

DESIGUALDADES NO TRIÂNGULO

Uma proposta de investigações que conduzam à prova

Pitágoras Vasconcelos dos Anjos
Mariana Cassol

Conteúdo

Conteúdo	i
1 Demonstração: da origem à sala de aula	3
1.1 O que é demonstrar e qual a sua função?	3
1.2 As origens da demonstração e seu desenvolvimento	5
1.3 A demonstração na sala de aula: a prova	7
2 Metodologias de ensino que contribuem com a construção da prova	10
2.1 A Geometria dinâmica	11
2.2 As Tarefas de Investigação	12
3 As tarefas e os recursos desenvolvidos	16
3.1 Tarefa 01 - O Teorema do Ângulo Externo	18
3.2 Tarefa 02 - Ao maior lado, o maior ângulo	19
3.3 Tarefa 03 - A desigualdade triangular	20
3.4 Considerações dos autores	21
Referências	24

Apresentação

O presente trabalho, uma sequência didática, é uma das produções resultantes da pesquisa de dissertação de mestrado do primeiro autor. Foi desenvolvida no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional em Matemática (PROFMAT) vinculado ao Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade Federal da Bahia (UFBA). A pesquisa teve o objetivo de desenvolver tarefas de natureza investigativa em ambientes de geometria dinâmica de modo a contribuir com a construção da prova matemática em problemas relativos às desigualdades no triângulo. Nela, apresentamos, discutimos e analisamos os resultados obtidos na aplicação desta sequência didática, assim como desenvolvemos o quadro teórico que nos orienta na interpretação dos dados coletados.

O leitor interessado em uma breve análise dos resultados dessa pesquisa pode consultar Anjos e Cassol (2024) e, aqueles interessados em uma análise completa, Anjos (2025). Aqui, temos o objetivo de apresentar a sequência didática em questão e alguns elementos teóricos que a fundamentam, em especial, aos professores da Educação Básica que têm interesse em abordar a prova e/ou a demonstração em sala de aula. Esta sequência também pode ser relevante para aqueles que buscam tarefas de natureza investigativa, atividades de geometria dinâmica ou ainda àqueles que pretendem abordar as desigualdades no triângulo. Evidentemente, esta sequência não é definitiva sobre o tema, cabe ao professor avaliar a sua pertinência para aplicação com os seus estudantes, assim como eventuais ajustes com vistas a adequar a realidade de seus educandos.

Precisamos destacar, ao leitor, que nosso objeto de interesse é a prova e/ou a demonstração, que, como veremos, não entendemos como sinônimos. Desse modo, o objeto de conhecimento matemático, as desigualdades no triângulo, é apenas um fio condutor para o que pretendemos estimular, a prova. O critério de escolha do conteúdo matemático foi quase pessoal, mas há evidências de que a geometria é uma área fértil ao desenvolvimento de provas e demonstrações em razão do seu apelo visual.

Estruturamos este trabalho do seguinte modo. No primeiro capítulo, apresentamos o nosso objeto de estudo: a demonstração. Discutimos o que é uma demonstração, as suas funções e investigamos a sua origem. Encerramos o capítulo aproximando o tema demonstração da sala de aula, apresentando e classificando formas mais simples de argumentação que podem ser consideradas válidas para os estudantes da Educação Básica: a prova. As estratégias que usamos para criar uma situação de prova: o uso dos ambientes de Geometria Dinâmica (GD) e as tarefas investigativas, são discutidas no segundo capítulo, onde conceituamos cada uma das metodologias de ensino e discutimos brevemente as suas relações com a criação de uma situação de prova. Encerramos o trabalho, no terceiro capítulo, apresentando a sequência didática, tarefa a tarefa, sinalizando as habilidades e competências às quais podem ser relacionadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) e tecendo alguns comentários gerais sobre a aplicação a partir de nossa experiência.

Capítulo 1

Demonstração: da origem à sala de aula

1.1 O que é demonstrar e qual a sua função?

É lugar comum o relato dos estudantes de licenciatura em matemática sobre o impacto da mudança de paradigma entre a matemática que é vista na Educação Básica e aquela que é apresentada no nível superior. A demonstração é o cerne dessas questões, visto que não costuma ser um objeto de estudo da Educação Básica, na prática, nem do nível superior, que se preocupa mais em ensinar a demonstrar do que ensinar sobre ela. Quando estudantes, não fomos apresentados a uma definição de demonstração, aprendemos vendo o que é feito pelos professores e replicando as mesmas ações (Bicudo, 2002). Um estudo da demonstração, diga-se de passagem, está mais próximo da filosofia e da epistemologia, como podemos ver em Nagafuchi (2009), do que da matemática propriamente dita, ela não é um objeto matemático, mas, sim, uma ferramenta com a qual se estuda os objetos dessa ciência.

Uma análise do conceito de demonstração a partir de sua função lógico-epistemológica, como posto por Da Silva (2002) nos permite compreendê-la como um objeto lógico ideal, estruturado como “[...]árvores ou seqüências ordenadas no espaço lógico, segundo relações de dependência, ou consequência, lógica”(p. 69). Outros autores, ao definir uma demonstração, também evidenciam essa função. Para Tarski (1969) a demonstração de uma dada afirmação consiste no encadeamento finito de afirmações de tal modo que a primeira afirmação na seqüência é um axioma, as afirmações seguintes são axiomas ou são consequências diretas das afirmações que antecedem aquela que se deseja demonstrar, e a última afirmação é

exatamente aquela que se pretende demonstrar.

Essas noções estão de acordo com os exemplos de demonstrações que vemos nos livros e aulas. Contudo, existem outros aspectos que também estão presentes nos livros e aulas, mas em menor intensidade, que nos ajudam a compreender a demonstração de um modo mais completo: a função retórica e a heurística, também categorizadas por Da Silva (2002).

A função retórica destaca a capacidade da demonstração de convencer um grupo de pessoas que tenham conhecimento em matemática sobre a tese defendida. Da Silva (2002, p. 71) diz “[...] uma demonstração é algo capaz de induzir uma vivência subjetiva indutora de convicção em um agente matemático”. Bicudo (2002) também destaca a função retórica ao conceber a demonstração como um argumento que tem por finalidade gerar *aceitação da validade* de uma afirmação a partir de outras asserções que já tenham sido previamente demonstradas, mas sem entrar em ciclos como vemos nos dicionários. De Villiers (2001) ao contribuir com a discussão sobre a função retórica da demonstração, aponta elementos que auxiliam nesse processo de convencimento, o empirismo “[...] Logicamente, exigimos alguma forma de demonstração dedutiva, mas psicologicamente parece que precisamos ao mesmo tempo de alguma experimentação exploratória ou compreensão intuitiva”.

Os aspectos lógico-epistemológico e retórico podem coexistir de modo independente, contudo, Da Silva (2002) pontua que não é possível que o lógico-epistemológico coexista com a função heurística. O autor defende que a demonstração é um condutor da descoberta matemática quando ela contém erros lógicos que desencadeiam um novo processo de busca e compreensão do objeto matemático em questão.

Outros autores também apresentam uma análise da demonstração a partir de suas funções, para De Villiers (2001), por exemplo, existem 5: verificação, explicação, comunicação, sistematização e descoberta. Conhecer as funções da demonstração não é apenas uma necessidade teórica, ela orienta a prática como notamos em De Villiers (2001) ao descrever o uso das funções da demonstração como uma forma de estimular os estudantes a buscarem uma demonstração. Ele descreve uma atividade desenvolvida em um ambiente de geometria dinâmica com o *software Sketchpad* na qual ressalta que a função de verificação, quando analisada neste, fica fragilizada, uma vez que o usuário do software pode ser impelido a não ver a necessidade de demonstrar, já que a manipulação dos objetos no ecrã cria, de modo empírico, a convicção da validade. Neste caso, o uso da função de desafio intelectual foi determinante para impelir os estudantes a demonstrarem, eles foram desafiados a explicar, usando argumentos dedutivos, as razões de tal fato ser verdadeiro.

Pesquisas em Educação Matemática, como Ferreira (2016), que convergem para a

necessidade de abordar a demonstração em sala de aula optam por estabelecer uma distinção entre provar e demonstrar. Essa distinção se dá pela necessidade de nomear os distintos processos de validação que são usados pelos estudantes e que devem ser considerados como uma forma válida de argumentar e que não são demonstrações tais como as concebemos na matemática acadêmica. Dessa forma, para nós, prova é: uma explicação que tem como finalidade convencer um determinado grupo de pessoas sobre a validade de uma afirmação, já a demonstração: é uma prova na qual o grupo de pessoas é a comunidade dos matemáticos. Nesses termos, a prova é uma generalização da demonstração nos termos que anunciamos ao longo desta seção.

1.2 As origens da demonstração e seu desenvolvimento

Os processos de validação em matemática nem sempre foram organizados e sistematizados do modo que expusemos, em forma de demonstração. As validações ocorriam por verificação prática ou ainda por meio de provas visuais. Contudo, isso não foi um impeditivo ao desenvolvimento da matemática, civilizações da antiguidade, como a egípcia e a babilônica, desenvolveram sistemas de numeração próprios, aritmética, algoritmos para a solução de sistemas lineares, assim como noções de área e volume (Berlinghoff; Gouveia, 2010). Também determinaram, de modo independente, aproximações para o valor de π : 3,16, os egípcios, e 3,125, os babilônios.

Situações como essa teriam levado os gregos a buscarem uma forma de evitar a multiplicidade de respostas a um mesmo problema, admitindo apenas como argumento plausível aqueles que se baseavam em suposições que fossem evidentes a todos e, a partir delas, deduzir as demais (Grabiner, 2012). Essa pode ter sido a gênese dos axiomas. Outras contribuições dos gregos antigos podem ser observadas em alguns personagens famosos e livros igualmente reconhecidos. Tales de Mileto (600 a.C) foi o primeiro a produzir uma demonstração e Pitágoras de Samos (532 a.C) junto a sua irmandade pitagórica, teriam sido os responsáveis por introduzir em suas pesquisas temas de natureza abstrata e o tratamento dedutivo (Proclo, sec. V *apud* Domingues, 2002). Segundo Domingues (2002) os pitagóricos teriam encadeado “[...] raciocínios para estabelecer propriedades e encadear[am] propriedades para deduzir outras propriedades de certas partes da geometria (p.57-58).

O personagem que, individualmente, é o ponto de inflexão é Euclides de Alexandria (300 a.C). *Os Elementos* na prática são um conjunto de 13 volumes que apresentam um estudo lógico-dedutivo sobre geometria e aritmética, é a obra mais antiga que sobreviveu ao tempo e às pessoas que retratam a matemática desse prisma. Juntos, os 13 volumes apresentam 465 proposições que são resultado de um trabalho de compilação e organização dos conhecimentos de geometria e aritmética gregos existentes até então. Os conteúdos são

apresentados seguindo o padrão: definição, postulados, proposições, demonstração e sem a noção de conceito primitivo, elemento só viria a surgir quase 2 milênios depois (Eves, 2004).

Por volta do século XIX, o tempo já apontava as fragilidades de *Os Elementos*, que apesar de nos milênios que seguem a sua construção ter influenciado obras de grandes nomes como Isaac Newton e Baruch Spinoza que seguiram o seu parâmetro de rigor (Grabiner, 2012), precisava de uma reestruturação para atender os novos padrões de demonstração. Quem melhor empreendeu esse trabalho foi David Hilbert que em sua abordagem incluiu os conceitos primitivos de ponto, reta e plano como os elementos iniciais a partir dos quais todos os demais fatos decorrem sem uso de qualquer intuição geométrica (Domingues, 2002). Essa reestruturação segue até os dias de hoje.

Possivelmente o próximo paradigma que envolve a demonstração está relacionado ao computador e às provas por ele assistidas, quer seja por meio de cálculos auxiliares ou, mais recentemente, pelo uso das Inteligências Artificiais (IA). A primeira prova assistida por computador foi a do teorema das quatro cores em 1976, na qual o computador foi usado para fazer uma quantidade gigante de cálculos que auxiliaram na construção da demonstração (Domingues, 2002). Quase em concomitância, vemos os primeiros estudos sobre o uso de IA na demonstração de teoremas. Hoje, a IA com melhor desempenho, o AlphaGeometry, é capaz de criar demonstrações sem a intervenção humana e sem ter como exemplo em sua base de dados uma demonstração. Ela opera usando um motor simbólico e um conjunto de regras lógicas que são previamente informadas como permitidas. Uma vez diante de um problema, a IA o traduz da linguagem corrente para a sua linguagem, separando a hipótese da tese e usa o motor lógico para produzir afirmações que sejam logicamente verdadeiras. Se alguma das afirmações produzidas for a tese, o problema está demonstrado, se não, a IA cria um elemento geométrico, como um ponto ou segmento, e repete o processo, produzindo conclusões que envolvem esse novo objeto. Esse modelo de IA generativa se mostrou eficiente para resolver problemas olímpicos de matemática, tendo um índice de acerto próximo ao de um medalhista de ouro da Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) (Trinh *et al.*, 2024).

Desde que foi concebida na Grécia Antiga, a demonstração é uma presença constante na matemática que assume os mais diversos papéis. É difícil precisar quais os próximos passos dos processos de validação em matemática, mas acreditamos que isso passa por discutir o papel que o computador e as IAs têm na produção de demonstrações. Para além, a nós, educadores, há uma questão mais preeminente: dada a relevância, pelo menos histórica, na matemática, qual o papel que a demonstração tem desempenhado na Educação Básica?

1.3 A demonstração na sala de aula: a prova

A demonstração é um elemento central do desenvolvimento da matemática ocidental, ela não apenas acompanha esse desenvolvimento como também o motiva. A par dessa importância, podemos discutir o papel que a demonstração tem ou poderia ter em sala de aula da Educação Básica.

Moreira e David (2005) trazem uma importante discussão sobre matemática acadêmica e matemática escolar que nos auxiliam nessa tarefa. Há concepções de matemática acadêmica que a colocam em um lugar hierarquicamente superior a matemática escolar e outros constroem a ideia de matemática escolar como campo independente da matemática. Contudo, assim como nós, Moreira e David (2005) buscam uma concepção que não seja científica didatizada ou uma construção autônoma e definem “[...] *matemática Escolar* referir-se-á ao conjunto de saberes ‘validados’ associados especificamente ao desenvolvimento do processo de educação escolar básica no ensino de matemática”(p. 20, destaque no original). Desse modo, a sua concepção engloba, a um só tempo, a necessidade de validação dos saberes discutidos na Educação Básica e as práticas profissionais do professor de matemática.

A matemática escolar, assim como a matemática acadêmica, está ancorada na prática dos seus respectivos profissionais. O matemático profissional desenvolve o seu trabalho na fronteira do conhecimento, produzindo resultados inéditos com métodos de pesquisa e procedimentos de validação próprios e os comunica de modo formal e rigoroso. Por outro lado, o professor de matemática da Educação Básica, tem outros objetivos e objetos e, portanto, em sua prática surgem outras formas de definir objetos, investigar relações e validar argumentos em razão da natureza educativa do seu trabalho.

Observada sob o prisma da matemática escolar, a função de verificação da demonstração, por exemplo, passa a ter uma existência questionável, dado que os objetos de conhecimento da matemática escolar já passaram pelo processo de verificação da matemática acadêmica antes de compor as estruturas curriculares. Por essa e outras questões, a validação deve ter uma forma distinta daquela presente no modelo lógico-dedutivo. Nesse sentido, as dobraduras em papel podem ser aceitas como uma validação de uma conjectura sobre um objeto geométrico (Moreira; David, 2005). O fundamental na demonstração, quando observada sob a ótica da matemática escolar, não é o encadeamento dedutivo associado à função de sistematização da demonstração, mas, sim, a construção de argumentos que possibilitem ao estudante usar o fato demonstrado de modo coerente na vida, inclusive, extraescolar.

Há uma diferença significativa entre alinhar argumentos logicamente irrefutáveis que garantam a validade de um resultado a partir de postulados, definições, conceitos primitivos de uma teoria e, no contexto educativo escolar, promover o desenvolvimento

de um[a] convicção profunda a respeito da validade desse resultado (Moreira; David, 2005, p. 24) .

Partindo da premissa de observar os processos de validação que são usados na matemática escolar, Balacheff (2022a) classificou os processos de argumentação em duas grandes categorias: as provas pragmáticas e as provas intelectuais. As provas pragmáticas, são aquelas cujos argumentos são baseados na experimentação, na ação concreta, como medições do objeto e cálculos, ela é dividida em três tipos de provas: empirismo ingênuo, experimento crucial e exemplo genérico. As provas intelectuais, por sua vez, são baseadas em argumentos distantes da ação sobre os objetos, o argumento considera o objeto como um representante de classe, têm um maior nível de abstração, encadeamento lógico e domínio da linguagem; elas podem ser do tipo: exemplo genérico e experiência mental. Abaixo descrevemos os tipos de prova descritos por Balacheff (2022a)

- *Empirismo ingênuo*: um tipo de argumento no qual a validade de uma conjectura é garantida por meio da verificações como medições e testes em uma quantidade pequena de situações e/ou objetos.
- *Experimento crucial*: o argumento nesse caso parte da percepção empírica, mas o próprio estudante nota que é uma ação limitada. É esperado que os argumentos nessa etapa contenham uma grande quantidade de testes, mas com a percepção de que eles são suficientes apenas quando conseguem verificá-los em um caso particular do problema que julgam como caso extremo. Nesta fase as limitações de linguagem impedem a construção de uma prova mais complexa.
- *Exemplo genérico*: os argumentos que se enquadram nessa categoria contêm formulações que indicam generalização e o princípio da percepção dos objetos matemáticos enquanto representante de classe. Esse tipo de argumento é visto como um ponto de inflexão entre as provas pragmáticas e as provas intelectuais, estando ora classificado como prova pragmática, ora como prova intelectual a depender da relação do argumento apresentado com a representação e a ação sobre o objeto de estudo. É importante destacar que para abandonar a representação material, os estudantes devem ter uma linguagem bem desenvolvida.
- *Experiência mental*: os argumentos neste tipo de prova não precisam da representação material e a ação acontece sobre as representações mentais do objeto matemático. É entre este tipo de prova e a anterior, exemplo genérico, que acontece a transição das provas pragmáticas às intelectuais, a partir do desenvolvimento da linguagem, cognição e capacidade de abstração.

Essa tipologia de provas nos apresenta uma importante ferramenta para classificar

os processos de validação que são oferecidos pelos nossos estudantes e também por apontar caminhos que podem nos auxiliar a elevá-los a níveis progressivamente superiores de prova. Nesse processo de estímulo à produção de provas, existem, naturalmente, alguns obstáculos. Mello (1999) destaca alguns deles: os epistemológicos, os didáticos e os linguísticos.

- *Epistemológicos*: se referem aos saberes historicamente conflituosos que foram incorporados à matemática. Por exemplo, a prova por absurdo, o uso de desenhos prototípicos, os diferentes registros de representação de um objeto e a rede semântica.
- *Didáticos*: são aqueles que se referem a escolhas a nível de Estado como a construção de documentos norteadores e presença do tema em livros didáticos. Também é percebido a nível de sala de aula com a incorporação ou não de processos de validação nas atividades desenvolvidas. Ou seja, são obstáculos presentes no sistema educativo como um todo e nas escolhas metodológicas do professor.
- *Linguísticas*: se refere a capacidade do estudante de ler um texto e poder interpretá-lo. Também se estende a possibilidade de compor uma solução articulado argumentos distintos dentro de um texto com coerência.

Uma vez decididos a abordar a prova e demonstração na sala de aula, cientes dos obstáculos e dos tipos de prova, existem possibilidades metodológicas que podem nos auxiliar a mitigar os obstáculos e criar uma situação de prova: as tarefas investigativas e os *softwares* de geometria dinâmica (SGD). Juntas, elas oferecem um ambiente atrativo que possibilita a exploração e investigação, e fomenta a produção de conjecturas e provas, como veremos a seguir.

Capítulo 2

Metodologias de ensino que contribuem com a construção da prova

Criar uma situação na qual seja possível estimular o estudante a demonstrar não é algo simples. A literatura apresenta, inclusive, casos em que os autores avaliam a empreitada como “pretensiosa” e destacam como um dos obstáculos a necessidade de um trabalho de longo prazo, como vemos em Mello (1999) e Mello e Almouloud (2000). Contudo, destacamos o recente crescimento das pesquisas com relação a esse tema e a inclusão dessa demanda em documentos normativos como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A tipificação das provas de Balacheff (2022a) e os obstáculos percebidos por Mello (1999) já nos ofertam alguns elementos que podem nos nortear no sentido de construir uma situação de prova. Outras percepções acrescidas a estas. Rosale (2007) aponta que uma abordagem a prova e demonstração não pode ser baseada na exibição da demonstração na lousa, deve ser valorizado o processo visando a construção de habilidades de argumentação no educando. Por outro lado, de modo mais enfático, Boero (1996, *apud* Almouloud 2007) coloca algumas condições sob as quais conseguiu criar uma situação de prova com estudantes de 9º ano:

[...] colocados sob condições de implementar um processo com as seguintes características:

- durante a produção da conjectura, o estudante progressivamente trabalha sua hipótese por meio de uma atividade argumentativa intensa misturada funcionalmente com a justificação da plausibilidade de suas escolhas;
- durante o estágio seguinte da prova, o estudante organiza, por meio de relações construídas de maneira coerente, algumas justificativas (“argumentos”) produzidas

durante a construção da afirmação de acordo com uma corrente lógica (Boero, 1996 *apud* Almouloud, 2007, p.02).

Identificamos que as tarefas de investigação matemática e os ambientes de geometria dinâmica podem contribuir com as condições observadas por Boero (1996) de modo a criar situações de prova. Além disso, também notamos em Ponte *et al.* (2019) as potencialidades das tarefas investigativas e em Gravina (1996; 2001) as potencialidades dos ambientes de geometria dinâmica em criar uma situação de prova. Em Anjos e Cassol (2024) e Anjos (2025) vemos como a integração dessas metodologias pode ser um aliada na construção de situações de prova.

2.1 A Geometria dinâmica

Os programas de geometria dinâmica se diferenciam dos demais programas de geometria por permitirem a manipulação dos objetos de modo interativo (Oliveira, 2020). Eles oferecem recursos que são compatíveis com régua e compasso digitais e a possibilidade de modificar esses elementos por meio da ferramenta arrastar, permitindo assim a construção de uma infinidade de objetos que possuem um conjunto de características fixas, no mínimo, aquelas que os definem e que foram impostas na construção inicial. O objeto geométrico em um ambiente de geometria dinâmica é, portanto, um representante de classe cuja escolha por este ou aquele representante é uma questão de conveniência para a solução do problema em questão (Gravina, 2001).

Alves e Soares (2005) listam algumas características dos *softwares* de geometria dinâmica: a construção de objetos com precisão e variedade, exploração e descoberta, visualização e representação, e a prova.

A *precisão na construção de objetos* favorece o fim dos desenhos prototípicos, aqueles que são costumeiramente desenhados para exemplificar uma forma geométrica, como um quadrado com os lados paralelos aos lados da lousa. Os desenhos prototípicos podem contribuir para uma compreensão equivocada do objeto ao permitir, não intencionalmente, a inclusão de particularidades do desenho na definição do objeto. Gravina (2001) agrega que o fim dos desenhos prototípicos permite que os estudantes observem subconfigurações não prototípicas de propriedades já conhecidas, auxiliando no desenvolvimento de uma argumentação.

A *exploração e a descoberta* é possibilitada por meio das atividades que são disponibilizadas nesses ambientes que podem ser de dois tipos: as atividades de exploração, também chamadas de caixa preta, quando não há possibilidade de inclusão de novos elementos, o estudante pode manipular apenas o que já está posto na tarefa, e as atividades de expressão,

aquelas em que o estudante pode fazer construções conforme sinta vontade ou necessidade. Em ambos os casos, os estudantes têm a possibilidade de movimentar os objetos independentes, de modo a visualizar uma família de subconfigurações dos objetos desenhados em tela, essa manipulação é uma forma de exploração que pode permitir a observação de relações, a formulação de conjecturas e a criação de novas questões de exploração.

A *visualização ou representação mental* dos objetos geométricos é um importante recurso dos SGD e é por meio dela que os fatos estáveis implícitos, as características que permanecem invariantes mesmo que sob ação do movimento, emergem em uma situação de exploração. As experiências visuais possibilitam a formação de conceitos e conduzem a representação mental correta do objeto (Gravina, 2001).

As potencialidades dos SGD até aqui elencadas, como podemos notar, permitem a construção de habilidades que favorecem a construção da prova. Alves e Sores (2005), contudo, destacam a *prova* como a quarta e última potencialidade identificada por eles. Diversos autores convergem com essa percepção e atribuem essa potencialidade aos mais diversos fatores. A título de exemplo, Gravina (1996) afirma que a prova é favorecida em razão do equilíbrio entre os campos conceitual e figural do objeto geométrico, e Marioti (2000, *apud* Zulatto 2002) aponta que a prova surge em razão da demanda por uma explicação do porquê alguns fatos funcionam e outros não.

Desse modo, já cientes das possibilidades que os SGD possuem, precisamos discutir a natureza das tarefas que devem ser construídas nesse ambiente, já que tarefas exploratórias, que engajem o educando no processo de investigação, são um elemento fundamental na construção da prova.

2.2 As Tarefas de Investigação

Ao contrário do que pode parecer, uma investigação não necessariamente é um processo altamente complexo, com diversas etapas que podem ser realizadas apenas por um seleto grupo de pessoas com inteligência acima da média e que conduzem a grandes revoluções. Investigar trata-se da busca de respostas para um problema de interesse do pesquisador (Ponte *et al.*, 2019). Evidentemente a complexidade desse processo está ligada aos problemas que são formulados pelo pesquisador e a forma com a qual ele opta por abordar o problema.

A matemática, assim como as demais ciências, tem os seus próprios objetos e métodos de investigação. Contudo, Lakatos e Marconi (2003) classificam a matemática, juntamente com a lógica, como uma ciência formal, uma classificação completamente diferente das demais em razão das particularidades do seu processo de validação. Por exemplo, na física,

os experimentos têm o status de um processo de validação legítimo, aceitos pelos pares, o que não acontece com a matemática (Singh, 2011). O experimento em matemática é um elemento forte e relevante como um contra-exemplo e, em especial, como um contra-exemplo, que auxilia em um processo de investigação que conduz a um refino de uma conjectura. No mais, a experimentação e o teste têm um aspecto secundário na matemática acadêmica. Mas para nós, do ponto de vista da matemática escolar, é um primeiro processo de validação que deve ser, ao seu tempo, estimulado e confrontado com os próprios limites.

A matemática é construída por meio dessa dialética entre provas - no sentido de demonstração, apenas para manter a nomenclatura original do autor, Imre Lakatos (1976) - e refutações. Diante de um problema, o matemático observa, coleta informações e as analisa, permitindo assim a observação de padrões, a criação de conjecturas e, posteriormente, a demonstração. Caso a demonstração não seja possível, a investigação tem dois caminhos ainda possíveis: a refutação em razão da falsidade da afirmação ou ainda o refinamento da conjectura em razão de um problema no domínio de validade da asserção, podendo posteriormente, a depender de mais um processo de tentativa de demonstração, conseguir o status de teorema.

Importar essa prática do matemático profissional para o estudante da Educação Básica é um desafio, mas, como podemos constatar em Ponte *et al.* (2019) e Brocardo (2001), é possível até mesmo com estudantes em séries iniciais.

A investigação em sala de aula de matemática da Educação Básica ganha forma como um tipo de tarefa na qual o estudante é apresentado a uma situação em que não há um objetivo claro a ser alcançado, pelo menos da perspectiva do estudante. O professor, ou outro lado, deve ter objetivos claros e não pode deixar de considerar que uma investigação pode tomar caminhos inesperados. O próprio estudante é quem define o objetivo e os métodos que serão empregados em uma atividade onde o processo é mais relevante do que o resultado. Uma tarefa de investigação tem três fases: introdução à tarefa, realização da investigação e a discussão dos resultados. A seguir falamos sobre cada uma delas na perspectiva de Ponte *et al.* (2019)

Na *introdução à tarefa*, o professor deve apresentar a situação de investigação do modo mais estimulante possível. Além disso, os estudantes precisam ter clareza sobre a postura que é esperada deles e a postura que o professor terá. Aos estudantes cabem a definição dos objetivos, dos problemas e as escolhas dos métodos, por exemplo, e ao professor, orientar nos caminhos escolhidos, sempre tendo em vista que ele deve fomentar a investigação, não ofertar respostas ou controlar as escolhas dos estudantes. Esses papéis não são necessariamente assim, tão regulados, mas o fundamental é permitir que os estudantes explorem a situação e consigam produzir conjecturas e justificá-las. Nesta fase também

deve ficar claro para os estudantes qual o produto esperado ao final da investigação: uma comunicação para os colegas e para o professor das descobertas que fizeram durante a investigação, apresentando, caso tenham desenvolvido, justificativas para as eventuais conjecturas formuladas.

Na segunda fase descrita por Ponte *et al.* (2019) a *realização da investigação*, é quando efetivamente se dá o desenvolvimento dos trabalhos. Quando os estudantes já foram apresentados a tarefa, eles realizam explorações iniciais nas quais coletam dados, observam padrões, vão se familiarizando com os problemas e subproblemas percebidos. Contudo, isso não acontece necessariamente de modo sistematizado, organizado e de modo a ser percebido pelo professor e até mesmo pelos demais colegas, podendo, inclusive, parecer um momento de improdutividade, mas não, é quando o estudante está se familiarizando com a tarefa. A formulação de conjecturas segue naturalmente esse processo, elas costumam surgir por observação direta ou analogia, por exemplo. Porém, a justificação delas é comumente deixada em segundo plano e, quando ocorre, costuma ser um empirismo ingênuo. Entendemos, contudo, que o professor deve estimular de modo gradual a construção de justificativas, mesmo que por meio do empirismo, e posteriormente, também de modo gradual, mostrar os limites que esse tipo de argumento possui.

Encerrando a aplicação da tarefa investigativa, a *discussão dos resultados* é a etapa na qual os estudantes compartilham as suas descobertas e apresentam os seus argumentos sobre o porquê suas conjecturas são verdadeiras ou falsas. É neste momento que o trabalho do estudante, ou do seu pequeno grupo, ganha um caráter público ao ser exposto à crítica dos demais colegas e do professor. Os argumentos ofertados podem não ser aceitos pelos demais colegas ou ainda, algum deles pode encontrar um contraexemplo para a conjectura que está sendo defendida. Neste contexto, duas situações são consideradas por Ponte *et al.* (2019) como fundamentais: o *aprofundamento da conjectura*, que ocorre quando se ajusta o domínio de validade dela à medida em que vão sendo observados casos particulares que não são verificados e a *conclusão por justa maioria* que é o aceite do grupo aos argumentos que foram apresentados e que não precisam ser necessariamente lógico-dedutivos, basta convencer o grupo.

A construção de uma situação que conduza a exploração não é trivial e depende muito do aceite ao convite a investigação, como destaca Skovsmose (2000), e da postura do professor. Optar por usar as tarefas de investigação requer uma postura de mudança de paradigma para professores e estudantes, que são lançados em tarefas de natureza diversa ao que comumente é feito em sala de aula. Porém, essa complexidade traz a possibilidade de aproximar o trabalho do estudante em sala de aula ao trabalho do matemático, permitindo, assim, a construção de uma concepção da matemática enquanto ciência e, principalmente,

dados os nossos objetivos, criando situações que deixam os estudantes mais próximos de prova ao serem submetidos a tarefas ricas de possibilidades de explorações.

Capítulo 3

As tarefas e os recursos desenvolvidos

A nossa sequência didática* é composta de três tarefas investigativas que foram desenvolvidas em um *software* de geometria dinâmica, o GeoGebra (GGB), e estão armazenadas em seu domínio em forma de livro digital. Inclusive, recomendamos que a aplicação seja efetuada usando o ambiente do GGB. As tarefas versam sobre fatos já conhecidos da geometria plana, como listamos abaixo:

- **Tarefa 01** - O teorema do ângulo externo que afirma que o ângulo externo de um triângulo tem medida superior a medida de qualquer ângulo interno não adjacente;
- **Tarefa 02** - Em um triângulo, o lado de maior medida se opõe ao ângulo de maior medida, além disso, se dois lados têm a mesma medida, então os ângulos opostos também têm;
- **Tarefa 03** - A desigualdade triangular: em um triângulo a soma das medidas de dois de seus lados é sempre maior que a medida do terceiro lado.

As tarefas foram organizadas de modo que o resultado obtido na primeira tarefa é um argumento para a demonstração da conjectura da segunda tarefa, e os resultados obtidos na primeira e segunda tarefas são importantes na demonstração do resultado da terceira. Essa foi uma maneira de organizar a sequência de modo a evidenciar a função da sistematização da prova. Outras funções como a da explicação e o desafio intelectual podem ser reiteradamente solicitados pelo professor no decorrer da aplicação como uma estratégia para fomentar a construção de argumentos.

* Sequência disponível em: <https://www.geogebra.org/m/jtqqnfpc>

Imaginamos que o estudante que será público dessa sequência não está habituado com tarefas investigativas, por essa razão, optamos por uma tarefa mais estruturada. Isto é, a tarefa aponta caminhos para os quais o estudante pode dirigir a sua atenção caso não consiga vislumbrar nenhuma outra forma de investigação. As dicas fazem esse papel. Recomendamos ao professor que oriente os estudantes a não lerem todas de uma vez e depois executarem a tarefa, o ideal é que só leiam uma dica quando esgotarem as possibilidades da dica anterior ou da orientação inicial.

Importante destacar ao professor interessado, que esta sequência contempla a BNCC na competência específica 5 de matemática e suas tecnologias:

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018, p. 532).

E a habilidade EM13MAT512:

Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos (Brasil, 2018, p. 533).

Recomendamos que a sequência seja aplicada em grupos de estudantes, pelo menos em duplas. A dinâmica entre dois favorece a construção de argumentos, já que um deve explicar ao outro a razão pela qual acredita que o argumento é verdadeiro ou não. Em nosso caso, essa sequência foi aplicada em um grupo de cinco estudantes do Ensino Médio do segundo e terceiro anos selecionados dentre um conjunto de estudantes que participavam do projeto Mais Estudo, mas consideramos que o professor pode avaliar a possibilidade de aplicá-la também com estudantes do Ensino Fundamental, apenas adequando o nível de prova que será requerido. Entendemos que, para o público do Ensino Fundamental, a validação de conjecturas por meio de provas pragmáticas é suficiente. Para a aplicação da sequência, sugerimos o uso de duas aulas (100 minutos) para cada uma das três tarefas, tempo aproximado ao que disponibilizamos nas nossas sessões de aplicação.

Outra orientação ao professor que consideramos fundamental é a comunicação aos estudantes sobre a natureza da sequência, a postura que é esperada deles e o produto requerido ao final de cada tarefa. É importante que, ao introduzir a sequência, o professor reforce aos estudantes que a tarefa apresentada foge do paradigma do exercício, sendo ela uma tarefa que eles, possivelmente, não tiveram contato (como ocorre com os exercícios-tipo) e que os objetivos, assim como as ferramentas para alcançá-los, são atribuições deles, os estudantes. Além disso, é relevante destacar o papel que a argumentação tem nessas atividades e orientar os estudantes a escreverem, do modo que for possível, as conjecturas

formuladas, assim como os argumentos que eles usam para justificá-las.

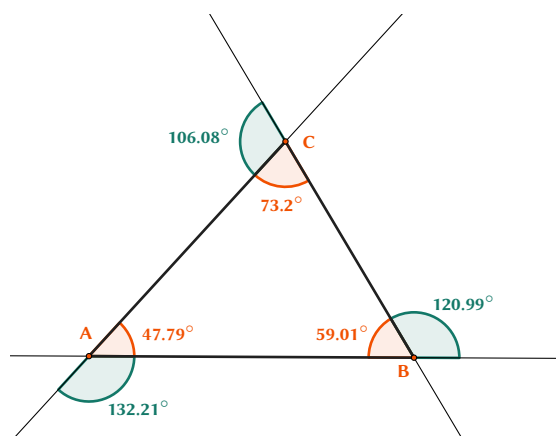
Por fim, ao final da apresentação das tarefas que fazemos a seguir, incluímos uma seção com comentários sobre o desenvolvimento das tarefas com sugestões baseadas na nossa experiência de aplicação. Contudo, recomendamos a leitura da discussão dos resultados de Anjos (2025); se não, de Anjos e Cassol (2024) que é um texto mais sintético. Eles contêm um relato mais abrangente sobre os caminhos da investigação que podem ser usados como a referência para *um possível caminho de investigação*.

3.1 Tarefa 01 - O Teorema do Ângulo Externo

Orientações

Analise o triângulo abaixo, dando uma atenção especial aos ângulos internos e externos. Os vértices do triângulo podem ser arrastados, essa funcionalidade poderá ser bastante útil na análise. Na sequência, leia a primeira dica. (Veja a Figura 3.1).

Figura 3.1: Tarefa 01 - Ao maior lado, opõe-se o maior ângulo



Dica 01 - Para Refletir!

Qual relação você observa entre as medidas dos ângulos internos e externos do triângulo acima?

Dica 02 - Uma Outra Dica!

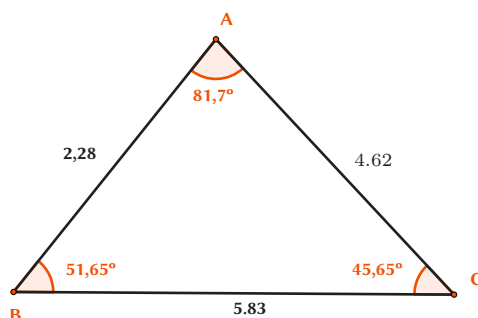
Escolha um ângulo externo e compare a sua medida com as medidas de dois ângulos internos do triângulo. Quais relações você nota? Essa relação continua válida, caso você movimente os vértices do triângulo? Justifique a sua resposta.

3.2 Tarefa 02 - Ao maior lado, o maior ângulo

Orientações

Observe o triângulo abaixo e concentre a sua atenção sobre as medidas dos lados e dos ângulos dele. Note que os vértices do triângulo podem ser movimentados (Veja a Figura 3.2). Na sequência, leia a primeira dica.

Figura 3.2: Tarefa 02 - Ao maior lado, o maior ângulo



Dica 01 - Para Refletir

Após mover os vértices do triângulo na tela, quais relações você observou?

Dica 02 - Outra Dica!

Caso não tenha observado nenhuma relação, use a malha quadriculada para arrastar os vértices dos triângulos para coincidirem com os vértices dos quadrados maiores da malha. Depois, volte a buscar relações entre as medidas dos lados e dos ângulos dos triângulos.

Dica 03 - Caso Particular 1 (Triângulo Isósceles)

Desloque os vértices dos triângulos de modo a obter um triângulo isósceles (que tem dois lados de mesma medida). Agora, observe a relação entre as medidas dos lados do triângulo e as medidas dos ângulos. O que você observa?

Dica 04 - Caso Particular 2 (Triângulo Equilátero)

Desloque os vértices dos triângulos de modo a obter um triângulo equilátero (que tem todos os lados de mesma medida). Agora, observe a relação entre as medidas dos lados do triângulo e as medidas dos ângulos. O que você observa?

Dica 05 - Uma Provocação

O que você observou no caso particular é verdade sempre? Funciona para qualquer triângulo que seja isósceles? Justifique.

Dica 06 - Uma Outra Provocação

O mesmo fato que foi observado no caso particular 1 foi observado no Caso Particular 2? E o fato que foi observado no Caso Particular 02 também pode ser observado no Caso Particular 01? Explique!

Dica 07 - A Última Provocação

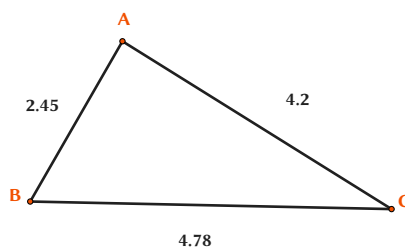
Os mesmos fatos observados até agora poderiam servir para um triângulo que não atende a nenhum dos dois casos particulares que vimos. Isto é, os fatos observados continuam verdadeiros para triângulos escalenos?

3.3 Tarefa 03 - A desigualdade triangular

Orientações

Movimente os vértices do triângulo abaixo. Na sequência, leia a primeira dica. (Veja a Figura 3.3).

Figura 3.3: Tarefa 03 - Desigualdade triangular



Dica 01 - Para Refletir!

Observe as medidas dos lados do triângulo. Com base nessas observações, o que é possível afirmar sobre a relação entre as medidas dos lados desse triângulo?

Dica 02 - Será Verdade?

A relação que você encontrou permanece estável mesmo após o movimento dos vértices do triângulo nas mais diversas posições possíveis? Por qual razão você acha que isso acontece?

Dica 03 - Fixe um Lado

Escolha qualquer um dos lados do triângulo e não o mova, mantenha-o fixo. Para isso também não movo os vértices que definem esse lado. Agora, movimente apenas o vértice que não faz parte desse lado. O que você observa agora?

3.4 Considerações dos autores

Ao ter contato com a primeira tarefa da sequência, é esperado que os estudantes demonstrem alguma desorientação em razão da falta de objetivo claro. Neste momento, entendemos que a melhor conduta é focar nas tarefas e auxiliar os estudantes com entendimento dos enunciados, inclusive apresentando conceitos e explicando os vocábulos. Em nossa aplicação, os estudantes reagiram às dicas listando propriedades já conhecidas. É possível que isso ocorra também em outras sessões de aplicação e, embora não seja o desejado, vemos como o início da interação do estudante com a sequência.

Ao ler as dicas, o estudante pode apresentar relações diferentes das imaginadas e, às vezes, até relações falsas. Isso não é ruim, pelo contrário, ele está criando relações. Agora, devemos encorajar o teste e a verificação com vistas a estimular a produção de uma prova empírica. Por exemplo, na primeira tarefa eles podem listar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180, que o ângulo externo é igual a soma dos internos não adjacentes e outros resultados que não têm relação direta com os ângulos. Outras questões podem surgir como: esse triângulo pode ser equilátero? ou ainda uma afirmação: esse triângulo nunca é equilátero. Responder a pergunta ou ainda justificar a afirmação pode ser uma oportunidade de iniciar o processo de argumentação com vistas a desenvolver uma prova. Desse modo, sugerimos que o professor encoraje a investigação, mesmo não sendo esse o caminho inicialmente imaginado. Não vemos como uma condição para o desenvolvimento da sequência que o professor saiba cada um dos caminhos que a investigação pode tomar, até porque isso não nos parece possível.

Um fato que pode ser muito útil, quase um curinga da investigação, são as afirmações falsas, descobrimos isso na nossa aplicação de modo não intencional. Diante de uma conjectura falsa, em um primeiro momento, foi conveniente ao professor apenas perguntar o porquê de o estudante acreditar que a afirmação é verdadeira. Isso o coloca em uma posição que requer a produção natural de um argumento. Percebemos que esses argumentos

geralmente vinham em forma de um empirismo ingênuo, uma verificação da validade da conjectura em alguns poucos casos. Ao apresentar um argumento para defender a sua conjectura, o estudante abre espaço para que colegas avaliem o que foi apresentado a partir de seus próprios critérios e, principalmente, pelo que foi experimentado no GGB. Em nossa aplicação isso ocorreu algumas vezes, e o contra-argumento dos colegas vinha de modo gestual com GGB, eles exibiam a tela com um contra-exemplo e movimentavam os objetos independentes exibindo casos em que a conjectura não era válida.

Esse processo pode ser uma forma do professor destacar as limitações do empirismo ingênuo, enquanto um processo de validação, e também pode ser o princípio de um processo de refino da conjectura em questão, caso ela possa ser reformulada, modificando, por exemplo, o seu domínio de validade.

As conjecturas que são parcialmente falsas podem ser interessantes, pois o processo de refino faz com que elas passem por sucessivos testes empíricos, criando a percepção ainda maior de que são verdadeiras. Em nossa experiência de aplicação, vimos a formulação da conjectura: a medida de um ângulo externo de um triângulo é sempre maior que a medida de qualquer ângulo interno. Do ponto de vista lógico, essa afirmação é falsa, mas ela contém uma verdade, por assim dizer, e é exatamente a que havíamos vislumbrado quando construímos a tarefa: a medida de um ângulo externo de um triângulo é sempre maior que a medida de qualquer ângulo interno não adjacente a ele. Essa reformulação surge após uma sequência de investigações empíricas e após a percepção de limitações do empirismo ingênuo. Solicitar do estudante uma explicação para esse fato o faz já partir de uma grande quantidade de casos testados como plano de fundo para o seu argumento. A situação de prova, neste caso, dá suporte amplo para uma possível prova do tipo experiência crucial com possibilidades de avanço para exemplo genérico.

O avanço do estudante para uma prova intelectual, um exemplo genérico ou experiência de pensamento depende do nível de construção de linguagem do estudante. Notamos, por exemplo, que eles não estavam familiarizados com a expressão “lado oposto a um ângulo”, isso cria mais obstáculos à produção de provas. Em razão disso, destacamos a necessidade de um esforço para entender o que eles querem dizer, não exatamente aquilo que eles dizem. Na tarefa 2 vimos um estudante usar reiteradamente a palavra “proporcionais” ao dizer que a medida da altura do triângulo era proporcional aos lados que não contém o pé dessa altura. A conjectura é falsa, mas apenas após a conclusão da aplicação notamos que, na prática, ele se referia apenas a percepção de que, quando a altura aumenta, as medidas desses lados também aumentam. Perceber isso durante a aplicação poderia ter movido o professor no sentido de ajudar no ajuste de linguagem e, por consequência, no caminho da investigação.

Consideramos improvável que os estudantes cheguem à conjectura que inicialmente

desejamos de modo rápido ou ainda que sejam algumas das conjecturas que listaram inicialmente, por isso a ideia de usar as desigualdades no triângulo, esse não é um resultado muito abordado. Mas, caso tivessem listado, não seria um problema. O ambiente de geometria dinâmica favorece a percepção dos chamados fatos estáveis implícitos, que são, ao fim, os fatos que justificam a validade de uma conjectura. A ideia de usar um conteúdo menos abordado é deixar um espaço aberto para que eles preencham com afirmações que nunca ouviram falar e possam verificar se elas são falsas ou não a partir de sua própria interação com as tarefas no ambiente do GGB. Não é um problema que os estudantes fiquem um curto tempo sem orientação clara em alguma das tarefas, ou até mesmo em todas elas. Caso não surja nenhuma observação deles, peça que eles releiam as dicas e tentem ofertar alguma resposta a cada uma delas. Note que a dica deixa uma questão em aberto, mas ainda assim aponta um caminho. Se necessário, ajude os estudantes com a compreensão do que é dito, até reformule a dica em outros termos, mas evite apontar alguma relação que seja relacionada ao objeto de estudo.

Por fim, dizemos ao professor que o trabalho com vistas ao desenvolvimento de provas vai além de ensinar matemática ou sobre a matemática, é um trabalho que ensina a investigar, a questionar, a ser crítico. É uma atividade que requer evidências, e coloca o pensamento além das crenças. As convicções até podem ditar o rumo da investigação, mas não mudam o status de conjectura. Trabalhar com argumentações, portanto, envolve o desenvolvimento de uma estrutura de raciocínios que até pode começar na matemática, mas vai para muito além dela.

Referências

- ALMOULOUD, S. A.; MELLO, E. Iniciação à demonstração: aprendendo conceitos geométricos. *Grupo de Educação Matemática GT*, v. 23, 2000.
- ALVES, G. S.; SOARES, A. B. Um estudo sobre os recursos, as potencialidades e as limitações dos softwares de geometria dinâmica. *Relatório Técnico NCE*, Brasil, 2005.
- ANJOS, P. V. *Prova e demonstração: uma proposta de estímulo à produção de provas por meio de atividades investigativas em ambientes de geometria dinâmica*. Dissertação de Mestrado – UFBA, 2025.
- ANJOS, P. V.; CASSOL, M. Prova e demonstração: uma proposta de estímulo à produção de provas por meio de atividades investigativas em ambientes de geometria dinâmica no estudo de desigualdades no triângulo. In: *Anais do Encontro Mineiro do Profmat*, 2024.
- BALACHEFF, N.; ALMOULOUD, S. A.; MORETTI, M. T. A argumentação matemática: um precursor problemático da demonstração. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, v. 24, n. 1, p. 770–815, 2022a.
- BERLINGHOF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. *A matemática através dos tempos: um guia prático para professores e entusiastas*. 2 ed. Blucher, São Paulo, 2010.
- BICUDO, I. Demonstração em matemática. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, v. 15, n. 18, 79–90, 2002.
- BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Secretaria de Educação Básica. MEC/SEB, Brasília-DF, 2018.
- BROCARDO, J. *As investigações na aula de matemática: um projecto curricular no 8º ano*. Tese de Doutorado – Universidade de Lisboa, 2001.

- DA SILVA, J. J. A demonstração matemática da perspectiva da lógica matemática. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, v. 15, n. 18, p. 68–78, 2002.
- DAVIS, P. J.; HERSH, R. A. *A Experiência Matemática*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.
- DOMINGUES, H. H. A demonstração ao longo dos séculos. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, v. 15, n. 18, p. 55–67, 2002.
- EVES, H. *Intraodução à História da Matemática*. Campinas-SP: Editora da UNICAMP, 2004.
- FERREIRA, M. B. C. *Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas*. Tese de Doutorado – PUC, São Paulo-SP, 2016.
- GRABINER, J. V. Why proof? a historian's perspective. *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study*, Springer Netherlands, p. 147–167, 2012.
- GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, v. 1, p. 1–13, 1996.
- GRAVINA, M. A. *Os Ambientes de Geometria Dinâmica e o Pensamento Hipotético-dedutivo*. Tese de Doutorado – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2001.
- LAKATOS, I. *A Lógica do descobrimento matemático*. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.
- MARCONI, L.; LAKATOS, E.M. *Fundamentos da metodologia científica*. 5 ed. São Paulo: Atlas S.A., 2003.
- MELLO, E. *Demonstração: uma sequência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino da geometria*. Dissertação de Mestrado – PUC, São Paulo, 1999.
- MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. *A Formação Matemática do Professor: licenciatura e prática docente escolar*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- NAFAGUCHI, T. *Um estudo histórico-filosófico acerca do papel das demonstrações em cursos de bacharelado em matemática*. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Londrina, 2009.
- OLIVEIRA, J. C. *O estado do conhecimento sobre geometria plana no ensino médio utilizando softwares de geometria dinâmica (1987 a 2017)*. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2020.

- PONTE, J. P.; Brocardo, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.
- ROSALE, A. R. *Argumentação e prova matemática na Educação Básica*. Dissertação de Mestrado – USP, São Paulo-SP, 2018.
- SINGH, S. *O último teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos*. 18 ed. Rio de Janeiro: Record, 2011.
- SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.
- TARSKI, A. Truth and proof. *Scientific American*, v. 220, n. 6, p. 63–77, 1969.
- TRINH, T. H., WU, Y., LE, Q. V., HE, H., and LUONG, T. Solving olympiad geometry without human demonstrations. *Nature*, v. 625, n. 7995, p. 476–482, 2024.
- VILLIERS, M. Papel e funções da demonstração no trabalho com o shetchpad. *Educação e Matemática*, v. 63, p. 31–36, 2001.
- ZULATTO, R. B. A. *Professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica: suas características e perspectivas*. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro-SP, 2002.