UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL-PROFMAT .

RECURSO EDUCACIONAL

Abordagem Didática: mediação pedagógica aliada ao uso da tecnologia para Grafos e os caminhos da sustentabilidade.

A teoria dos grafos, na perspectiva de sua inclusão na educação básica,

.

Dra Maria Helena Cautiero Horta Jardim
Professora do Instituto de Ciência da Computação-
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Membro Corpo Docente do PROFMAT- UFRJ

Roberta Greco Rodrigues
Mestre Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT,
Universidade Federal do Rio d e Janeiro (2024).

SUMÁRIO

1-Introdução
A MATEMÁTICA EM TODO LUGAR, A MATEMÁTICA PARA TODOS

Neste recurso vamos tratar de forma intuitiva, simples e visual os princípios uma importante e significativa teoria da matemática discreta: teoria dos grafos. Uma pequena variedade de conceitos de grafos é suficientemente simples para serem propostos para alunos do ensino básico.

Abordamos na perspectiva da inclusão na educação básica, onde muitos tópicos curriculares estão fortemente relacionados aos alunos, ambientes e questões da vida cotidiana, sendo teoria utilizada para o desenvolvimento de técnicas inovadoras aplicáveis nas mais diversas áreas.

Na nossa missão de educadores, cabe contribuir na preparação dos alunos para enfrentar múltiplos, diversos e interligados problemas deste século.
Os novos tempos estão sendo marcados por grandes desafios tanto de escala quanto de urgência de mudanças climáticas, de declínio de biodiversidade, de mudanças ambientais, de desigualdade econômica e social. São desafios críticos para os quais todos nós da Educação somos chamados ao comprometimento no combate a eles.
Aos alunos, devemos dar oportunidades que os levem a pensar de forma crítica sobre como eles podem aplicar o que aprenderam assim que deixarem a escola, e a partir do desenvolvimento das habilidades sociais deles, promover empatia pelos outros e inspirar comportamentos sustentáveis.

Para essa perspectiva de educação integral, conforme salientado em publicação da UNESCO **[1]**(p. 7) "não se trata apenas de integrar conteúdos como mudanças climáticas, pobreza e consumo sustentável [..], mas também de criar contextos de ensino e aprendizagem interativos e centrados no aluno".

Precisamos buscar abordagens inovadoras que nos são oferecidas pelo progresso da ciência e da tecnologia. Para além da informação, podemos criar possibilidades enquanto professores de matemática, porque a matemática, mesmo sendo um produto do pensamento humano independente de experiência , apresenta grande eficácia em relação aos objetos da realidade, como podemos ver em **[2],** no renomado artigo do físico Eugene Wigner, laureado com o Nobel de Física de 1963 , The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Physical Sciences' (em Communications in Pure and Applied Mathematics, Vol. 13, #1, 1960) .

Precisamos também considerar a história incrível de ideias e soluções que evoluíram ao longo da história da humanidade. Ada Lovelace, brilhante matemática, ao escrever o primeiro programa de computador da história, não poderia imaginar a forma como a matemática mudaria o mundo. Hoje nossos computadores executam imenso volume de cálculo para permitir baixar arquivo de petabytes de armazenamento em menos de trinta minutos. O notável matemático Euler,**[3]** também não poderia imaginar a rede mundial de computadores (www), que resulta da sua teoria dos Grafos , com bilhões de páginas e hiperlinks.

No campo da autenticidade, a proposta desse recurso educacional orienta sua utilização para uma abordagem da teoria dos grafos para desenhar caminhos da sustentabilidade. O desenvolvimento de novas técnicas disruptivas aplicáveis em áreas como o cuidado ambiental, necessário para preservar e regenerar a nossa natureza, plantando a semente da sustentabilidade em nossa sala de aula.

Também, propõe o uso de tecnologia, ferramenta significativa para a nossa atividade, na medida que oferecem novas oportunidades aos alunos e permitem que os professores criem tarefas desafiadoras e relevantes. Assim, atividades como resolução de problemas poderão ser resolvidas com a ajuda de papel e lápis, bem como por meio de tecnologia. Neste recurso usamos yEd Graph Editor. De acordo com diSessa et al. (1991), a construção e a exploração de jogos e simulações dinâmicos fornecem um contexto rico para uma exploração inicial do que a ciência infantil pode envolver

2-Objetivos Específicos

- Fornecer aos alunos do Ensino Fundamental conteúdo matemático fora do currículo escolar, apropriado ao seu nível, para aprimorar o desenvolvimento de suas habilidades.
- Motivar os alunos da educação básica para a matemática, numa perspectiva criativa sobre ela.
- Introduzir a teoria dos grafos de uma forma intuitiva, simples e visual. Apresentar aos alunos o conceito de grafo e alguns resultados básicos da teoria
- Promover o uso de grafos como ferramenta de representação e resolução de problemas em aulas do ensino fundamental, numa perspectiva lúdica. –
- Articular a linha pragmática de uma situação problema com a linha conceitual. Facilitar conexões matemáticas usando grafos, relacionando a matemática às situações cotidianas.

3-Abordagem Metodológica

Esse material como recurso educacional contempla a apresentação do tema, permeado por discussão e propostas de trabalho em grupo.

Faz-se presente a abordagem histórica a partir de problemas que se remetem à história matemática, bem como às situações contemporâneas.

A mediação pedagógica Vygotsky (2007) **[4]** se articula à utilização da tecnologia como elementos mediadores no processo de ensino-aprendizagem. Considera. Esse processo para além da ação docente, extrapola para as interações entre professor-aluno e aluno-aluno, e para as ferramentas essenciais para a interação e desenvolvimento humano, sendo parte as tecnologias digitais da informação e da Comunicação (TDIC)

A criação de possibilidades para desenhar e brincar com vários grafos com papel e lápis, bem como usando recurso de tecnologia, que gera oportunidade de experimentar variedade de casos que podem ser observados e comparados simultaneamente diante de uma atividade de conjetura.

Considera a autenticidade e o uso da teoria para o desenvolvimento de novas técnicas disruptivas aplicáveis em áreas como o cuidado ambiental, necessárias para preservar e regenerar nossa natureza. mas também contribuir para um aumento ainda maior da conscientização da sociedade sobre questões de sustentabilidade. Certamente aumentará a probabilidade de que, no futuro, os problemas que os cientistas preveem que ameaçarão nossa existência e a existência de vida no planeta sejam contidos, graças ao conhecimento científico e, dentro eles a contribuição da teoria dos grafos.

Em relação à metodologia de ensino e aprendizagem, a primeira atividade é apresentada como um desafio, e introduzindo um processo de decomposição em relação à situação problema apresentada ,seguida de algumas atividades para prática de novos conceitos com exemplos estruturantes, que facilitem o reconhecimento de padrões; próxima etapa como objetivo perseguido traz a abstração com conceitos matemáticos, e finalmente a descoberta de conexões com outros problemas matemáticos que contribuem para o desenvolvimento do raciocínio lógico e encaminha para uma abordagem algorítmica para a solução.

4-Desenvolvimento

4.1- Introdução

Quais são as estruturas matemáticas por trás das tecnologias que usamos todos os dias? Dentre elas, estão os grafos. Esta estrutura com definição matemática muito elementar :um grafo é um conjunto de vértices, alguns dos quais estão ligados por arestas. Tão simples definição, mas tendo uma gama extremamente ampla de aplicações, tais como: busca de caminho mais curto (GPS e redes sociais), alocação de recursos, disseminação de informações em redes de computadores.

Sobre os grafos, nossa abrangência será:

1- Uma introdução ao conhecimento teórico de grafos:

- Vocabulário básico da teoria dos grafos.
- Alguns resultados fundamentais da teoria dos grafos.
- Aplicações da teoria dos grafos na vida cotidiana.

2-Ideias de como aplicar o conhecimento teórico. A importante articulação da linha pragmática e a conceitual:

- Alguns problemas clássicos da teoria dos grafos.
- Aplicações da teoria dos grafos usando exemplos da vida cotidiana.
- Liderar sessões de aprendizagem em sala de aula baseadas na teoria dos grafos.

3-Atitudes: abstração e consolidação

Buscamos incentivar

- Reflexão sobre o tema da teoria dos grafos
- Reflexão sobre como comunicar esse assunto de forma prática e interativa aos alunos.
- Aplicação de estratégias para resolução de problemas, como busca por padrões, método de tentativa e erro, estratégias de contagem, indução, grafo associado, método de adivinhação e verificação e raciocínio direto.

4.2-Iniciando com um pouco da história

4.2.1-Um passeio em 1736, em Königsberg

No século XVIII, uma situação particular tornou-se um quebra cabeça para os moradores e visitantes de Königsberg, uma importante cidade da Prússia (hoje Kaliningrado – Rússia).
Haviam sete pontes conectando diferentes partes da cidade, as sete pontes de Königsberg(1736). No Rio Pregel, que corta a cidade, existem duas ilhas formando, portanto, quatro distintas regiões de terra. Conforme observamos na figura abaixo, havia um total de sete pontes, seis delas ligavam as ilhas às margens e a sétima ponte fazia a ligação das duas ilhas entre si. Ninguém conseguia descobrir solução para o seguinte problema: partindo de uma dessas regiões, determinar um trajeto pelas pontes, segundo o qual se possa retornar à região de partida, após atravessar cada ponte somente uma vez.

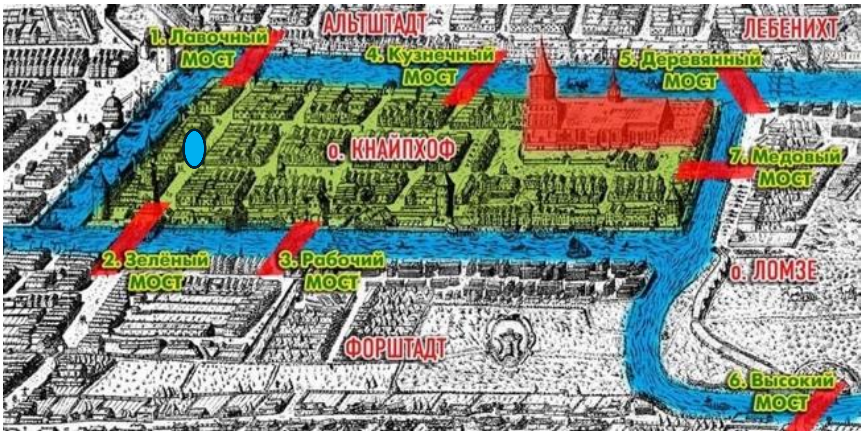


Figura 1:Arquivo jornal O Globo

Comece em , passe por todas as pontes uma vez e retorne para

***Conjetura** :*
É possível partir de uma das 4 regiões, passar pelas 7 pontes retornando à região inicial, tomando em consideração que para um trajeto feito na região delimitada pelo mapa:
1-Não se pode atravessar uma mesma ponte mais do que uma vez;
***2.** O rio pode ser atravessado somente passando pelas pontes.*
Ninguém conseguia apresentar uma rota desta, mas ninguém era capaz de explicar por qual motivo, o que matinha o problema em aberto, sem possibilidade de refutar ou não a conjetura.

Uma primeira atividade: ao lançar a conjetura, devemos criar oportunidade para os alunos fazerem uma reflexão sobre a situação problema.

Sigamos então com nossa viagem histórica, abordando o problema conhecido como **Problema das pontes de Königsberg,** que foi resolvido por Leonard Euler, em 1736.

4.2.2 E Euler inventa a Teoria dos Grafos

Euler é considerado o matemático mais prolífico da história. Vale a leitura a esse respeito em Histórias da Matemática de autoria de Marcelo Viana em **[5].**

Também considerado o pai da Teoria dos Grafos, que se inicia quando Euler , ao tomar conhecimento do **problema das pontes de Königsberg**, percebeu que a solução estava na matemática . Percebeu também que a solução não viria das abordagens tradicionais da álgebra e da análise, não era o caso de medir e calcular a solução.

A solução proposta para o problema resulta no primeiro teorema da chamada **teoria dos grafos**, que se caracteriza como o estudo das relações entre objetos.

Esses objetos podem ser representados como pontos e seus relacionamentos como linhas. Os pontos são chamados de vértices, e as linhas são chamadas de arestas. A conexão de vértices e arestas dá origem ao grafo e pode ser representada como uma imagem, como na Figura 2.

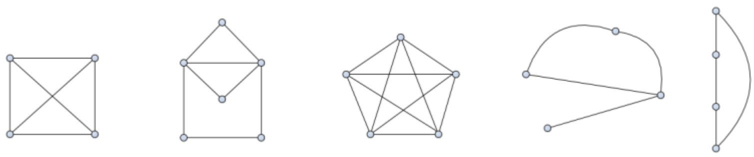


Figura 2 Grafos: simples estrutura matemática que surge com Euler

E Königsberg tem seu grafo

Usando a abordagem dos grafos, Euler refuta a conjetura **problema das sete pontes**, mostrando que para esta situação não há uma rota que atenda aos critérios estabelecidos, isto é, a partir de uma região, visitar todas outras regiões , passando por todas as pontes e uma única vez, por cada uma.

Ele fez isso por meio desse processo engenhoso de abstração, simplificou *layout* da cidade ao associar configuração dada de terreno e ponte a uma rede de vértices e pontos de conexão arestas, cada vértice representando um pedaço de terra e cada aresta uma ponte conectando os respectivos pedaços de terra, como na Figura 3.

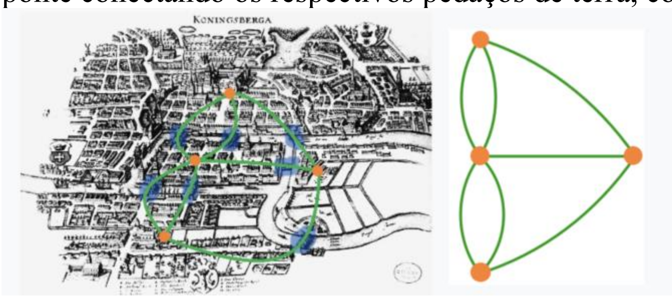
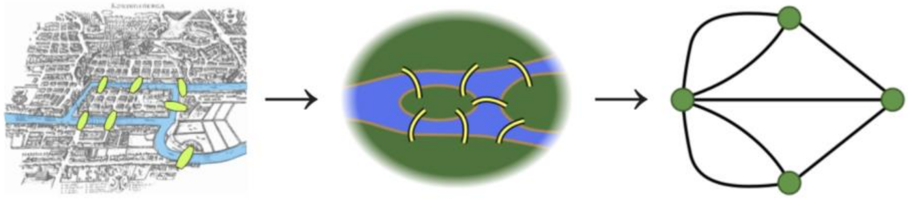


Figura 3 Abstraindo o problema e removendo todas as partes não relevantes.

Provou que planejar uma rota que cruzasse cada ponte apenas uma vez seria impossível. O quebra cabeça não tem solução

Cabe aqui observar a presença do pensamento computacional, na abordagem dada por Euler, ao criar a teoria dos grafos: abstração, lógica, representação dos dados para processar e analisar os dados e, a partir disso, criar novos artefatos e conhecimentos. Tornando a busca por uma solução mais fácil.

Grafos: a matemática das redes



Fonte: Wikipedia – Graph Theory

Figura 4

É admirável o desenvolvimento de raciocínio e capacidade de começar com um exemplo concreto e derivar dele, por um processo de generalização abrangente, e uma teoria totalmente nova.

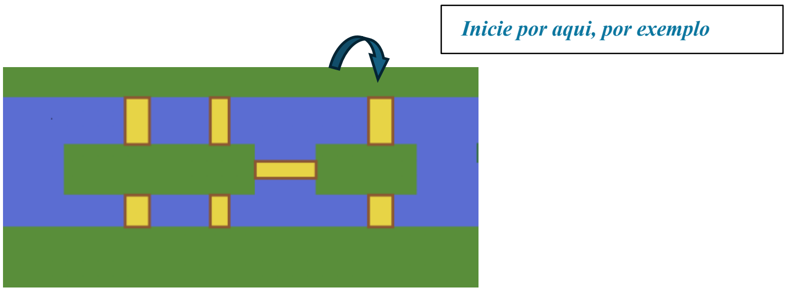


Figura 5 Buscando planejar os trajetos

Desafio para os alunos:
É interessante fazer tentativas de trajetos. Você verá que é impossível encontrar um caminho que passe uma só vez por todas as pontes.

Ocorreu a Euler que, se o problema tivesse uma solução, uma pessoa que chegasse a uma região por uma ponte, teria que deixar a região por outra ponte diferente, e então as pontes teriam que existir em pares. Como veremos, isto significava que cada região tinha que ser conectada por um número par de pontes. Caso a rota não considerasse voltar ao ponto inicial, seria aceitável que duas das quatro regiões fossem conectadas por um número ímpar de pontes cada região tinha que ser conectada por um número para de pontes porque elas agiriam como início e fim da rota.
Na representação da *figura 5,* podemos perceber que todos os vértices (Regiões) estão conectados por um número ímpar de arestas (pontes).

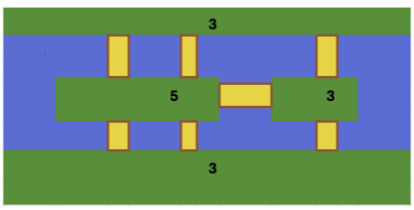


Figura 6: contando acessos por pontes

4.3 Uma iniciação à Teoria dos Grafos

Para entendermos o argumento de Euler para o caminho turístico, vamos precisar de alguns conceitos e resultados nos quais Euler se baseou para buscar a solução do problema. Uma referência para maior aprofundamento teórico, encontra-se em *SWZWARCFITER J.L* [6]

4.3.1 Definições e resultados

Definição 1-Um **grafo G** (simples) é um conjunto finito de vértices conectados ou não por arestas.
Formalmente tem-se
GRAFO G = (V, E) onde V é o conjunto dos vértices e
E é um conjunto das arestas, sendo cada aresta denotada pelo par de vértices (u,v) que a forma.

A representação de um Grafo
É conveniente representar um grafo por um desenho no plano

Exemplo 1 : Um grafo G= (V,E)
V={a, b,c,d,e } E={(a,b), (a,e), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d), (b,e), (d,c), (c,e), (d,e)}
Uma representação geométrica do mesmo

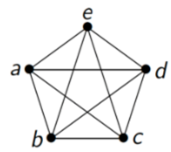


Figura 7

Observe que as propriedades de um grafo são independentes de seu esboço.

Exemplo 2 V={ a, b, c, d}
E={(a,b), (a,c), (a,d), (b,c), (b,d), , (d,c)}

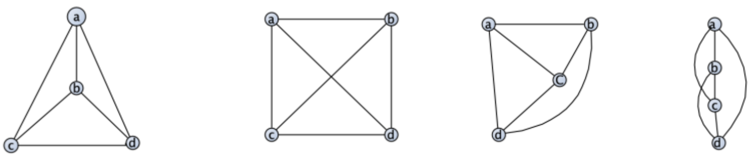


*Figura 8 Diferentes representações de um mesmo grafo (são chamados grafos **isomorfos** entre si)*

Definição 2-Uma sequência de vértices $v_1\ v_2\ \dots\ v_k$, ligado por arestas ($v_1\ v_2$), ($v_2\ v_3$)... ($v_{k-1}\ v_k$) denomina-se um **caminho de v_1 a. v_k.**

Definição 3- Ciclo ou circuito é um caminho. $\mathbf{v_1 , \dots , v_k , v_{k+1}}$ **sendo** $\mathbf{v_{k+1} = v_1}$

Definição 4- Um grafo é **conexo** se todos os vértices estão conectados por algum caminho (não há vértices isolados do restante). Trabalharemos somente com grafos conexos.

Definição 5- Um grafo é **completo** se cada par de vértices estiver conectado por uma aresta, ou seja, tendo um certo número de vértices, o grafo tem todas as arestas possíveis, cada vértice está conectado a todos os outros.
Grafos completos são denotados por $\boldsymbol{K_n}$ onde n é o número de vértices e tem-se $n\,(n-1)/2$ arestas

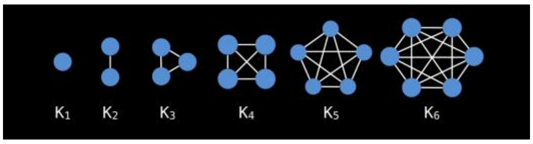
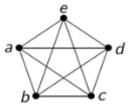


Figura 9 : Grafos completos



K_5 Temos 5 vértices

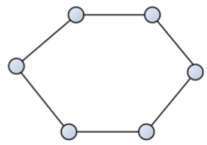
$\frac{5\,(5-1)}{2} = 10$ arestas

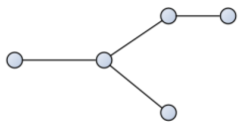
Figura 9 : Grafos completos

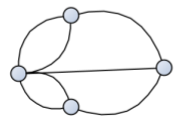
Grafos considerados por Euler que viabilizam encontrar o tal circuito turístico, isto é, sair de um vértice, percorrer todas as arestas apenas uma vez cada e retornar para o vértice original, são denominados Grafos Eulerianos

Definição 6- Grafo euleriano é aquele que pode ser percorrido por um circuito (caminho fechado que retorna ao vértice inicial) e que passa por cada aresta do grafo uma e somente uma vez.

Tal circuito é denominado **Circuito Euleriano.**







Grafo euleriano. Grafo não euleriano. Grafo euleriano?

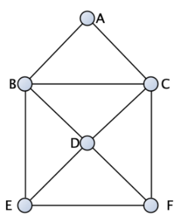
Realização de Oficina:

Vamos então buscar encontrar grafos eulerianos

Estudando possibilidades para esboçar os seguintes grafos conexos:

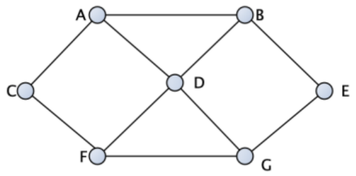
Atividade 1

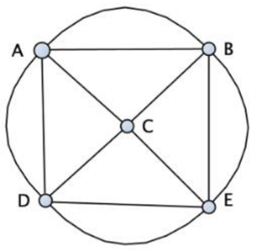
Desenhar em sua folha este grafo, sem tirar a o lápis do papel nem repetir nenhuma aresta



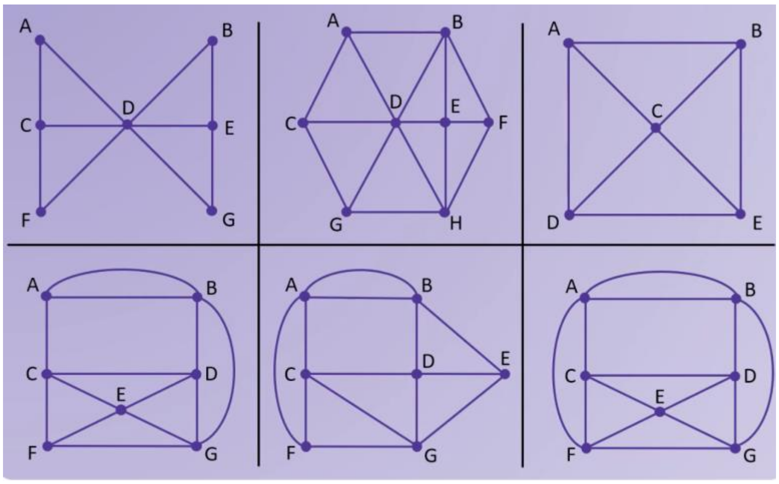
1.1-Começando do vértice A
1.2-Ele pode ser desenhado se você começa de que vértices?
1.3- O que você observa de diferença entre os vértices que encontrou e os outros?

1.4-E para os grafos a seguir , o que acontece?





1.5-Tente agora para os grafos abaixo:
Você consegue percorrer todas as arestas, sem levantar o lápis do papel e passando somente uma vez em cada uma delas



Passemos a caracterizar os grafos eulerianos
Euler reconheceu que um conceito crucial aqui é o grau de um vértice, ou seja, o número de arestas que emanam dele.

Definição 7: **Ordem ou grau de um vértice**
O número de arestas que estão ligadas a um vértice é chamado de **ordem ou grau do vértice** (grau de um vértice v é o número de vértices adjacentes a v)

Definição 8: Vértice par e Vértice ímpar
Se o vértice tem ordem é um número par então é chamado **vértice par**, se tem ordem é um número ímpar é chamado **vértice ímpar.**

Exemplo 3

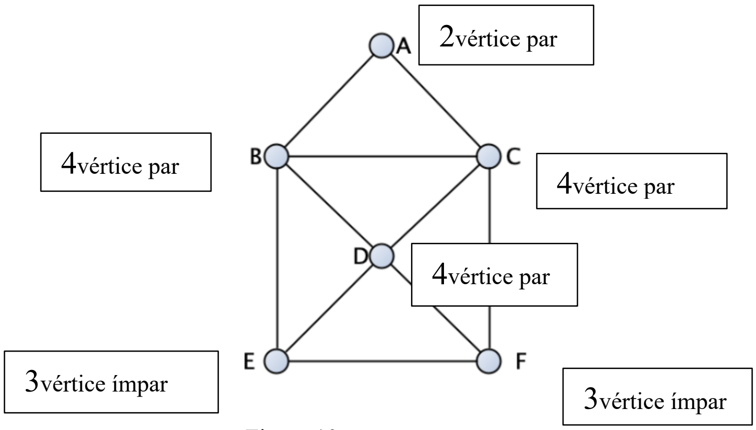
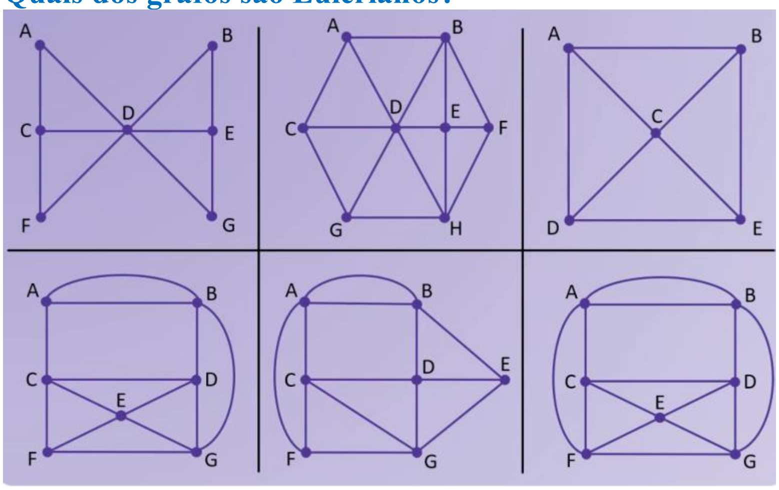


Figura 10

Atividade 2

Quais dos grafos são Eulerianos?



Teorema 1

*Um grafo conexo é **euleriano** se e somente se todos os seus vértices são de ordem par, isto é, são vértices pares.*

Demonstração: Apêndice

Pelo teorema 1, concluímos que O Grafo de Königsberg não é Euleriano.

Dando continuidade à Oficina:

Atividade 3

Agora, use o **Teorema 1** para resolver a **Atividade 2.**

Atividade 4

4.1-Faça dois grafos G_1 e G_2, onde cada um tenha 5 vértices, todos seus vértices de ordem par.

4.2-Tente agora fazer um grafo que tenha 5 vértices, todos de ordem ímpar.
Esta tentativa não teve sucesso?

Esta tentativa não teve sucesso porque um grafo conexo ou **não tem vértice ímpar** ou tem **um número par de vértice ímpar**

Podemos entender a razão da necessidade de um número par de arestas, pois se passamos pelas arestas de um vértice um número par de vezes, e não começamos naquele vértice, então terminaremos fora daquele vértice.

Há também os chamados **caminhos eulerianos**. Estes removem a condição de se ter que começar e terminar no mesmo vértice, e requer que o grafo tenha exatamente dois vértices ímpares, os quais serão os extremos do caminho

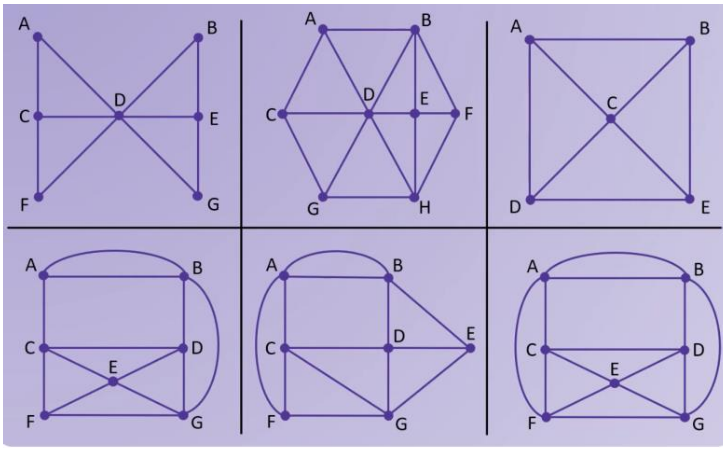
Para um grafo G conexo arbitrário, onde **n denota o número de vértices de grau ímpar**, Euler provou que
(a) se n = 0 (não tem vértice ímpar), o grafo tem pelo menos um **circuito euleriano**;
(b) se n = 2 (tem exatamente dois vértices ímpares) o grafo tem pelo menos **um caminho euleriano, mas nenhum circuito euleriano.**
(c) se n > 2, não tem **nenhum dos dois**. (O caso **n = 1 é impossível**.)
Como o gráfico da ponte de Konigsberg tem n = 4, estamos no caso (c), portanto é impossível atravessar a cidade da maneira exigida no problema.

Definição 9: Um **grafo é semi-euleriano** se ele possui um caminho não fechado que passa por cada aresta do grafo

Teorema *2*
Um grafo conexo semi-euleriano se e somente se ele possui exatamente dois vértices impares.
Demonstração. (=>) *Adicione uma nova aresta entre o vértice inicial e o vértice final de um caminho semi-euleriano: obtemos um caminho euleriano*
(<=) *Adicione uma aresta entre os dois vértices de grau ímpar :todos os vértices então serão vértices pares.*

Conclusão
O grafo de Königsberg não é semi-euleriano

Atividade 5
Quais dos grafos são Euleriano, semi-Euleriano , ou nenhum deles?

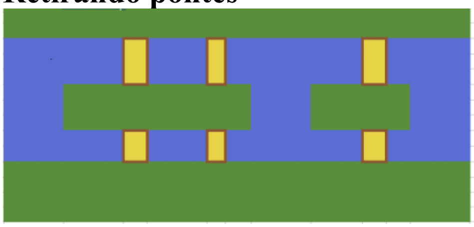


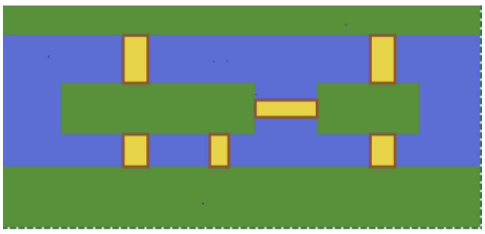
E o que dizer de algumas variações drásticas no problema das 7 pontes? Se por acaso destruirmos uma ou mais pontes, teremos solução? A seguir analisaremos as variações do problema destruindo suas pontes.

Atividade 6

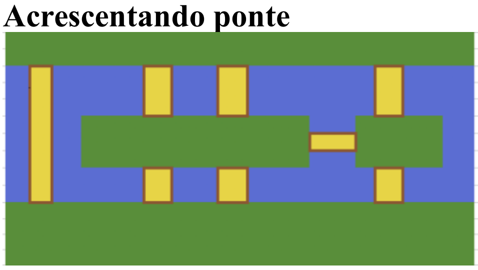
Seria possível, achar um caminho que atendesse a conjetura, nos seguintes casos?

Retirando pontes





Acrescentando ponte



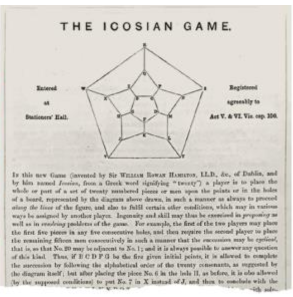
4.4 – Usando tecnologias

"As tecnologias nos ajudam a realizar o que já temos ou desejamos. Se somos pessoas abertas, elas nos ajudam a ampliar a nossa comunicação. Se temos propostas inovadoras, facilitam a mudança **"(Moran, 2007)[6]**

Neste momento já temos abordado ações de motivação para os alunos numa perspectiva criativa sobre a matemática. Vamos agora buscar ajuda na tecnologia para criar oportunidade dos alunos explorarem os conceitos e resultados de grafos por meio de atividades com metodologia laboratorial , isto é, os alunos são levados à experimentação de situações de forma que manipulem os objetos e descobram suas propriedades

Para além das instruções para desenhar e simular vários grafos com papel e lápis, vamos usar recursos da tecnologia. Usaremos o software do yEd Graph Editor, um software dinâmico de fácil uso, gratuito usado para criar, importar, editar e explorar os grafos automaticamente (**https://www.yworks.com/products/yed/download**) . Com ele, pode-se desenhar vértices com um único clique. Para desenhar uma aresta de um vértice (**a)** a um vértice (**b**), basta clicar em (**a)** e, mantendo o mouse pressionado, mover para (**a)** e soltar. Esta tecnologia é um recurso precioso para atividades de conjetura devido à grande variedade de casos que podem ser observados e comparados simultaneamente, o que também consome muito menos tempo do que com atividades de papel e lápis. Pode agora abordar os problemas das diferentes possibilidades de pontes, bem como os outros anteriormente já propostos e buscando conclusões a partir do uso do software. O software fornece formas de diversos objetos como por exemplo, pessoas, formas geométricas, além de qualquer tipo de imagem que se queira importar, apenas arrastando as imagens para a área de trabalho. O aspecto dinâmico do software privilegia a abordagem exploratória e criativa da teoria de grafos.

Em termos de tecnologia, há também possibilidade de jogos *on line* , como por exemplo **icosiano,** versão também em tabuleiro, inventado em 1856,por William Hamilton: dado um dodecaedro em cujos vértices estão indicados nomes de 20 cidades distintas, usando uma cordinha que pode passar apenas ao longo das arestas do dodecaedro visitar cada uma das 20 cidades exatamente uma vez e terminar na cidade de partida, circuito este que é denominado hamiltoniano. Não é um software educacional, mas é um jogo que pode ser utilizado para grafos euleriano, semi-euleriano e os chamados hamiltonianos, que abordaremos em outro recurso educacional

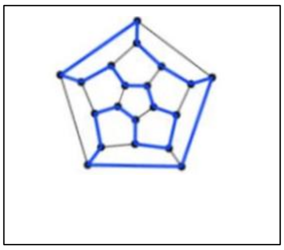


Figura11 https://mathworld.wolfram.com/IcosianGame.html

4.5 Do conceito para a ação

A Matemática dos dados desenhando os caminhos da sustentabilidade

4.5.1 A poluição da água é um relevante problema ambiental registrado em todo o mundo, gerando graves prejuízos ao meio ambiente e à saúde humana.
. Ela impacta negativamente nas características desse recurso hídrico, provocando a perda da sua qualidade e da sua potabilidade. A análise da água dos rios em diferentes pontos é vital para monitorar a poluição e a qualidade da água ao longo do seu curso.

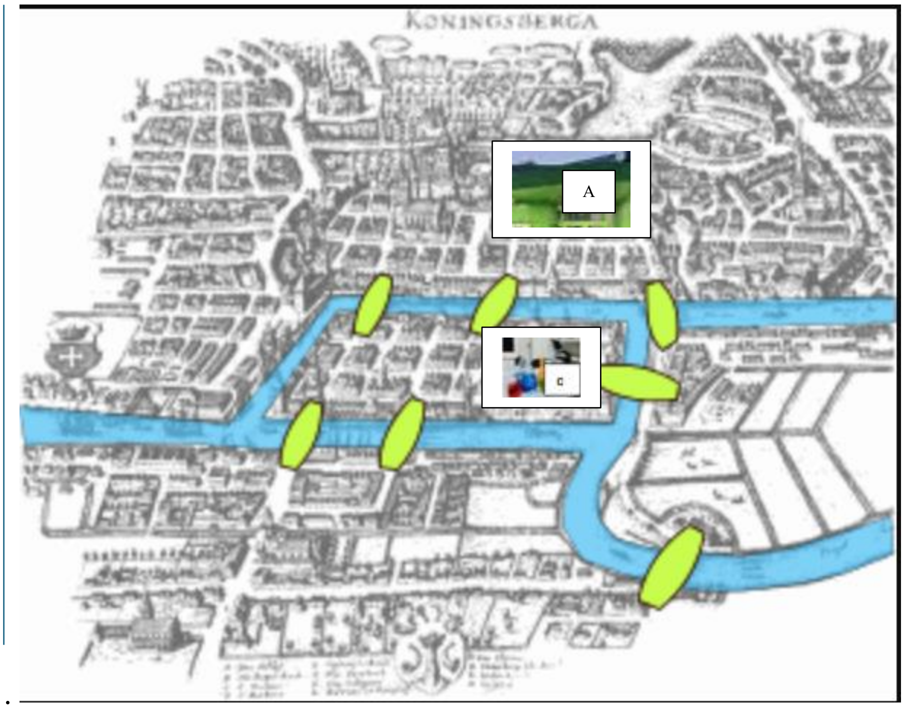
Atividade 7

Utilização do yEd Graph Editor

7.1)os grupos trabalham as atividades anteriores com o yEd Graph Editor.

7.2) Busque solução para a seguinte situação:

Na Figura12, vamos considerar que no prédio A encontra-se o Centro de Meio Ambiente, que é responsável por realizar a coleta de amostra das águas de rios. As análises da qualidade da água são realizadas em um laboratório especializado localizado em C.



.
Figura 12 Fonte Wikipedia: graph theory

.
Essas análises devem ser feitas a partir de amostras coletadas em diferentes pontos dos rios, sendo que em cada ponte há um ponto de coleta da amostra.

Onde construir uma nova ponte, para que sua localização, viabilize

- sair do Centro de Meio Ambiente (A) até ao Laboratório de Análise (C) colhendo uma amostra em cada uma das oito pontes e passando por elas uma e somente uma vez.

Buscamos assim o embasamento teórico dos grafos para garantir que todas as amostras sejam coletadas de maneira eficiente e sustentável, contribuindo para minimizar o impacto ambiental.

4.5.2 Grafos traçando caminhos de sustentabilidade

Cabe ressaltar que este recurso contempla o desdobramentos do tema visando despertar curiosidade, a vontade continuar a aprender sobre o assunto apresentado, bem como contribuir para o aumento da consciência sobre questões de sustentabilidade.

Sensibilizar para os graves problemas ambientais, de diversas naturezas e o elevadíssimo grau de complexidade e o papel da ciência na busca de soluções.

A matemática dos dados

A tecnologia proporciona a geração de grande quantidade de dados dos mais diversos temas**.** Muitas soluções passam pelo conhecimento e análise desses dados.

No que diz respeito aos cuidados ambientais, a capacidade de técnicas que tem por base a teoria dos grafos para análise de dados, viabiliza aferir melhor a tomada e decisão e estratégias para o planeta, tais como o que abordaremos a seguir.

Grafos contribuindo para transporte de mercadorias,

A queima de combustível nos motores dos veículos libera dióxido de carbono (CO2), um dos principais gases que contribuem para o efeito estufa e o aquecimento do planeta.

O transporte de mercadorias e a logística contribui com uma quantidade significativa de CO_2 para a atmosfera. Usando a teoria dos grafos podemos encontrar melhores trajetos entre cidades, reduzindo as emissões dos veículos envolvidos nesse transporte, trazendo assim um claro benefício para o meio ambiente.

Por exemplo, você pode experimentar o Google Maps traçando rotas entre lugares distantes. Você notará que ele pode escolher automaticamente uma rota apropriada, minimizando o custo ambiental correspondente.

O funcionamento do Google Maps é baseado em algoritmos de Caminho Mais Curto de Fonte Única,

Grafos no enfrentamento do problema do acúmulo excessivo de resíduos, .

O estilo de vida atual, proporcionado pelos avanços na produção de bens de consumo, comunicações, transporte, alimentação, lazer, exige a operação coordenada de sistemas complexos acarretam um impacto ambiental severo com base nas emissões de CO2 e no despejo sistemático de resíduos em ambientes naturais. A abordagem de grafos é também usada na gestão dos resíduos.

Conclusão

Neste recurso educacional propomos usar a teoria dos grafos como uma ferramenta motivadora de ensino-aprendizagem para alunos do Ensino Básico. A inclusão da teoria dos grafos nos currículos escolares, dentre os benefícios, está sua utilidade na modelagem de situações reais e na prática de resolução de problemas.

Além de motivar os alunos, essa abordagem os ajudará a adquirir novas estratégias que facilitam o surgimento de conexões matemáticas para resolver problemas cotidianos.

Buscamos trazer uma contribuição aos professores que tentam recorrentemente integrar atividades em seu ensino, incentivando os alunos a explorar a matemática em seu ambiente e a experimentar suas habilidades matemáticas para entender melhor o mundo ao seu redor.

Agradecimentos

Agradecimento à Recickla -Startup Educação Ambiental, pela qualificada e valiosa colaboração na abordagem dedicada à sustentabilidade e meio ambiente, principalmente para as oficinas sobre o tema deste artigo, realizadas durante a Semana Nacional de Ciência e Tecnologia 2024, na UFRJ.

Apêndice

Demonstração do Teorema 1

Teorema 1 *Um grafo conexo é* ***euleriano*** *se e somente se todos os seus vértices são pares*

Prova:
(=>)Suponha que G seja um grafo euleriano. Portanto, ele contém um circuito euleriano (que é um caminho fechado).

Ao traçar este caminho, observamos que cada vez que o caminho encontra um vértice v, ela passa por duas "novas" arestas incidentes em v — com uma "entramos" em v e com a outra "saímos".

Isso é verdade não apenas para todos os vértices intermediários do caminho, mas também para o vértice terminal, porque "saímos" e "entramos" no mesmo vértice no início e no fim do caminho respectivamente.

Portanto, se G é um grafo euleriano, o grau de cada vértice é par.

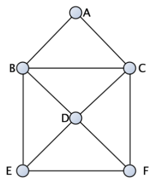
(<=) Para provar a suficiência da condição, suponha que todos os vértices de G sejam de grau par.

Agora construímos um caminho começando em um vértice arbitrário **v** e passando pelas arestas de G de forma que nenhuma aresta seja traçada mais de uma vez. Continuamos rastreando até onde é possível. Como cada vértice é de grau par, podemos sair por qualquer vértice que entrarmos; o traçado não pode parar em nenhum vértice além de **v**. E como **v** também é de grau par, eventualmente chegaremos a **v** quando o percurso chegar ao fim.

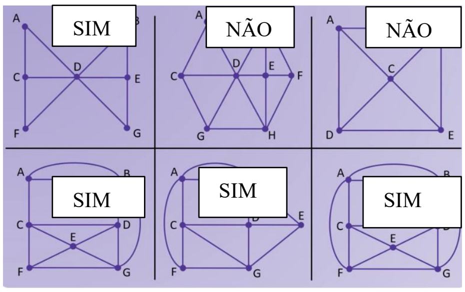
Se este percurso fechado **h** que acabamos de traçar inclui todas as arestas de G, G é um grafo euleriano. Caso contrário, removemos de G todas as arestas em **h** e obtemos um subgrafo **h′** de G formado pelas arestas restantes. Como tanto G quanto **h** têm todos os seus vértices de grau par, os graus dos vértices de **h′** também são pares. Além disso, **h′** deve tocar h em pelo menos um vértice **a**, porque G é conectado. Partindo de **a**, podemos novamente construir um novo caminho no gráfico **h′**. Como todos os vértices de **h′** são de grau par, esta caminhada em **h′** deve terminar no vértice **a**; mas esta caminhada em **h′** pode ser combinada com **h** para formar uma nova caminhada, que começa e termina no vértice **v** e tem com mais arestas que h. Esse processo pode ser repetido até obtermos um caminho fechado que atravesse todas as arestas de G. Portanto, G é um grafo euleriano.

Solução de atividades

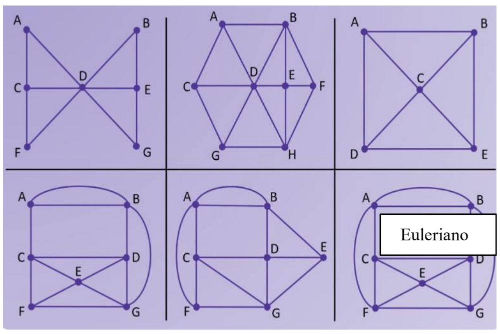
Atividade 1



1.1-não
1.2- sim, se iniciar nos vértices E ou F
1.3-iniciando em vértice que tem número par de arestas que emanam dele, não foi possível. E e F ,ambos têm número ímpar de arestas
1.4-impossível para ambos
1.5-



Atividade 2

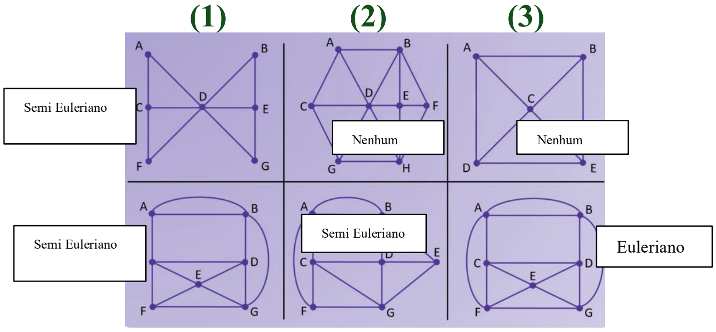


Atividade 3/ Atividade 5

Quanto a ordem (grau) dos vértices

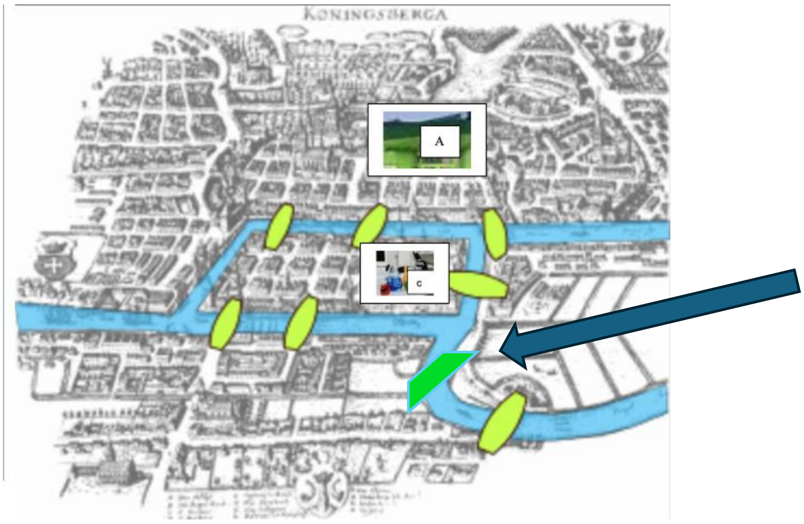
	(1)	(2).	(3)	(4)	(5)	(6)
A	PAR	ÍMPAR	ÍMPAR	IMPAR	PAR	PAR
B	PAR	PAR	ÍMPAR	PAR	PAR	PAR
C	IMPAR	ÍMPAR	PAR	PAR	PAR	PAR
D	PAR	PAR	ÍMPAR	PAR	PAR	PAR
E	IMPAR	PAR	ÍMPAR	PAR	ÍMPAR	PAR
F	PAR	ÍMPAR		ÍMPAR	ÍMPAR	PAR
G	PAR	ÍMPAR		PAR	PAR	PAR
H		PAR				

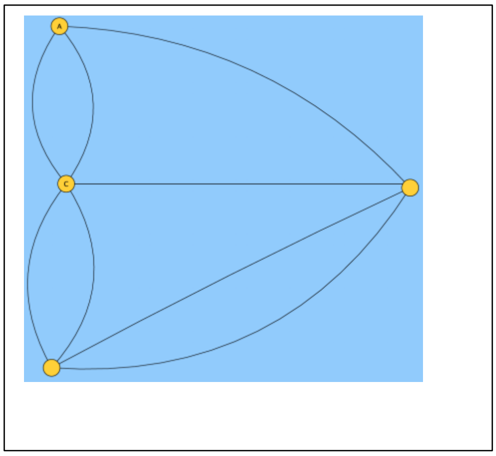
(1) (2) (3)



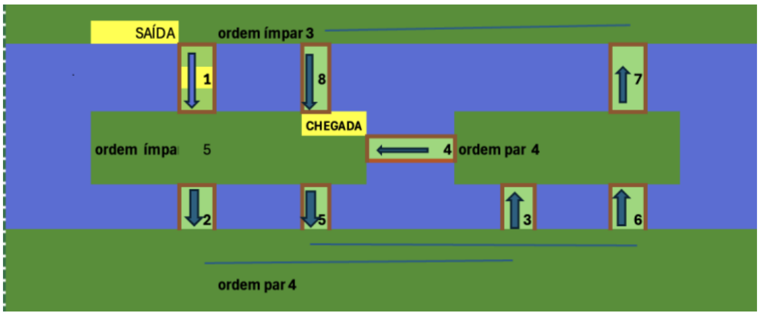
(4) (5) (6)

Atividade 6





grafo semi-euleriano



REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

[1] UNESCO Educação para os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável Objetivos de aprendizagem) ; Unesco: Paris, France, 2017. Disponível on line: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000252197 (acessado em 11/10/2024)

[*2] WIGNER, E.(1960)The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Physical Sciences' (Communications in Pure and Applied Mathematics, Vol. 13, #1, 1960),*

[3] GAUTSCHI\, W. (2008) Leonhard Euler: His Life, the Man, and His Works. SIAM Review , Vol 50, Iss.1 https://epubs.siam.org/doi/10.1137/070702710

[4] VYGOTSKY, L.S. A (2007)Formação social da mente. 7 ed. São Paulo: Martins Fontes,

[5] VIANA , M.(2024) Histórias da Matemática – Da contagem nos dedos à inteligência artificial_ TINTA – DA – CHINA, SP

[6]. SWZWARCFITER J.L. Grafos e Algoritmos Computacionais.

[7]] MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. , (2007) Novas tecnologias e mediação pedagógica. Campinas: Papirus.