 e F16 pertencem à coluna 16 → confere.

Ambas estão marcadas em verde (desocupadas) na imagem → confere.

O formato dos códigos está correto (linha + coluna) → confere.

Resposta:

As cadeiras desocupadas da coluna 16 são: B16 e F16.

Resumo

Passos para resolver um problema segundo Polya

Quadro 2 – Esquema de Polya

Compreender o problema

a) O que se pede no problema?

b) Quais são os dados e as condições do problema?

c) É possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama?

d) É possível estimar a resposta?

Elaborar um plano

a) Qual é o seu plano para resolver o problema?

b) Que estratégia você tentará desenvolver?

c) Você se lembra de um problema semelhante que pode ajudá-lo a resolver este?

d) Tente organizar os dados em tabelas e gráficos.

e) Tente resolver o problema por partes.

Executar o plano

a) Execute o plano elaborado, verificando-o passo a passo.

b) Efetue todos os cálculos indicados no plano.

c) Execute todas as estratégias pensadas, obtendo várias maneiras de resolver o mesmo problema.

Fazer o retrospecto ou verificação

a) Examine se a solução obtida está correta.

b) Existe outra maneira de resolver o problema?

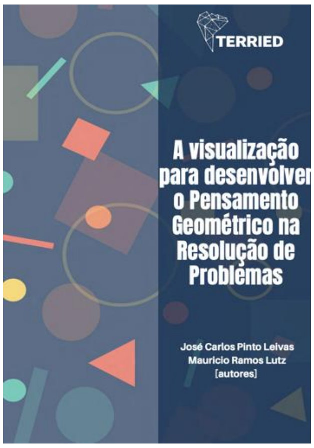
c) É possível usar o método empregado para resolver problemas semelhantes?

Fonte: Dante (2007, p. 29).

Leituras complentares

Para aprofundar seus conhecimentos, consulte:

1) E-book



A visualização para desenvolver o Pensamento Geométrico na Resolução de Problemas – José Carlos Pintos Leivas e Mauricio Ramos Lutz (especial atenção no capítulo 3 - Resolução de Problemas como metodologia para o ensino e a aprendizagem de Geometria).

Link: http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/721100

2) Artigo

ONUCHIC, Lurdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Sueli Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, v. 25, n. 41, p.73- 98, dez. 2011.

Link: https://www.redalyc.org/pdf/2912/291223514005.pdf

Referências

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** São Paulo: Ática, 2007.

PATARO, Patricia Moreno. **Matemática essencial** – 6º ano ensino fundamental, anos finais. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2018.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

AULA 3 – Geometria: introdução aos conceitos de ponto, reta e plano

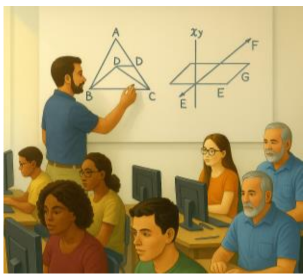
Nesta aula, vamos explorar os conceitos básicos de ponto, reta e plano, que são fundamentais para o estudo da Geometria. Além disso, teremos um primeiro contato com o *software* GeoGebra, que auxiliará na visualização e construção de figuras geométricas de forma dinâmica e interativa. Ao final desta aula, espera-se que você seja capaz de identificar esses elementos em situações cotidianas e utilizar o GeoGebra para representar pontos e retas.

A Geometria é uma das áreas mais antigas da Matemática, tendo surgido há milhares de anos, antes mesmo da invenção da escrita. No entanto, foi com Euclides, um matemático grego que viveu há mais de 2.300 anos, que a Geometria ganhou uma organização clara e lógica. Euclides escreveu uma obra chamada "Os Elementos", considerada um dos livros mais importantes da Matemática. Nesse livro, ele explicou a Geometria de maneira organizada, partindo de ideias simples, como ponto, reta e plano, e chegando a teoremas mais complexos.

Nesta aula, vamos explorar esses conceitos básicos e utilizar o *software* GeoGebra para visualizar e construir figuras geométricas.

O Sistema Axiomático de Euclides

Euclides organizou a Geometria usando o Sistema Axiomático. Isso significa que ele partiu de ideias básicas, chamadas de axiomas, que são verdades aceitas sem necessidade de prova. Por exemplo, um dos axiomas diz que "é possível traçar uma reta ligando dois pontos quaisquer". A partir dessas ideias simples, ele construiu toda a Geometria que estudamos hoje.



Noções básicas: ponto, reta e plano

Na Geometria, ponto, reta e plano são chamados de noções primitivas. Isso quer dizer que eles são conceitos tão básicos que não precisam ser definidos formalmente. Vamos entender cada um deles:

- **Ponto:** é a unidade mais simples da Geometria, sem dimensão alguma (não possui comprimento, largura ou altura). Podemos imaginá-lo como a marca deixada por um lápis afiado. Euclides o definiu como "aquilo que não tem partes". Um ponto representa uma localização específica no espaço ou no plano e, apesar de ser um objeto abstrato, é simbolizado graficamente por uma letra maiúscula do alfabeto.

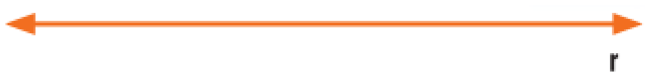
Figura 1 – Representação dos pontos A e B

Fonte: elaborado pelos autores (2024).

- **Reta:** é uma linha contínua, sem curvas, que se estende infinitamente nas duas direções. Não possui largura ou espessura, apenas comprimento infinito. Podemos visualizá-la como um fio perfeitamente esticado, sem dobras. Euclides descreveu a reta como "comprimento sem largura". Uma reta contém infinitos pontos e é determinada por dois pontos distintos quaisquer. Na representação gráfica, sua infinitude é indicada por setas nas extremidades, sendo nomeada de duas maneiras:

  - Com letras minúsculas do alfabeto.

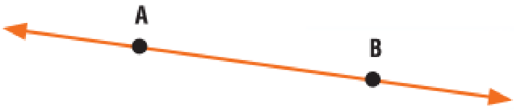
Figura 2 – Representação da reta r



Fonte: Dias (2024, p. 61).

- Indicando dois pontos distintos pertencentes a ela, como $\overleftrightarrow{AB}$ ou $\overleftrightarrow{BA}$.

Figura 3 – Representação da reta que passa pelos pontos A e B



Fonte: Dias (2024, p. 61).

Segmento de reta e semirreta:

Um segmento de reta é uma parte delimitada por dois pontos específicos.

Figura 4 – Segmento de reta $\overline{AB}$ ou $\overline{BA}$

Fonte: Dias (2024, p. 62).

Se estendermos um segmento infinitamente a partir de uma extremidade, obtemos uma semirreta, representada graficamente com uma seta na direção do prolongamento.

Figura 5 – Semirretas $\overrightarrow{ST}$ e $\overleftarrow{TS}$

Fonte: Dias (2024, p. 62).

- **Plano:** é uma superfície plana ilimitada, que se estende infinitamente em todas as direções. Possui comprimento e largura, porém não possui espessura. Podemos concebê-lo como uma folha de papel infinita, sem bordas. Euclides definiu o plano como "o que tem apenas comprimento e largura". Para representá-lo parcialmente em um desenho, utilizamos geralmente um paralelogramo, nomeado por letras gregas minúsculas como α (alfa), β (beta) ou γ (gama).

Figura 6 – Representação do plano α

Fonte: Dias (2024, p. 62).

Aplicações no cotidiano

Embora ponto, reta e plano sejam ideias abstratas, eles estão presentes em muitas coisas ao nosso redor. Por exemplo:

- Ponto: pode ser comparado à localização de um lugar no mapa;
- Reta: pode ser vista no horizonte, onde o céu parece encontrar a terra;
- Plano: pode ser representado pelo chão de uma casa ou pela superfície de uma mesa.

Esses conceitos também são usados por arquitetos, engenheiros, artistas e profissionais da área de Eletromecânica.

Explorando o GeoGebra

O GeoGebra é um *software* livre de Matemática dinâmica, disponível em várias plataformas, como Windows, macOS, Linux e dispositivos móveis. Ele foi criado por Markus Hohenwarter em 2001 e permite trabalhar com diversas áreas da Matemática, como Geometria e Álgebra. A interface do GeoGebra é composta por:

- **Barra de Ferramentas:** contém ferramentas para construir diferentes conceitos geométricos;

- **Janela de Visualização:** onde visualizamos e interagimos com os objetos geométricos;

- **Teclado Virtual:** oferece botões para inserir números, operadores matemáticos, símbolos e funções;

- **Caixa de Entrada:** permite inserir comandos e expressões matemáticas diretamente.

Figura 7 – Interface do GeoGebra Classic (Clássico)

Fonte: elaborado pelos autores (2024).

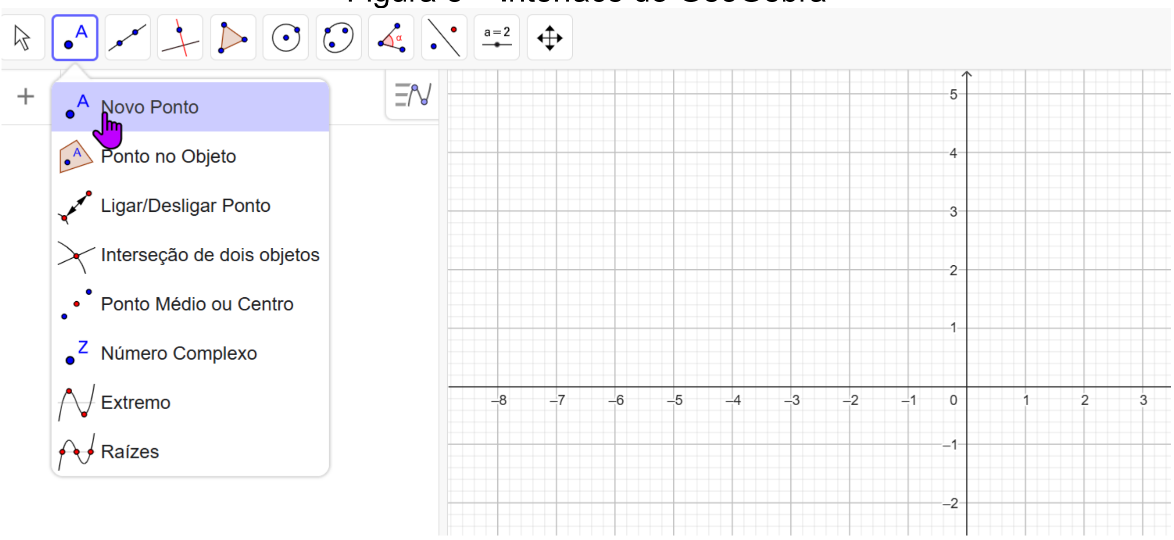
Atividade prática no GeoGebra

Vamos utilizar o GeoGebra para construir pontos e retas:

❖ **Criar pontos:**

Selecione a ferramenta "Novo Ponto" na barra de ferramentas.

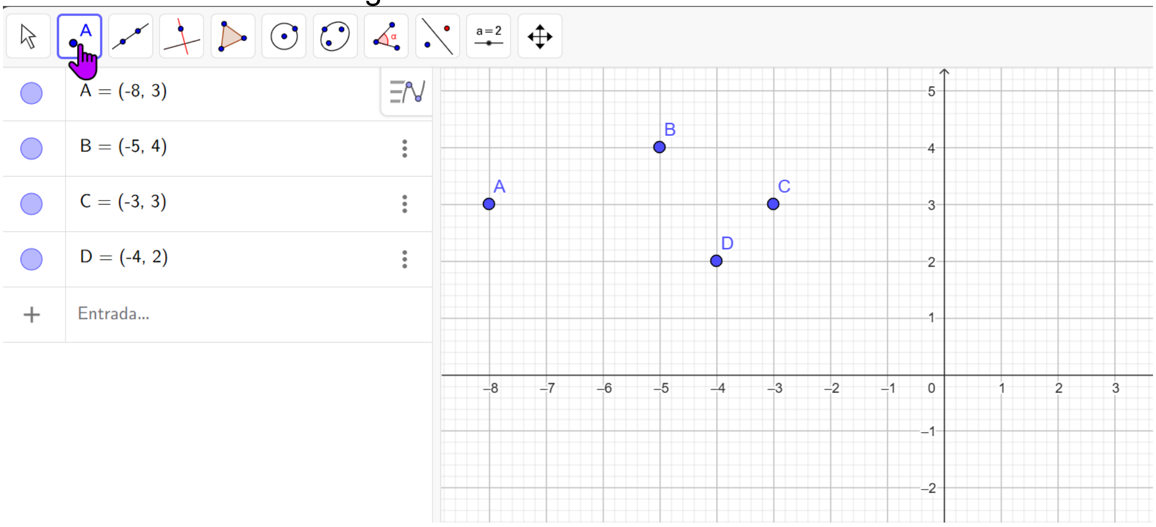
Figura 8 – Interface do GeoGebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

Clique na Janela de Visualização para criar os pontos A, B, C e D.

Figura 9 – Interface do GeoGebra

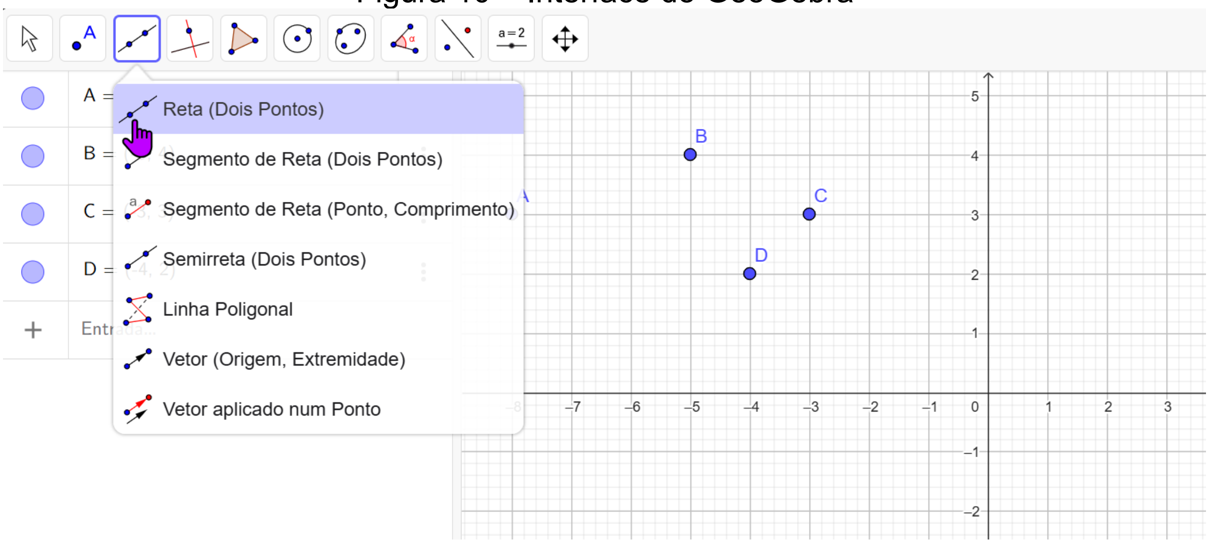


Fonte: elaborado pelos autores (2024).

❖ **Traçar retas:**

Selecione a ferramenta "Reta (dois pontos)".

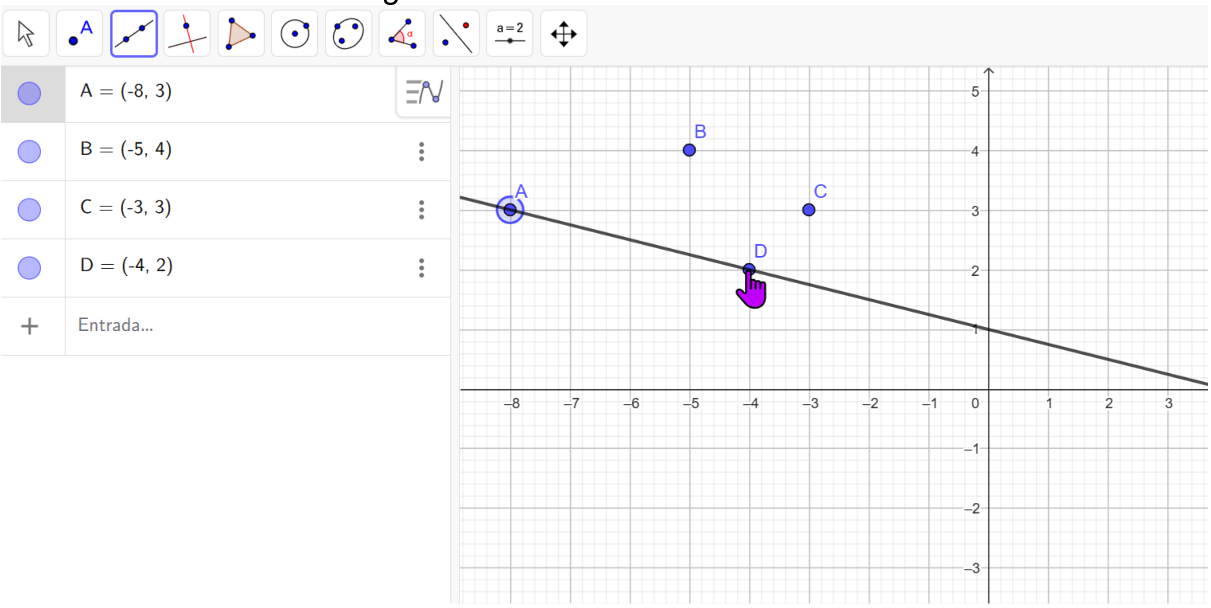
Figura 10 – Interface do GeoGebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

Clique nos pontos A e D para traçar uma reta.

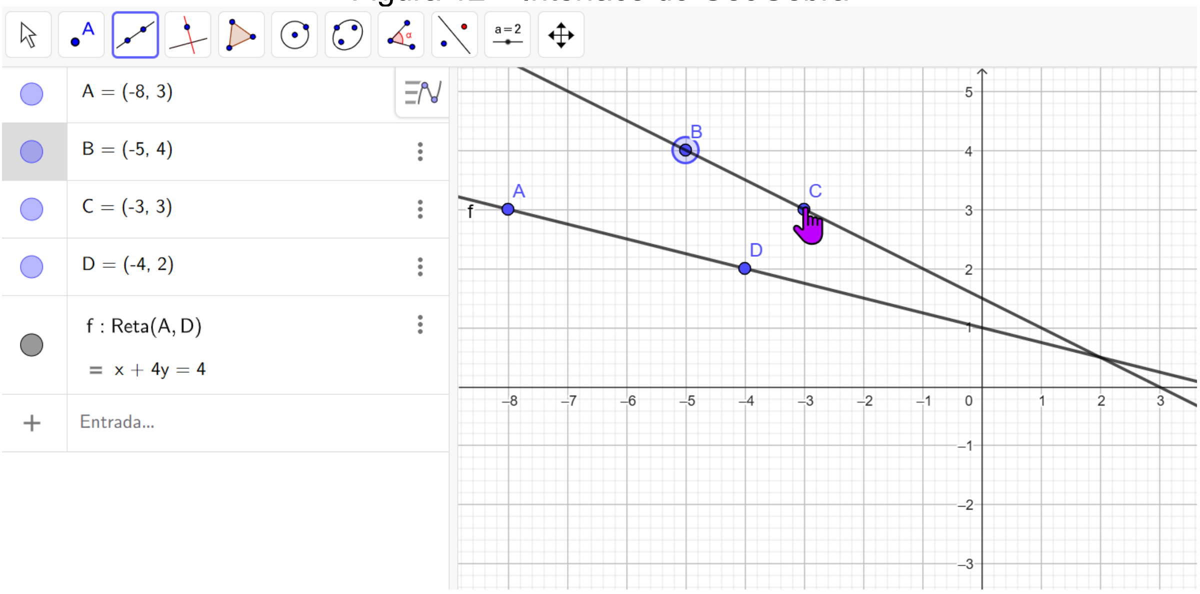
Figura 11 – Interface do GeoGebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

Clique nos pontos B e C para traçar outra reta.

Figura 12 – Interface do GeoGebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

Desafio

No GeoGebra, crie três pontos distintos e conecte-os com retas. Qual figura geométrica você formou?

Resolução esperada:

1) Compreender o problema

Dados:

Três pontos distintos.

Retas são determinadas por dois pontos distintos.

Software GeoGebra.

Objetivo:

Investigar qual figura geométrica é formada ao conectar três pontos distintos por meio de retas utilizando o GeoGebra.

2) Estabelecer um plano

Estratégia:

Utilizar a ferramenta “Novo Ponto” para marcar três pontos distintos (A, B e C) na Janela de Visualização do GeoGebra.

Em seguida, usar a ferramenta “Reta (dois pontos)” para conectar os pares de pontos: A e B, B e C, A e C.

Observar a figura resultante dessas conexões.

3) Executar o plano

Abrir o *software* GeoGebra.

Selecionar a ferramenta “Novo Ponto” e clicar três vezes na Janela de Visualização para criar os pontos A, B e C.

Selecionar a ferramenta “Reta (dois pontos)” e:

Conectar os pontos A e B → reta f

Conectar os pontos B e C → reta g

Conectar os pontos C e A → reta h

Analisar visualmente a figura formada na tela.

4) Retrospecto (verificação)

A figura formada apresenta três lados e três vértices (pontos A, B e C), desde que os pontos não estejam na mesma reta.

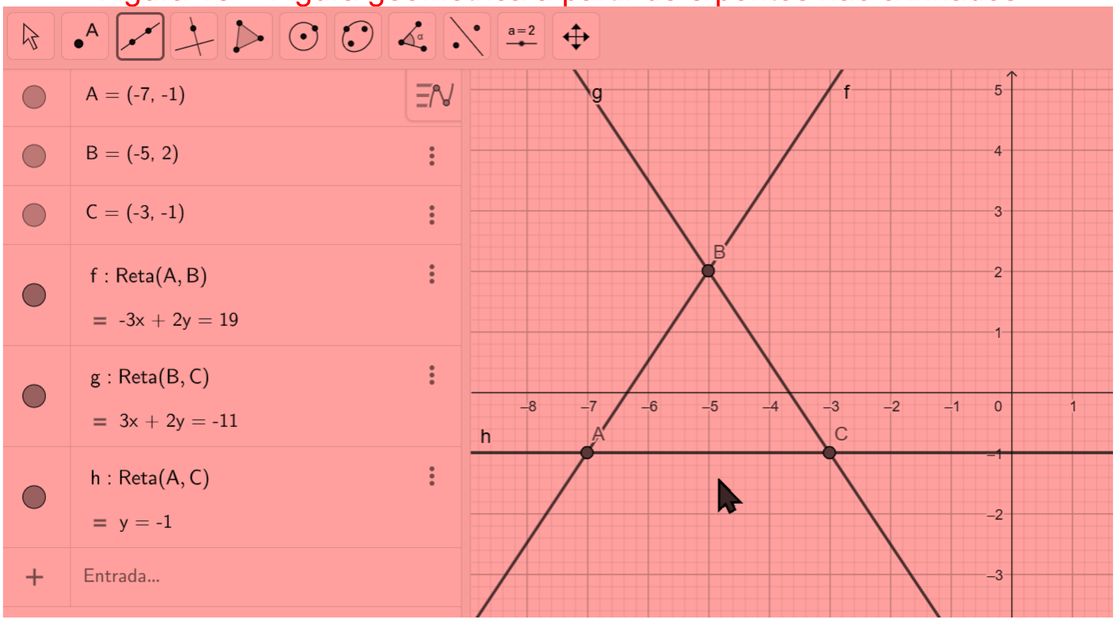
Esses três lados fecham uma figura plana com três ângulos internos, caracterizando um triângulo.

Caso os três pontos estejam alinhados, o GeoGebra mostrará apenas uma única reta, e não uma figura fechada.

Resposta:

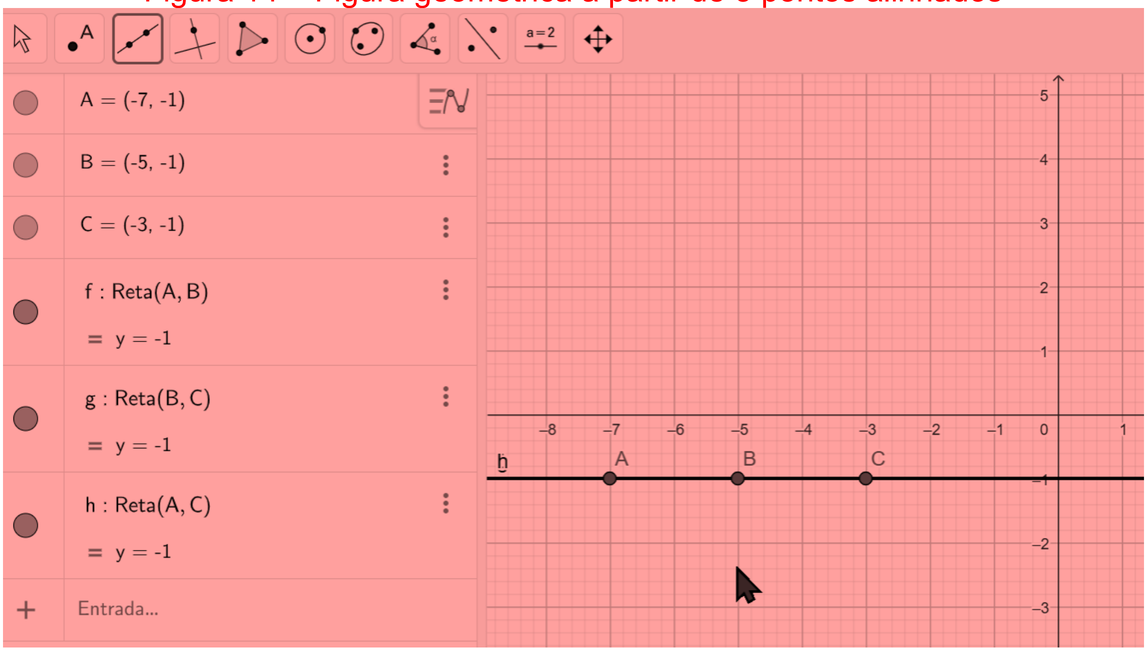
A figura geométrica formada ao conectar três pontos distintos com retas no GeoGebra é, em geral, um triângulo (Figura 13), desde que os pontos não estejam alinhados. Se os três pontos estiverem alinhados, a figura resultante será apenas uma reta (Figura 14).

Figura 13 – Figura geométrica a partir de 3 pontos não alinhados



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

Figura 14 – Figura geométrica a partir de 3 pontos alinhados



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

Atividades de aprendizagem

Atividade 1

Marque um ponto A. Trace retas passando por esse ponto. Quantas retas existem passando pelo ponto A?

Resolução esperada:

1) Compreender o problema

Dados:

Um ponto A está localizado no plano.

Devemos traçar retas que passem por esse ponto.

Objetivo:

Investigar quantas retas podem ser traçadas passando por um único ponto A.

2) Estabelecer um plano

Estratégia:

Utilizar uma folha de papel para traçar retas manualmente, em várias direções, a partir do ponto A.

Utilizar o *software* GeoGebra para repetir esse processo de forma digital e dinâmica.

Observar se há um limite para a quantidade de retas distintas que passam por A.

3) Executar o plano

No papel:

Marcar o ponto A com um lápis.

Usar uma régua para traçar o maior número possível de retas em diferentes direções, todas passando por A.

Observar que sempre é possível traçar novas retas entre duas já desenhadas, variando levemente a direção.

No GeoGebra:

Selecionar a ferramenta "Novo Ponto" para criar o ponto A.

Usar a ferramenta “Reta (dois pontos)”.

Clicar primeiro no ponto A e depois em diferentes posições da Janela de Visualização para gerar retas distintas.

Observar que, mesmo após diversas construções, sempre é possível criar retas com direções diferentes a partir de A.

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

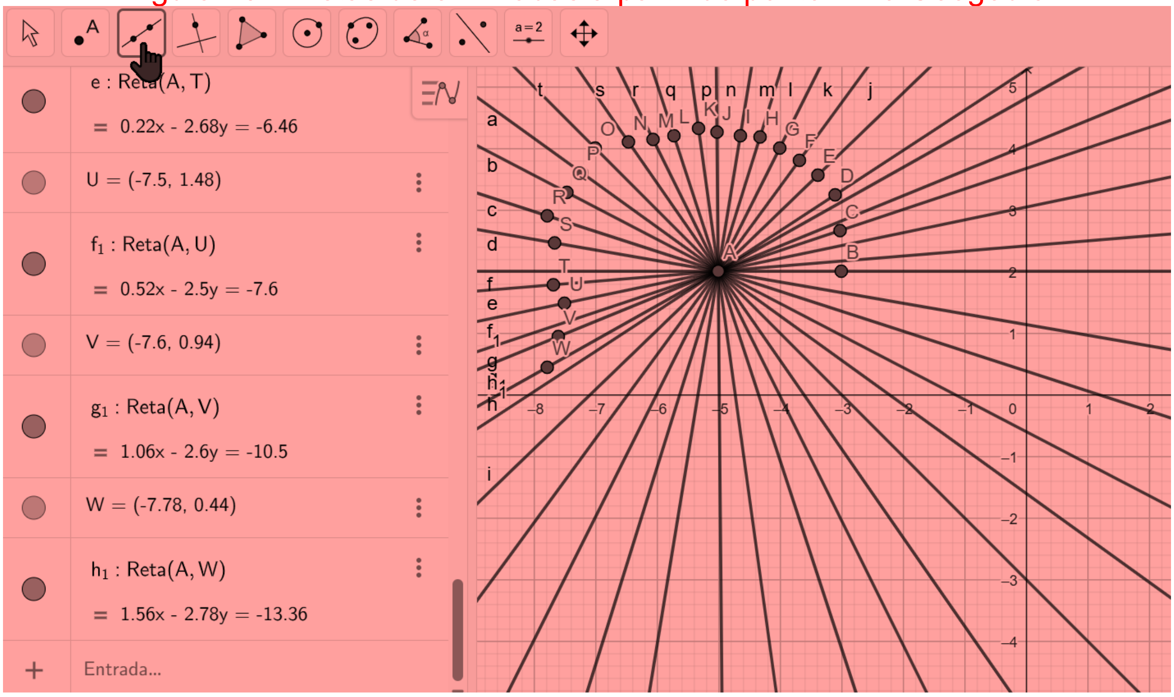
Ao traçar retas manualmente e digitalmente (com o GeoGebra), observamos que o número de direções possíveis é ilimitado.

Cada nova direção forma uma reta distinta, o que confirma a ideia de infinitas possibilidades.

Resposta:

Existem infinitas retas que passam por um ponto. Cada direção distinta define uma nova reta. Como as direções possíveis no plano são infinitas, a quantidade de retas também é.

Figura 15 – Retas determinadas a partir do ponto A no Geogebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

Atividade 2

Agora, marque dois pontos: B e M. Quantas retas você pode traçar passando por esses dois pontos?

Resolução esperada:

1) Compreender o problema

Dados:

Dois pontos, B e M, estão localizados no plano.

Deseja-se traçar retas que passem por ambos os pontos.

Objetivo:

Investigar quantas retas diferentes podem ser traçadas passando por dois pontos distintos.

2) Estabelecer um plano

Estratégia:

Utilizar uma folha de papel para traçar, manualmente, uma reta que passe pelos pontos B e M.

Repetir o processo no *software* GeoGebra, de forma digital e dinâmica.

Observar se é possível traçar mais de uma reta distinta que passe exatamente pelos dois pontos dados.

3) Executar o plano

No papel:

Marcar os pontos B e M com um lápis.

Usar uma régua para traçar a reta que passa pelos dois pontos.

Observar que somente uma reta é possível, pois ela é definida de forma única por dois pontos distintos.

No GeoGebra:

Selecionar a ferramenta "Novo Ponto" para criar dois pontos quaisquer na Janela de Visualização (o *software* os nomeia automaticamente como A, B, C, ...).

Renomear os pontos para B e M, clicando com o botão direito sobre cada ponto e selecionando “Renomear”.

Usar a ferramenta “Reta (dois pontos)” para clicar nos pontos B e M.

Observar que a reta formada é única, independentemente da ordem dos cliques ($\overleftrightarrow{BM}$ ou $\overleftrightarrow{MB}$).

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

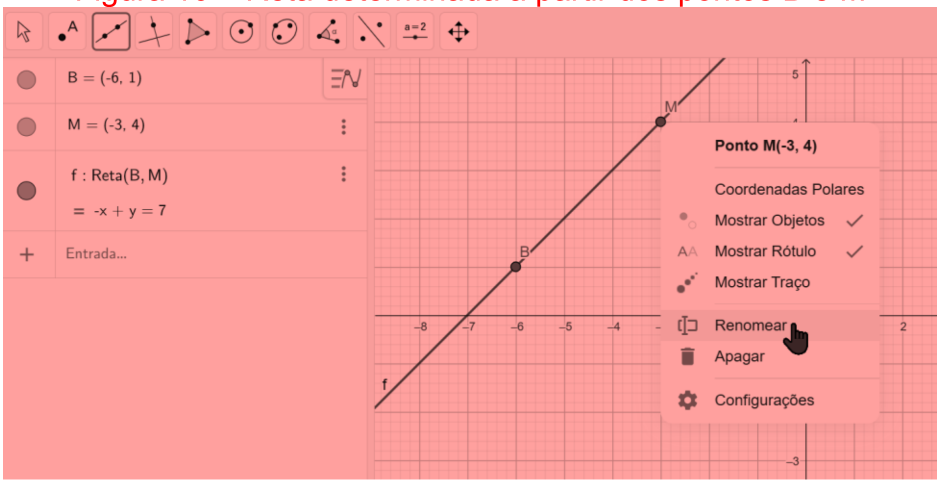
Ao realizar a construção no papel e no GeoGebra, constata-se que existe apenas uma reta possível que passe por dois pontos distintos.

Essa constatação está de acordo com um dos postulados fundamentais da Geometria Euclidiana: por dois pontos distintos passa uma e somente uma reta.

Resposta:

Existe apenas uma reta que passa por dois pontos distintos. Essa reta é única porque há uma única direção comum que conecta dois pontos diferentes no plano.

Figura 16 – Reta determinada a partir dos pontos B e M

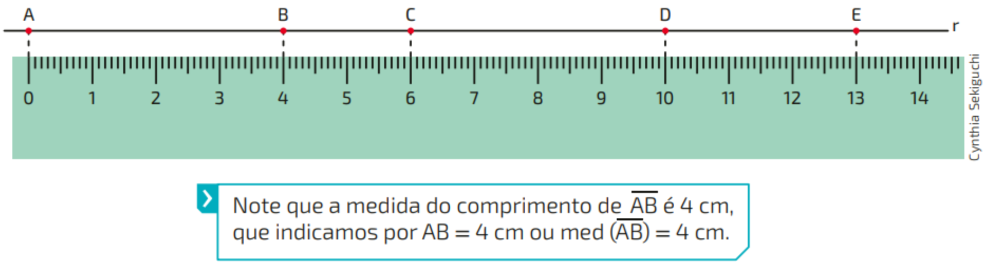


Fonte: elaborado pelos autores (2024).

Atividade 3

Veja a seguir a reta r, na qual estão representados alguns pontos, e uma régua graduada em centímetros.

Figura 17 – Reta r e régua graduada em centímetros



Fonte: Pataro (2018, p. 147).

Escreva, em centímetros, a medida do comprimento de:

a) a) $\overline{AC}$ b) $\overline{BC}$ c) $\overline{BD}$ d) $\overline{AD}$ e) $\overline{BE}$ f) $\overline{CE}$

Resolução esperada:

1) Compreender o problema

Dados:

Os pontos A, B, C, D e E estão localizados sobre a reta r, alinhados a uma régua graduada em centímetros.

Deseja-se determinar o comprimento dos segmentos indicados.

Objetivo:

Calcular, em centímetros, os comprimentos dos segmentos $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$, utilizando as posições marcadas na régua.

2) Estabelecer um plano

Estratégia:

Observar a posição de cada ponto na régua.

Calcular a diferença entre as posições dos pontos para determinar o comprimento dos segmentos.

3) Executar o plano

Com base na régua da imagem:

$\overline{AC}$ = |6 − 0| = 6 cm

$\overline{BC}$ = |6 − 4| = 2 cm

$\overline{BD}$ = |8 − 2| = 6 cm

$\overline{AD}$ = |10 − 0| = 10 cm

$\overline{BE}$ = |11 − 2| = 9 cm

$\overline{CE}$ = |11 − 4| = 7 cm

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

Todos os valores foram obtidos por subtração entre as posições marcadas na régua.

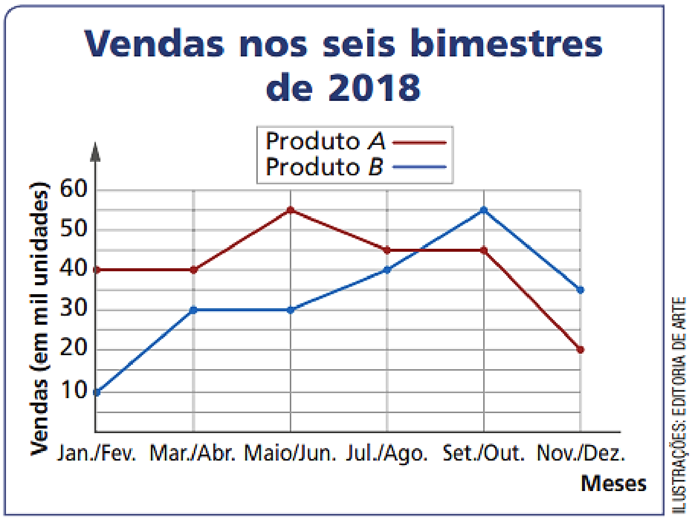
Os resultados refletem corretamente as distâncias na reta r.

Resposta:

$\overline{AC}$ = 6 cm, $\overline{BC}$ = 2 cm, $\overline{BD}$ = 6 cm, $\overline{AD}$ = 10 cm, $\overline{BE}$ = 9 cm, $\overline{CE}$ = 7 cm.

Atividade 4

Figura 18 – Vendas dos produtos A e B em 2018



Fonte: Giovanni Júnior (2018, p. 86).

Quantos segmentos foram traçados para construir o gráfico, considerando os pontos destacados como extremidades desses segmentos?

Resolução esperada:

1) Compreender o problema

Dados:

O gráfico apresenta a evolução das vendas dos produtos A e B ao longo de seis bimestres.

Cada ponto indica a quantidade de vendas de um produto em um determinado bimestre.

Os pontos estão conectados por segmentos de reta.

Objetivo:

Contar o número total de segmentos de reta utilizados na construção do gráfico.

2) Estabelecer um plano

Estratégia:

Verificar quantos segmentos existem para cada produto.

Somar os segmentos dos dois produtos (linha vermelha para A e azul para B).

3) Executar o plano

Contar os segmentos referentes ao Produto A (linha vermelha): 5 segmentos.

Contar os segmentos referentes ao Produto B (linha azul): 5 segmentos.

Total de segmentos no gráfico:

5 (Produto A) + 5 (Produto B) = 10 segmentos

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

Cada produto tem 6 pontos representando os bimestres.

Para ligar todos os pontos de cada produto, é necessário traçar 5 segmentos.

A soma está de acordo com a construção visual do gráfico.

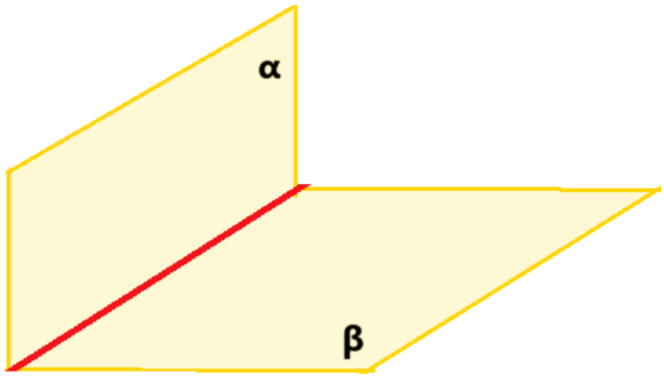
Resposta:

Foram traçados 10 segmentos ao todo no gráfico, sendo 5 para o Produto A e 5 para o Produto B.

Atividade 5

Represente na figura abaixo:

Figura 19 – Representação dos planos α e β



Fonte: Silveira (2015, p. 210).

a) uma reta r no plano α;

b) uma reta s no plano β;

c) um ponto E no plano α;

d) um ponto F no plano β;

e) o ponto G que pertence aos planos α e β.

Resolução esperada:

1) Compreender o problema

Dados:

Dois planos distintos, α e β, que se interceptam formando uma reta (representada em vermelho na figura).

Elementos a serem representados:

reta r no plano α;

reta s no plano β;

ponto E no plano α;

ponto F no plano β;

ponto G, que pertence simultaneamente aos planos α e β.

Objetivo:

Representar os elementos geométricos nos respectivos planos, observando sua posição e a interseção dos planos.

2) Estabelecer um plano

Estratégia:

Para a reta r: escolher dois pontos distintos no plano α e traçar a reta que passa por eles.

Para a reta s: escolher dois pontos distintos no plano β e traçar a reta que passa por eles.

Para o ponto E: marcar um ponto qualquer no plano α.

Para o ponto F: marcar um ponto qualquer no plano β.

Para o ponto G: marcar um ponto sobre a reta vermelha, que representa a interseção entre os planos α e β.

3) Executar o plano

Com régua e lápis:

Marcar dois pontos no plano α e traçar a reta r.

Marcar dois pontos no plano β e traçar a reta s.

Marcar o ponto E no plano α.

Marcar o ponto F no plano β.

Marcar o ponto G sobre a reta vermelha, garantindo que ele esteja na interseção dos planos α e β.

4) Retrospecto (Verificação)

Verificação:

A reta r está totalmente contida no plano α?

A reta s está totalmente contida no plano β?

O ponto E está localizado no plano α?

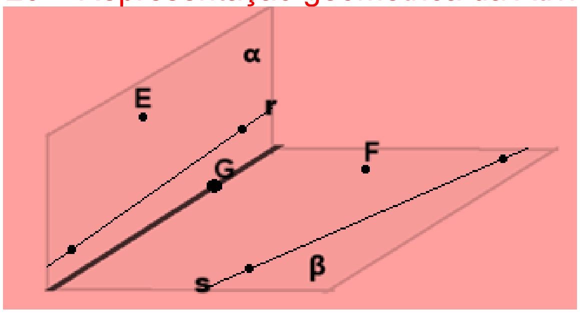
O ponto F está localizado no plano β?

O ponto G está corretamente posicionado sobre a reta de interseção (reta vermelha)?

Resposta:

As representações estão corretas, pois todos os elementos geométricos estão representados respeitando a posição nos planos indicados e a interseção dos planos para o ponto G.

Figura 20 – Representação geométrica da Atividade 5



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

Resumo

A Geometria, uma das mais antigas áreas da Matemática, foi organizada de forma sistemática por Euclides em sua obra "Os Elementos". Nela, Euclides estruturou a Geometria a partir de axiomas – verdades aceitas sem demonstração – e definições básicas, como ponto, reta e plano.

Essas noções primitivas são conceitos tão essenciais que não possuem definição formal:

- Ponto: representa uma posição no espaço, sem dimensões (sem comprimento, largura ou altura). É indicado por letras maiúsculas;
- Reta: linha infinita em ambas as direções, sem largura ou espessura, mas com comprimento infinito. Pode ser nomeada por letras minúsculas ou por dois pontos distintos sobre ela.
- Segmento de reta: porção da reta limitada por dois pontos.
- Semirreta: parte da reta que se inicia em um ponto e se prolonga infinitamente em uma direção.
- Plano: superfície bidimensional ilimitada, sem espessura, representada por paralelogramos e identificada por letras gregas minúsculas.

Referências

DANTE, Luiz Roberto. **Teláris matemática**, 6° ano: ensino fundamental, anos finais. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

DIAS, Camilla Ehrat. **Sistema positivo de ensino**: 6º ano: ensino fundamental: anos finais. 3. ed. Curitiba: Cia. Bras. de Educação e Sistemas de Ensino, 2024.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A conquista da matemática:** 6º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

PATARO, Patricia Moreno. **Matemática essencial** – 6º ano ensino fundamental, anos finais. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2018.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática:** compreensão e prática. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

AULA 4 – Geometria: retas coplanares e coordenadas cartesianas

Nesta aula, vamos aprofundar nossos conhecimentos em Geometria, explorando os conceitos de retas coplanares e o plano cartesiano como sistema de localização de pontos. Daremos continuidade ao uso do *software* GeoGebra para construir e visualizar figuras geométricas de maneira dinâmica e interativa. Ao final desta aula, espera-se que você seja capaz de identificar e classificar diferentes tipos de retas coplanares e localizar pontos no plano cartesiano com precisão.

Vamos relembrar brevemente os conceitos da aula anterior: ponto, reta e plano. Esses elementos formam a base para os novos conteúdos que estudaremos hoje.

- O que é um ponto e como o representamos?

Resposta esperada:

O ponto é a unidade mais simples da Geometria. Não possui dimensão alguma (não tem comprimento, largura ou altura). Pode ser imaginado como a marca deixada por um lápis bem afiado sobre uma superfície. Segundo Euclides, "ponto é aquilo que não tem partes". Representamos um ponto por uma letra maiúscula do alfabeto, como A, B ou C.

- O que é uma reta, um segmento de reta e uma semirreta, e como representamos cada um deles?

Resposta esperada:

Reta é uma linha contínua e infinita que se estende em duas direções opostas. Não possui largura nem espessura, apenas comprimento. Uma reta contém infinitos pontos e pode ser nomeada por uma letra minúscula (como reta r) ou pelos dois pontos distintos que pertencem a ela, como $\overleftrightarrow{AB}$ ou $\overleftrightarrow{BA}$, onde A e B são pontos quaisquer e distintos da mesma reta.

Segmento de reta é a parte da reta limitada por dois pontos, possuindo comprimento definido. É representado por $\overline{AB}$ ou $\overline{BA}$.

Semirreta é obtida ao prolongarmos um segmento de reta infinitamente a partir de um de seus extremos. É representada por $\overrightarrow{AB}$, onde o ponto A é a origem e a seta indica o sentido do prolongamento.

❖ Um plano possui comprimento, largura e espessura?

Resposta esperada:

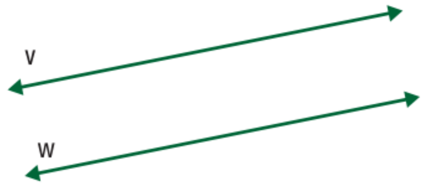
Não. O plano é uma superfície plana que se estende infinitamente em todas as direções. Ele possui apenas comprimento e largura, mas não possui espessura. Pode ser visualizado como uma folha de papel infinita, sem bordas. Euclides o definiu como “aquilo que tem apenas comprimento e largura”. Em representações gráficas, o plano costuma ser simbolizado por um paralelogramo e é nomeado por letras gregas minúsculas, como α (alfa), β (beta) ou γ (gama).

Retas coplanares

Duas retas são consideradas coplanares quando estão contidas em um mesmo plano. Quanto à posição, elas podem ser:

❖ **Retas paralelas**: são retas coplanares que não possuem ponto em comum.

Figura 1 – Retas paralelas



Fonte: Almeida (2025, p. 62).

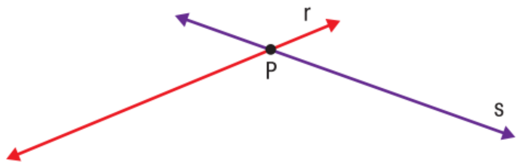
❖ **Retas coincidentes**: são retas que possuem todos os pontos em comum. Na figura a seguir, as retas coincidentes são representadas por m ≡ n.

Figura 2 – Retas coincidentes

Fonte: elaborado pelos autores (2024).

❖ **Retas concorrentes**: são aquelas que possuem um único ponto em comum.

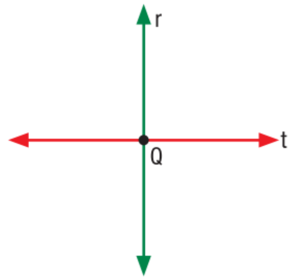
Figura 3 – Retas concorrentes



Fonte: Almeida (2025, p. 62).

Quando duas retas concorrentes formam quatro ângulos de mesma abertura em torno do ponto no qual se cruzam, são chamadas de **retas perpendiculares**.

Figura 4 – Retas perpendiculares



Fonte: Almeida (2025, p. 62).

Observando o mundo à nossa volta

Podemos identificar retas paralelas e perpendiculares em diversas situações do cotidiano. Um exemplo comum é o cruzamento entre duas ruas, onde percebemos a presença desses tipos de retas na organização do espaço urbano.

Figura 5 – Visão aérea de um cruzamento de ruas

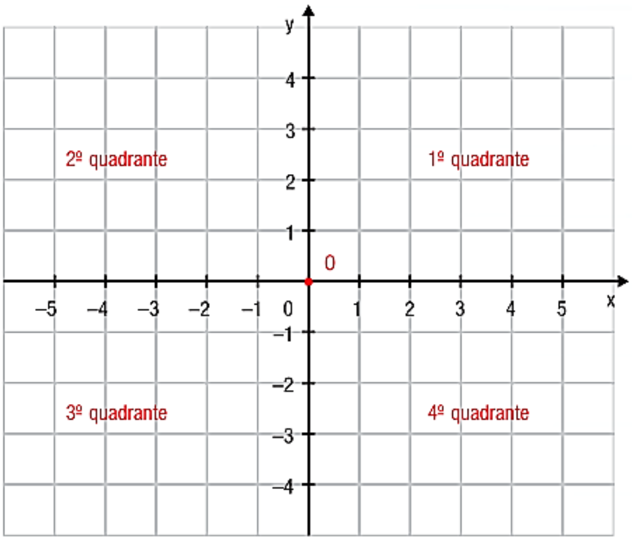
Fonte: <https://blog.stoodi.com.br/blog/matematica/perpendicular/>.

Plano cartesiano

O plano cartesiano é um sistema de localização de pontos usado em diversos contextos, como na elaboração de gráficos, em plantas arquitetônicas, como base para serviços de GPS (*Global Positioning System*), entre outros.

O plano cartesiano é determinado por duas retas perpendiculares, que chamamos de eixos cartesianos. O eixo horizontal é o eixo das abscissas (eixo x) e o vertical é o eixo das ordenadas (eixo y). Os eixos dividem o plano em quatro regiões, denominadas quadrantes.

Figura 6 – Plano Cartesiano



Fonte: Dias (2024, p. 30).

Localização de pontos no plano cartesiano

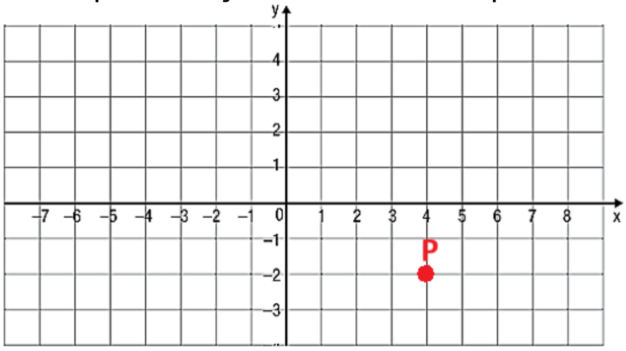
Cada ponto no plano cartesiano é identificado por um par ordenado (x, y), onde:

- x indica a posição no eixo das abscissas.
- y indica a posição no eixo das ordenadas.

Exemplo:

O ponto P é indicado por (4, −2). Isso significa que a abscissa (coordenada x) do ponto P é 4 e a ordenada (coordenada y) é −2.

Figura 7 – Representação do Ponto P no plano cartesiano

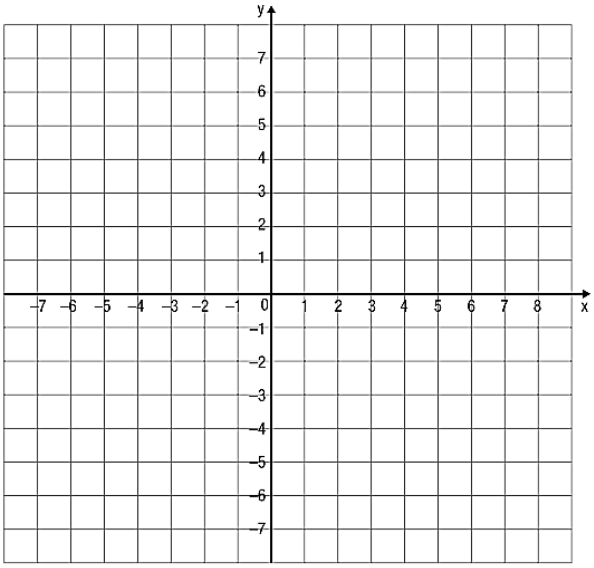


Fonte: elaborado pelos autores (2024).

Agora, vamos marcar no plano cartesiano os seguintes pontos:

A (4, 3)	**C** (7, 1)	**E** (2, −6)	**G** (−1, −7)	**I** (8, 0)
B (−3, 4)	**D** (−5, 2)	**F** (0, 6)	**H** (0 , −5)	**J** (−7, 0)

Figura 8 – Plano cartesiano



Fonte: Dias (2024, p. 19).

Resolução esperada:

Para marcar os pontos indicados no plano cartesiano, siga os passos abaixo. Esse procedimento parte da origem (0, 0) e orienta o movimento até a posição correta de cada ponto:

Coloque a ponta do lápis ou caneta na origem (0, 0) do plano cartesiano.

Observe o par ordenado (x, y) referente a cada ponto:

O primeiro valor (x) indica quantas unidades você deve se deslocar no eixo horizontal (x):

Se for positivo, mova para a direita;

Se for negativo, mova para a esquerda.

O segundo valor (y) indica quantas unidades se deve mover no eixo vertical (y):

Se for positivo, suba;

Se for negativo, desça.

Após realizar os dois movimentos (horizontal e vertical), marque o ponto no local correspondente e identifique-o com a letra fornecida na lista.

Exemplo de marcação:

Ponto A (4, 3)

→ Comece na origem (0, 0);

→ Vá 4 unidades para a direita;

→ Depois, suba 3 unidades;

→ Marque o ponto com a letra A.

Repita esse processo para os demais pontos:

B (–3, 4) → esquerda 3, sobe 4

C (7, 1) → direita 7, sobe 1

D (–5, 2) → esquerda 5, sobe 2

E (2, –6) → direita 2, desce 6

F (0, 6) → sem mover no x, sobe 6

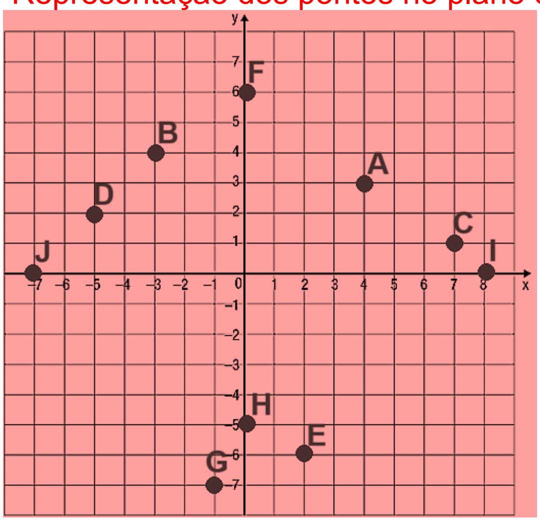
G (–1, –7) → esquerda 1, desce 7

H (0, –5) → sem mover no x, desce 5

I (8, 0) → direita 8, permanece sobre o eixo x

J (–7, 0) → esquerda 7, permanece sobre o eixo x

Figura 9 – Representação dos pontos no plano cartesiano



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

Atividade prática no GeoGebra

Vamos utilizar o GeoGebra para construir pontos, retas, segmentos de reta e semirretas.

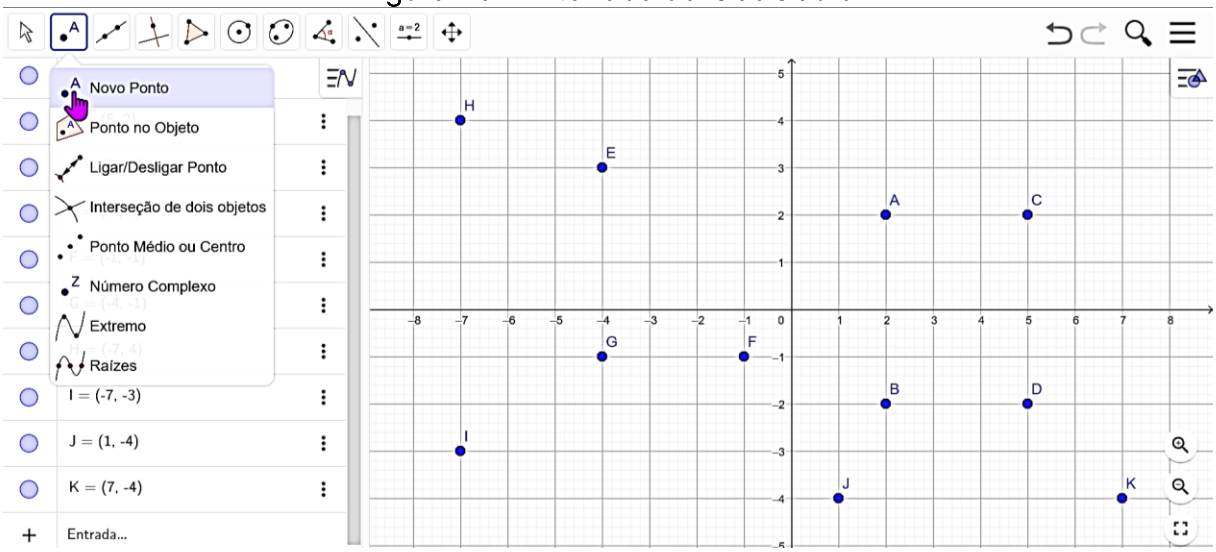
Passos:

❖ **Criar pontos:**

Selecione a ferramenta "Novo Ponto" e clique na tela para posicionar os pontos listados abaixo:

A = (2, 2)	B = (2, – 2)	C = (5, 2)	D = (5, – 2)
E = (– 4, 3)	F = (– 1, – 1)	G = (– 4, –1)	H = (–7, 4)
I = (–7, – 3)	J = (1, – 4)	K = (7, – 4)	

Figura 10 – Interface do GeoGebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

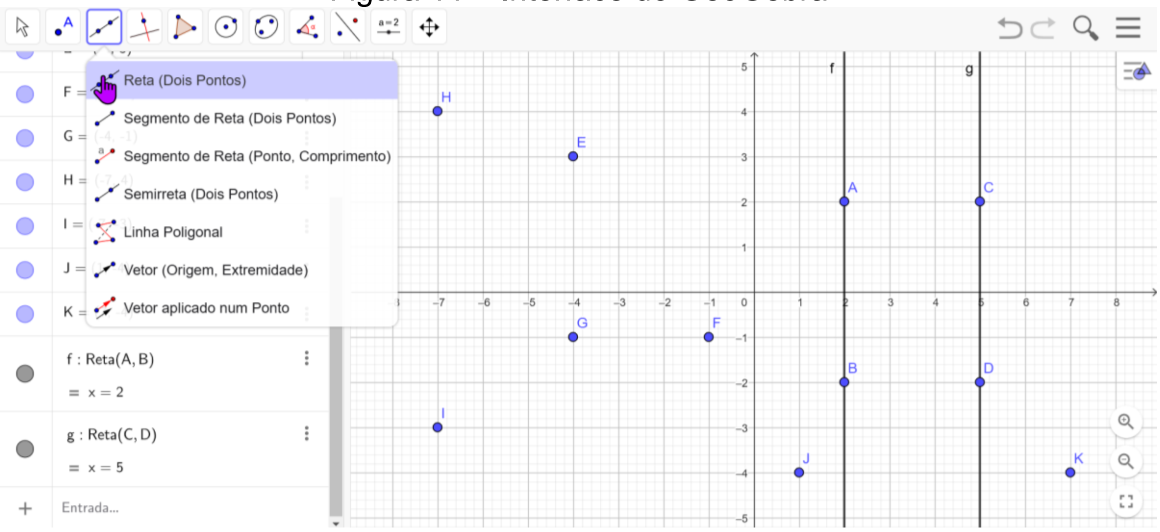
❖ **Criar retas:**

Selecione a ferramenta "Reta (Dois Pontos)" e trace as seguintes retas:

$$\overleftrightarrow{AB}$$

$$\overleftrightarrow{CD}$$

Figura 11 – Interface do GeoGebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

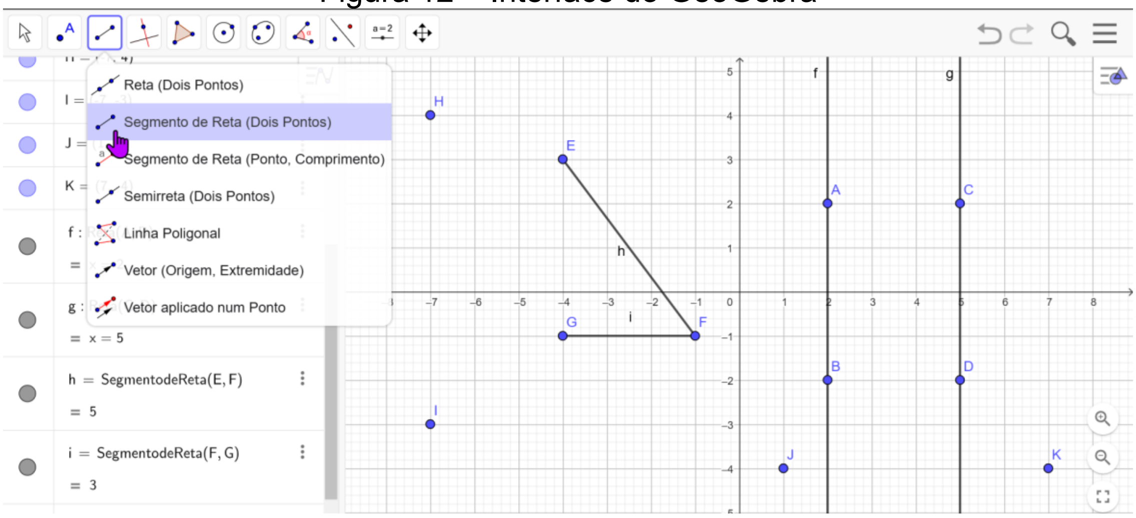
❖ **Criar segmentos de reta:**

Clique primeiro no ícone , depois selecione a ferramenta "Segmento de Reta (Dois Pontos)" e trace os segmentos:

$$\overline{EF}$$

$$\overline{FG}$$

Figura 12 – Interface do GeoGebra



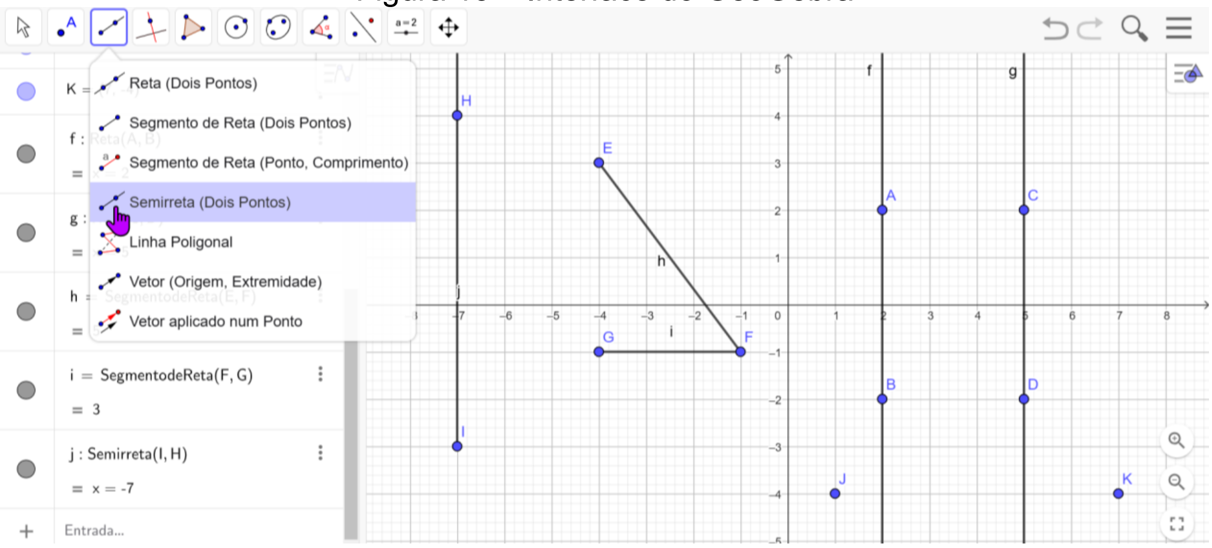
Fonte: elaborado pelos autores (2024).

❖ **Criar semirreta:**

Clique primeiro no ícone , depois selecione a ferramenta "Semirreta (Dois pontos)" e trace a semirreta:

$$\overrightarrow{IH}$$

Figura 13 – Interface do GeoGebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

Desafio

Existe alguma reta paralela entre as construções feitas? É possível construir uma reta que passe pelos pontos J e K e seja perpendicular às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$?

Resolução esperada:

1) Compreender o problema

Dados:

A = (2, 2) e B = (2, –2) → reta $\overleftrightarrow{AB}$ é vertical.

C = (5, 2) e D = (5, –2) → reta $\overleftrightarrow{CD}$ é vertical.

J = (1, –4) e K = (7, –4) → pontos com mesma ordenada, sugerindo reta horizontal.

Objetivos:

Verificar se $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas.

Verificar se é possível construir uma reta passando por J e K que seja perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$.

2) Estabelecer um plano

Estratégia:

Analisar a inclinação das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$. Se ambas forem verticais e não se interceptarem, são paralelas.

Observar a posição dos pontos J e K para verificar se determinam uma reta horizontal.

Usar o GeoGebra para traçar a reta $\overleftrightarrow{JK}$ e verificar visualmente sua perpendicularidade com $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$.

3) Executar o plano

As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ têm a mesma direção (ambas verticais) e não se cruzam, pois têm abscissas diferentes → são paralelas.

J e K compartilham a mesma ordenada (– 4) → reta $\overleftrightarrow{JK}$ é horizontal.

No GeoGebra:

Selecione a ferramenta “Reta (Dois Pontos)”.

Clique nos pontos J e K para traçar a reta $\overleftrightarrow{JK}$.

Observe a formação de ângulos retos com $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$.

4) Retrospecto (verificação)

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$: retas verticais com mesma inclinação e diferentes abscissas.

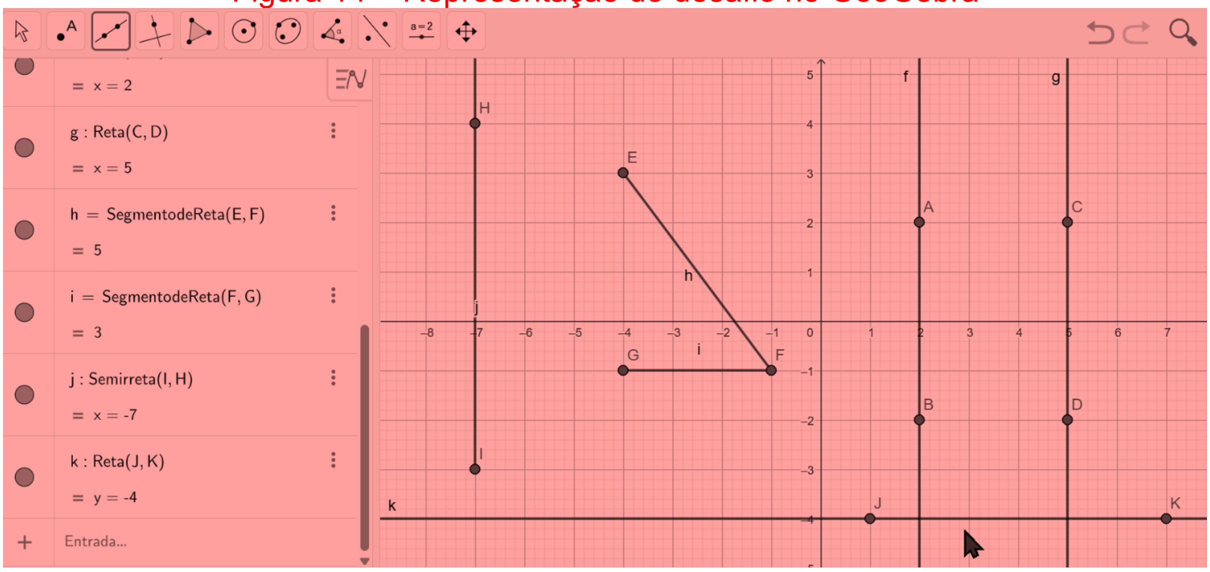
$\overleftrightarrow{JK} \perp \overleftrightarrow{AB}$ e $\perp \overleftrightarrow{CD}$: reta horizontal que forma ângulos retos com as verticais.

A construção no GeoGebra confirma visualmente o paralelismo e a perpendicularidade entre as retas.

Resposta:

Sim, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas, pois são verticais e não se interceptam. Sim, é possível construir uma reta que passe pelos pontos J e K e que seja perpendicular às retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$.

Figura 14 – Representação do desafio no GeoGebra



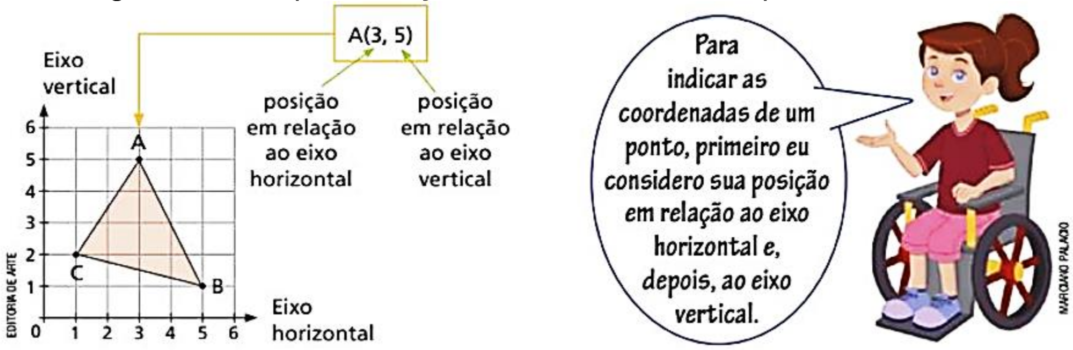
Fonte: elaborado pelos autores (2024).

Atividade de aprendizagem

Atividade 1

Bianca está representando figuras em um programa de computador por meio de coordenadas para localizar cada ponto em um sistema de eixos. Observe.

Figura 15 – Representação de coordenadas no plano cartesiano



Fonte: Souza (2018, p. 95).

De acordo com as informações anteriores, podemos afirmar que as coordenadas (4, 2) e (2, 4) indicam o mesmo ponto nesse sistema de eixos?

Resolução esperada:

1) Compreender o problema

Dados:

O triângulo está representado no plano cartesiano, com vértices nos pontos:

A = (3, 5), B = (4, 1) e C = (1, 2).

Há dois pontos destacados:

(4, 2)

(2, 4)

Objetivo:

Verificar se os pontos (4, 2) e (2, 4) ocupam a mesma posição no plano cartesiano e identificar se estão dentro ou fora da área do triângulo ABC.

2) Estabelecer um plano

Estratégia:

Localizar os pontos (4, 2) e (2, 4) no plano cartesiano, observando a ordem das coordenadas.

Comparar as posições dos pontos.

Observar visualmente sua localização em relação ao triângulo ABC.

3) Executar o plano

Marcar os pontos (4, 2) e (2, 4) no plano cartesiano.

O ponto (4, 2) tem abscissa 4 e ordenada 2, situando-se próximo ao vértice B e dentro da área do triângulo ABC.

O ponto (2, 4) tem abscissa 2 e ordenada 4, localizando-se fora da região delimitada pelo triângulo.

Embora usem os mesmos números, a troca da ordem das coordenadas altera a posição dos pontos no plano.

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

Os pares ordenados são distintos: (4, 2) ≠ (2, 4).

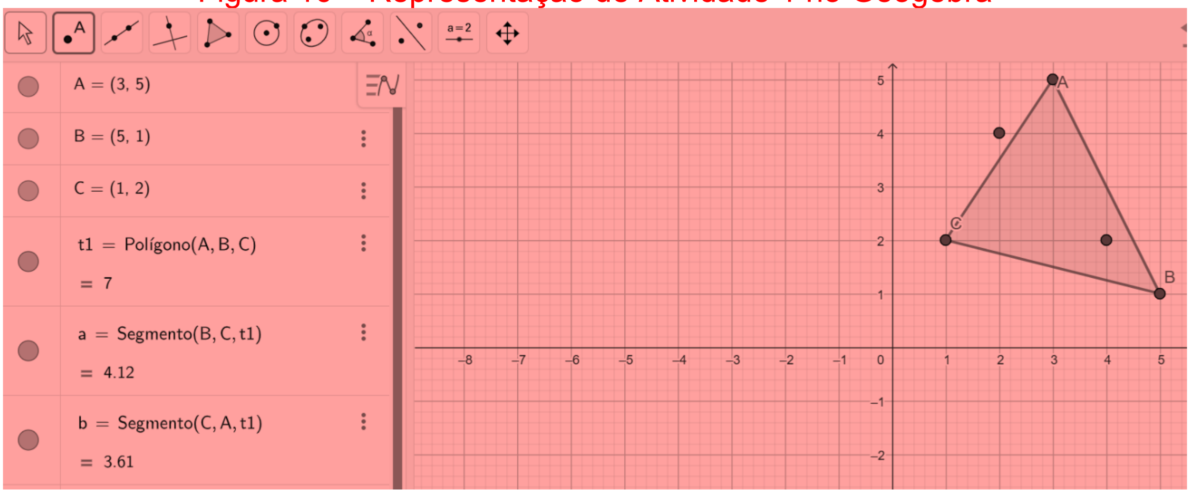
Os pontos ocupam posições diferentes no plano cartesiano.

A análise visual confirma que (4, 2) está dentro do triângulo ABC e (2, 4) está fora.

Resposta:

Os pontos (4, 2) e (2, 4) não indicam o mesmo ponto no plano cartesiano. O ponto (4, 2) está dentro do triângulo ABC, enquanto o ponto (2, 4) está fora da figura sombreada. Essa diferença ocorre porque a ordem dos valores nas coordenadas influencia diretamente a localização de cada ponto no plano.

Figura 16 – Representação de Atividade 1 no Geogebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

Atividade 2

A imagem a seguir apresenta uma planilha eletrônica na qual as colunas são representadas por letras e as linhas, por números. Nela, o código D5, por exemplo, indica a célula dada pela interseção da coluna D com a linha 5.

Figura 17 – Planilha de Vendas Semanais

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Lanches**	**Vendas da semana**							
2		Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira	Sábado	Domingo	**TOTAL**
3	X-salada	12	11	9	19	25	41	29	146
4	Bauru	8	15	14	18	30	36	37	158
5	X-búrguer	7	13	17	18	23	40	32	150
6	**TOTAL**	27	39	40	55	78	117	98	454

Keithy Mostachi

Fonte: Pataro (2018, p. 174).

a) Em qual linha e coluna está registrada a quantidade de X-salada vendida na terça-feira?

b) Qual valor aparece na célula F4 e o que ele representa?

Resolução esperada:

1) Compreender o problema

Dados:

A imagem apresenta uma planilha eletrônica onde:

As colunas são identificadas por letras (A, B, C...).

As linhas são identificadas por números (1, 2, 3...).

A célula D5 representa a interseção da coluna D com a linha 5.

A tabela exibe a quantidade de lanches vendidos durante a semana, com os tipos de lanche nas linhas e os dias da semana nas colunas.

Objetivos:

Identificar em qual célula está registrada a quantidade de X-salada vendida na terça-feira.

Verificar o valor contido na célula F4 e interpretar o que ele representa.

2) Estabelecer um plano

Estratégia:

Localizar a linha correspondente ao lanche X-salada.

Localizar a coluna correspondente à terça-feira.

Localizar a célula F4, identificando a linha (Bauru) e a coluna (sexta-feira), para interpretar o valor.

3) Executar o plano

A linha 3 corresponde ao lanche X-salada.

A coluna C representa a terça-feira.

Portanto, a célula procurada é C3, cujo valor é 11.

A célula F4 está na interseção da linha 4 (Bauru) com a coluna F (sexta-feira).

O valor presente nessa célula é 30.

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

Célula C3: valor 11, que representa a quantidade de X-salada vendida na terça-feira.

Célula F4: valor 30, que representa a quantidade de Baurus vendidos na sexta-feira.

Resposta:

A quantidade de X-salada vendida na terça-feira está registrada na célula C3 (linha 3, coluna C). O valor 30 aparece na célula F4 e representa a quantidade de Baurus vendidos na sexta-feira.

Resumo

- Ponto: unidade mais simples da Geometria, sem dimensão. Representa uma localização específica no plano.
- Reta: linha contínua que se estende infinitamente em ambas as direções, sem curvas.
- Plano: superfície plana ilimitada que se estende infinitamente em todas as direções.
- Retas Coplanares: retas que estão no mesmo plano. Podem ser paralelas, coincidentes, concorrentes ou perpendiculares.
- Plano Cartesiano: sistema de coordenadas que permite localizar pontos no plano usando pares ordenados (x, y).

Referências

ALMEIDA, Taís Ribeiro Drabik de. **Sistema positivo de ensino:** ensino fundamental: 6° ano: matemática. 3. ed. Atual. Curitiba: Cia. Bras. de Educação e Sistema de Ensino, 2025.

DIAS, Camilla Ehrat. **Sistema positivo de ensino:** 9º ano: ensino fundamental: anos finais. 3. ed. Curitiba: Cia. Bras. de Educação e Sistemas de Ensino, 2024

SOUZA, Joamir Roberto de. **Matemática realidade & tecnologia**: 6º ano: ensino fundamental: anos finais. 1. ed. São Paulo: FTD, 2018.

PATARO, Patricia Moreno. **Matemática essencial** – 6º ano ensino fundamental, anos finais. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2018.

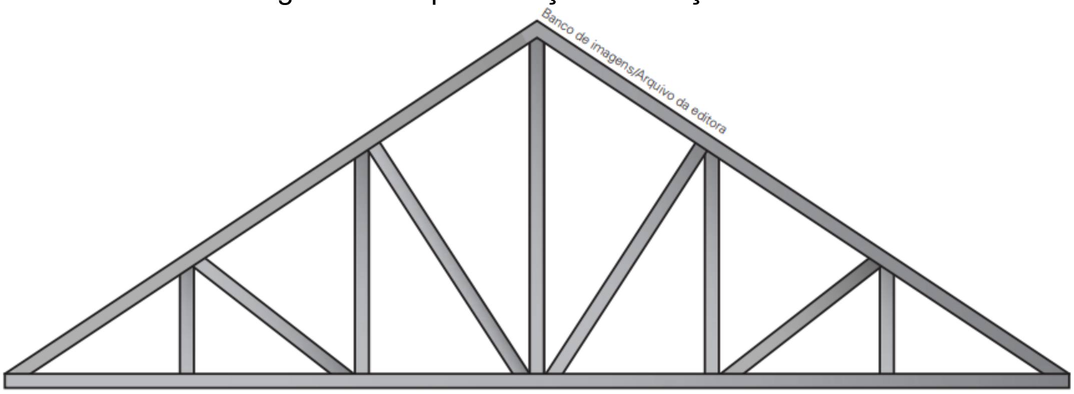
AULA 5 – Geometria: triângulos e suas propriedades

Nesta aula, vamos explorar os conceitos relacionados aos triângulos, como a soma dos ângulos internos, o cálculo do perímetro e o Teorema de Pitágoras. Para aprofundar o aprendizado desses conceitos, resolveremos exemplos utilizando a metodologia de Resolução de Problemas (RP) e o *software* GeoGebra, que nos auxiliará na visualização e construção de triângulos de forma dinâmica e interativa. Ao final desta aula, espera-se que você seja capaz de identificar as propriedades dos triângulos, aplicar o Teorema de Pitágoras e utilizar o GeoGebra para construir e analisar triângulos.

Triângulo

O triângulo é um polígono de três lados, três vértices e três ângulos internos. É uma das figuras geométricas mais estudadas e utilizadas, desde a Antiguidade até os dias atuais. Uma das propriedades mais importantes do triângulo é a sua rigidez geométrica, que faz com que ele não se deforme quando submetido a forças externas. Por isso, os triângulos são amplamente utilizados em estruturas de engenharia, como treliças e pontes.

Figura 1 – Representação de treliça metálica



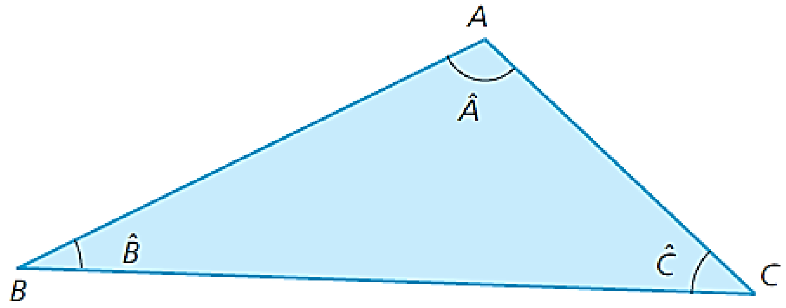
Fonte: Dante (2018, p. 160).

Elementos de um triângulo

Em um triângulo, os elementos básicos são:

- **Vértices:** pontos onde os lados se encontram (A, B e C).
- **Lados:** segmentos de reta que ligam os vértices ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$).
- **Ângulos internos:** ângulos formados pelos lados do triângulo ($\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$).

Figura 2 –Triângulo ABC

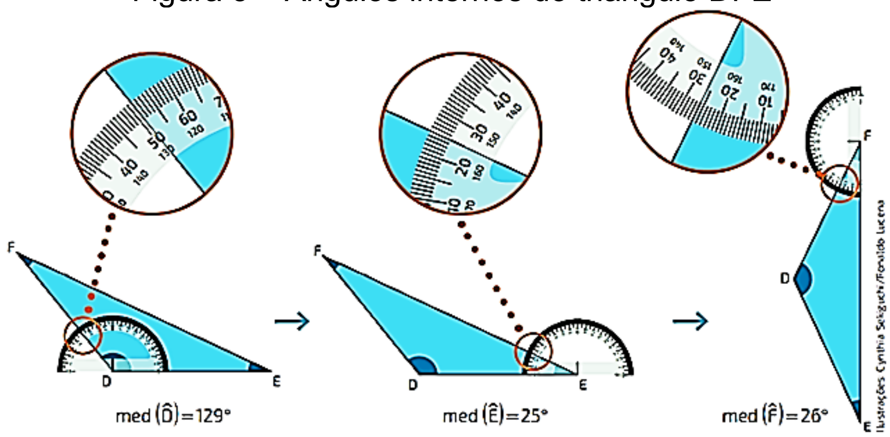


Fonte: Sampaio (2018, p. 171).

Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

Uma das propriedades mais importantes do triângulo é que a soma das medidas dos seus ângulos internos é sempre igual a 180°. Isso pode ser verificado medindo os ângulos de qualquer triângulo com um transferidor.

Figura 3 – Ângulos internos do triângulo DFE



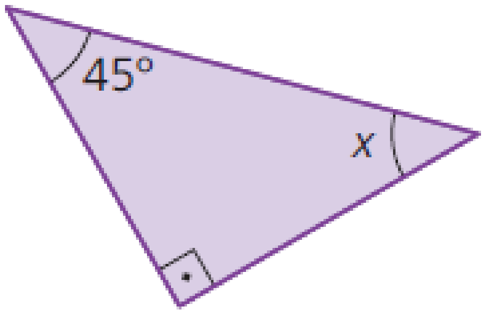
Fonte: Pataro (2018, p. 201).

A soma das medidas de abertura dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180°.

Exemplo:

No triângulo abaixo, os ângulos medem 45°, 90° e x. Qual é o valor de x?

Figura 4 – Triângulo retângulo



Fonte: Sampaio (2018, p. 179).

Resolução:

Sabemos que a soma das medidas dos ângulos internos é 180°. Portanto:

$$45° + 90° + x = 180°$$

$$x = 180° - 90° - 45°$$

$$x = 180° - 135°$$

$$x = 45°$$

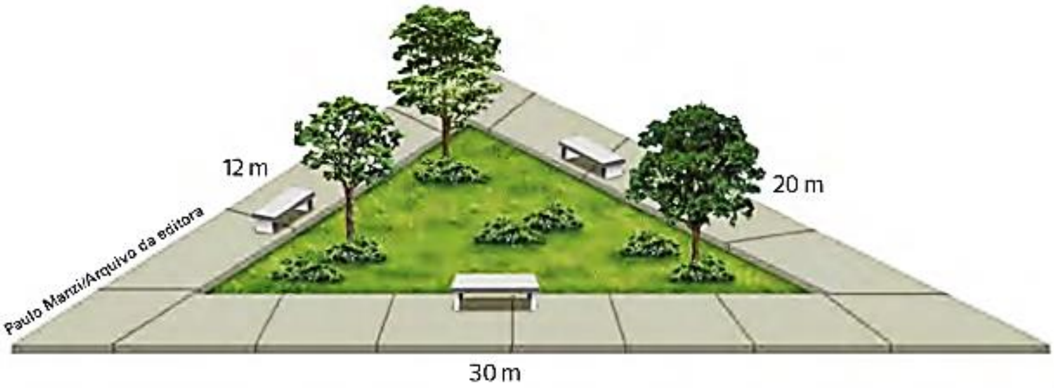
Perímetro do triângulo

O perímetro de um triângulo é a soma das medidas dos seus três lados. Ele representa o comprimento total do contorno do triângulo.

Exemplo:

Uma praça tem a forma triangular com lados de 30 m, 20 m e 12 m. Qual é o perímetro da praça?

Figura 5 – Representação de uma praça triangular



Fonte: Dante (2015, p. 285).

Resolução:

P = 30 m + 20 m + 12 m = 62 m

Resolução utilizando a Resolução de Problemas (RP):

1) Compreender o problema

Dados:

A praça tem formato triangular.

Os lados do triângulo medem 30 metros, 20 metros e 12 metros.

Objetivo:

Calcular o perímetro da praça, ou seja, a soma das medidas dos seus três lados.

2) Estabelecer um plano

Estratégia:

Utilizar a fórmula do perímetro de um triângulo: P = a + b + c, onde a, b e c são os comprimentos dos lados do triângulo.

3) Executar o plano

Substituindo os valores na fórmula: P = 30 + 20 + 12 = 62 m

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

Todos os lados foram corretamente somados.

A unidade de medida foi mantida em metros (m).

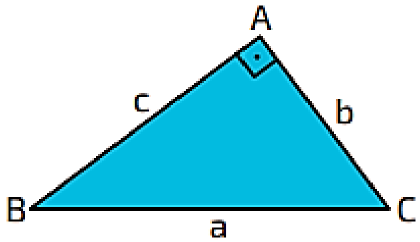
Resposta:

O perímetro da praça é igual a 62 metros.

Teorema de Pitágoras

Ele estabelece que, em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto) é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Figura 6 – Representação do Teorema de Pitágoras

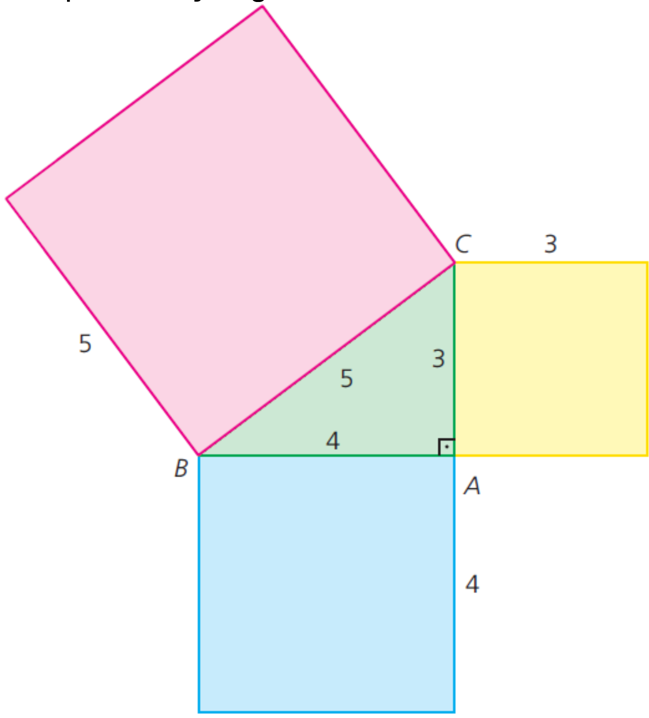


$$a^2 = b^2 + c^2$$

Fonte: Pataro (2018, p. 194).

Em um triângulo retângulo qualquer, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

Figura 7 – Representação geométrica do Teorema de Pitágoras

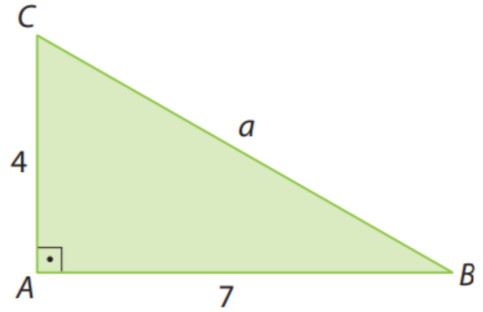


Fonte: Sampaio (2018, p. 122).

Exemplos:

a) Determine a medida da hipotenusa do triângulo abaixo.

Figura 8 – Triângulo retângulo ABC



Fonte: Moderna (2018, p. 150).

<u>*Resolução:*</u>

1) Compreender o problema

Dados:

O triângulo é retângulo.

AC = 4 (cateto).

AB = 7 (cateto).

Objetivo:

Determinar a medida da hipotenusa do triângulo retângulo ABC.

2) Estabelecer um plano

Estratégia:

Aplicar o Teorema de Pitágoras, que estabelece: $a^2 = b^2 + c^2$

Substituir os valores dos catetos (b = 4 e c = 7).

Resolver a equação para encontrar o valor da hipotenusa a

3) Executar o plano

Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = 7^2 + 4^2$$

$$a^2 = 49 + 16$$

$$a^2 = 65$$

$$a = \sqrt[2]{65}$$

$$a \cong 8{,}06$$

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

Recalculando com a aproximação $a \cong 8{,}06$:

$$(8{,}06)^2 \cong 7^2 + 4^2$$

$$64{,}97 \cong 49 + 16$$

$$64{,}97 \cong 65$$

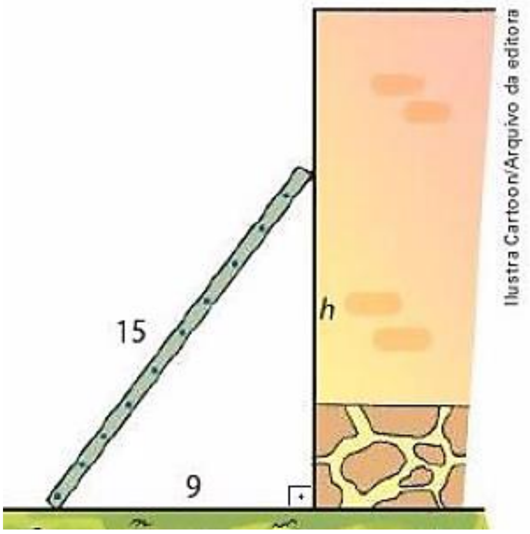
A diferença entre 64,97 e 65 é pequena, confirmando que a aproximação está correta.

Resposta:

A medida da hipotenusa do triângulo retângulo ABC é aproximadamente $\sqrt[2]{65} \cong 8{,}06$.

b) Uma escada mede 15 m de comprimento está apoiada a 9 m de uma parede. Qual é a distância entre o topo da escada e o chão?

Figura 9 – Escada apoiada em uma parede



Fonte: Bigode (2015, p. 150).

<u>Resolução:</u>

1) Compreender o problema

Dados:

O comprimento da escada é 15 metros (hipotenusa).

A base da escada está a 9 metros da parede (um cateto).

A escada e a parede formam um triângulo retângulo.

Objetivo:

Determinar a altura h, ou seja, a distância do topo da escada até o chão.

2) Estabelecer um plano

Estratégia:

Aplicar o Teorema de Pitágoras: $h^2 + 9^2 = 15^2$

Resolver a equação para encontrar h, a altura procurada.

3) Executar o plano

Substituímos os valores conhecidos na equação do Teorema de Pitágoras:

$$h^2 + 9^2 = 15^2$$
$$h^2 + 81 = 225$$
$$h^2 = 225 - 81$$
$$h^2 = 144$$
$$h = \sqrt[2]{144}$$
$$h = 12$$

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

Substituímos o valor de h = 12 na equação:

$$12^2 + 9^2 = 15^2$$
$$144 + 81 = 225$$
$$225 = 225$$

A igualdade é confirmada, validando o cálculo realizado.

Resposta:

A distância entre o topo da escada e o chão é de 12 metros.

Explorando o Geogebra

Vamos utilizar o GeoGebra para construir triângulos e verificar as propriedades estudadas.

Atividade 1: Construindo um triângulo e verificando a soma das medidas dos ângulos internos

- **Criar o triângulo:**

  Selecione a ferramenta "Polígono" na barra de ferramentas;

Clique em três locais distintos na "Janela de Visualização" para criar os pontos A, B e C;

Clique novamente no ponto inicial (A) para fechar o triângulo ABC.

❖ **Medir os ângulos internos:**

Selecione a ferramenta "Ângulo";

Clique nos pontos A, B e C, nessa ordem, para medir o ângulo $\hat{B}$;

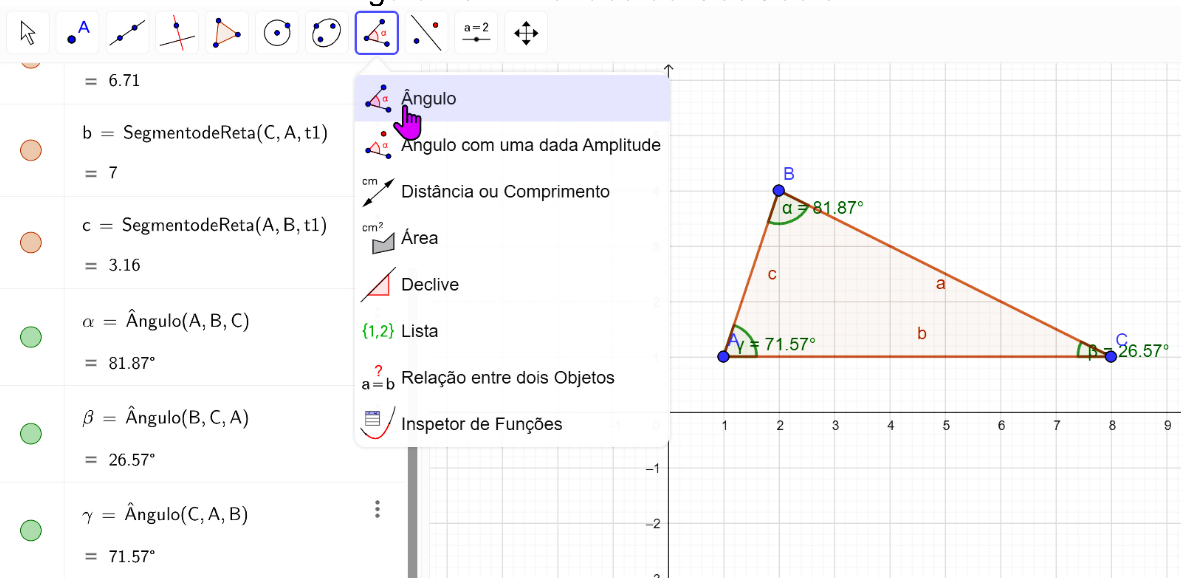
Repita o procedimento, clicando nos pontos B, C e A, para medir o ângulo $\hat{C}$;

Por fim, clique nos pontos C, A e B para medir o ângulo $\hat{A}$.

❖ **Verificar a soma das medidas dos ângulos:**

Após medir os três ângulos, observe que a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é igual a 180°.

Figura 10 – Interface do GeoGebra



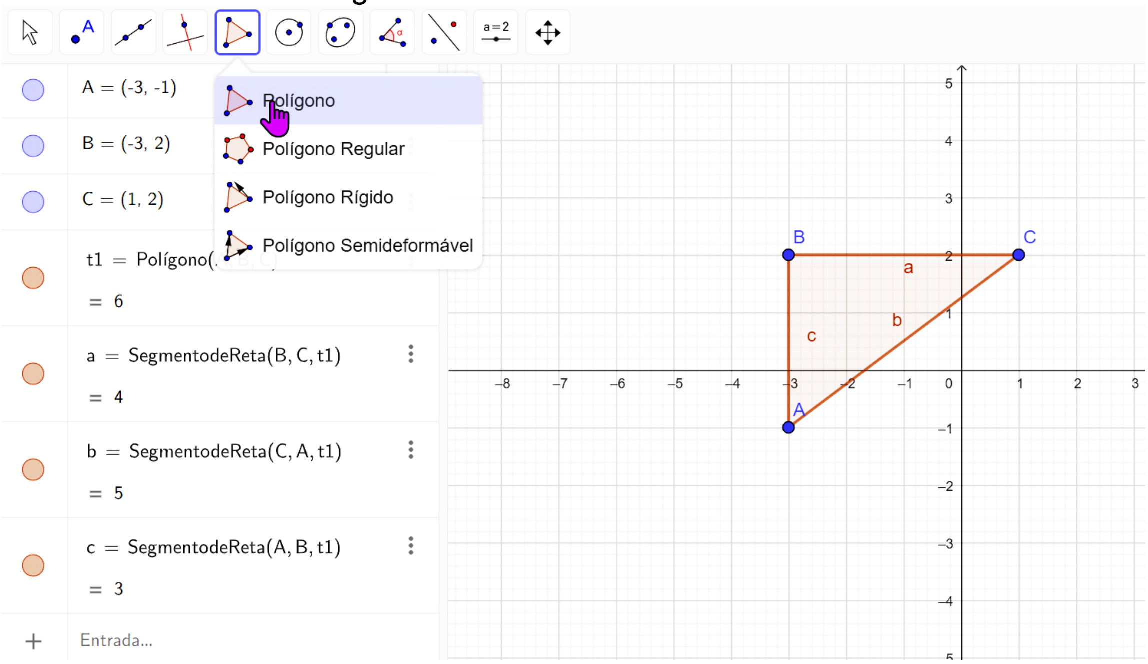
Fonte: elaborado pelos autores (2024).

Atividade 2: Verificando o Teorema de Pitágoras

❖ **Criar um triângulo retângulo:**

Selecione a ferramenta "Polígono" e clique em três locais na "Janela de Visualização" para criar os pontos A, B e C;

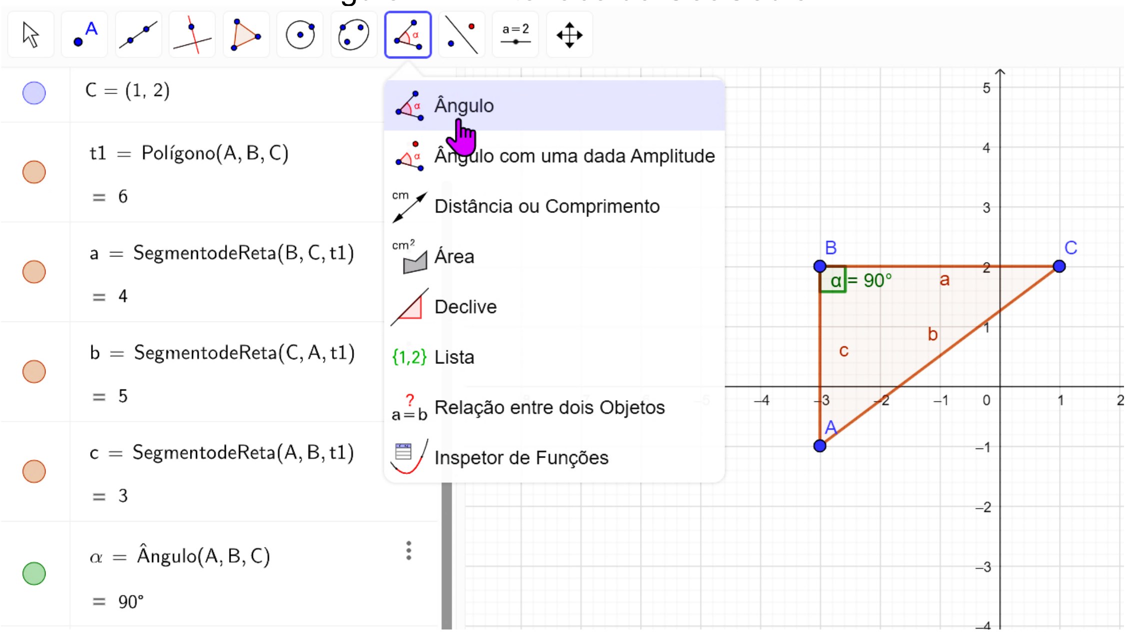
Figura 11 – Interface do GeoGebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

Certifique-se de que o triângulo formado seja retângulo. Use a ferramenta "Ângulo" para verificar se um dos ângulos mede 90°.

Figura 12 – Interface do GeoGebra

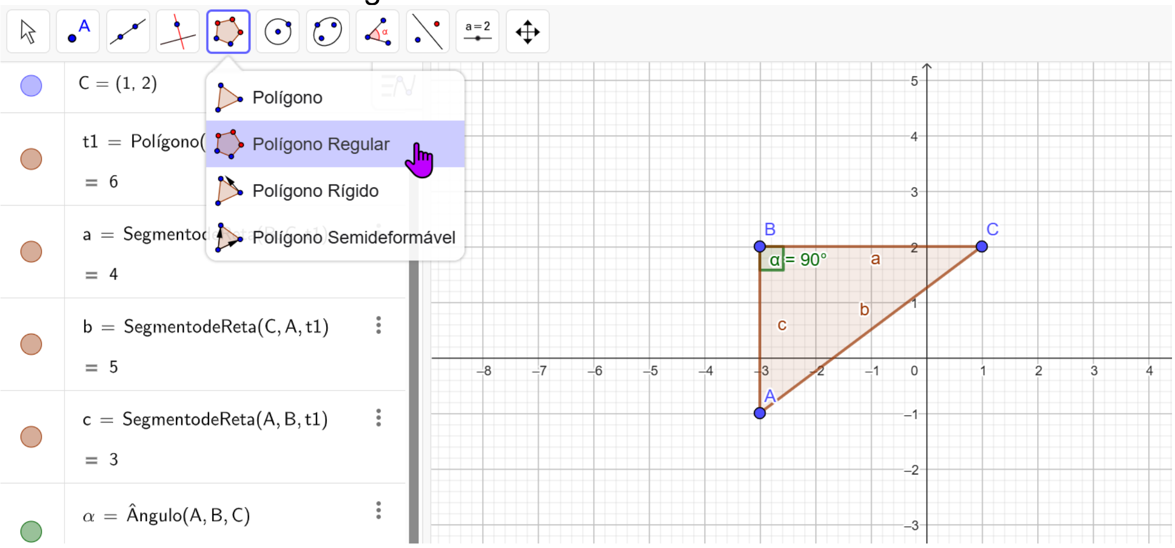


Fonte: elaborado pelos autores (2024).

❖ **Construir quadrados sobre os lados:**

Selecione a ferramenta "Polígono Regular";

Figura 13 – Interface do GeoGebra

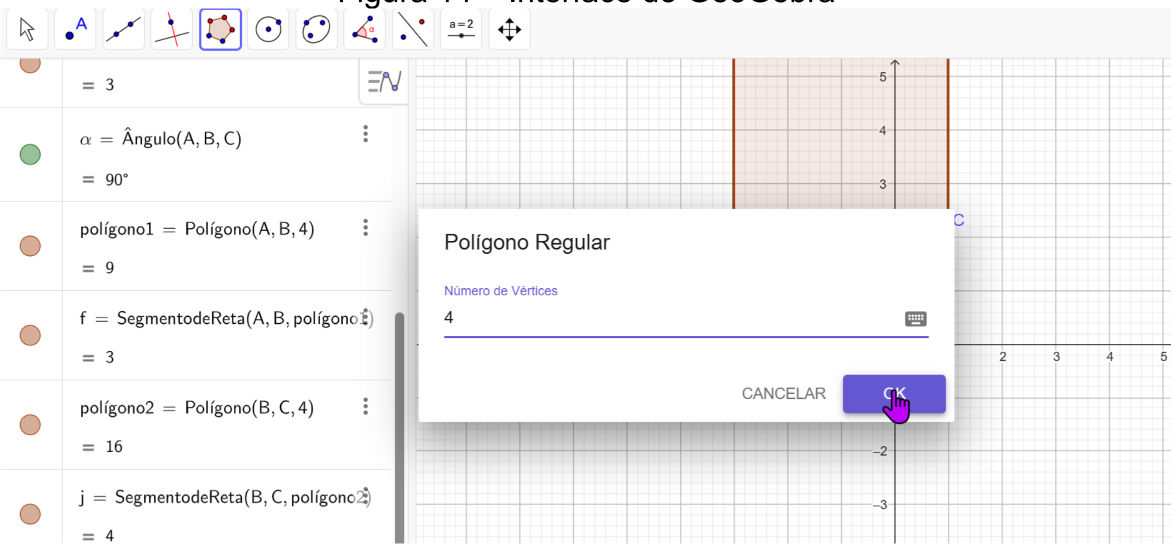


Fonte: elaborado pelos autores (2024).

Clique nos pontos A e B para criar um quadrado sobre o primeiro cateto;

Repita o processo, clicando nos pontos B e C para criar um quadrado sobre o segundo cateto;

Figura 14 – Interface do GeoGebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

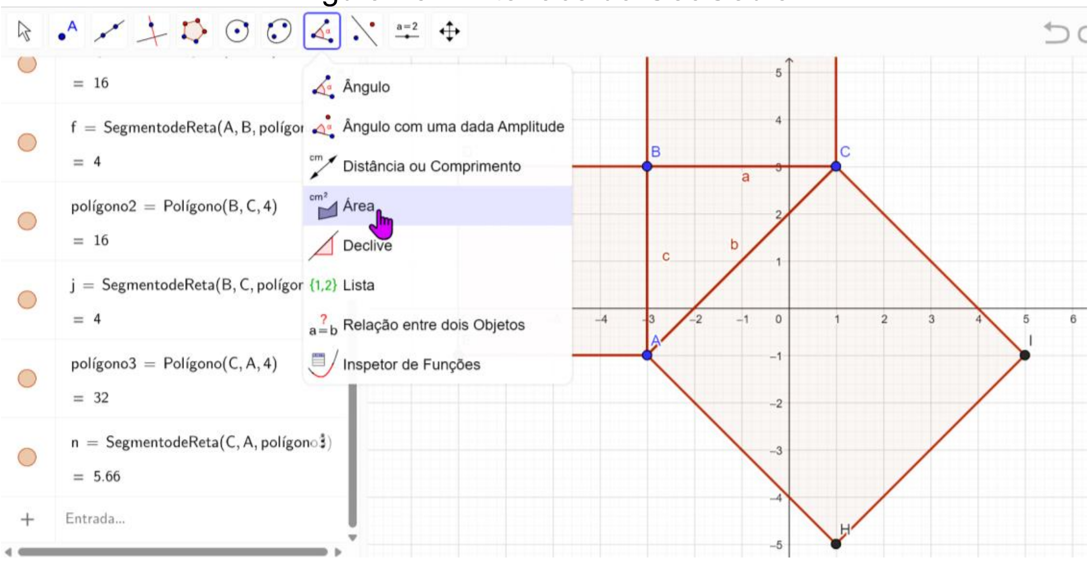
Por fim, clique nos pontos C e A para criar um quadrado sobre a hipotenusa.

❖ **Calcular as áreas dos quadrados:**

Selecione a ferramenta "Área";

Clique sobre cada quadrado para exibir sua área na "Janela de Visualização".

Figura 15 – Interface do GeoGebra

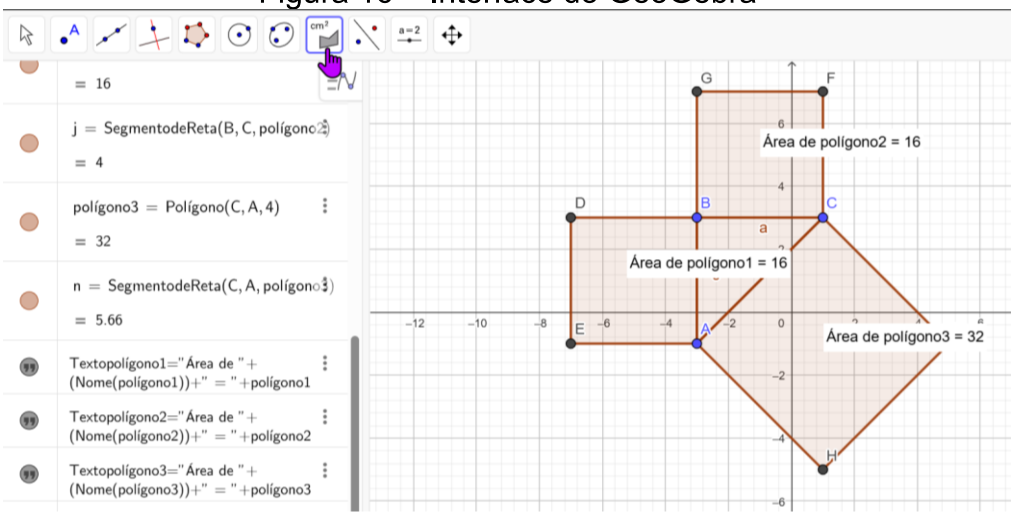


Fonte: elaborado pelos autores (2024).

❖ **Verificar o Teorema de Pitágoras:**

Observe que a medida da área do quadrado sobre a hipotenusa é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados sobre os catetos.

Figura 16 – Interface do GeoGebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

Investigue

Utilizando a ferramenta "Mover" no GeoGebra, altere a posição dos vértices de um triângulo e observe os seguintes aspectos:

- A soma das medidas dos ângulos internos do triângulo permanece 180° mesmo após a movimentação dos vértices?
- O que ocorre com o perímetro do triângulo ao modificar sua forma? Ele aumenta, diminui ou se mantém constante?

Dica: Utilize as ferramentas "Ângulo" e "Distância" no GeoGebra para medir os ângulos internos e os lados do triângulo após mover os vértices. Registre suas observações e justifique suas respostas com base nas propriedades dos triângulos.

Resolução esperada:

1) Compreender o problema

Dados:

Construção de um triângulo qualquer no *software* GeoGebra.

Após a construção, será necessário movimentar os vértices utilizando a ferramenta “Mover”.

Objetivos:

Verificar se a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo se mantém igual a 180°, mesmo após movimentar os vértices.

Analisar se o perímetro do triângulo se altera quando sua forma é modificada.

2) Estabelecer um plano

Estratégia:

Utilizar o GeoGebra para construir um triângulo inicial.

Medir os ângulos internos e o perímetro com as ferramentas "Ângulo" e "Distância ou Comprimento".

Utilizar a ferramenta "Mover" para alterar a posição dos vértices.

Medir novamente os ângulos internos e o perímetro após a movimentação.

Comparar os resultados obtidos antes e depois da movimentação.

3) Executar o plano

Construir o triângulo ABC com vértices: A = (−8, −3) ; B = (−8, 2) e C = (4, −3).

No triângulo inicialmente construído, foram obtidos os seguintes valores:

Ângulos internos:

$$\hat{A} = \gamma = 90°$$

$$\hat{B} = \alpha = 67{,}38°$$

$$\hat{C} = \beta = 22{,}62°$$

Soma dos ângulos internos:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 90° + 67{,}38° + 22{,}62° = 90° + 90° = 180°$$

Perímetro:

$$AB + BC + CA = 5 + 13 + 12 = 30$$

Após movimentar os vértices para as posições A = (−7, −2) ; B = (−5, 2) e. C = (1, −2) , os valores observados foram:

Ângulos internos:

$$\hat{A} = \gamma = 63{,}43°$$

$$\hat{B} = \alpha = 82{,}87°$$

$$\hat{C} = \beta = 33{,}69°$$

Soma dos ângulos internos:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 63{,}43° + 82{,}87° + 33{,}69° = 146{,}30° + 33{,}69° = 179{,}99° \cong 180°$$

Perímetro:

$$AB + BC + CA = 4{,}47 + 7{,}21 + 8 = 19{,}68$$

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

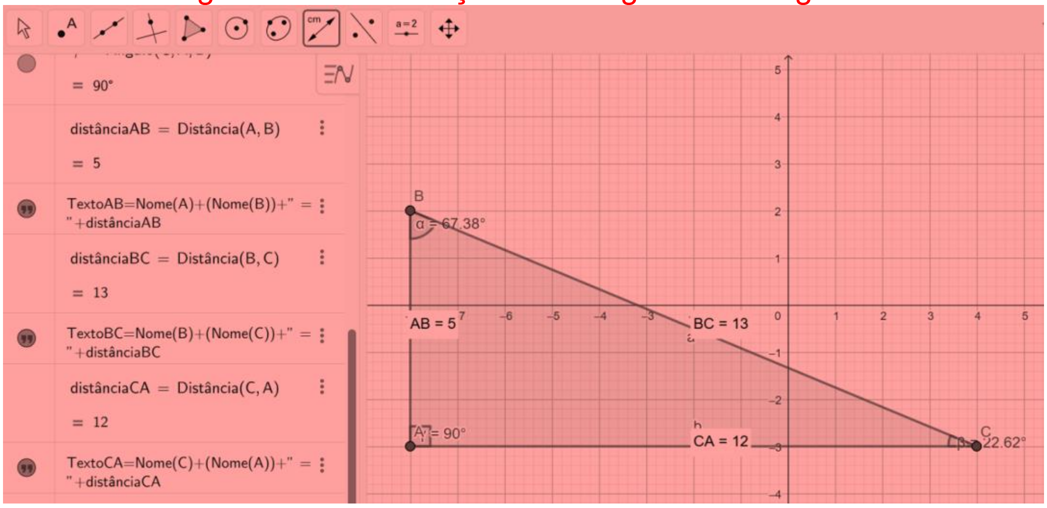
A soma dos ângulos internos manteve-se praticamente constante (≅ 180°), confirmando uma propriedade fundamental dos triângulos.

O perímetro variou com a movimentação dos vértices, evidenciando que a forma do triângulo mudou, alterando os comprimentos dos lados.

Resposta:

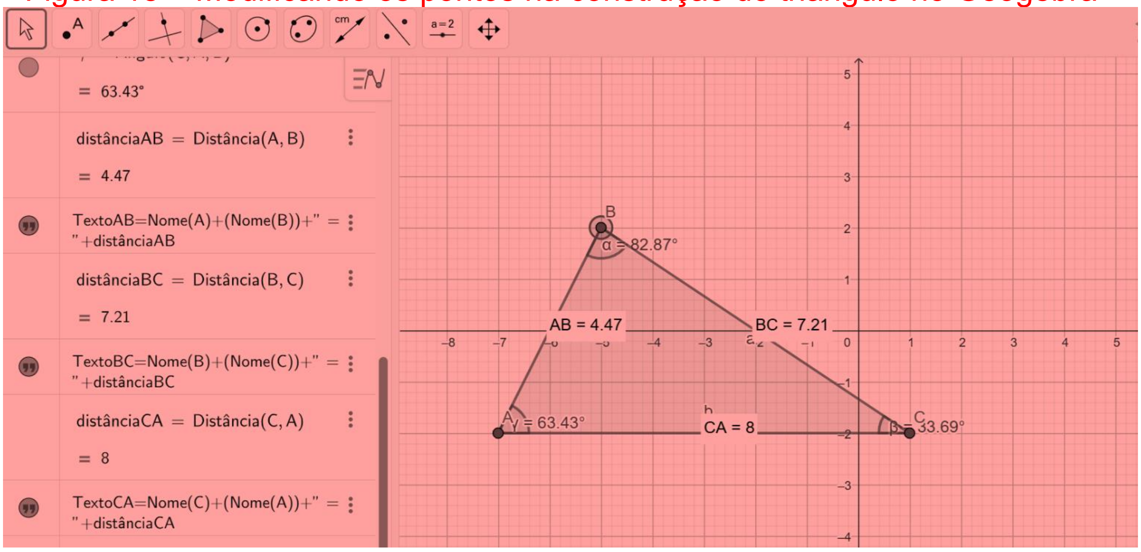
Sim, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo permanece igual a 180°, mesmo quando seus vértices são movimentados. Já, o perímetro pode aumentar ou diminuir, pois depende das medidas dos lados, que variam conforme a forma do triângulo.

Figura 17 – Construção do triângulo no Geogebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

Figura 18 – Modificando os pontos na construção do triângulo no Geogebra



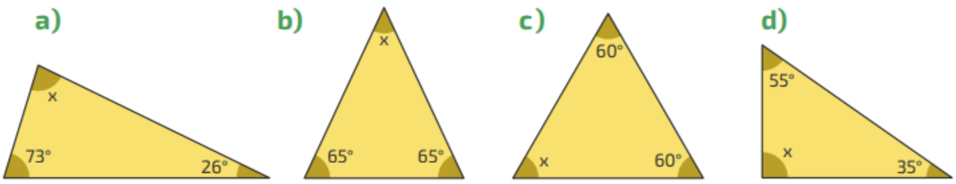
Fonte: elaborado pelos autores (2024).

Atividades de aprendizagem

Atividade 1

Determine a quantos graus corresponde a medida x em cada triângulo.

Figura 19 – Triângulos com um ângulo desconhecido



Fonte: Pataro (2018, p. 203).

<u>Resolução esperada:</u>

a)

1) Compreender o problema

Dados:

Um triângulo com três ângulos internos: x, 73° e 26°.

Objetivos:

Determinar a medida do ângulo representado por x.

2) Estabelecer um plano

1ª Estratégia:

Utilizar a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos: a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180°.

$$x + 73° + 26° = 180°$$

2ª Estratégia:

Construir um triângulo no GeoGebra semelhante ao proposto:

Usar a ferramenta “Polígono” para criar um triângulo;

Utilizar a ferramenta “Ângulo” para medir os ângulos;

Ajustar os vértices com a ferramenta “Mover” até que dois ângulos internos sejam aproximadamente 73° e 26°;

Observar o valor do terceiro ângulo.

3) Executar o plano

Cálculo:

$$x + 73° + 26° = 180°$$

$$x + 99° = 180°$$

$$x = 180° - 99°$$

$$x = 81°$$

Construção no GeoGebra:

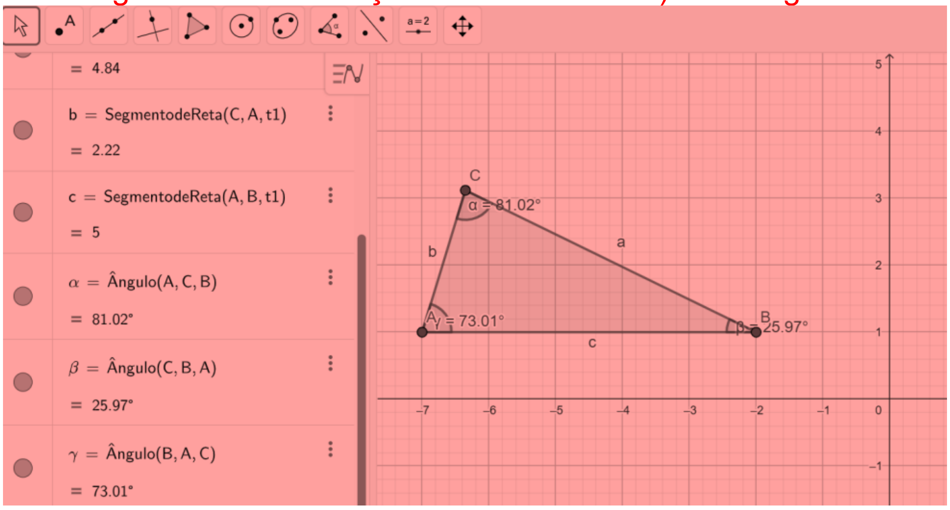
Criar o triângulo no GeoGebra;

Medir os três ângulos internos com a ferramenta “Ângulo”;

Ajustar os vértices do triângulo com a ferramenta “Mover”, de modo que dois ângulos internos tenham medidas aproximadamente iguais a 73° e 26°;

Verificar a medida do terceiro ângulo, que será igual ou aproximadamente 81°.

Figura 20 – Construção da Atividade 1 a) no Geogebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

A soma das medidas dos três ângulos: 73° + 26° + 81° = 180°, confirmando a validade do resultado obtido.

A construção no GeoGebra confirma que o ângulo restante mede aproximadamente 81°.

Resposta:

A medida do ângulo x é 81°.

b)

1) Compreender o problema

Dados:

Um triângulo com três ângulos internos: x, 65° e 65°.

Objetivos:

Determinar a medida do ângulo representado por x.

2) Estabelecer um plano

1ª Estratégia:

Utilizar a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos: a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180°.

$$x + 65° + 65° = 180°$$

2ª Estratégia:

Construir um triângulo no GeoGebra semelhante ao proposto:

Usar a ferramenta “Polígono” para criar um triângulo;

Utilizar a ferramenta “Ângulo” para medir os ângulos;

Ajustar os vértices com a ferramenta “Mover”, de modo que dois ângulos internos tenham medidas aproximadamente iguais a 65°;

Observar o valor do terceiro ângulo.

3) Executar o plano

Cálculo:

$$x + 65° + 65° = 180°$$
$$x + 130° = 180°$$
$$x = 180° - 130°$$
$$x = 50°$$

Construção no GeoGebra:

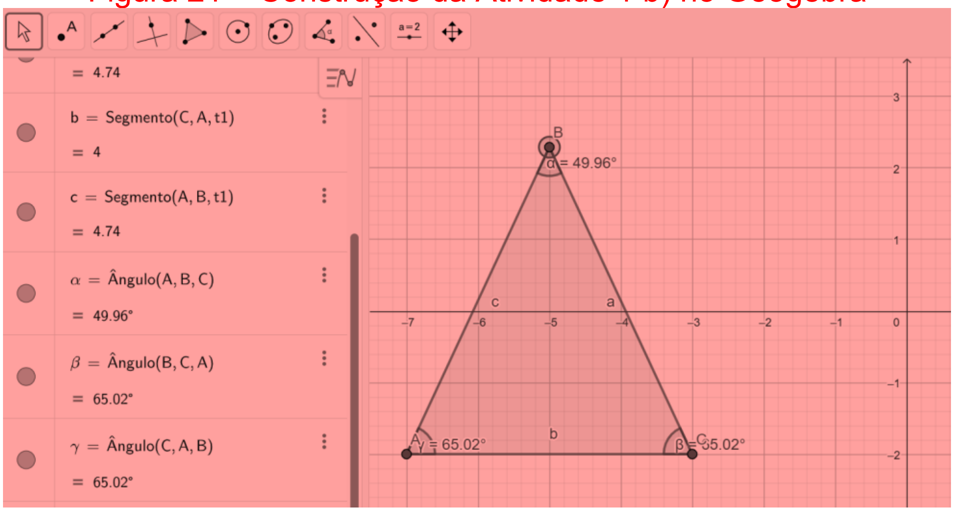
Criar o triângulo no GeoGebra;

Medir os três ângulos internos com a ferramenta “Ângulo”;

Ajustar os vértices com a ferramenta “Mover”, de modo que dois ângulos internos tenham medidas aproximadamente iguais a 65°;

Verificar a medida do terceiro ângulo, que será igual ou aproximadamente 50°.

Figura 21 – Construção da Atividade 1 b) no Geogebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

A soma das medidas dos três ângulos: 65° + 65° + 50° = 180°, confirmando a validade do resultado obtido.

A construção no GeoGebra confirma que o ângulo restante mede aproximadamente 50°.

Resposta:

A medida do ângulo x é 50°.

c)

1) Compreender o problema

Dados:

Um triângulo com três ângulos internos: x, 60° e 60°.

Objetivos:

Determinar a medida do ângulo representado por x.

2) Estabelecer um plano

1ª Estratégia:

Utilizar a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos: a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180°.

$$x + 60° + 60° = 180°$$

2ª Estratégia:

Construir um triângulo no GeoGebra semelhante ao proposto:

Usar a ferramenta “Polígono” para criar um triângulo;

Utilizar a ferramenta “Ângulo” para medir os ângulos;

Ajustar os vértices com a ferramenta “Mover”, de modo que dois ângulos internos tenham medidas aproximadamente iguais a 60°;

Observar o valor do terceiro ângulo.

3) Executar o plano

Cálculo:

$$x + 60° + 60° = 180°$$

$$x + 120° = 180°$$

$$x = 180° - 120°$$

$$x = 60°$$

Construção no GeoGebra:

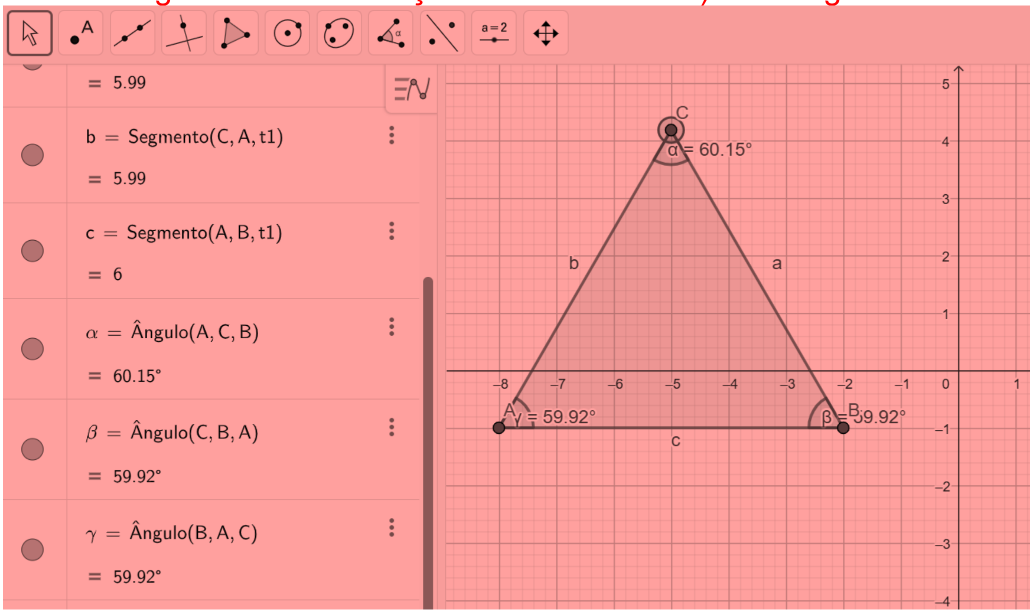
Criar o triângulo no GeoGebra;

Medir os três ângulos internos com a ferramenta “Ângulo”;

Ajustar os vértices com a ferramenta “Mover”, de modo que dois ângulos internos tenham medidas aproximadamente iguais a 60°;

Verificar a medida do terceiro ângulo, que será igual ou aproximadamente 60°.

Figura 22 – Construção da Atividade 1 c) no Geogebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

A soma das medidas dos três ângulos: 60° + 60° + 60° = 180°, confirmando a validade do resultado obtido.

A construção no GeoGebra confirma que o ângulo restante mede aproximadamente 60°.

Resposta:

A medida do ângulo x é 60°.

d)

1) Compreender o problema

Dados:

Um triângulo com três ângulos internos: x, $55°$ e $35°$.

Objetivos:

Determinar a medida do ângulo representado por x.

2) Estabelecer um plano

1ª Estratégia:

Utilizar a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos: a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180°.

$$x + 55° + 35° = 180°$$

2ª Estratégia:

Construir um triângulo no GeoGebra semelhante ao proposto:

Usar a ferramenta “Polígono” para criar um triângulo;

Utilizar a ferramenta “Ângulo” para medir os ângulos;

Ajustar os vértices com a ferramenta “Mover”, até que dois ângulos internos tenham medidas aproximadamente iguais a 55° e 35°;

Observar o valor do terceiro ângulo.

3) Executar o plano

Cálculo:

$$x + 55° + 35° = 180°$$

$$x + 90° = 180°$$

$$x = 180° - 90°$$

$$x = 90°$$

Construção no GeoGebra:

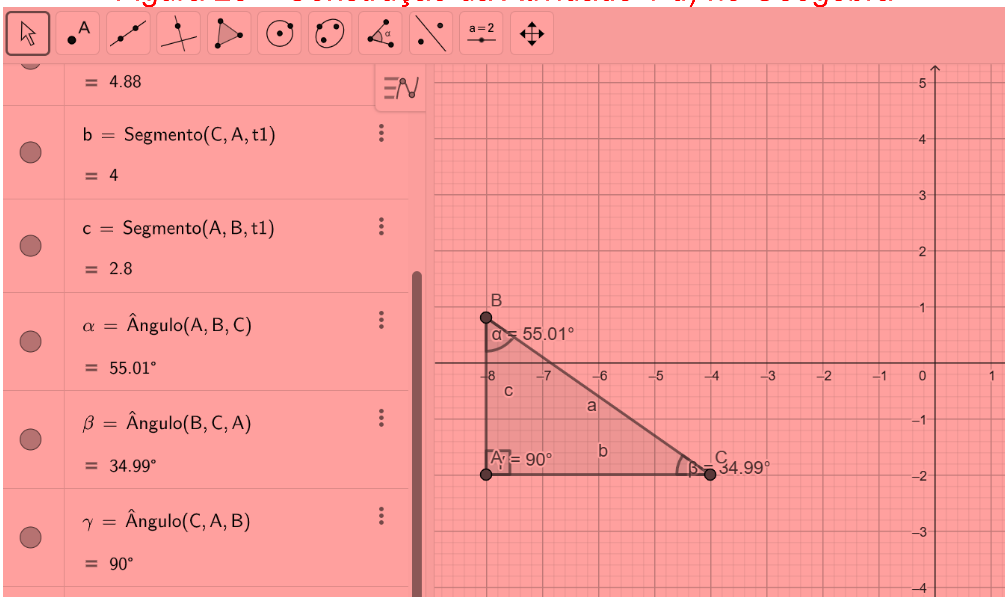
Criar o triângulo no GeoGebra;

Medir os três ângulos internos com a ferramenta “Ângulo”;

Ajustar os vértices com a ferramenta “Mover”, de modo que dois ângulos internos sejam aproximadamente 55° e 35°;

Verificar a medida do terceiro ângulo, que será igual ou aproximadamente 90°.

Figura 23 – Construção da Atividade 1 d) no Geogebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

A soma das medidas dos três ângulos: 55° + 35° + 90° = 180°, confirmando a validade do resultado obtido.

A construção no GeoGebra confirma que o ângulo restante mede aproximadamente 90°.

Resposta:

A medida do ângulo x é 90°.

Atividade 2

Determine a medida de abertura, em graus, do ângulo indicado pela letra x.

Figura 24 – Telhado de uma casa

Fonte: Dante (2018, p. 166).

Resolução esperada:

1) Compreender o problema

Dados:

O telhado da casa possui o formato de um triângulo.

Os ângulos da base do triângulo medem 20° cada.

O ângulo no vértice superior do triângulo está indicado pela letra x.

Objetivos:

Determinar a medida de abertura, em graus, do ângulo indicado pela letra x.

2) Estabelecer um plano

1ª Estratégia:

Utilizar a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo: a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180°.

$$x + 20° + 20° = 180°$$

2ª Estratégia:

Construir um triângulo no GeoGebra semelhante ao proposto:

Usar a ferramenta "Polígono" para criar um triângulo;

Utilizar a ferramenta "Ângulo" para medir os ângulos;

Ajustar os vértices com a ferramenta "Mover", de modo que dois ângulos internos tenham medidas aproximadamente iguais a 20°;

Observar o valor do terceiro ângulo.

3) Executar o plano

Cálculo:

$$x + 20° + 20° = 180°$$

$$x + 40° = 180°$$

$$x = 180° - 40°$$

$$x = 140°$$

Construção no GeoGebra:

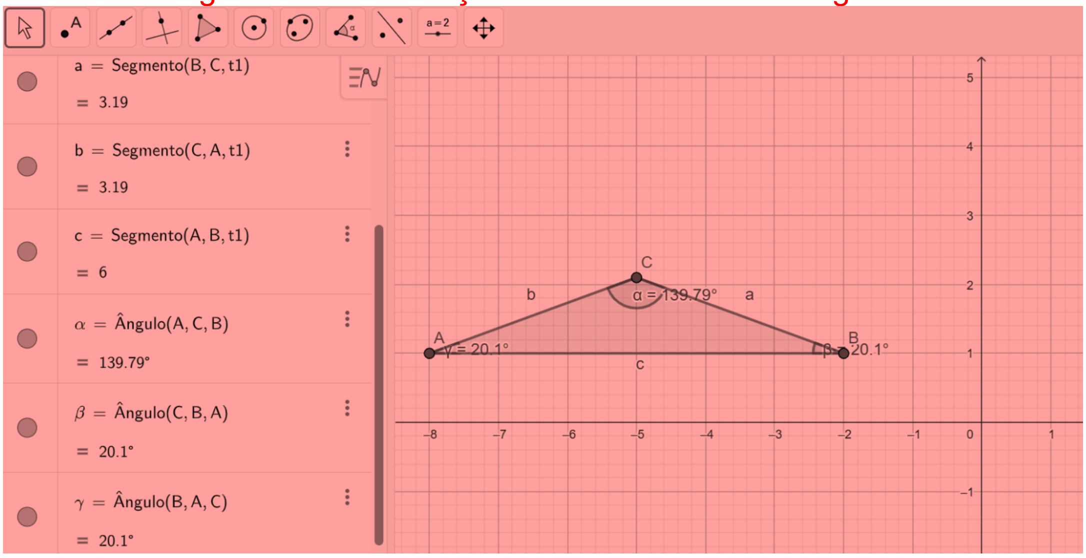
Criar o triângulo no GeoGebra;

Medir os três ângulos internos com a ferramenta "Ângulo";

Ajustar os vértices com a ferramenta "Mover", de modo que dois ângulos internos tenham medidas aproximadamente iguais a 20°;

Verificar a medida do terceiro ângulo, que será igual ou aproximadamente 140°.

Figura 25 – Construção da Atividade 2 no Geogebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

A soma das medidas os três ângulos: 20° + 20° + 140° = 180°, confirmando a validade do resultado obtido.

A construção no GeoGebra confirma que o ângulo restante mede aproximadamente 140°.

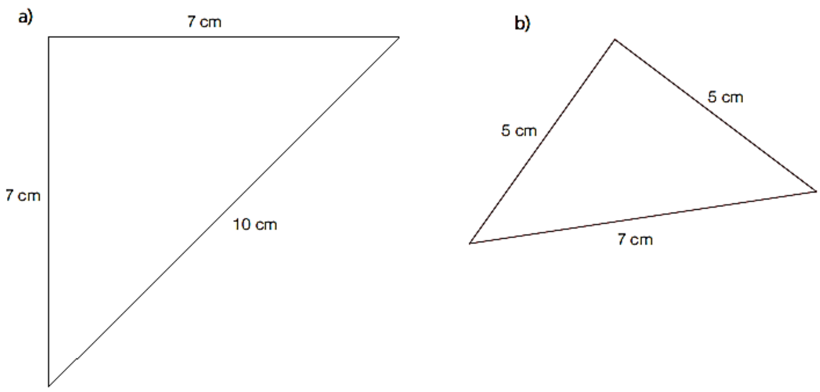
Resposta:

A medida do ângulo x é 140°.

Atividade 3

Calcule o perímetro de cada triângulo abaixo.

Figura 26 – Representação de triângulos



Fonte: Iezzi (2018, p. 296).

Resolução esperada:

a)

1) Compreender o problema

Dados:

Triângulo com lados medindo 7 cm, 7 cm e 10 cm.

Objetivo:

Calcular o perímetro do triângulo, ou seja, a soma das medidas dos seus três lados.

2) Estabelecer um plano

Estratégia:

Utilizar a fórmula do perímetro de um triângulo: $P = a + b + c$, onde a, b e c são os comprimentos dos lados do triângulo.

3) Executar o plano

Substituindo os valores na fórmula: $P = 7\text{ cm} + 7\text{ cm} + 10\text{ cm} = 24\text{ cm}$

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

Todos os lados foram corretamente somados.

A unidade de medida foi mantida em centímetros (cm).

Resposta:

O perímetro do triângulo é igual a 24 centímetros.

b)

1) Compreender o problema

Dados:

Triângulo com lados medindo 5 cm, 5 cm e 7 cm.

Objetivo:

Calcular o perímetro do triângulo, ou seja, a soma das medidas dos seus três lados.

2) Estabelecer um plano

Estratégia:

Utilizar a fórmula do perímetro de um triângulo: $P = a + b + c$, onde a, b e c são os comprimentos dos lados do triângulo.

3) Executar o plano

Substituindo os valores na fórmula: P = 5 cm + 5 cm + 7 cm = 17 cm

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

Todos os lados foram corretamente somados.

A unidade de medida foi mantida em centímetros (cm).

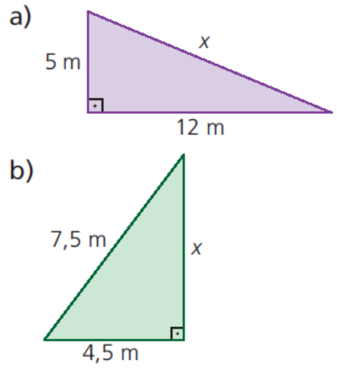
Resposta:

O perímetro do triângulo é igual a 17 centímetros.

Atividade 4

Obtenha, em metro, o valor de x em cada caso a seguir.

Figura 27 – Triângulos retângulos



Fonte: Sampaio (2018, p. 124).

Resolução esperada:

a)

1) Compreender o problema

Dados:

Triângulo retângulo com catetos medindo 5 m e 12 m.

A hipotenusa está representada pela letra x.

Objetivos:

Determinar a medida da hipotenusa x, em metros.

2) Estabelecer um plano

1ª Estratégia:

Aplicar o Teorema de Pitágoras, que estabelece:

$$(\text{Hipotenusa})^2 = (\text{Cateto})^2 + (\text{Cateto})^2$$

$$x^2 = 5^2 + 12^2$$

2ª Estratégia:

Construir um triângulo retângulo no GeoGebra com catetos de 5 e 12 unidades:

Usar a ferramenta “Polígono” para criar o triângulo;

Verificar o ângulo reto com a ferramenta “Ângulo”;

Medir a hipotenusa com a ferramenta “Distância ou Comprimento”.

3) Executar o plano

Cálculo:

$$x^2 = 5^2 + 12^2$$
$$x^2 = 25 + 144$$
$$x^2 = 169$$
$$x = \sqrt[2]{169}$$
$$x = 13$$

Construção no GeoGebra:

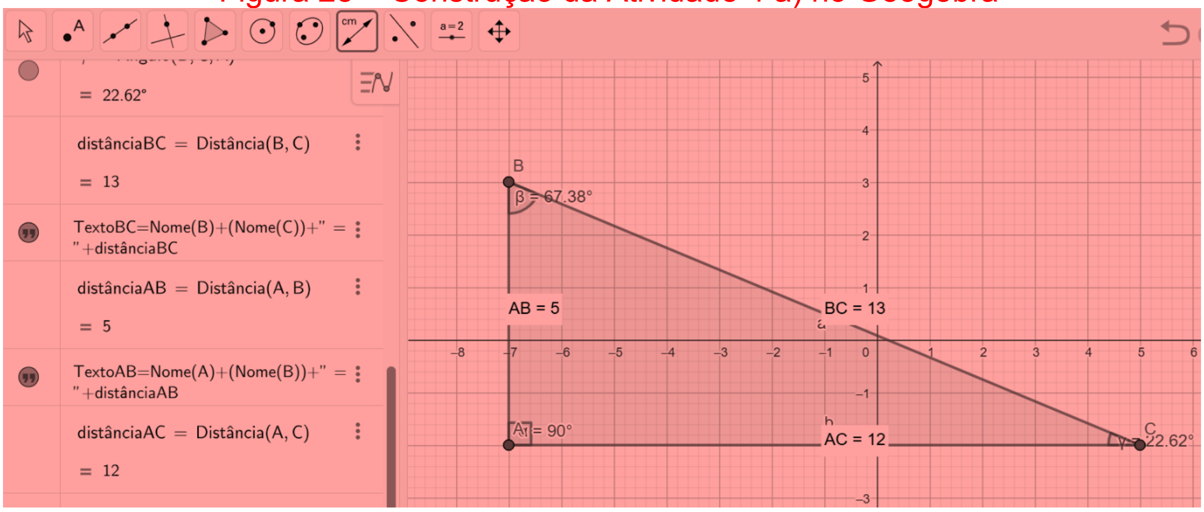
Criar um triângulo retângulo com catetos de 5 e 12 unidades;

Obter a medida dos três ângulos internos com a ferramenta “Ângulo” para se certificar de que um deles é reto (90°);

Medir a hipotenusa com a ferramenta “Distância”;

O valor obtido será igual a 13 unidades.

Figura 28 – Construção da Atividade 4 a) no Geogebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

Substituindo x = 13 na equação:

$$(13)^2 = 5^2 + 12^2$$

$$169 = 25 + 144$$

$$169 = 169$$

A igualdade confirma que a aplicação do Teorema de Pitágoras está correta.

A construção no GeoGebra valida o valor calculado.

Resposta:

O valor de x é 13 metros.

b)

1) Compreender o problema

Dados:

Triângulo retângulo com catetos medindo 4,5 m e x.

A hipotenusa mede 7,5 m.

Objetivos:

Determinar a medida do cateto representado por x, em metros.

2) Estabelecer um plano

1ª Estratégia:

Aplicar o Teorema de Pitágoras, que estabelece:

$$(\text{Hipotenusa})^2 = (\text{Cateto})^2 + (\text{Cateto})^2$$

$$(7{,}5)^2 = x^2 + (4{,}5)^2$$

2ª Estratégia:

Construir um triângulo retângulo no GeoGebra com hipotenusa de 7,5 unidades e um cateto de 4,5 unidades:

Usar a ferramenta “Polígono” para criar o triângulo;

Verificar o ângulo reto com a ferramenta “Ângulo”;

Medir o valor do outro cateto (x) com a ferramenta “Distância ou Comprimento”.

3) Executar o plano

Cálculo:

$$(7{,}5)^2 = x^2 + (4{,}5)^2$$
$$56{,}25 = x^2 + 20{,}25$$
$$56{,}25 - 20{,}25 = x^2$$
$$36 = x^2$$
$$\sqrt[2]{36} = x$$
$$6 = x \quad ou \quad x = 6$$

Construção no GeoGebra:

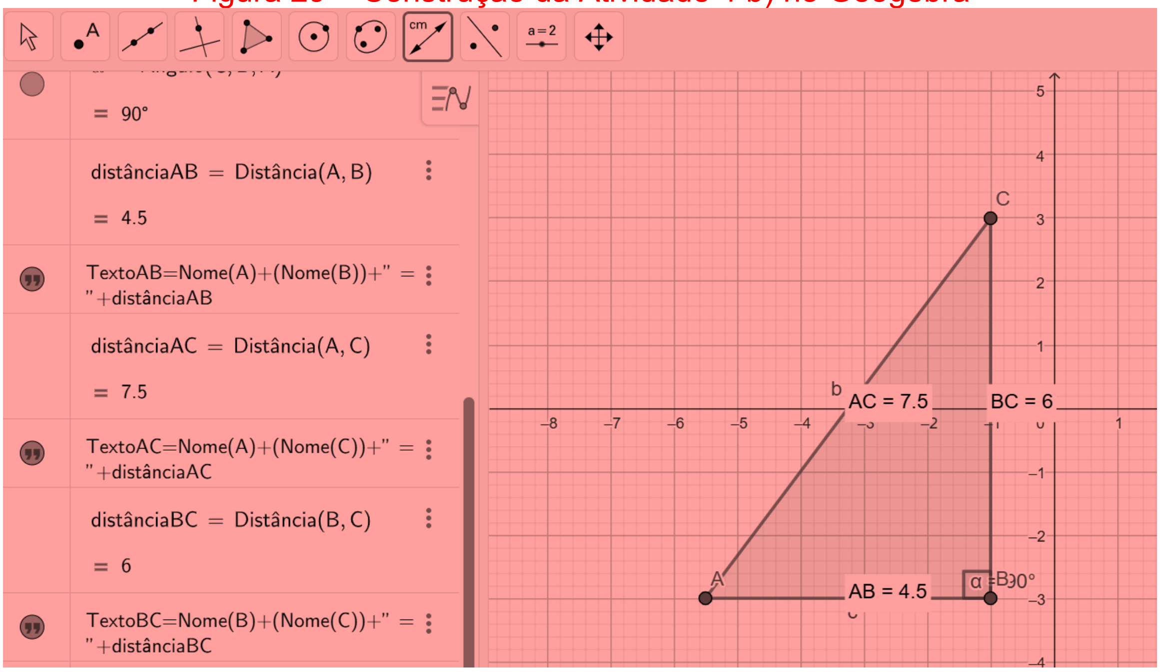
Criar um triângulo retângulo com hipotenusa de 7,5 unidades e cateto de 4,5 unidades;

Obter a medida dos três ângulos internos com a ferramenta “Ângulo” para se certificar de que um deles é reto (90°);

Medir o valor do outro cateto (x) com a ferramenta “Distância”;

O valor obtido será igual a 6 unidades.

Figura 29 – Construção da Atividade 4 b) no Geogebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

Substituindo x = 6 na equação:

$$(7{,}5)^2 = (6)^2 + (4{,}5)^2$$
$$56{,}25 = 36 + 20{,}25$$
$$56{,}25 = 56{,}25$$

A igualdade confirma que a aplicação do Teorema de Pitágoras está correta.

A construção no GeoGebra valida o valor calculado.

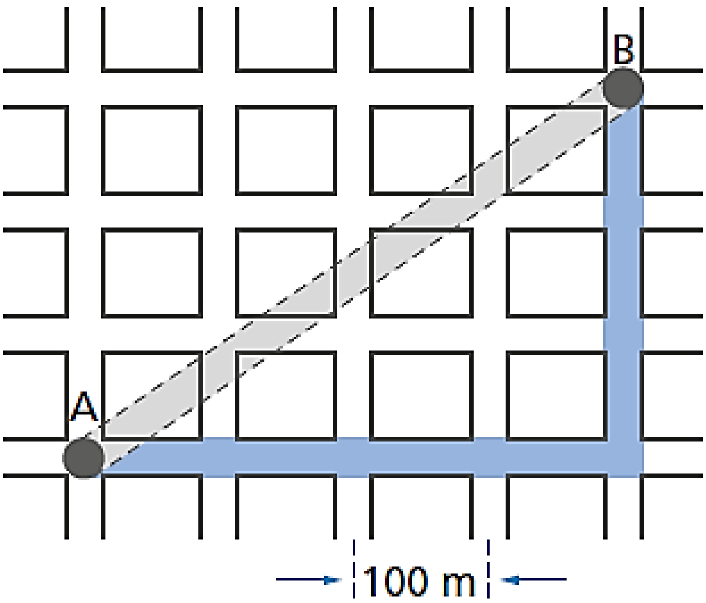
Resposta:

O valor de x é 6 metros.

Atividade 5

O esquema abaixo representa parte do bairro de uma cidade. Nele podemos ver a estação A e a estação B do metrô. O trecho azul indica um dos caminhos que um carro pode percorrer, na superfície, para ir de A a B, e o traçado cinza indica a linha subterrânea do metrô ligando, em linha reta, as duas estações. De acordo com os dados, qual é a distância que o metrô percorre da estação A até a B?

Figura 30 – Esquema de malha urbana



Fonte: Giovanni Júnior (2018, p. 202).

<u>Resolução esperada:</u>

1) Compreender o problema

Dados:

A figura representa um esquema de malha urbana com duas estações de metrô: A e B.

O trajeto azul indica o caminho de um carro: 4 quarteirões na horizontal e 3 quarteirões na vertical.

Cada quarteirão mede 100 metros.

O trajeto cinza representa o caminho direto, em linha reta, feito pelo metrô.

A figura forma um triângulo retângulo, em que o trajeto do metrô é a hipotenusa.

Objetivos:

Calcular a distância percorrida pelo metrô, ou seja, o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo formado.

2) Estabelecer um plano

1ª Estratégia:

Aplicar o Teorema de Pitágoras, que estabelece:

$$(\text{Hipotenusa})^2 = (\text{Cateto})^2 + (\text{Cateto})^2$$

$$x^2 = (400)^2 + (300)^2$$

2ª Estratégia:

Construir o triângulo retângulo no GeoGebra, com catetos de 400 e 300 unidades:

Usar a ferramenta “Polígono” para criar o triângulo;

Verificar o ângulo reto com a ferramenta “Ângulo”;

Medir a hipotenusa com a ferramenta “Distância”.

3) Executar o plano

Cálculo:

$$x^2 = (400)^2 + (300)^2$$

$$x^2 = 160\,000 + 90\,000$$

$$x^2 = 250\,000$$

$$x = \sqrt[2]{250\,000}$$

$$x = 500$$

Construção no GeoGebra:

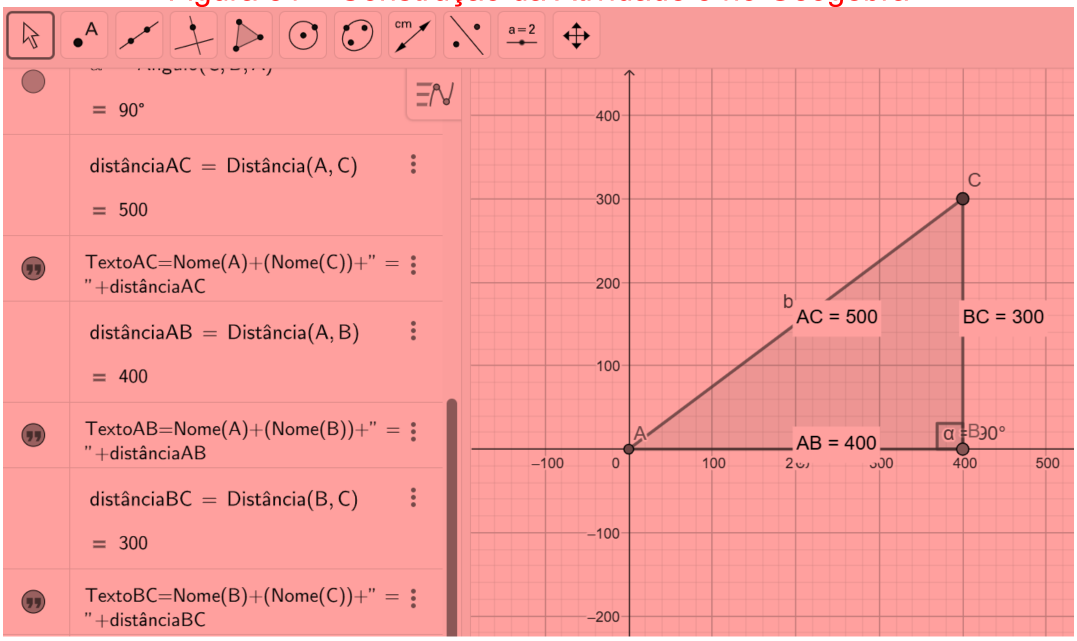
Criar um triângulo com catetos de 400 e 300 unidades;

Obter a medida dos três ângulos internos com a ferramenta “Ângulo” para se certificar de que um deles é reto (90°);

Medir a hipotenusa com a ferramenta “Distância”;

O valor obtido será igual a 500 unidades, confirmando o cálculo.

Figura 31 – Construção da Atividade 5 no Geogebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

Substituindo x = 500 na equação:

$$(500)^2 = (400)^2 + (300)^2$$

$$250\,000 = 160\,000 + 90\,000$$

$$250\,000 = 250\,000$$

A igualdade confirma que a aplicação do Teorema de Pitágoras está correta.

A construção no GeoGebra valida o resultado obtido.

Resposta:

A distância percorrida pelo metrô, da estação A até a B, é de 500 metros.

Resumo

- Triângulo: polígono de três lados, três vértices e três ângulos internos.
- Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer: sempre é igual a 180°.
- Perímetro: soma das medidas dos lados.
- Teorema de Pitágoras: em um triângulo retângulo qualquer, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

Referências

BIGODE, Antonio José Lopes. **Matemática do cotidiano**: matemática. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2015.

DANTE, Luiz Roberto. **Teláris matemática**, 7° ano: ensino fundamental, anos finais. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

DANTE, Luiz Roberto. **Teláris**: matemática: ensino fundamental 2. 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A conquista da matemática:** 9º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

IEZZI, Gelson. **Matemática e realidade**: 6° ano. 9. ed. São Paulo: Atual Editora, 2018.

MODERNA, Editora (org.). **Araribá mais**: matemática. Organizadores: Mara Regina Garcia Gay, Willian Raphael Silva. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2018.

PATARO, Patricia Moreno. **Matemática essencial** – 7º ano ensino fundamental, anos finais. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2018.

SAMPAIO, Fausto Arnaud. **Trilhas da matemática**: 7° ano: ensino fundamental, anos finais. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2018.

AULA 6 – Geometria: avaliação escrita dissertativa

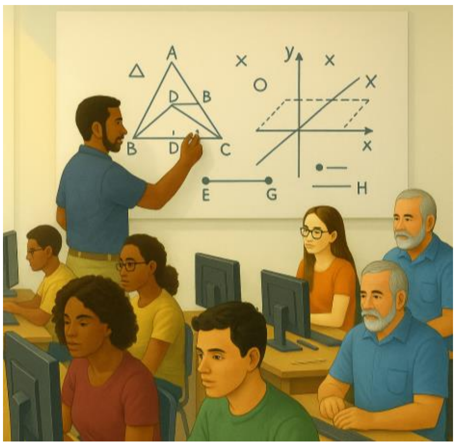
Consolidar e verificar os conhecimentos geométricos adquiridos nas aulas anteriores por meio de uma atividade avaliativa formal (avaliação escrita), aplicando a metodologia de Resolução de Problemas (RP) de George Polya e utilizando o GeoGebra para construir e verificar soluções.

Orientações gerais

- Esta aula é uma atividade avaliativa formal. Você poderá resolver individualmente ou em duplas;
- Use desenhos, esquemas ou o GeoGebra quando achar necessário;
- O professor estará disponível para esclarecer dúvidas;
- Tempo estimado: 45 minutos.

Conteúdos abordados na atividade avaliativa

- Ponto, reta, segmento, semirreta;
- Retas coplanares: paralelas, perpendiculares, coincidentes;
- Coordenadas cartesianas e localização no plano;
- Triângulos e suas propriedades;
- Teorema de Pitágoras;
- Perímetro.



Metodologia de Resolução de Problemas (RP)

Relembrando as quatro etapas propostas por Polya:

1) Compreender o problema:

- O que está sendo solicitado no problema?
- Quais são as informações dadas?
- É possível ilustrar com um esquema ou desenho?

2) Elaborar um plano:

- Qual estratégia será utilizada?
- Que etapas são necessárias para chegar à solução?

3) Executar o plano:

- Coloque em prática as estratégias planejadas.

4) Verificar a solução:

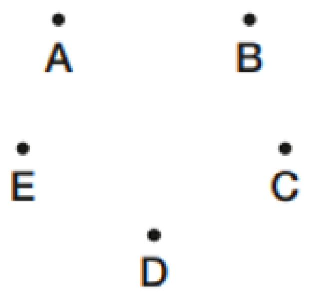
- Avalie a resposta encontrada: faz sentido?
- Considere outras possibilidades ou métodos alternativos

Atividade avaliativa

Atividade 1

Observe os cinco pontos, **A**, **B**, **C**, **D** e **E**.

Figura 1 – Representação de pontos



Fonte: Iezzi (2018, p. 116).

Quantas retas podemos construir passando por dois desses pontos? Quais?

Resolução esperada:

1) Compreender o problema

Dados:

Cinco pontos distintos no plano: A, B, C, D e E.

Objetivo:

Determinar quantas e quais retas podem ser construídas ligando dois desses pontos.

2) Estabelecer um plano

1ª Estratégia:

Usar uma régua para traçar retas ligando cada par de pontos, manualmente, no papel.

2ª Estratégia:

Utilizar o *software* GeoGebra:

Criar os pontos A, B, C, D e E com a ferramenta “Novo Ponto”.

Utilizar a ferramenta “Reta (dois pontos)” para ligar os pares de pontos, um a um, observando quais retas são distintas.

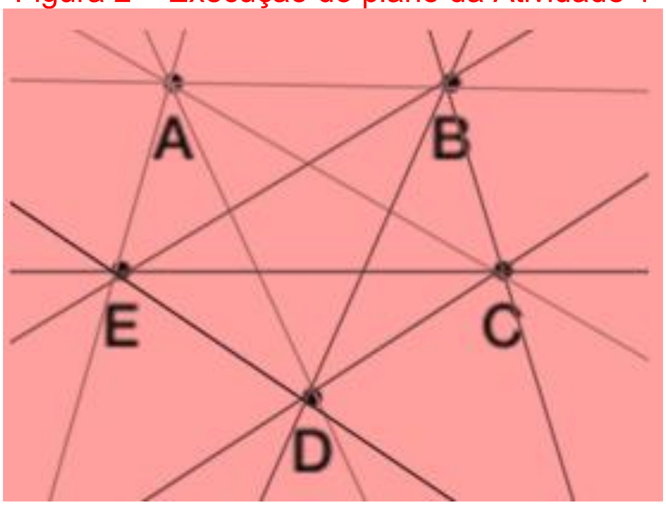
3) Executar o plano

Construção com régua:

Traçar retas ligando todos os pares possíveis:

$$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{AE}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{BE}, \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{CE} \text{ e } \overleftrightarrow{DE}.$$

Figura 2 – Execução do plano da Atividade 1



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

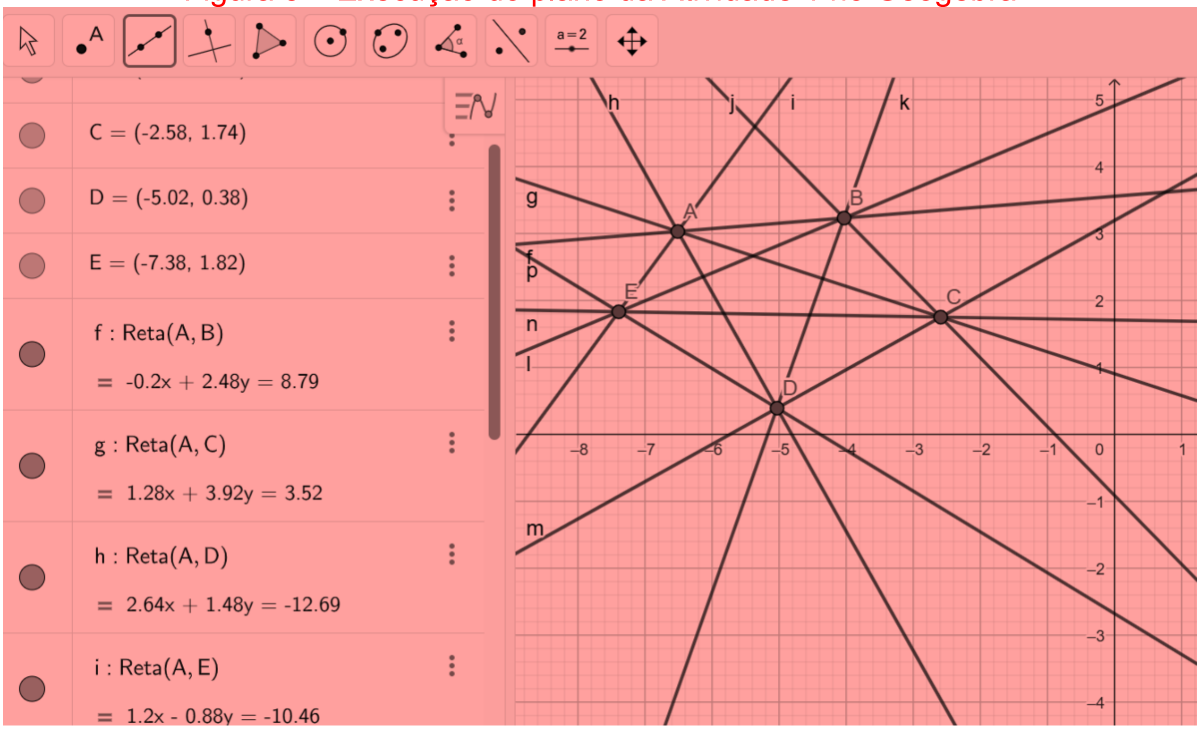
Construção no GeoGebra:

Selecionar a ferramenta “Novo Ponto” e criar os pontos A, B, C, D e E.

Selecionar a ferramenta “Reta (dois pontos)” e traçar as seguintes retas:

$$\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{AE}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}, \overleftrightarrow{BE}, \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{CE} \text{ e } \overleftrightarrow{DE}.$$

Figura 3 – Execução do plano da Atividade 1 no Geogebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

A construção confirma que cada par de pontos gera exatamente uma reta distinta.

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

A construção com régua e no GeoGebra gera exatamente as mesmas 10 retas, sem repetições.

Resposta:

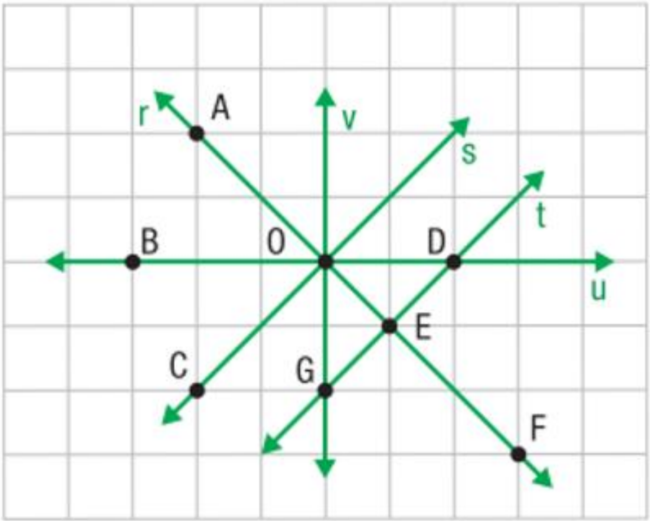
Podemos construir 10 retas distintas com os cinco pontos A, B, C, D e E.

As retas são: $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{AE}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{CE}$ e $\overleftrightarrow{DE}$.

Atividade 2

Considere a figura a seguir.

Figura 4 – Retas coplanares



Fonte: Almeida (2025, p. 64).

a) Quais são os segmentos de reta representados nessa figura?

b) Quais são as semirretas com origem no ponto E?

c) Quais retas são paralelas?

d) Quais retas são perpendiculares entre si?

<u>*Resolução esperada:*</u>

1) Compreender o problema

Dados:

A figura apresenta cinco retas coplanares: r, s, t, u, v.

Estão indicados os pontos: A, B, C, D, E, F, G, O.

Objetivos:

Identificar os segmentos de reta presentes na figura;

Determinar as semirretas com origem no ponto E;

Identificar quais retas são paralelas;

Identificar quais retas são perpendiculares.

2) Estabelecer um plano

1ª Estratégia:

Observar visualmente a figura para reconhecer os elementos geométricos e suas relações.

2ª Estratégia:

Construir uma figura semelhante no GeoGebra, marcando os pontos e traçando as retas, os segmentos e as semirretas, a fim de validar as relações geométricas.

3) Executar o plano

Observando a figura, identificamos:

Segmentos de reta:

Sobre a reta u: $\overline{BO}$, $\overline{DO}$

Sobre a reta v: $\overline{GO}$

Sobre a reta r: $\overline{AO}$, $\overline{EO}$, $\overline{EF}$

Sobre a reta s: $\overline{CO}$

Sobre a reta t: $\overline{EG}$, $\overline{DE}$

Total: 9 segmentos de reta

Semirretas com origem no ponto E:

$\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EG}$

Total: 4 semirretas

Relações entre retas:

As retas s e t não se cruzam e mantêm distância constante entre si, o que caracteriza que são retas paralelas.

As retas u e v se interceptam formando ângulos retos, o que indica que são retas perpendiculares.

Construção no GeoGebra:

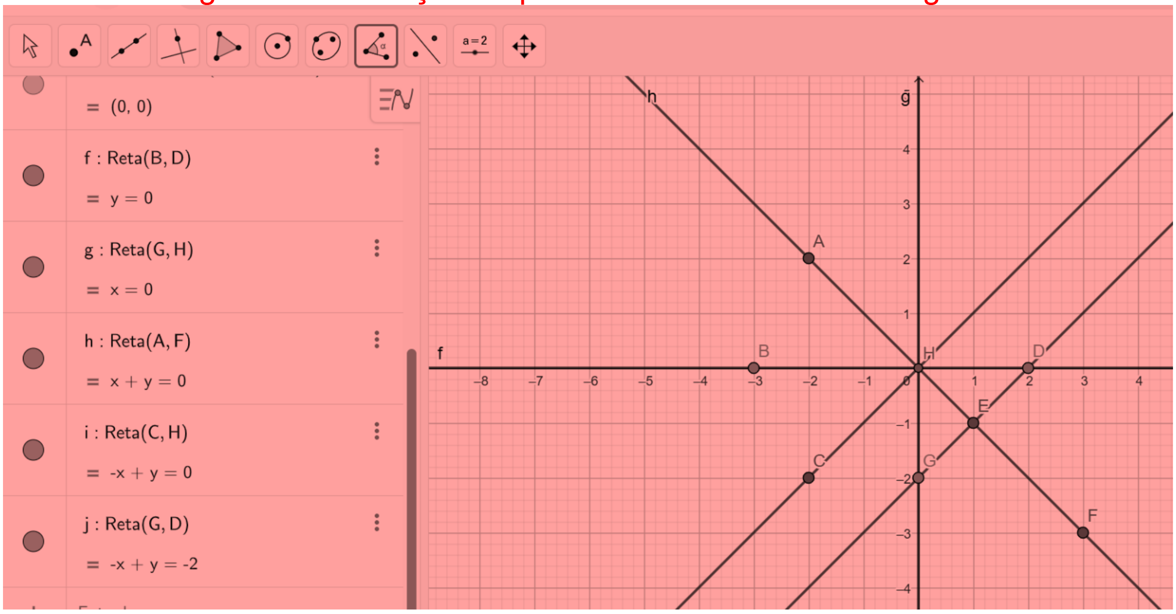
Criar os pontos: A, B, C, D, E, F, G e H, utilizando a ferramenta "Novo Ponto".

Traçar as retas correspondentes a u, v, r, s e t, usando a ferramenta "Reta (dois pontos)".

Traçar os segmentos: $\overline{BO}$, $\overline{DO}$, $\overline{GO}$, $\overline{AO}$, $\overline{EO}$, $\overline{EF}$, $\overline{CO}$, $\overline{EG}$, $\overline{DE}$ com a ferramenta "Segmento de Reta (Dois Pontos)".

Traçar as semirretas com origem no ponto E: $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EG}$, utilizando a ferramenta "Semirreta (Dois pontos)".

Figura 5 – Execução do plano da Atividade 2 no Geogebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

A construção no GeoGebra confirma a presença de 9 segmentos de reta e 4 semirretas com origem em E.

A análise permite concluir que as retas s e t são paralelas, pois não possuem pontos em comum e mantêm sempre a distância.

Verifica-se também que as retas u e v se cruzam formando quatro ângulos retos, o que confirma que são perpendiculares entre si.

Resposta:

Segmentos: $\overline{BO}$, $\overline{DO}$, $\overline{GO}$, $\overline{AO}$, $\overline{EO}$, $\overline{EF}$, $\overline{CO}$, $\overline{EG}$, $\overline{DE}$

Semirretas com origem em E: ($\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EG}$) ;

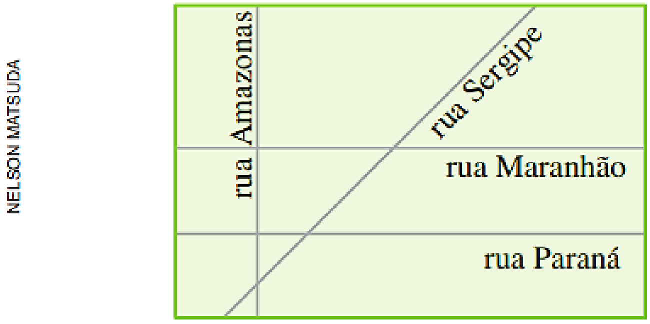
Retas paralelas: s // t

Retas perpendiculares: u ⊥ v.

Atividade 3

No mapa abaixo, as ruas estão indicadas por linhas que nos dão a ideia de retas.

Figura 6 – Representação de ruas



Fonte: Bianchini (2015, p. 121).

Das ruas representadas nesse mapa, qual é paralela à rua Maranhão? E quais são concorrentes com a rua Sergipe?

Resolução esperada:

1) Compreender o problema

Dados:

As ruas Amazonas, Sergipe, Maranhão e Paraná estão representadas no mapa como linhas retas.

Objetivos:

Identificar a rua paralela à rua Maranhão.

Identificar as ruas concorrentes à rua Sergipe.

2) Estabelecer um plano

1ª Estratégia:

Observar visualmente o mapa apresentado, reconhecendo as ruas que se comportam como retas. A partir dessa análise, identificar aquelas que não se cruzam (paralelas) e as que se cruzam em um único ponto (concorrentes).

2ª Estratégia:

Fazer uma construção semelhante à do mapa no *software* GeoGebra, representando as ruas como retas. Com isso, verificar visualmente as relações de paralelismo e de concorrência entre as ruas.

3) Executar o plano

Observando o mapa:

As ruas Maranhão e Paraná não se cruzam e mantêm uma distância constante, o que indica que são paralelas.

A rua Sergipe cruza, em pontos distintos, as ruas Amazonas, Maranhão e Paraná, o que indica que são concorrentes à rua Sergipe.

Construção no GeoGebra:

Traçar as retas correspondentes às ruas utilizando a ferramenta "Reta (dois pontos)":

f → Rua Maranhão

g → Rua Paraná

h → Rua Sergipe

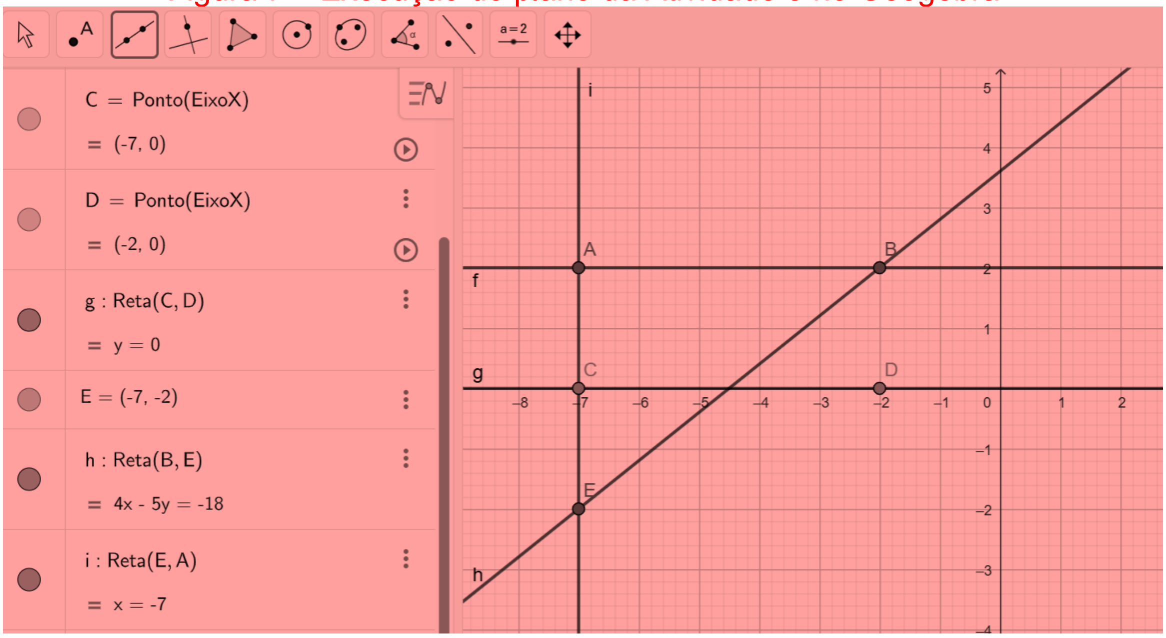
i → Rua Amazonas

Visualização das relações:

As retas f (Maranhão) e g (Paraná) confirmam o paralelismo.

As retas h (Sergipe) com f, g e i confirmam a concorrência (interseção em um único ponto com cada uma).

Figura 7 – Execução do plano da Atividade 3 no Geogebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

Tanto pela observação direta do mapa quanto pela construção no GeoGebra, conclui-se que: a rua Paraná é paralela à rua Maranhão; as ruas Amazonas, Maranhão e Paraná são concorrentes à rua Sergipe, pois cada uma cruza a rua Sergipe em um único ponto.

Resposta:

A rua Paraná é paralela à rua Maranhão. As ruas Amazonas, Maranhão e Paraná são concorrentes à rua Sergipe.

Atividade 4

Mateus representou um plano cartesiano em uma malha quadriculada cujas figuras de quadradinhos tinham 1 cm de lado. Depois, ele desenhou um triângulo cujos vértices tinham coordenadas cartesianas A(3, 1), B(3, 4) e C(7, 4). Determine o perímetro desse triângulo.

Resolução esperada:

1) Compreender o problema

Dados:

Plano cartesiano com distâncias de 1 cm entre os números inteiros nos eixos.

Triângulo com vértices A = (3, 1), B = (3, 4) e C = (7, 4).

Objetivo:

Calcular o perímetro do triângulo ABC, ou seja, a soma das medidas dos seus lados.

2) Estabelecer um plano

1ª Estratégia:

Construir o triângulo no plano cartesiano.

Determinar as medidas dos lados:

AB e BC por contagem direta de unidades.

AC: pelo Teorema de Pitágoras, já que o triângulo é retângulo.

2ª Estratégia:

Criar os pontos A = (3,1), B = (3,4) e C = (7,4) com a ferramenta "Novo Ponto".

Traçar os segmentos com a ferramenta "Segmento de Reta (Dois Pontos)".

Usar a ferramenta "Distância" para obter os comprimentos dos lados.

3) Executar o plano

Construção no papel:

Construir um plano cartesiano com eixo x de –8 a 8 e eixo y de –6 a 6, com espaçamento de 1 cm.

Marcar os pontos A = (3, 1), B = (3, 4) e C = (7, 4).

Determinar as medidas:

BA = 4 – 1

BA = AB = 3 cm

CB = 7 – 3

CB = BC = 4 cm

Calcular AC (hipotenusa) usando o Teorema de Pitágoras:

$$(HIPOTENUSA)^2 = (CATETO)^2 + (CATETO)^2$$

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(AC)^2 = (3)^2 + (4)^2$$

$$(AC)^2 = 9 + 16$$

$$(AC)^2 = 25$$

$$\sqrt[2]{(AC)^2} = \sqrt[2]{25}$$

$$AC = 5\ cm$$

Perímetro:

$$P = 3\ cm + 4\ cm + 5\ cm$$

$$P = 12\ cm$$

Construção no GeoGebra:

Criar os pontos os pontos A = (3, 1), B = (3, 4) e C = (7, 4), utilizando a ferramenta "Novo Ponto".

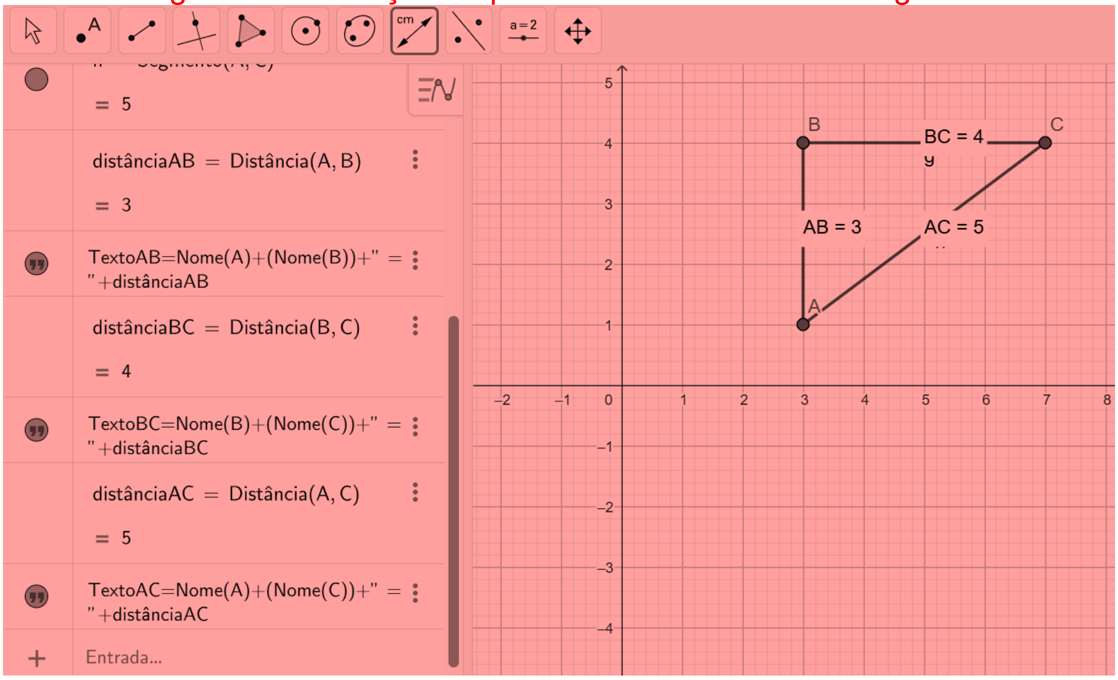
Traçar os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, utilizando a ferramenta "Segmento de Reta (Dois Pontos)".

Medir os lados ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$) com a ferramenta “Distância”.

Calcular o perímetro:

$$P = 3 + 4 + 5$$

Figura 8 – Execução do plano da Atividade 4 no Geogebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

As medidas foram obtidas corretamente por diferença de coordenadas (AB e BC) e aplicação do Teorema de Pitágoras (AC).

A construção no plano e no GeoGebra confirma os valores.

A soma dos lados está coerente com o contorno da figura.

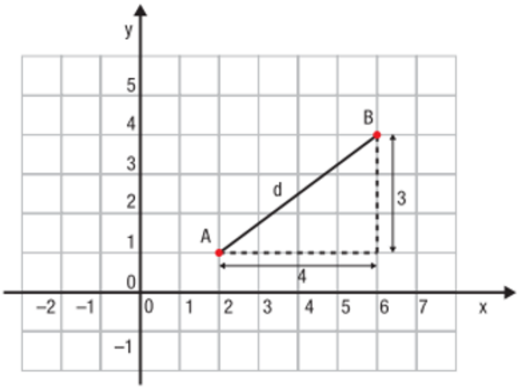
Resposta:

O perímetro do triângulo ABC é igual a 12 cm.

Atividade 5

(CEFET - RJ) O professor pediu a João que calculasse a distância entre os pontos A(2, 1) e B(6, 4) no plano cartesiano. Para isso, João calculou a medida do segmento $\overline{AB}$, observando um triângulo retângulo que tem $\overline{AB}$ como hipotenusa. Após realizar o esboço ao lado, João fez a seguinte conta: $d^2 = 3^2 + 4^2 \implies d = 5$.

Figura 9 – Triângulo retângulo ABC



Fonte: Dias (2024, p. 10).

Com base nessas informações, calcule a distância entre os pontos (−5, 1) e. (7, 6).

Resolução esperada:

1) Compreender o problema

Dados:

Pontos: (−5, 1) e (7, 6).

Objetivo:

Determinar a distância entre os pontos (–5, 1) e (7, 6).

2) Estabelecer um plano

1ª Estratégia:

Marcar os pontos no plano cartesiano.

Observar a formação de um triângulo retângulo, em que o segmento que une os pontos representa a hipotenusa.

Determinar os valores dos catetos por observação e contagem direta de unidades.

Aplicar o Teorema de Pitágoras para calcular a distância entre os dois pontos:

$$d^2 = 5^2 + 12^2$$

2ª Estratégia:

Criar os pontos A = (–5, 1) e B = (7, 6) com a ferramenta "Novo Ponto".

Traçar o segmento $\overline{AB}$ com a ferramenta "Segmento de Reta (Dois Pontos)".

Usar a ferramenta "Distância" para obter o comprimento do segmento $\overline{AB}$.

3) Executar o plano

Construção no papel:

Construir um plano cartesiano com eixo x de –8 a 8 e eixo y de –7 a 7.

Marcar os pontos A = (–5, 1), B = (7, 6) e C = (7, 1).

Determinar as medidas dos catetos:

BC = 6 – 1

BC = 5

CA = 7 – (−5)

CA = 7 + 5

CA = 12

Aplicar o Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 5^2 + 12^2$$

$$d^2 = 25 + 144$$

$$d^2 = 169$$

$$\sqrt[2]{d^2} = \sqrt[2]{169}$$

$$d = 13$$

Construção no GeoGebra:

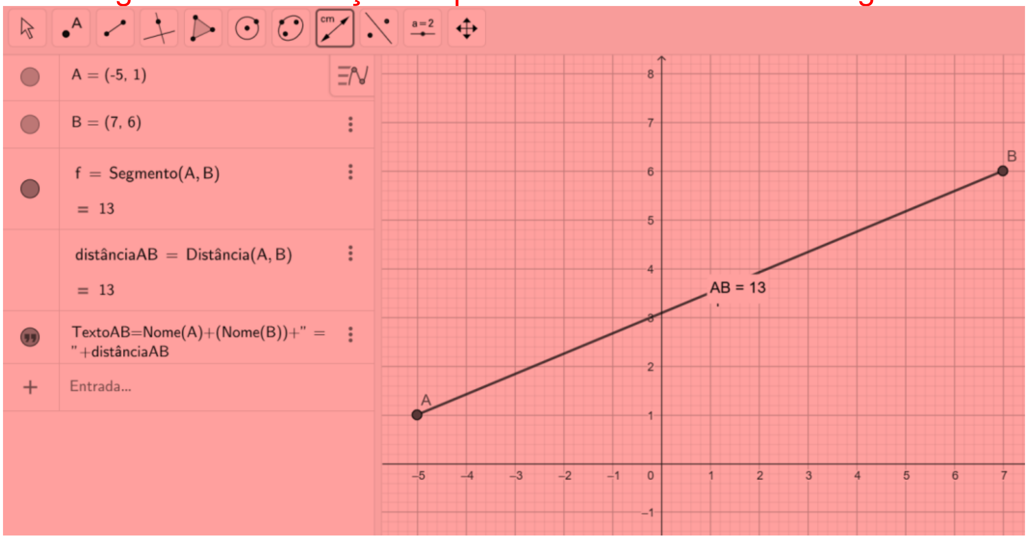
Criar os pontos A = (–5, 1) e B = (7, 6) com a ferramenta "Novo Ponto".

Traçar o segmento $\overline{AB}$ com a ferramenta "Segmento de Reta (Dois Pontos)".

Usar a ferramenta "Distância" para medir o comprimento do segmento.

Resultado exibido pelo GeoGebra: AB = 13

Figura 10 – Execução do plano da Atividade 5 no Geogebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

O triângulo formado confirma catetos com 12 e 5 unidades.

A aplicação do Teorema de Pitágoras está correta.

A construção no GeoGebra confirma o resultado obtido manualmente.

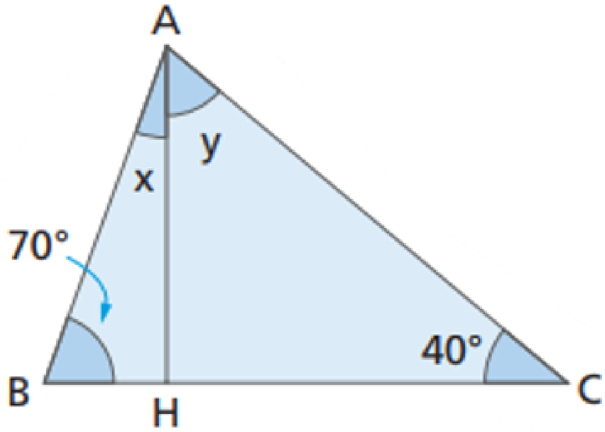
Resposta:

A distância entre os pontos (–5, 1) e (7, 6) é igual a 13 unidades.

Atividade 6

Sendo $\overline{AH}$ a altura do Δ ABC, determine as medidas x e y

Figura 11 – Ângulos internos do triângulo ABC



Fonte: Giovanni Júnior (2018, p. 79).

<u>Resolução esperada:</u>

1) Compreender o problema

Dados:

Triângulo ABC.

O segmento $\overline{AH}$ é a altura do triângulo, formando um ângulo de 90° com o segmento $\overline{BC}$.

Medidas dos ângulos internos do triângulo ABC: $\hat{A} = x + y$, $\hat{B} = 70°$ e $\hat{C} = 40°$.

x é um dos ângulos internos do triângulo retângulo ABH

y é um dos ângulos internos do triângulo retângulo ACH

Objetivo:

Determinar as medidas dos ângulos x e y

2) Estabelecer um plano

Estratégia:

Utilizar a propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, que afirma que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180°.

Vamos aplicar essa propriedade aos triângulos ABH e ACH para encontrar os valores de x e y, respectivamente.

3) Executar o plano

Para o triângulo ABH:

Os ângulos internos são: 90°, 70° e x.

$$90° + 70° + x = 180°$$
$$160° + x = 180°$$
$$x = 180° - 160°$$
$$x = 20°$$

Para o triângulo ACH:

Os ângulos internos são: 90°, 40° e y.

$$90° + 40° + y = 180°$$
$$130° + y = 180°$$
$$y = 180° - 130°$$
$$y = 50°$$

4) Retrospecto (verificação)

Verificação:

No triângulo ABH: 90° + 70° + 20° = 180°, estando de acordo com a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo.

No triângulo ACH: 90° + 40° + 50° = 180°, também de acordo com a mesma propriedade.

No triângulo ABC: 70° + 40° + x + y = 70° + 40° + 20° + 50° = 180°

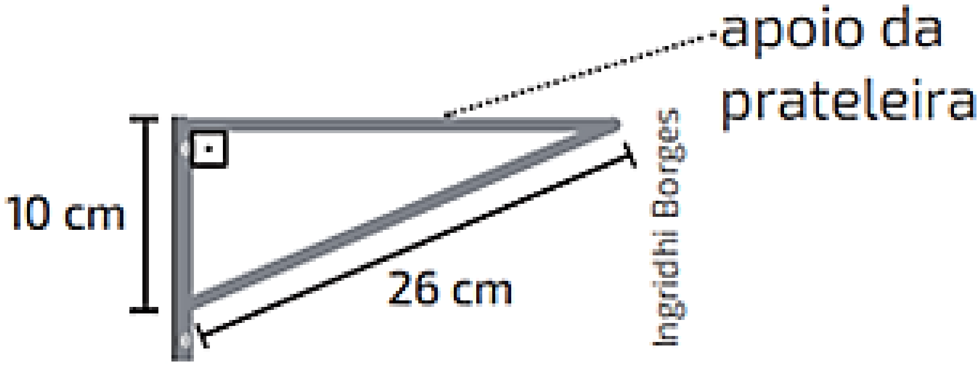
Resposta:

x = 20° e y = 50°

Atividade 7

Veja as medidas indicadas em um dos suportes para prateleiras que Carmem está instalando.

Figura 12 – Suporte de prateleira



Fonte: Pataro (2018, p. 196).

Determine a medida da largura da prateleira que Carmem vai utilizar sabendo que essa medida é igual à medida do comprimento da parte do suporte em que a prateleira ficará apoiada.

Resolução esperada:

1) Compreender o problema

Dados:

O suporte tem o formato de um triângulo retângulo, com um ângulo reto entre a base e a altura.

A altura do triângulo mede 10 cm.

A diagonal do suporte (hipotenusa) mede 26 cm.

A largura da prateleira corresponde à base do triângulo (medida desconhecida).

Objetivo:

Determinar a medida da base do triângulo retângulo, que representa a largura da prateleira.

2) Estabelecer um plano

1ª Estratégia:

Aplicar o Teorema de Pitágoras, pois conhecemos um cateto (altura) e a hipotenusa (diagonal). Deseja-se calcular a medida do outro cateto (base).

2ª Estratégia:

Construir um triângulo semelhante no GeoGebra e usar a ferramenta "Distância" para medir a base correspondente à largura da prateleira.

3) Executar o plano

Aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$(HIPOTENUSA)^2 = (CATETO)^2 + (CATETO)^2$$

$$26^2 = 10^2 + l^2$$

$$676 = 100 + l^2$$

$$676 - 100 = l^2$$

$$576 = l^2$$

$$\sqrt[2]{576} = \sqrt[2]{l^2}$$

$$24 = l$$

$$l = 24\ cm$$

Construção no GeoGebra:

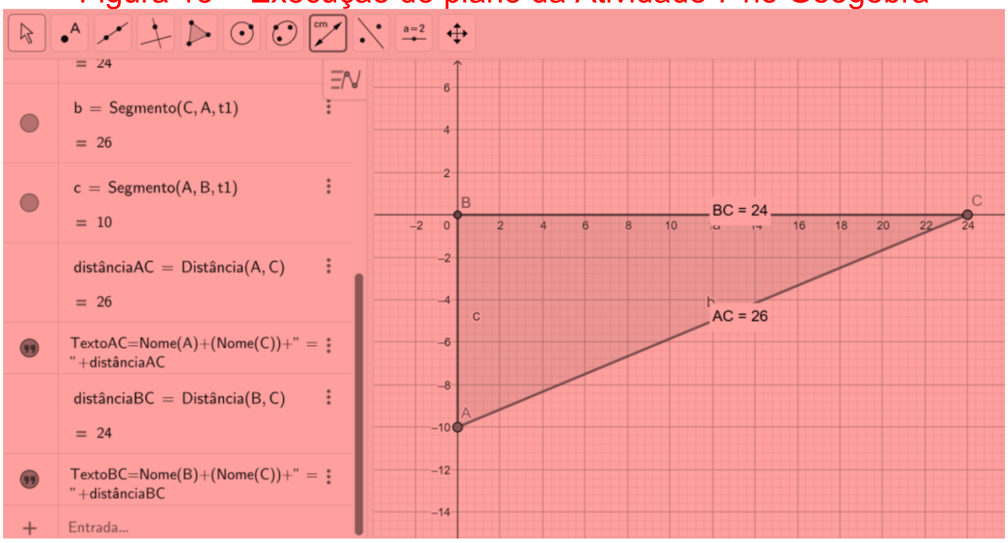
Criar os pontos: A = (0, −10), B = (0, 0) e C = (x, 0)

Ajustar o ponto C com a ferramenta "Mover" até que o segmento $\overline{AC}$ (hipotenusa) meça 26 cm (usar a ferramenta "Distância" para medir).

Medir o comprimento do segmento $\overline{BC}$, que representa a base do triângulo (largura da prateleira).

Resultado no GeoGebra: BC = 24

Figura 13 – Execução do plano da Atividade 7 no Geogebra



Fonte: elaborado pelos autores (2024).

4) Retrospecto (verificação)

Verificação com os dados encontrados:

$$(HIPOTENUSA)^2 = (CATETO)^2 + (CATETO)^2$$

$$(26)^2 = (10)^2 + (24)^2$$

$$676 = 100 + 576$$

$$676 = 676$$

A solução está correta, confirmada tanto pelo cálculo quanto pela construção no GeoGebra.

Resposta:

A largura da prateleira que Carmem vai utilizar é 24 cm.

Referências

ALMEIDA, Taís Ribeiro Drabik de. **Sistema positivo de ensino:** ensino fundamental: 6° ano: matemática. 3. ed. Atual. Curitiba: Cia. Bras. de Educação e Sistema de Ensino, 2025.

BIANCHINI, Eduardo. **Matemática**. 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

DIAS, Camilla Ehrat. **Sistema positivo de ensino:** 9º ano: ensino fundamental: anos finais. 3. ed. Curitiba: Cia. Bras. de Educação e Sistemas de Ensino, 2024.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A conquista da matemática**: 8º ano: ensino fundamental: anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

IEZZI, Gelson. **Matemática e realidade**: 6° ano. 9. ed. São Paulo: Atual Editora, 2018.

PATARO, Patricia Moreno. **Matemática essencial** – 9º ano ensino fundamental, anos finais. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2018.

AULA 7 – Geometria: avaliação

Encerrar a sequência de atividades sobre Geometria por meio de uma avaliação integradora e reflexiva, contemplando a devolutiva do professor, a avaliação das atividades pelos estudantes e uma reflexão sobre o processo de aprendizagem desenvolvido.

Nas aulas anteriores, você estudou conteúdos fundamentais da Geometria por meio da metodologia de Resolução de Problemas (RP), utilizando o *software* GeoGebra como ferramenta para construção do conhecimento. Na última aula, realizou uma atividade avaliativa, aplicando conceitos abordados na sequência.

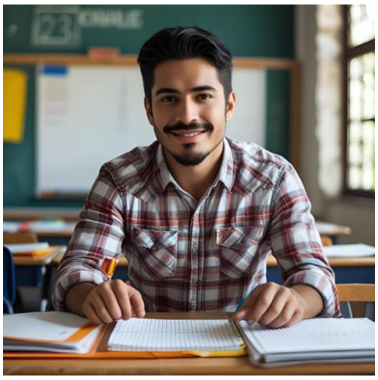
Agora, nesta aula final, será convidado a avaliar todo o percurso didático que vivenciou. Este é um momento importante de fechamento, reflexão crítica e contribuição para futuras aplicações desse material.

Sua participação é fundamental, pois suas respostas ajudarão a melhorar este material didático para aplicação em outras turmas da EJA-EPT.

Devolutiva do professor

O professor irá compartilhar com a turma:

- Os resultados gerais da avaliação escrita realizada na Aula 6 (sem identificar estudantes individualmente);
- Comentários sobre o desempenho geral observado ao longo das aulas;
- Reflexões sobre o desenvolvimento dos conteúdos factuais, conceituais, procedimentais e atitudinais, com base nas observações realizadas.



Aspectos avaliados pelo professor

- **Conteúdos factuais:** nomenclaturas, definições e terminologias geométricas estudadas;
- **Conteúdos conceituais:** compreensão de conceitos-chave como ponto, reta, ângulo, perímetro e triângulo;
- **Conteúdos procedimentais:** resolução de problemas, estratégias aplicadas e utilização do GeoGebra;
- **Conteúdos atitudinais:** interesse, respeito, colaboração e participação ativa.

Avaliação da sequência de atividades

Você responderá ao “Questionário de avaliação das atividades”, cujo objetivo é avaliar as atividades desenvolvidas em todas as aulas desta sequência de atividades de Geometria.

O questionário inclui perguntas objetivas e abertas sobre:

- Clareza e interesse das aulas;
- Qualidade das atividades propostas;
- Utilização da metodologia de Resolução de Problemas;
- Uso do *software* GeoGebra;
- Aplicação dos conteúdos no seu cotidiano;
- Sugestões para melhorar as próximas aulas.

Questionário de avaliação das atividades

Importante: você pode optar por não responder a qualquer uma das perguntas, caso não se sinta confortável.

Instruções: leia cada pergunta cuidadosamente e escolha a resposta que melhor reflete sua opinião ou experiência.

-

1) As atividades te ajudaram a entender melhor os conceitos de Geometria?

( ) Discordo Totalmente

( ) Discordo Parcialmente

( ) Concordo Parcialmente

( ) Concordo Totalmente

2) As atividades foram interessantes e te motivaram a aprender?

( ) Discordo Totalmente

( ) Discordo Parcialmente

( ) Concordo Parcialmente

( ) Concordo Totalmente

3) As instruções das atividades foram claras e fáceis de seguir?

( ) Discordo Totalmente

( ) Discordo Parcialmente

( ) Concordo Parcialmente

( ) Concordo Totalmente

4) Você acha que o tempo dedicado às atividades foi suficiente?

( ) Discordo Totalmente

( ) Discordo Parcialmente

( ) Concordo Parcialmente

( ) Concordo Totalmente

5) Qual atividade você mais gostou? Por quê?

____

____

____

____

6) Qual atividade você menos gostou? Por quê?

____

____

____

____

____

7) Você acha que a metodologia de Resolução de Problemas (RP) te ajudou a pensar e encontrar soluções para os problemas de Geometria?
(   ) Discordo Totalmente
(   ) Discordo Parcialmente
(   ) Concordo Parcialmente
(   ) Concordo Totalmente

8) Você se sente mais capaz de resolver problemas de Geometria do seu cotidiano depois de participar das atividades?
(   ) Discordo Totalmente
(   ) Discordo Parcialmente
(   ) Concordo Parcialmente
(   ) Concordo Totalmente

9) O uso do GeoGebra tornou o aprendizado da Geometria mais interessante?
(   ) Discordo Totalmente
(   ) Discordo Parcialmente
(   ) Concordo Parcialmente
(   ) Concordo Totalmente

10) Você teve dificuldades em utilizar o GeoGebra?
(   ) Muita dificuldade
(   ) Alguma dificuldade
(   ) Pouca dificuldade
(   ) Nenhuma dificuldade

11) Você acha que o GeoGebra te ajudou a visualizar e entender melhor os conceitos de Geometria?
(   ) Sim
(   ) Em parte
(   ) Não

12. Que mudanças você faria para aprimorar as atividades?
____
____
____
____

13) Gostaria de fazer algum comentário sobre as atividades, a Resolução de Problemas (RP) ou o uso do GeoGebra?

14) O material utilizado nas aulas (textos, imagens, instruções, comandos no GeoGebra, etc.) foi útil para o seu aprendizado?
( ) Discordo Totalmente
( ) Discordo Parcialmente
( ) Concordo Parcialmente
( ) Concordo Totalmente

15) Gostaria de comentar algo sobre os materiais utilizados nas aulas? O que mais ajudou no seu aprendizado? O que poderia ser melhorado?

Momento de Reflexão

Após preencher o questionário, reflita sobre sua experiência com a sequência de aulas. Você pode escrever suas reflexões ou compartilhá-las em uma conversa com a turma.

SOBRE OS AUTORES

William Gonçalves Meireles

É especialista em Metodologia do Ensino de Matemática e Física pelo Centro Universitário Internacional (UNINTER) e licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Atualmente, é professor da Rede Municipal de Ensino de Santa Maria na Escola Municipal de Ensino Fundamental Suzana Cartier Larangeira e no Colégio Batista Santa Maria.

Lattes: < https://lattes.cnpq.br/9374011038871833>.

Mauricio Ramos Lutz

É pós-doutor, em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Franciscana (UFN), doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela UFN, mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), especialista em Matemática, Mídias Digitais e Didática também pela UFRGS e licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). Atualmente é professor titular do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico no Instituto Federal Farroupilha (IFFar) e no Mestrado Profissional em Educação Profissional e Tecnológica em Rede Nacional (ProfEPT).

Lattes:<http://lattes.cnpq.br/5099730179818142>.

ALGUMAS PALAVRAS FINAIS

Este caderno didático foi pensado para tornar a Geometria mais acessível, significativa e conectada ao cotidiano dos estudantes da EJA-EPT. Por meio da Resolução de Problemas e do uso de Tecnologias Digitais, buscamos promover uma aprendizagem mais ativa e contextualizada.

Ao longo das aulas, buscamos não apenas apresentar conceitos geométricos, mas criar um espaço de reflexão, diálogo e construção coletiva do saber, respeitando os saberes prévios dos estudantes e valorizando suas experiências de vida. Acreditamos que a Matemática, especialmente a Geometria, ganha mais sentido quando conectada ao cotidiano, às práticas profissionais e às possibilidades de transformação social.

Esperamos que as atividades propostas tenham contribuído para ampliar os horizontes de aprendizagem, despertando o interesse e fortalecendo a autonomia dos estudantes. Que este material possa servir como ponto de partida para novas práticas pedagógicas, mais interativas, inclusivas e contextualizadas, reafirmando o compromisso com uma Educação Profissional e Tecnológica (EPT) que reconhece e potencializa os sujeitos da EJA.

Agradecemos a todos que contribuíram para a construção deste trabalho. Que os saberes aqui desenvolvidos continuem sendo multiplicados nos diversos espaços educativos.