

Guia Didático

Os Três Momentos Pedagógicos e a História da
Matemática na Educação Profissional e Tecnológica

Elesandro Monjardim Coutinho Menezes
Adriana Elaine da Costa Sacchetto

Elesandro Monjardim Coutinho Menezes
Adriana Elaine da Costa Sacchetto

GUIA DIDÁTICO
Os Três Momentos Pedagógicos e a História da Matemática
na Educação Profissional e Tecnológica

1ª Edição



Vitória, ES 2025



Editora do Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia do Espírito Santo

R. Barão de Mauá, nº 30 – Jucutuquara

29040-689 – Vitória – ES

www.edifes.ifes.edu.br | editora@ifes.edu.br

Reitor: Jadir José Pela

Pró-Reitor de Administração e Orçamento: Lezi José Ferreira

Pró-Reitor de Desenvolvimento Institucional: Luciano de Oliveira Toledo

Pró-Reitora de Ensino: Adriana Piontkovsky Barcellos

Pró-Reitor de Extensão: Lodovico Ortlieb Faria

Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação: André Romero da Silva

Coordenador da Edifes: Adonai José Lacruz

Conselho Editorial

Aldo Rezende * Aline Freitas da Silva de Carvalho * Aparecida de Fátima Madella de Oliveira * Felipe Zamborlini Saiter * Gabriel Domingos Carvalho * Jamille Locatelli * Marcio de Souza Bolzan * Mariella Berger Andrade * Ricardo Ramos Costa * Rosana Vilarim da Silva * Rossanna dos Santos Santana Rubim * Viviane Bessa Lopes Alvarenga.

Revisão de texto: José Almeida

Projeto gráfico e diagramação: José Almeida

Capa: José Almeida

Imagem de capa: freepik.com

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (Biblioteca Nilo Peçanha do Instituto Federal do Espírito Santo)

M543t Menezes, Elesandro Monjardim Coutinho.

Os três momentos pedagógicos e a história da matemática na
educação profissional e tecnológica [documento eletrônico] / Elesandro
Monjardim Coutinho Menezes, Adriana Elaine da Costa Sacchetto. – 1. ed.
- Vitória : Edifes Acadêmico, 2025.

1 recurso digital : ePub ; il. ; 82 p. (Guia Didático)

ISBN: 978-65-5331-004-9 (E-book)

1. Ensino profissional – Estudo e ensino. 2. Educação de jovens e
adultos. 3. Logística. 4. Matemática – História. 5. Professores – Formação.
I. Sacchetto, Adriana Elaine da Costa. II. Instituto Federal do Espírito
Santo. III. Título.

CDD 21 – 374.013

Elaborada por Ronald Aguiar Nascimento – CRB-6/MG – 3.116
DOI: 10.36524/9786553310049

DOI: 10.36524/978-65-5331-004-9

Esta obra está licenciada com uma Licença Atribuição-NãoComercial-SemDerivações 4.0 Brasil.



Descrição Técnica do Produto Educacional

Nível de ensino: Educação Básica - Educação Profissional e Tecnológica

Área de conhecimento: Ensino

Público-alvo: Professores de matemática

Tipologia deste produto: Guia Didático

Finalidade: Articular os conteúdos curriculares de matemática com a sua história contextualizando-os no campo da logística.

Linha de pesquisa 1: Práticas Educativas em Educação Profissional e Tecnológica.

Macroprojeto 1: Propostas metodológicas e recursos didáticos em espaços formais e não formais de ensino na EPT.

Organização do produto: O produto foi organizado em cinco capítulos denominados: Introdução; Levantamento Inicial do Problema – Definição de um Tema Gerador; Problematização Inicial; Organização do Conhecimento e Aplicação do Conhecimento.

Disponibilidade: Sem restrições, desde que seja respeitada a autoria do produto, não sendo permitido o uso comercial por terceiros.

Divulgação: Digital e/ou impresso

Processo de validação: Avaliado pelos pares e pela banca examinadora de defesa de dissertação.

Processo de aplicação: Ocorreu juntamente com uma turma cursando a terceira etapa do curso de qualificação profissional de Assistente de Logística modalidade EJA.

Impacto: Alto, visto que a construção do guia didático teve caráter formativo, além de ter sido desenvolvida de maneira processual de acordo com a contribuição dos pares (professores de matemática) e necessidade escolares dos alunos.

Inovação: Alto teor inovativo já que ele se destina a área de logística articulando História da Matemática e conteúdos curriculares de matemática, além de ter sido aplicado utilizando a metodologia dos Três Momentos Pedagógicos.

Origem do produto: Trabalho de dissertação intitulado "Construindo pontes entre o passado e o presente: a relevância da História da Matemática na Educação Profissional e Tecnológica" desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Educação Profissional e Tecnológica - ProfEPT no Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia, IFES – campus Vitória-ES

Minicurrículo dos autores



Elesandro Monjardim Coutinho Menezes é mestrando em Educação Profissional e Tecnológica pelo Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes), atuando na linha de pesquisa Práticas educativas em Educação Profissional e Tecnológica. É graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estácio de Sá (2015), especialista em Educação Matemática pela Faculdade Brasileira-FABRA (2021). Atua como professor de matemática na Educação Básica.

Currículo Lattes: lattes.cnpq.br/6039954607759103

Email: elesandromonjardim01@gmail.com



Adriana Elaine da Costa Sacchetto é professora e pesquisadora no Instituto Federal do Espírito Santo, *campus* Vila Velha, com atuação nos cursos: Técnico em Química, Bacharelado em Química Industrial, Engenharia Química e Mestrado Profissional em Educação Profissional e Tecnológica em Rede Nacional, *campus* Vitória. Mestre (2005) e Doutora (2011) em Engenharia Química pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), tendo realizado período de mobilidade acadêmica de Doutorado (2010) na Universitat Politècnica de Calatunya (UPC, Barcelona-Espanha). Graduada em Engenharia Química pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE) em 2003. Ministra disciplinas das áreas de Fenômenos de Transportes, Operações Unitárias e Práticas Educativas na Educação Profissional e Tecnológica. Atualmente, desenvolve projetos de pesquisa (Mestrado, Iniciação Científica e Trabalhos de Conclusão de Curso) nas seguintes áreas: Educação Profissional e Tecnológica, Desenvolvimento de Processos, Otimização de Processos.

Currículo Lattes: <http://lattes.cnpq.br/6845317638403217>

Email: adriana.costa@ifes.edu.br

Apresentação

Caro (a) professor(a) de matemática, seja bem-vindo(a). Este guia didático foi elaborado a partir da pesquisa de mestrado intitulada “Construindo pontes entre o passado e o presente: a relevância da História da Matemática na Educação Profissional e Tecnológica”, desenvolvida pelos autores no Programa de Pós-Graduação em Educação Profissional e Tecnológica (PROFEPT), do Instituto Federal do Espírito Santo (IFES), *campus* Vitória.

Este guia se destina a professores(as) de matemática que atuam em cursos com foco na área de logística. Ele foi aplicado em uma turma do curso profissionalizante de Assistente de Logística na modalidade Educação de Jovens e Adultos, podendo ser adaptado para outras áreas e modalidade a critério do professor. Sua aplicação ocorreu por meio de uma proposta de educação flexível com o uso de uma Intervenção Pedagógica que durou 22 aulas. Mas afinal, o que é a História da Matemática?

A História da Matemática é uma tendência em educação matemática que serve como ferramenta para entendermos como conceitos matemáticos evoluíram e qual a importância que a matemática teve em civilizações ao longo da história. Em outras palavras, ela nos ajuda a descobrir como a ciência se desenvolveu e nos ajuda a responder aos problemas que encontramos ao realizar o seu estudo (D'Ambrosio, 1996).

Ela nos fornece informações, dados, curiosidades que preenchem dúvidas que surgem no processo de ensino e aprendizagem. Deixa a matemática menos vazia e acabada, dá suporte para preencher lacunas no desenvolvimento desta ciência, pois aprenderemos sobre pessoas e civilizações que construíram esses saberes, através de problemas que foram aparecendo ao longo da existência humana.

Pensando nisso, conseguimos compreender que a matemática foi uma necessidade da humanidade, o que nos indica que o mundo seria outro sem os conceitos matemáticos e suas aplicações em diferentes áreas como na engenharia e a arquitetura; na construção

de templos, como as pirâmides egípcias e astecas; na astronomia; na identificação, a partir das observações de corpos celestes, de qual seria o melhor período para plantar

Após a definição sobre História da Matemática, apresentamos a metodologia empregada. Assim, este guia está organizado de forma prática, com orientações sobre como usar os Três Momentos Pedagógicos (Delizoicov; Angotti; Pernambuco, 2018) para explorar conceitos matemáticos e sua história de forma contextualizada com ênfase na área de logística. Cada seção oferece exemplos práticos, sugestões de atividades e estratégias para facilitar a compreensão dos conteúdos.

O material tem como objetivo fornecer aos professores uma ferramenta pedagógica para trabalhar História da Matemática de forma contextualizada no contexto da Educação Profissional e de outras áreas, estabelecendo conexões entre a História da Matemática e conteúdos curriculares presentes na formação escolar.

Uma das justificativas em utilizar a História da Matemática durante as aulas consiste no potencial que ela representa para as práticas educativas e para o ensino de matemática. Além disso, permite o entendimento de vários conceitos que foram se desenvolvendo por meio de necessidades humanas. Ademais, a História da Matemática é rica em personagens e curiosidades que tem a possibilidade de tornar as aulas mais proveitosas, estimulando o debate, o diálogo, a curiosidade e respondendo dúvidas que encontramos durante nossas práticas educativas.

Este material disponibilizado é fruto de uma pesquisa de mestrado e ajudará os professores com algumas propostas pedagógicas para a prática docente. É resultado do estudo de como a História da Matemática pode contribuir para a construção do conhecimento matemático. Ele deve ser utilizado nas aulas como fonte de leituras, pesquisas, investigações, indagações, questionamentos, debates, descobertas, como uma forma de exercitar a construção do conhecimento matemático de conteúdos importantes para o profissional da área de logística.

Com este material é possível perceber que a matemática é uma constante evolução e que desde muito tempo ela está presente no cotidiano da humanidade. Aproveite para “viajar” pelo maravilhoso mundo da matemática, construindo pontes entre o passado e o presente desta fantástica ciência. O objetivo deste material é utilizar a História da Matemática articulada a conteúdos curriculares para que o conhecimento matemático seja desenvolvido com base na historicidade que a matemática traz.

Espera-se que este material seja útil para você, professor, e que possa ser ajustado de acordo com suas necessidades ao longo do processo educativo.

Excelente leitura e bom uso!

Os autores

Sumário

1. Introdução	09
2. Levantamento Inicial do Problema - Definição de um Tema Gerador	12
3. Problemática Inicial	16
3.1 Proposta de atividade inicial	16
4. Organização do Conhecimento	22
4.1 Agricultura e Matemática - Uma ligação Histórica	22
4.2 Agricultura e História da Matemática na Mesopotâmia	24
4.3 Agricultura e História da Matemática no Egito Antigo	25
4.4 Agricultura em 2025 no Estado do Espírito Santo	29
4.5 Unidades de medida de comprimento	31
4.6 Sistema Métrico Decimal	34
4.7 A Grécia antiga e a História da Matemática	38
4.7.1 Pitágoras e a Escola Pitagórica	40
4.7.2 Relações pitagóricas entre aritmética e geometria	41
4.7.3 Platão e a sua Academia	43
4.7.4 Euclides de Alexandria e a Geometria Espacial	45
4.7.5 O que é cubagem?	47
4.7.6 Geometria Plana	48
4.8 René Descartes e o Plano Cartesiano	51
4.9 Latitude, Longitude e Plano Cartesiano	56
5. Aplicação do Conhecimento	59
5.1 Solução das questões problematizadoras 1, 2 e 3	60
5.2 Solução da questão problematizadora 4	60
5.3 Solução da questão problematizadora 5	62
5.4 Solução da questão problematizadora 6	64
5.5 Solução da questão problematizadora 7	66
5.6 Soluções das questões problematizadoras 8 e 9	68
5.7 Avaliação da Intervenção Pedagógica	70
6. Cronologia da Matemática (MATHIGON)	74
7. Considerações finais	76
8. Referências	78

1 Introdução

O guia didático traz uma abordagem contextualizada para apresentar ao leitor a importância da História da Matemática na formação escolar. O material foi desenvolvido por meio de uma proposta educacional flexível baseada na teoria de Paulo Freire e pensado em colaboração com a turma do PROEJA, curso de Assistente de Logística integrado ao Ensino Médio, e pretende mostrar como a matemática pode ser uma ferramenta para resolver problemas do mundo real, estimulando a curiosidade.

Talvez você já tenha se perguntado: Como a matemática surgiu? Como as civilizações viviam sem a ideia de número? A escrita dos números sempre foi igual àquela que usamos atualmente? Como demarcar um terreno sem a utilização de geometria? Para desvendar esses segredos dos bastidores da matemática, a História da Matemática surge para responder essas dúvidas e para esclarecer muitas outras. O material está organizado com base nas propostas de práticas educativas apresentadas por Paulo Freire e na metodologia conhecida como “Três Momentos Pedagógicos” (Delizoicov; Angotti; Pernambuco, 2018).

Primeira etapa – Problematização Inicial: na qual o professor traz situações do cotidiano dos alunos, conectando-as de forma instigante com os conteúdos que serão abordados mais adiante. Nesse momento, os alunos são incentivados a compartilhar suas opiniões sobre o tema, ao mesmo tempo em que são levados a refletir criticamente sobre quais conhecimentos devem adquirir para responder às questões propostas.

Segunda etapa – Organização do Conhecimento: onde ocorre o estudo dos conteúdos selecionados pelo professor, considerados essenciais para o entendimento dos temas e da Problematização Inicial. Nessa fase, o aluno deverá realizar atividades que favoreçam a compreensão dos tópicos e das situações apresentadas, utilizando diferentes abordagens como leituras, discussões, atividades práticas, exercícios, debates, entre outros métodos.

Terceira etapa – Aplicação do Conhecimento: nessa última fase os alunos deverão mostrar sua habilidade em aplicar o que aprenderam, conectando os conceitos teóricos com situações práticas do dia a dia, realizando a sistematização do conteúdo trabalhado.

Antes de desenvolver a metodologia, foi necessário realizar o levantamento inicial, emergindo um tema gerador, que serviu para entender o ambiente em que vive o aluno, portanto a necessidade de uma ação dialógica em sala de aula. Educação e investigação temática, na abordagem problematizadora da educação, tornam-se etapas de um único processo.

Diferente da prática "bancária", em que o educador transmite passivamente o conteúdo programático que ele mesmo desenvolve ou que é desenvolvido para ele, na prática problematizadora, essencialmente dialógica, esse conteúdo nunca é simplesmente "depositado". Ele é construído e organizado a partir da visão de mundo dos educandos, onde se encontram os seus temas geradores (Freire, 2018).

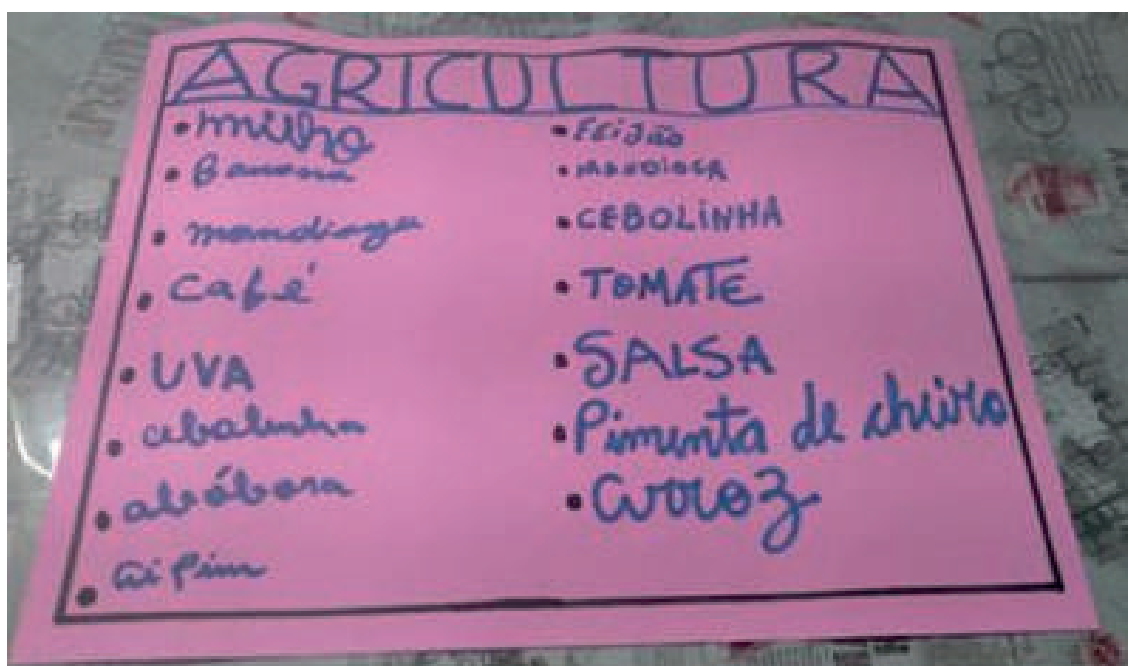
2 Levantamento Inicial do Problema – Definição de um Tema Gerador

As práticas pedagógicas que se fundamentam na construção de temas geradores têm sua origem na pedagogia freireana, conforme descrito no clássico Pedagogia do Oprimido. Uma de suas sistematizações foi desenvolvida pela equipe que liderou o Movimento de Reorientação Curricular na cidade de São Paulo nos anos 1990 (Pontuschka, 1993). Os capítulos quatro e cinco deste livro tratam da aplicação de temas no ensino de ciências, com foco especial na dinâmica em sala de aula e na elaboração curricular. O levantamento inicial antecede a Problemática Inicial e foi feito por meio de uma roda de conversa com os alunos. A partir das conversas e do diálogo com os estudantes, o tema gerador levantado foi a agricultura.

Assim, durante a conversa foi pontuado como a agricultura modificou a forma do homem interagir com a natureza, diminuindo o nomadismo e dando início às primeiras grandes civilizações, como Egito e Mesopotâmia.

Foi apontado que o trabalho humano possibilitou que a agricultura fosse se desenvolvendo, modificando o contexto histórico cultural da humanidade. Também se discutiu sobre a matemática nesses grandes berços, às margens dos rios Nilo, Tigre e Eufrates. Qual matemática era praticada? Com que objetivo a utilizavam? Os estudantes comentaram que cultivam alguns produtos em seus próprios quintais ou trabalham com a terra, conforme exposto em uma cartolina desenvolvida pelos estudantes (Figura 1).

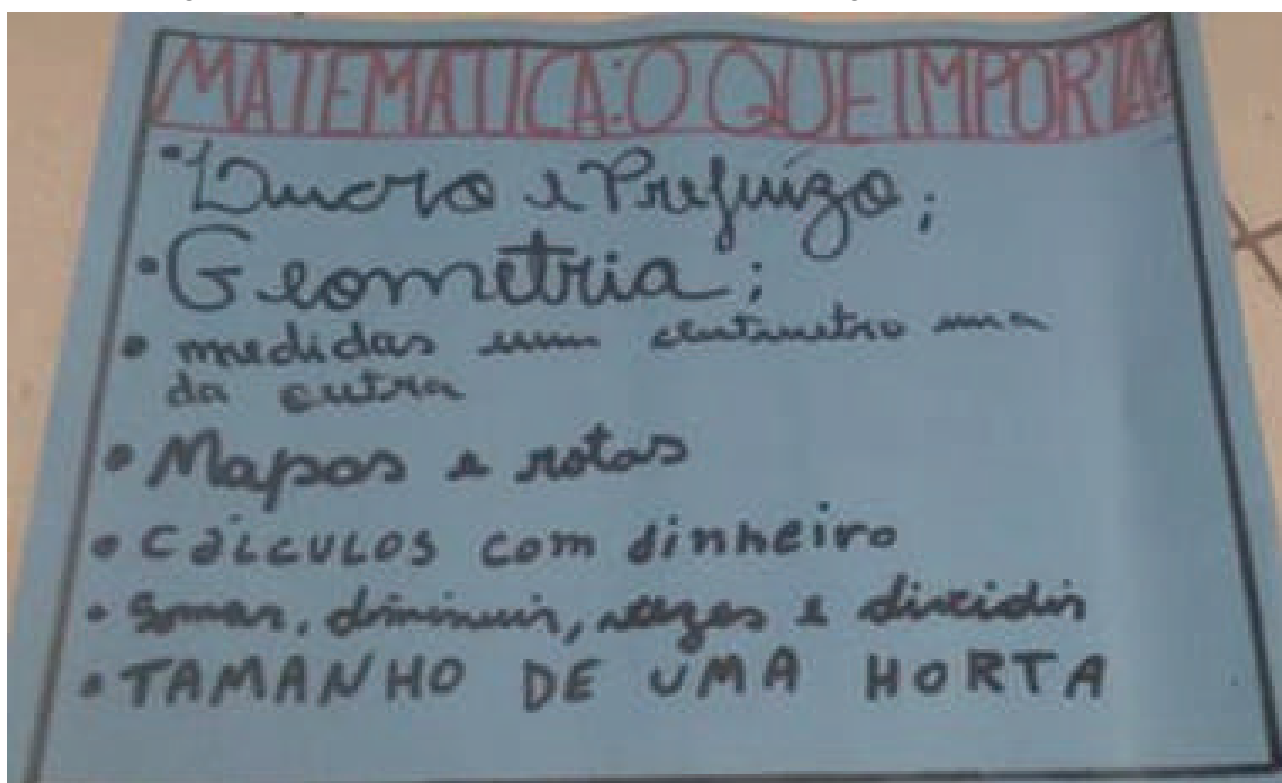
Figura 1 – Cartaz elaborado pelos estudantes com alguns cultivos



Fonte: Elaborada pelos autores (2024)

Além disso, os estudantes elaboraram um outro cartaz no qual foram citando conteúdos de matemática em que eles sentiam dificuldades ou que pudessem ser estudados durante as aulas. Essa ação permitiu identificar os interesses e necessidades específicas da turma, direcionando o planejamento pedagógico. Também favoreceu a contextualização da matemática com a prática profissional, tornando a Intervenção Pedagógica com mais sentido para a turma.

Figura 2 – Cartaz elaborado pelos estudantes com alguns conteúdos



Fonte: Elaborada pelos autores (2024)

Após o levantamento inicial seguiu-se com a metodologia dos “Três Momentos Pedagógicos”. Esses momentos foram concebidos para orientar o desenvolvimento e a organização do planejamento didático em sala de aula, cada um com uma função específica dentro do planejamento.

Figura 3 – Visão geral da proposta educacional flexível.



Fonte: Elaborada pelo autor (2024)

3 Problematização Inicial

A Problematização Inicial, segundo Delizoicov, Angotti e Pernambuco (2018) é uma etapa do processo de ensino que busca provocar a curiosidade e o interesse dos estudantes ao apresentar situações-problemas relacionadas ao tema de estudo. Essa abordagem considera o contexto dos alunos, estimulando reflexões e conexões com suas vivências. Assim, ela favorece a construção do conhecimento de forma ativa e significativa, promovendo uma aprendizagem mais engajada e contextualizada.

Neste primeiro momento, caracterizado pela apreensão e compreensão da posição dos alunos ante as questões em pauta, a função coordenadora do professor concentra-se mais em questionar posicionamentos - até mesmo fomentando a discussão das distintas respostas dos alunos - e lançar dúvidas sobre o assunto do que em responder ou fornecer explicações (Delizoicov; Angotti; Pernambuco, 2018, p. 156).

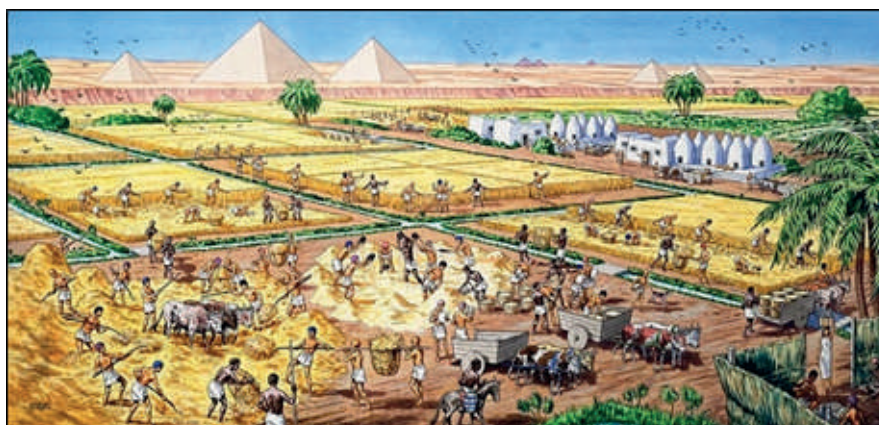
Na sequência é apresentada à turma uma proposta de atividade inicial, composta por um vídeo e um poema que relacionam tanto a agricultura e a importância do agricultor para a sociedade, no caso do vídeo e a importância da agricultura, da matemática e da História da Matemática, no caso do poema.

3.1 Proposta de atividade inicial

O professor apresenta o vídeo “Eu acredito em Gigantes” – por Bráulio Bessa, no Youtube, que é uma homenagem aos agricultores brasileiros. Durante o vídeo são levantadas de forma poética várias questões da agricultura e das pessoas que fazem ela acontecer.

Disponível em: www.youtube.com/watch?v=7wMOHNHRF-o. Em seguida, o docente propõe a leitura coletiva do poema “Os Egípcios e a Matemática”, que destaca a importância da matemática na agricultura egípcia.

Figura 4 – A agricultura no Egito



Fonte: Google Imagens (2024)

Os Egípcios e a Matemática

O Egito guarda segredos
Que nem podemos imaginar
É a terra das pirâmides
Tem muita história pra contar

Contar a História da Matemática
De suas descobertas e realizações
Deixam todos impressionados
Despertando a imaginação

Nas cheias do Rio Nilo
Os egípcios agricultores
Usavam muita Matemática
Seus princípios e valores

A marcação dos campos precisava
De conhecimentos de agrimensura
E muitas habilidades eles mostraram
Na defesa da agricultura

O calendário egípcio pode provar
Que em muitas áreas se destacaram
Na geometria e na astronomia
Muitos conhecimentos eles deixaram

As fascinantes pirâmides do Egito
Construções de grandiosa beleza
Com rigor geométrico foram erguidas
Uma Matemática de inigualável riqueza

Homens sábios e estudiosos
Na mitologia e religiosidade
Grandes estudos em Arqueologia
Herança Cultural da Humanidade

(Só Matemática, 2024)



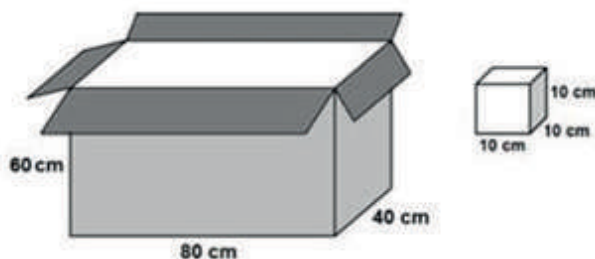
Trecho do Rio Nilo nos dias atuais

Fonte: freepik.com

Como o tema gerador que emergiu com a turma foi a agricultura, a Problemática Inicial buscou relacionar esse assunto a conteúdos curriculares que estão contidos na Figura 2 ou fazem parte do currículo do curso profissionalizante de Assistente em Logística, trazendo a História da Matemática de modo contextualizado. Assim, o professor propõe à turma as seguintes questões problematizadoras:

- 1) Como as civilizações antigas praticavam agricultura? Era diferente daquela que é praticada atualmente?
- 2) Como você vê a importância da agricultura na vida humana e de que forma matemática pode facilitar a logística de produtos agrícolas para atender às necessidades da sociedade?"
- 3) Você já imaginou como os antigos egípcios conseguiram construir as enormes pirâmides com tanta precisão sem as ferramentas modernas que temos hoje? Como eles mediam as pedras gigantescas e garantem que cada uma se encaixasse perfeitamente?
- 4) Qual é o valor numérico da área e do perímetro de um campo retangular de medidas de 80 por 50 cúbitos egípcios?
- 5) Uma fábrica contratou os serviços de uma empresa de logística e transporte para otimizar a produção que ela realiza. O armazenamento dos produtos é feito em uma caixa de papelão reciclável no formato de um paralelepípedo que são organizados em caixas menores no formato de hexaedro. Quantas embalagens podem ser armazenadas na caixa de papelão?

Figura 5 – Caixas de papelão



Fonte: Elaborada pelos autores (2025)

6) Após a colheita de banana realizada no distrito rural de Aroaba, que fica localizado na cidade de Serra-ES, o senhor Adolfo, vendeu toda a sua produção para uma empresa localizada no extremo sul da Bahia, no distrito de Posto da Mata, cidade de Nova Viçosa. A distância entre as duas cidades é de aproximadamente 300 quilômetros. Uma empresa de Logística disponibiliza dois modelos de caminhões baús para fazer o transporte.

O Caminhão A consome 5 litros de óleo diesel por 15 km e emite 1,2 kg de CO₂ por litro de diesel consumido.

Figura 6 – Caminhão A



Fonte: Canva (2025)

Figura 7 – Caminhão B



Fonte: Canva (2025)

O Caminhão B consome 9 Litros de óleo diesel por 36 km e emite 1,8 kg de CO₂ por litro de diesel consumido.

A empresa precisa calcular o frete para o transporte das frutas, que é determinado com base no custo operacional de cada caminhão e uma taxa fixa por quilômetro. Além disso, há o cuidado com o meio ambiente, na intenção de utilizar a Matemática para identificar qual dos dois modelos polui menos.

a) Calcule a quantidade total de CO₂ emitida por cada caminhão durante o transporte das frutas. Compare os dois caminhões em termos de emissões de CO₂ e verifique qual opção é mais sustentável para o seu Adolfo.

b) Determine o custo total do frete do caminhão mais sustentável, considerando os gastos com o óleo diesel, cujo preço do litro custa R\$6,00 mais uma taxa fixa adicional no valor de R\$1.500,00.

7) Um agricultor deseja armazenar água da chuva para irrigar suas plantações durante os meses mais secos do ano. Ele planeja construir um reservatório em forma de cilindro com dimensões de 4 metros de diâmetro da base, mas desconhece o valor da altura.

a) Considerando que ele precisa armazenar pelo menos 37,68 metros cúbicos de água, qual deve ser a altura mínima do reservatório?" Utilize $\pi = 3,14$.

b) Debater a importância de reutilizar a água e quais impactos essa ação tem no meio ambiente.

8) Uma empresa de logística precisa armazenar caixas em um galpão para organizar a logística do aipim. O galpão tem um formato de prisma retangular e a empresa precisa calcular quantas caixas podem ser armazenadas. As caixas também têm um formato

retangular e precisam ser empilhadas de forma otimizada para utilizar o máximo de espaço disponível.

Dados do galpão:

Comprimento: 50 metros

Largura: 30 metros

Altura: 10 metros

Dados das caixas:

Comprimento: 2 metros

Largura: 1,5 metros

Altura: 1 metro

Requisitos de armazenamento:

1. As caixas devem ser empilhadas sem deixar espaços entre elas.
2. É necessário deixar uma área de 100 metros quadrados no chão do galpão como espaço de manobra para empilhadeira.

9) Imagine que você está em um grande galpão de logística e quer encontrar uma encomenda. Um colega te fala que a caixa está em uma das prateleiras do lado esquerdo, porém há centenas de possibilidades. Como você pode encontrá-la facilmente em um espaço tão grande? E se você pudesse usar um mapa com a localização, onde cada ponto é descrito por dois números que indicam sua posição exata?

Caro(a) professor(a), acesse o QR-Code a seguir com o recorte da dissertação sobre as dificuldades que os alunos encontraram com as questões problematizadoras.



4 Organização do Conhecimento

A Organização do Conhecimento, conforme Delizoicov, Angotti e Pernambuco (2018) refere-se à etapa do ensino em que os conteúdos são sistematizados e estruturados a partir das questões levantadas na Problematização Inicial. Esse processo envolve conceitos científicos articulados com os conhecimentos prévios dos estudantes, promovendo uma compreensão mais ampla e integrada.

Os conhecimentos selecionados como necessários para a compreensão dos temas e da problematização inicial são sistematicamente estudados neste momento, sob a orientação do professor. As mais variadas atividades são então empregadas, de modo que o professor possa desenvolver a conceituação identificada como fundamental para uma compreensão científica das situações problematizadas (Delizoicov; Angotti; Pernambuco, 2018, p. 156).

A partir desse momento a História da Matemática é abordada de forma dialógica, contextualizada, interdisciplinar, de modo articulado com o que foi inicialmente problematizado.

4.1 Agricultura e matemática – uma ligação histórica

O ambiente do campo oferece uma série de benefícios para a saúde humana, desde uma conexão mais profunda com a natureza até qualidade de vida e bem-estar geral. A natureza do campo pode contribuir para uma vida mais saudável, com mais oportunidades para atividades ao ar livre, exercícios físicos e uma dieta mais saudável baseada em alimentos frescos e naturais.

Mas engana-se quem pensa que a vida no campo não tem trabalho, pois apesar de certas atividades no campo parecerem mais simples e tradicionais, elas são fundamentais para sustentar a sociedade e sua economia. Segundo Marx (2013), antes de tudo, o trabalho é um processo de que participa o homem e a natureza, processo em que o ser humano, com sua própria ação, impulsiona, regula e controla seu intercâmbio material com a natureza. Mas o que levou a humanidade a plantar e colher seu próprio alimento?

O trabalho sempre esteve presente na relação da humanidade com a natureza, de onde ele retira meios para sobreviver. Os primeiros grupos humanos passaram por um processo de adaptação ao ambiente para garantir a sobrevivência, inicialmente assumindo papéis de caçadores, coletores e agricultores, antes de avançarem para o uso de metais, como o ferro. Quando a humanidade começou a deixar o nomadismo e passou a se fixar em locais por um período maior de tempo, começou a desenvolver a agricultura.

ra, ou seja, o homem diminuiu o trabalho de coletar alimentos para aumentar o trabalho com a terra, plantando, regando e colhendo.

Assim, a agricultura se iniciou em regiões que eram abundantes em recursos hídricos, ou seja, o homem fazendo uso dos recursos naturais para modificar a sua realidade. Duas dessas localidades são a Mesopotâmia e o Egito, regiões muito importantes para o desenvolvimento da atividade agrícola e da matemática.

Os primeiros indícios da existência da matemática estão ligados a resolução de problemas práticos que apareciam no manejo do homem com a natureza. A preocupação com demonstrações e rigor matemático só iniciou na Grécia, muitos milênios depois. Quando a humanidade coletava, caçava e pescava, havia a urgência de registrar essa coleção de objetos (gravetos, peixes, animais, pedras, cordas, ossos, entre outros). Daí surge a ideia de contagem, onde há registros de aproximadamente 35.000 anos, como o Osso de Lebombo, que é a fíbula de um babuíno de aproximadamente 7 centímetros com 29 marcações, que serviam para registrar o ciclo lunar.

Figura 8 – Osso de Lebombo



Fonte: Viegas (2024)

A prática da agricultura surgiu no período Neolítico (aproximadamente 10.000 a.C. a 6.000 a.C.), chamada de Primeira Revolução Agrícola. Foi nesse período que surgiram as primeiras técnicas para plantação de cereais e domesticação de animais, que foram as principais causas para a mudança da

logística humana, ou seja, na diminuição dos deslocamentos em busca de saciar sua sede e fome. Durante o período Mesolítico, que se estende aproximadamente de 10.000 a.C. a 8.000 a.C., observa-se um processo de sedentarização da humanidade, impulsionado pelo desenvolvimento de técnicas agrícolas que possibilitam o armazenamento de produtos excedentes em relação à demanda para subsistência. Esse fenômeno marca o início das trocas comerciais e da atividade econômica, uma vez que os excedentes agrícolas permitiam aos agricultores estabelecer estoques para lidar com condições climáticas adversas, como estiagens ou períodos excessivamente chuvosos.

Com o desenvolvimento da agricultura a humanidade percebeu que era possível plantar e colher, reduzindo o nomadismo e dando início ao crescimento das primeiras cidades. Segundo Garbi (2010), essa foi a primeira grande revolução da vida humana. Foi necessário se organizar socialmente, compreender os ciclos lunares e as estações do ano para verificar qual era o período mais propício para cultivar

determinado produto. Às vezes, deveria estar associado às cheias de determinado rio, como o Nilo, no Egito e o Tigre e Eufrates, na Mesopotâmia.

4.2 Agricultura e História da Matemática na Mesopotâmia

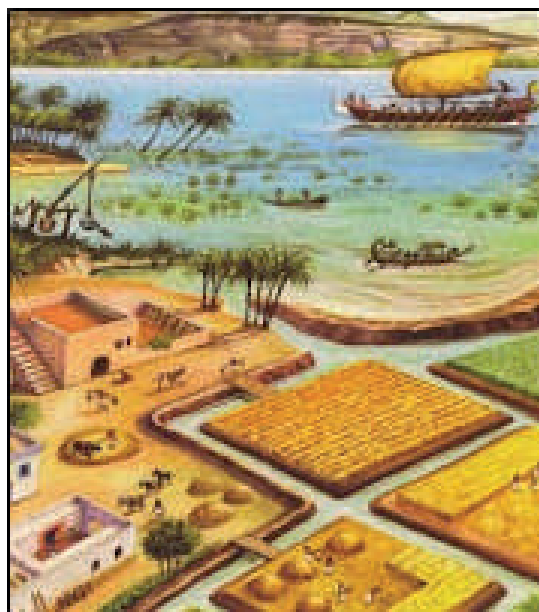
A Mesopotâmia, considerada o berço das primeiras civilizações, foi uma região marcada pelo desenvolvimento da agricultura e, conseqüentemente, da matemática. Localizada entre os rios Tigre e Eufrates, essa região fértil viu nascer sociedades complexas como os sumérios, babilônios e assírios, que dependiam fortemente da agricultura para sua sobrevivência. Assim como no Egito, o controle da terra e da água era fundamental para o sucesso das colheitas, o que levou ao surgimento de práticas matemáticas avançadas para a época que eram usadas nas atividades agrícolas.

Os avanços proporcionados pela nova civilização agrícola não foram compartilhados de forma igual por todos os membros da população. A sociedade apresentava uma estrutura de divisão de classes bastante rígida. A maioria da população, possivelmente mais de 90%, era composta por lavradores pobres, que muitas vezes não sabiam ler ou escrever. Em muitos casos, nem sequer eram proprietários das terras que cultivavam, que herdaram de algum senhor (Eves, 2011).

Esses trabalhadores enfrentavam jornadas exaustivas, com pouco tempo para descanso ou lazer. Apesar de serem responsáveis pela maior parte do trabalho produtivo, tinham acesso limitado ao conforto material e às riquezas, que se concentravam nas mãos de uma pequena elite formada por nobres, sacerdotes, guerreiros (a primeira guerra documentada na história ocorrida em torno de 2000 a.C. por disputas sobre uma vala de segurança no Oriente Médio). Na base da posição social estavam os escravos, geralmente capturados em guerras de conquista, e as mulheres, que, salvo algumas exceções, eram vistas apenas como trabalhadoras ou geradoras de descendentes, sem oportunidades de desenvolvimento (Eves, 2011).

A agricultura mesopotâmica era alimentada por um elaborado sistema de irrigação, essencial para lidar com o fluxo irregular dos rios. Para garantir uma distribuição eficiente

Figura 9 – A agricultura na Mesopotâmia



Fonte: Google Imagens (2024)

da água, os mesopotâmicos desenvolveram cálculos e medições precisas para projetar e manter canais, diques e reservatórios. A aritmética, em especial, teve um papel importante nesse processo, sendo usada para calcular a quantidade de água necessária para irrigar determinadas áreas de cultivo. O conceito de área e perímetro, por exemplo, era fundamental para a divisão e o gerenciamento das terras agrícolas.

Um dos grandes legados da matemática mesopotâmica foi a criação de um sistema numérico sexagesimal, baseado no número 60, que influenciou profundamente tanto a matemática quanto a astronomia. Esse sistema foi essencial não apenas para medir a terra e os recursos hídricos, mas também para o desenvolvimento de um calendário agrícola. Ao observar os ciclos das estações e os movimentos celestes, os mesopotâmicos criaram um calendário que regulava os períodos de plantio e colheita, permitindo uma maior eficiência na produção agrícola.

Além disso, a matemática mesopotâmica foi registrada em tábuas de argila, muitas das quais sobreviveram até os dias de hoje, revelando um impressionante nível de sofisticação em cálculos de áreas e volumes, usados tanto na agricultura quanto em projetos de construção. Esse conhecimento matemático estava intimamente ligado às necessidades agrícolas e administrativas da época, uma vez que as autoridades precisavam gerenciar grandes quantidades de terras cultiváveis e controlar a produção de alimentos para sustentar a crescente população.

Assim, a História da Matemática na Mesopotâmia está profundamente conectada com o desenvolvimento da agricultura, uma vez que a necessidade de controlar os recursos naturais e garantir colheitas abundantes impulsionou a criação de sistemas matemáticos e de medição avançados. Essa interseção entre agricultura e matemática foi crucial para o sucesso das primeiras civilizações que floresceram na região, influenciando o progresso cultural, social e econômico da Mesopotâmia.

4.3 Agricultura e História da Matemática no Egito Antigo

A civilização do Egito Antigo é um dos maiores exemplos de como a matemática e a agricultura se entrelaçaram para impulsionar o desenvolvimento de uma sociedade. Situado nas margens do rio Nilo, o Egito depende intensamente da agricultura, que era diretamente influenciada pelos ciclos de inundação do rio. Esses ciclos naturais, que fertilizavam as terras, tornaram possível o cultivo de alimentos, mas também exigiam um controle rigoroso para garantir a sobrevivência da população e o crescimento da economia local.

Foi nesse contexto que a matemática desempenhou um papel crucial. Os antigos egípcios desenvolveram métodos matemáticos para medir e dividir as terras agrícolas, que frequentemente mudavam de forma após as cheias do Nilo. A geometria, em especial, tornou-se uma ferramenta vital para a reavaliação constante das propriedades agrícolas, permitindo uma organização eficaz do território. Os agrimensores egípcios utilizavam cordas com nós em intervalos regulares, formando triângulos e retângulos para calcular áreas de terras e garantir a justa redistribuição.

Além disso, o controle do tempo e das estações também era fundamental para a agricultura, e os egípcios usaram a matemática para criar um calendário agrícola preciso. Eles identificaram padrões astronômicos, como o surgimento da estrela Sírius, que marcava o início das cheias do Nilo. Esse calendário permitiu prever com mais exatidão os melhores períodos para plantar e colher, o que foi essencial para a eficiência agrícola.

A relação entre o Egito Antigo, a História da Matemática e a agricultura é uma evidência de como o conhecimento matemático foi desenvolvido em resposta às necessidades práticas da sociedade. A matemática não apenas facilitou o controle das terras e dos recursos, mas também se tornou uma ferramenta para a gestão da vida econômica e social dessa civilização.

O surgimento da agricultura representou um marco significativo na trajetória da humanidade. De acordo com Garbi (2010), a prática agrícola possibilitou um rápido aumento populacional, fixando o homem ao solo e demandando uma organização social mais complexa. Foi necessário desenvolver habilidades de planejamento da produção, divisão do trabalho e compartilhamento de recursos, incluindo a terra e seus produtos. A partir da interação humana com a natureza e da transformação do ambiente, o homem passou a moldar seu contexto histórico e cultural.

Uma das primeiras civilizações da história da humanidade foi a Mesopotâmia, conhecida como "terra entre rios", localizada na região que hoje compreende o Iraque. Foi nessa região que a agricultura floresceu nas terras férteis ao longo dos rios Tigre e Eufrates. Durante certos períodos, quando o nível das águas dos rios diminuía, surgiram a necessidade e a oportunidade de construir diques, reservatórios e barragens para armazenar água, que seria posteriormente utilizada nas plantações. A engenharia desempenhou um papel fundamental ao permitir a distribuição dessa água armazenada para áreas distantes dos rios, o que possibilitou a expansão das áreas cultiváveis.

Conceitos do setor logístico

Logística: a logística é um processo que envolve o planejamento, a implementação e o controle do fluxo de produtos, informações e recursos, desde a origem até o destino final.

Armazenamento: a armazenagem é uma etapa da logística, podendo influenciar diversos setores, inclusive o financeiro. É realizada através de um conjunto de processos e é responsável pela proteção, organização, conservação, alocação e gerenciamento de materiais.

Estoque: refere-se ao conjunto ou quantidade de produtos que uma empresa possui armazenada. Os produtos em estoque podem ser considerados tanto materiais primários quanto produtos acabados, desde que esses materiais sejam armazenados até sua produção ou venda final.

Planejamento da produção: é o conjunto de atividades que planeja qual será a produção da fábrica em determinado período.

Distribuição: é o conjunto de atividades que envolvem a gestão de mercadorias, desde a saída da fábrica até a entrega ao cliente.

Figura 10 – Armazenamento



Fonte: Canva (2025)

Figura 11 – Distribuição



Fonte: Canva (2025)

No Egito, a agricultura também era a principal atividade econômica, concentrando-se nas margens do Rio Nilo. Os agricultores egípcios empregavam bois para arar o solo e construíam estruturas para armazenar água. Todas essas ações humanas precisaram de conceitos matemáticos para serem efetivadas. Tanto na Mesopotâmia quanto no Egito, foi necessária a criação de um sistema de numeração para padronizar os registros e permitir que cálculos fossem realizados.

O conceito de número e o processo de contar já estavam em desenvolvimento muito antes dos primeiros registros históricos, havendo evidências arqueológicas de que o homem, há cerca de 30.000 anos, já possuía a capacidade de contar (Eves, 2011). Os métodos primitivos de contagem utilizando marcas feitas em objetos serviam como base para se realizar contagens simples, como por exemplo, da quantidade de peixes pescados para se alimentar, ou das vezes que a chuva caiu e que o sol surgiu em algum ponto do céu.

A Mesopotâmia e o Egito começaram a se organizar como sociedade e as primeiras comercializações se iniciaram, contribuindo para o crescimento dessas regiões. É na Mesopotâmia que vamos estudar a princípio. Com a necessidade de se efetuar cálculos e registrar quantidades numéricas maiores, essa civilização desenvolveu o seu sistema de numeração para facilitar a escrita.

Segundo Roque e Carvalho (2012), o surgimento da escrita e da matemática na Mesopotâmia tem ligação. As primeiras formas de escrita surgiram pela urgência de registrar as quantidades. Não apenas o controle de rebanhos foi a motivação para a criação dos números, mas também o registro de quantidades de insumos ligados à sobrevivência, e, acima de tudo, à organização da sociedade.

Nesse período, houve um grande crescimento populacional, especialmente na região sul do Iraque, impulsionando o desenvolvimento de cidades e a melhoria das técnicas de administração da vida cotidiana. O aparecimento de registros de quantidades, associados às primeiras formas de escrita, está intimamente ligado a essa nova realidade (Roque; Carvalho, 2012).

Uma dessas cidades era Uruk, marco da urbanização que possuía templos, zonas residenciais, áreas públicas, comércios, forças militares e uma estrutura de governo público, cerca de 4000 a.C. Na década de 1930, escavações realizadas na região encontraram diversos tablets que indicam que os tokens eram utilizados na escrita.

Os *tokens* eram pequenas esculturas de argila que serviam para contar objetos de naturezas diferentes. Por exemplo, o cone servia para contar ovelhas, a esfera para contar milho, o cilindro para contar pão. Associava-se cada objeto contado ao *token* e depois

armazenava dentro de uma estrutura de argila oca, que continham tokens diferentes. Na própria argila molhada faziam marcações no exterior deste invólucro para controlar a quantidade de tokens existentes, pois após o fechamento do material não era mais possível depositar.

Esses invólucros eram utilizados para contagem de grãos, de animais de insumos agrícolas. Com o crescimento da sociedade na Mesopotâmia, percebeu-se que era desnecessário ter o controle dos tokens contidos no invólucro, já que era possível fazer esse tipo de registro em superfícies planas.

Figura 12 – Tokens de argila da Mesopotâmia



Fonte: Roque; Carvalho (2012)

Figura 13 – Sistema de numeração mesopotâmico

T	1	TT	2	TTT	3	TTT	4	TTT	5
TTT	6	TTT	7	TTT	8	TTT	9	TTT	10
< T	11	< TT	12	< TTT	13	< TTT	14	< TTT	15
< TTT	16	< TTT	17	< TTT	18	< TTT	19	< TTT	20
<< T	21	<< TT	22	<< TTT	23	<< TTT	24	<< TTT	25
<< TTT	26	<< TTT	27	<< TTT	28	<< TTT	29	<< TTT	30
<<< T	31	<<< TT	32	<<< TTT	33	<<< TTT	34	<<< TTT	35
<<< TTT	36	<<< TTT	37	<<< TTT	38	<<< TTT	39	<<< TTT	40
TT T	41	TT TT	42	TT TTT	43	TT TTT	44	TT TTT	45
TT TTT	46	TT TTT	47	TT TTT	48	TT TTT	49	TT TTT	50
TTT T	51	TTT TT	52	TTT TTT	53	TTT TTT	54	TTT TTT	55
TTT TTT	56	TTT TTT	57	TTT TTT	58	TTT TTT	59	TTT TTT	60

Fonte: Roque; Carvalho (2012)

Os tabletas apresentavam uma ferramenta mais prática para ser utilizada com essa finalidade. Um dos tabletas mais importantes da História da Matemática é o Tablete Plimpton 322. Ela recebe esse nome por fazer parte da coleção G. A. Plimpton da Universidade de Columbia e foi catalogada sob o número 322. Esta tábua foi elaborada aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C, e tem contido nela uma série de números inteiros que satisfazem o Teorema de Pitágoras.

4.4 Agricultura em 2025 no Estado do Espírito Santo

Um dos produtos da agricultura que mais são cultivados em terras capixabas é o café, em especial, a variedade Conilon. Segundo o Instituto Capixaba de Pesquisa, Assistência Técnica e Extensão Rural (Incaper) o estado registrou o maior número de produção do produto a nível nacional, no ano de 2022, com 724.334 toneladas produzidas do grão. O Espírito Santo também se destaca como maior exportador de café conilon, com cerca de 85% das exportações nacionais. Além das exportações de café conilon cru em grãos, ainda há volumes consideráveis de café solúvel, cuja exportação

foi de 501,7 mil sacas em 2023. Somente no primeiro trimestre de 2024, o estado exportou 1,7 milhão de sacas de café conilon e mais 129 mil sacas em café solúvel.

O café conilon está cada vez mais eficiente em logística, aumentou a oferta de cafés com certificações de qualidade e sustentabilidade, permitindo ao Brasil, e ao Espírito Santo, acessar mercados consumidores dessa espécie que antes eram compradores de outras origens produtoras. O Espírito Santo tem na cafeicultura o destaque, já que ele é o maior produtor de café conilon do Brasil, responsável por aproximadamente 70% da produção nacional, de acordo com o Incaper.

Figura 14 – Cafeicultura no Espírito Santo



Fonte: Incaper (2024)

Além do café, esse riquíssimo estado brasileiro se destaca na produção de outros produtos agrícolas. O professor pode propor à turma uma pesquisa no site do Incaper, ou da Secretaria de Agricultura do ES ou no site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), de mais alguns produtos que são destaque no estado capixaba ou em outras Unidades da Federação. É possível que o estudante tenha na sua casa ou no quintal uma amostra desse produto e o professor pode sugerir que o estudante traga o produto na próxima aula para apresentar para turma a sua descoberta e o material (caso não tenha, não precisa comprar), solicite que o estudante traga a pesquisa pois será muito importante. O docente pode trabalhar questões de porcentagem, notação científica, gráficos, tabelas, pictogramas e histogramas além de questões de matemática básica, como as operações de adição e subtração.

4.5 Unidades de medida de comprimento

Quando a agricultura se estabeleceu próximo ao Rio Nilo no Egito, muitos procedimentos, técnicas e resoluções eram realizadas de forma diferente daquilo que chamamos de matemática atualmente. Para Roque e Carvalho (2012) o Egito foi uma civilização que se desenvolveu com estabilidade, quer dizer, em aproximadamente 3000 a.C. já havia sido construída a Grande Pirâmide de Gizé, entre outros monumentos milenares, o que indica que a matemática já era explorada neste momento, afinal precisava calcular a quantidade de operários para realizar tal empreendimento, juntamente com o tempo gasto para o serviço, a quantidade de alimento e água que os trabalhadores precisavam para se manter.

Era uma matemática restritamente experimental, ou seja, os egípcios adotaram regras que se caracterizassem como eficazes para resolver problemas. Eles a utilizavam sem preocupação com demonstrações ou teorias. Era uma matemática prática, usual, indutiva (Garbi, 2010). O pai da história, ou seja, o historiador grego Heródoto, ao estudar sobre a história do Egito, documentou no século V a.C. que:

Esse faraó (Sesóstris) realizou a partilha das terras, concedendo a cada egípcio uma porção igual, com a condição de ser-lhe pago todos os anos certo tributo; se o rio carregava alguma parte do lote de alguém, o prejudicado ia procurar o rei e expor-lhe o ocorrido. O soberano enviava agrimensores para o local para determinar a redução sofrida pelo terreno, passando o proprietário a pagar um tributo proporcional ao que restara. Eis, ao que me parece, a origem da Geometria, que teria passado do Egito para a Grécia (Garbi, 2010, p. 12).

Segundo Eves (2011), o surgimento da geometria está nas necessidades da sociedade egípcia, especialmente quando o homem precisou demarcar terras. Isso levou ao desenvolvimento de uma geometria focada no desenho de formas, fórmulas e no cálculo de medidas de comprimento, área e volume. Foi durante esse período que surgiram as noções de figuras geométricas como retângulos, quadrados e triângulos.

Ou seja, a cada inundação anual do Rio Nilo, era preciso fazer essas marcações de terra delimitando o início de uma propriedade agrícola e a divisa com a propriedade vizinha, já que as áreas que estavam cobertas pelas águas eram muito férteis devido aos sedimentos e materiais orgânicos que o rio deixava, propício para o cultivo de diversos produtos agrícolas. Também havia a preocupação em registrar a área ocupada por esse terreno, pois o imposto cobrado pelo faraó é proporcional ao tamanho do lote (assim como acontece com o IPTU, no momento atual, cobrado pela prefeitura).

Alguns desses materiais foram preservados ao longo do tempo, eles são evidências matemáticas de extrema relevância originárias do Egito, evidenciando, por meio da escrita, a habilidade matemática desse povo em eras antigas. Dentre esses papiros, merecem destaque o Papiro de Moscou, Papiro de Rhind (Figura 15), todos eles datados aproximadamente entre 2000 a.C. e 1600 a.C.

Conforme Silva, Nascimento e Pereira (2018) alguns dos problemas do Papiro de Ahmes (Rhind) abordavam a divisão de propriedades ou da colheita, e, se fossem resolvidos nos tempos atuais, envolveriam o uso do conceito de equações de primeiro grau. No entanto, os egípcios não tinham conhecimento das técnicas modernas que empregamos hoje, como números negativos e a linguagem matemática com símbolos.

Figura 15 – Papiro de Ahmes ou Rhind (1650 a.C.)



Fonte: Garbi (2010, p. 13)

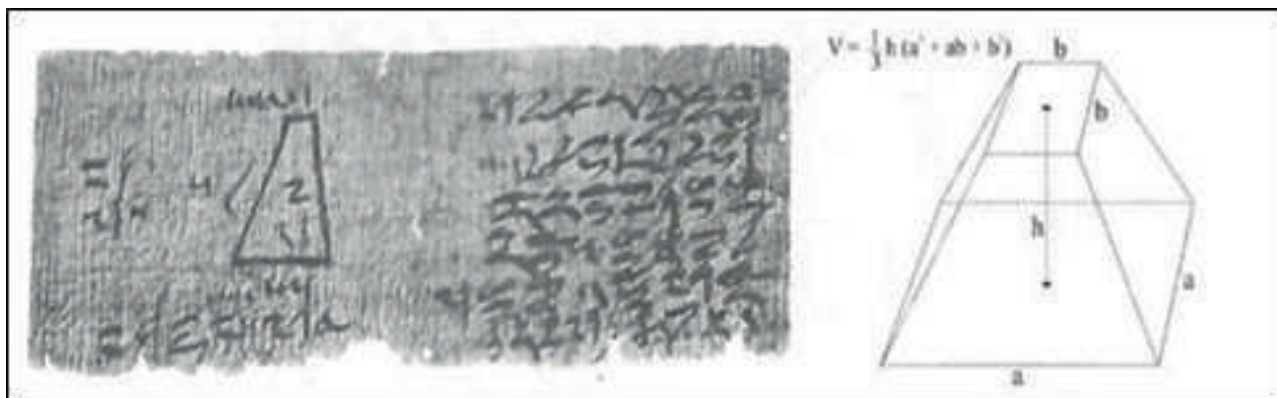
Portanto, eles não poderiam abordar esses problemas da maneira como é ensinado na maioria das escolas nos dias de hoje. Segundo Eves (2011), por volta de 1650 a.C., o Papiro Rhind (ou Papiro Ahmes) foi criado, representando uma coleção de matemática prática composta por 85 problemas.

Esse papiro foi escrito em hierático pelo escriba Ahmes, que o copiou de um trabalho mais antigo. Posteriormente, o Papiro Rhind foi adquirido no Egito por A. Henry Rhind, um egiptólogo escocês, e posteriormente foi adquirido pelo Museu Britânico. Junto com o Papiro de Moscou, esses manuscritos são as principais fontes de informações sobre a matemática do Antigo Egito. O Papiro Rhind foi publicado pela primeira vez em 1927.

Conforme destacado por Garbi (2010), o Papiro de Moscou é o segundo documento matemático mais significativo legado pelos egípcios. Datado de aproximadamente 1850 a.C., ou seja, anterior ao Papiro de Rhind (Ahmes), ele apresenta 25 problemas de aritmética e geometria. Um desses problemas geométricos chamou a atenção dos historiadores devido à sua dificuldade e à precisão da resposta fornecida. Além disso, o papiro fornece um modelo verbal que descreve exatamente o cálculo do volume de um tronco de pirâmide, expressando-o com os mesmos símbolos matemáticos que usamos atualmente. O modelo do papiro que está na Figura 15 é o seguinte:

Se lhe disserem: um tronco de pirâmide de altura 6, com base 4 e 2 no topo. Você multiplica 4 por si mesmo, resultado 16; você multiplica 4 por 2, resultado 8; você multiplica 2 por si mesmo; resultado 4; você soma 16, 8 e 4, resultado 28; você divide 6 por 3, resultado 2; você multiplica 2 por 28, resultado 56. Você verá que está certo (Garbi, 2010, p. 15).

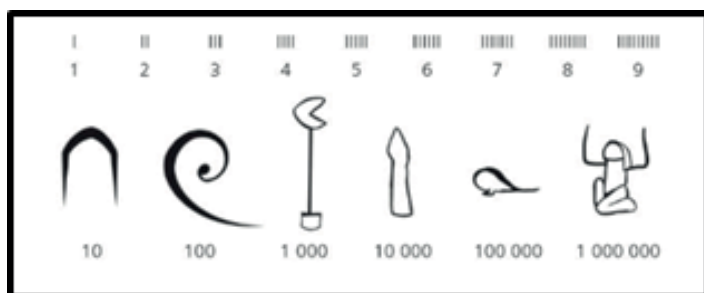
Figura 16 – Cálculo do tronco de uma pirâmide



Fonte: Garbi (2010, p.15)

Para realizar tantos feitos em diversas esferas da sociedade, os egípcios organizaram o seu sistema de numeração para registrar os números e facilitar cálculos e marcações. Ele era composto por sete símbolos diferentes, não era posicional e o símbolo poderia ser repetido por nove vezes (Figura 17).

Figura 17 – Sistema de numeração egípcio



Fonte: Roque; Carvalho (2012)

Os antigos egípcios desenvolveram um sistema de medidas que, em grande parte, era baseado nas proporções do corpo humano, uma prática comum em várias culturas da antiguidade. Esse sistema de medidas foi fundamental para suas realizações em arquitetura, agricultura e artesanato. Eles utilizaram partes do corpo como referência para padronizar suas medi-

ções, o que facilitava a execução de construções monumentais, como pirâmides, templos e canais de irrigação.

Entre as principais medidas baseadas no corpo humano estavam:

1. Cúbito (Côvado): uma das unidades mais importantes, o cúbito era a medida da distância entre o cotovelo e a ponta do dedo médio, equivalente a aproximadamente 52,4 centímetros. O cúbito foi amplamente usado na construção de edifícios e monumentos, e os egípcios criaram réguas de pedra e madeira para garantir a padronização dessa medida.

2. Palma: era a largura da mão aberta, sem contar o polegar, e equivalia a cerca de 7,5 centímetros. Essa medida era útil para cálculos menores e para divisões mais precisas do cúbito.

3. Braça: correspondia à distância entre os braços esticados lateralmente, ou seja, de uma ponta dos dedos de uma mão até a outra, algo em torno de 1,8 metros. Essa medida era útil para calcular áreas maiores ou medições de terrenos.

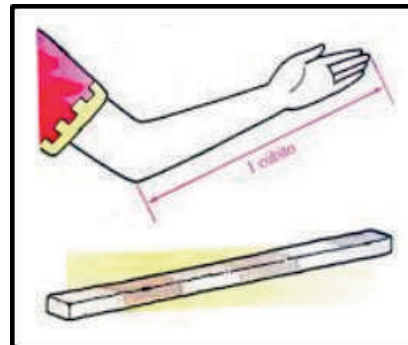
Outras civilizações também desenvolveram suas formas práticas de medir. Por exemplo, os romanos utilizavam o pé (aproximadamente 29 centímetros) para medir distâncias menores, e o passo duplo para percursos maiores. Mil passos duplos formavam uma nova unidade de medida, chamada milha, derivada do latim *milia passuum* (que significa "mil passos"). Essa unidade, com algumas adaptações, ainda é usada hoje, correspondendo a aproximadamente 1.609 metros.

Na Inglaterra, as unidades mais comuns incluíam a polegada, o pé, a milha e a jarda. Tanto o pé quanto a milha eram legados deixados pelos romanos, que ocuparam a Inglaterra do século I ao século V d.C. A jarda inglesa, originária da palavra *yard* (que significa "varas"), foi estabelecida como a distância entre a ponta do nariz do rei Henrique I e a ponta de seu polegar, com o braço totalmente esticado.

4.6 Sistema Métrico Decimal

Esses desafios de inconsistência e falta de padronização dos sistemas de medição que consideravam o corpo humano como base levaram, ao longo dos séculos, à busca por uma solução que fosse universal e exata, pois o avanço das relações comerciais, o desenvolvimento das cidades e a mudança do modo de vida traziam muitas dificuldades. O marco decisivo nesse processo foi a criação do Sistema Métrico Decimal no final do século XVIII, durante a Revolução Francesa. Mas o que a França tem a ver com essa história?

Figura 18 – Cúbito egípcio



Fonte: Rosa (2013)

Vamos começar explorando um pouco sobre a formação do território francês ao longo da história. Com o objetivo de expandir o domínio romano sobre a Europa, o general romano Júlio César (100-44 a.C.) liderou uma série de campanhas militares que consolidaram o poder de Roma no continente. Uma dessas campanhas foi a Guerra da Gália, ou Guerras Gálicas, que resultou na conquista romana das regiões onde hoje estão localizadas a Bélgica e a França. Nessas regiões foram implantadas como unidades de comprimento do pé romano, que equivale a 29,44 cm.

Figura 19 – Livro de Gabriel Mouton



Fonte: Viegas (2024)

Figura 20 – Proposta de padronização



Fonte: Viegas (2024)

Com o tempo, essa unidade de medida passou por modificações, como por exemplo, 12 polegadas correspondem a 1 pé francês e 6 pés franceses equivalentes a 1 toesa. Esse sistema causava confusão, semelhante ao que ocorria no Antigo Egito, já que o valor da toesa variava de acordo com o tamanho do pé. A falta de padronização dificultava as medições e a comunicação entre diferentes regiões. Logo, assim como no Egito Antigo, as variações nas medidas comprometem a eficiência nas atividades do cotidiano. Essas inconsistências demonstram a importância de um sistema de medidas uniforme para evitar erros e facilitar a interação na sociedade. Para minimizar essa dificuldade, foi criada uma barra de ferro no forte Châtelet, chamada de "Toesa do Châtelet", que foi padronizada com o valor de 1 toesa. Essa barra serviu como uma medida de referência oficial na época.

Em 1666, o rei Luís XIV fundou a Academia Francesa de Ciências, que reunia cientistas, matemáticos, geômetras, astrônomos e outros estudiosos. A falta de padronização das unidades de comprimento, no entanto, gerava desafios para esses especialistas, dificultando cálculos e medições precisas.

Em 1670, um dos membros da Academia, Gabriel Mouton (1618-1694), fez a primeira sugestão para resolver o problema da falta de padronização das medidas. Ele propôs usar como unidade de comprimento o arco de um meridiano terrestre, correspondente a um ângulo de 1' (um minuto) no centro da Terra, que seria dividido decimalmente (Rozenberg, 2006). Mouton sugeriu chamar essa medida de "miliar" e, ao dividir o miliar por 1000, obter-se a "virga", unidade básica de comprimento, com aproximadamente 2,04m (Dias, 1998).

A virga seria então, a referência principal para os cálculos de comprimento. Mas a ideia de Mouton a princípio não se materializou e foi arquivada por muitos anos. Em 1789, a França tinha aproximadamente 23 milhões de habitantes, dos quais cerca de 400 mil faziam parte da nobreza. A sociedade era dividida em três grupos principais, chamados de estados: o Clero, composto pelo baixo e alto clero, que eram isentos de impostos e taxas pelo Estado. Além disso, o Clero arrecadava recursos através dos dízimos, rendas de propriedades urbanas e rurais, e também recebia uma pensão do Estado.

O segundo estado era formado pela Nobreza, composto por homens que não podiam exercer atividades de trabalho, pois não era considerado adequado que alguém da classe nobre trabalhasse. No terceiro estado estava o restante da população francesa, representando cerca de 80%, composta em grande parte por camponeses que possuíam pequenas propriedades e eram obrigados a pagar dízimos, taxas e tributos feudais (Pagliarini; Garcia, 2020).

Em 1789 ocorreu a Revolução Francesa (1789-1799) que marcou o fim da Idade Moderna e o início da Idade Contemporânea, além de proporcionar muitas mudanças na vida dos franceses. Antes da Revolução Francesa, o trabalho humano na França era rigidamente hierarquizado e influenciado por uma sociedade de classes. O sistema feudal ainda predominava e os camponeses, que formavam a maior parte da população, eram submetidos a pesadas cargas de trabalho e tributos, muitas vezes sem terras próprias. Eles trabalhavam em propriedades dos nobres, aos quais deviam pagar impostos e cumprir obrigações. Já na cidade, o trabalho das artes e aprendizes era controlado por guildas, que regulamentavam cada profissão e limitavam a mobilidade e a liberdade dos trabalhadores. A nobreza e o clero não precisavam pagar impostos e gozavam de privilégios, enquanto o terceiro Estado, que incluía trabalhadores e camponeses, sustentava uma estrutura econômica com pesados tributos.

A jornada de trabalho geralmente era de 16 horas diárias; o desemprego alcançou índices preocupantes e os progressos se viram em queda. Desse modo, a sociedade francesa de 1789 era totalmente composta por trabalhadores que enfrentavam condições extremamente difíceis, com jornadas exaustivas, remunerações insuficientes e altos impostos, cobrados para sustentar os dois primeiros estados (Pagliarini; Garcia, 2020).

A Revolução Francesa trouxe mudanças significativas no trabalho e na vida dos franceses, promovendo ideias de liberdade e igualdade. O sistema feudal foi abolido, permitindo que os camponeses tivessem mais autonomia sobre suas terras e sobre a produção agrícola. As guildas também foram extintas, o que possibilitou uma maior liberdade para o comércio e para o desenvolvimento de atividades artesanais, além de incentivos à mobilidade social. Surgiu a noção de direitos individuais, e a Declaração dos Direitos do

Homem e do Cidadão trouxeram uma nova visão de cidadania, reduzindo o poder da nobreza e do clero e promovendo um modelo mais igualitário. Essas mudanças abriram caminho para um sistema de trabalho mais livre, preparando a França para as transformações econômicas e sociais da era industrial.

Figura 21 – Revolução Francesa



Fonte: Google Imagens (2024)

Nesse período da Revolução Francesa o estabelecimento de um padrão de medidas na França voltou a ser debatido pela Academia Francesa de Ciências. No ano de 1791 foi organizado um grupo de trabalho que era composto por vários cientistas importantes como os matemáticos Joseph Lagrange (1736-1813) e Pierre Laplace (1749-1827), o químico Antoine Lavoisier

(1743-1794) e o físico Charles Coulomb (1736-1806), dentre outros estudiosos. A motivação por trás da criação do sistema métrico veio de uma crescente necessidade de uniformizar as medidas, tanto para uso científico quanto para comércio internacional. Até então, cada país (e às vezes regiões dentro do mesmo país) utilizava sistemas de medidas diferentes, o que dificultava as trocas comerciais e a cooperação científica.

A proposição de Gabriel Mouton voltou a ser discutida quando cientistas fizeram uma proposta parecida com aquela que havia sido arquivada. A medida de comprimento padrão ia se basear no comprimento do arco de $\frac{1}{4}$ do meridiano, iniciando no polo norte e terminando no ponto equivalente a Linha do Equador. Esse meridiano atravessava a cidade de Dunquerque, na França. Essa unidade recebeu o nome de "metro" (do latim "*metru*") e foi então definida como o "comprimento de um décimo de milionésimo do comprimento de um quarto do meridiano terrestre". O comprimento de um quarto do meridiano terrestre era de 5.130.740 toesas (Rozenberg, 2006). Em 1792 é colocado em prédios públicos marcações em barra de ferro indicando quanto era 1 metro para as pessoas se acostumarem e começarem a utilizar.

Figura 22 – Modelo de metro colocado na Praça Vendôme em Paris

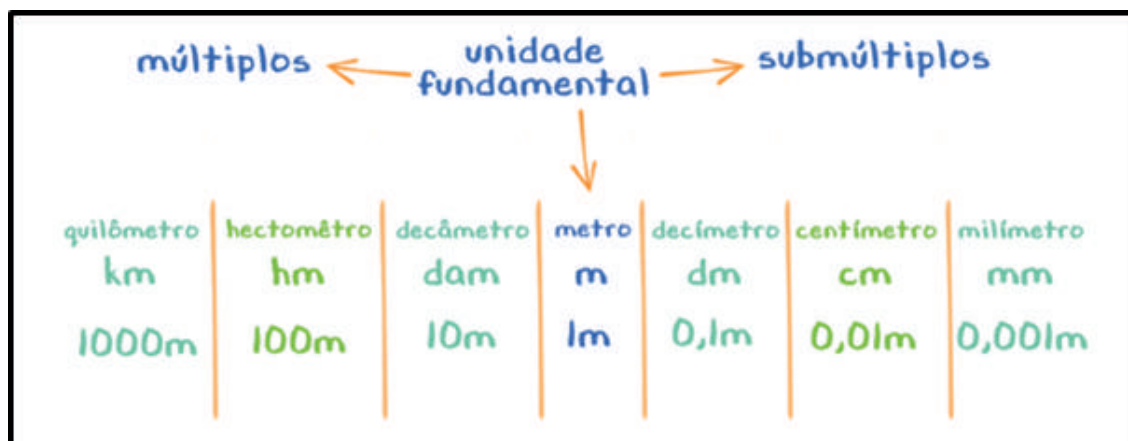


Fonte: Crease (2013, p. 56)

No ano de 1812, o imperador francês Napoleão Bonaparte (1736-1821) determinou que o metro não seria mais utilizado e que a toesa deveria retornar a ser utilizada como base para comprimentos. Além disso, o valor da toesa foi atualizado para 2 metros. Em 1813 retornava-se a braça como medida de comprimento. Em 1840 o rei Filipe I de Orleans (1773-1850) determinou que o que iria valer como unidade de comprimento era o metro. Finalmente, a partir do ano de 1840 a França passou a utilizar o metro como medida base para unidades de comprimento.

O Sistema Métrico Decimal rapidamente foi difundido pela Europa, impulsionado pela Revolução Francesa, apesar de um período inicial de coexistência com sistemas antigos. Em 1875, uma "Conferência Diplomática do Metro" foi realizada em Paris, com representantes de vinte países, incluindo o Brasil. Nessa conferência, o sistema foi oficialmente adotado com a assinatura da "Convenção Internacional do Metro", e foi criado o Bureau Internacional de Pesos e Medidas, que atua sob a supervisão da Comissão Internacional de Pesos e Medidas (CIPM) (Rozenberg, 2006).

Figura 23 – Sistema métrico decimal



Fonte: Google Imagens (2024)

4.7 A Grécia antiga e a História da Matemática

Ao longo da história, o conceito de trabalho passou por diversas transformações pela humanidade. Na Antiguidade, o trabalho manual era visto como uma ocupação menos nobre em comparação com as atividades intelectuais. Para os gregos, essa forma de trabalho era considerada degradante e destinada exclusivamente aos escravos. Já os cidadãos deveriam ter tempo livre para se dedicarem à reflexão, à filosofia, à política e às artes. Aristóteles descreve essa divisão na sociedade grega, separando cidadãos e cidadãos:

Todos aqueles que nada têm de melhor para nos oferecer que o uso do seu corpo e dos seus membros são condenados pela natureza à escravidão. É melhor para eles servir que serem abandonados a si próprios. Numa palavra, é naturalmente escravo quem tem tão pouca alma e tão poucos meios que deve resolver-se a depender de outrem ... O uso dos escravos e dos animais é aproximadamente o mesmo (Aristóteles, 2006, p. 23).

Vimos que no Egito e na Mesopotâmia a matemática era utilizada para resolver situações cotidianas de maneira prática, ou seja, se uma regra fosse adotada e desse certo para aquela situação, ela era considerada como definitiva. Essa forma de utilizá-la foi muito importante para que essas duas civilizações fossem evoluindo como um todo.

Outra civilização antiga que desenvolveu uma forma diferente de pensar a matemática foi a civilização Grega, porém na Grécia Antiga os matemáticos tinham a preocupação em demonstrar o tema. Demonstrar significa provar com raciocínio lógico que o que está sendo feito é verdadeiro. Essa forma de pensar modificou toda a História da Matemática.

Conforme relata Garbi (2010), no final do terceiro milênio a.C., algumas tribos indo-europeias originárias do sul do Mar Negro passaram a se deslocar para o Oeste, ocupando gradualmente a península dos Bálcãs, região onde atualmente está localizada na Grécia. Essas tribos, conhecidas como aqueus, chegaram ao extremo sul e, por volta de 1600 a.C., estabeleceram a civilização micênica, nomeada a partir de sua cidade mais importante, Micenas.

Micenas foi atacada e destruída pelos dórios, uma tribo grega que vivia no Norte, fazendo com que os aqueus se estabelecessem em cidades orientais como Atenas. Eles também migraram para as Ilhas do Mar Egeu e para a costa da península de Anatólia, no território que hoje é a Turquia, onde todos se comunicavam através do dialeto local, que era o jônio. As principais cidades desse período eram Mileto, Éfeso, Cólofon, Tênedo, Lesbos, Quios e Samos. Essas colônias da Jônia foram o berço da matemática e da filosofia.

Vamos pesquisar

Caro professor, a seguir há alguns personagens marcantes da História da Matemática na Grécia Antiga, matemáticos que contribuíram para que essa ciência fosse desenvolvida.

Tales de Mileto	Teodoro de Cirene	Diofanto de Alexandria
Arquimedes de Siracusa	Anaximandro de Mileto	Eratóstenes de Cirene
Apolônio de Perga	Hipátia de Alexandria	

Como sugestão de atividade, apresenta-se como proposta, que cada estudante escolha um matemático e pesquise sobre as descobertas que ele realizou na sua vida. O objetivo é que os alunos possam trazer para a aula e realizar um debate sobre esses estudiosos e como eles ajudaram a matemática na linha evolutiva.

4.7.1 Pitágoras e a Escola Pitagórica

Um dos personagens da História da Matemática é Pitágoras de Samos (586 a.C.- 500 a.C.). Pitágoras era filho de comerciantes e viajava muito ao Egito. Foi lá que se apaixonou pela matemática egípcia e pela forma como os egípcios trabalhavam os números. Ele foi o fundador de um grupo de estudos voltado à filosofia, ciências naturais e matemática, chamado de Escola Pitagórica.

Foram os pitagóricos (membros da escola) que fizeram as primeiras demonstrações matemáticas com rigor e precisão. Ou seja, há uma mudança da forma como a matemática era produzida da Mesopotâmia e Egito para a Grécia. A escola pitagórica despertou a humanidade para a arte de pensar e raciocinar de forma lógica e estruturada.

Os pitagóricos perceberam algo que os fascinou profundamente: embora a matemática fosse uma ciência abstrata e ideal, sua influência poderia ser observada em todos os aspectos do mundo físico, tanto nos céus quanto na Terra. Essa constatação nos levou a acreditar que os números eram a

Figura 24 – Pitágoras de Samos



Fonte: Google Imagens (2024)

essência fundamental do universo. Com isso, disseminaram uma intensa paixão pela Matemática, impulsionando seu estudo de maneira significativa na civilização (Garbi, 2010).

Os pitagóricos eram muito curiosos e descobriram algumas relações interessantes em relação aos números. Para eles, tudo se resumia em números e também acreditavam que os números governam o mundo e que a matemática poderia responder às inquietações que apareciam na vida deles.

4.7.2 Relações pitagóricas entre aritmética e geometria

Antes de continuar com a História da Matemática na Grécia, apresenta-se a definição de alguns ramos que a matemática estuda, possibilitando o desenvolvimento específico de cada área do saber matemático.

Alguns ramos da matemática

Aritmética é a parte da matemática que estuda números e operações, especialmente, a adição (+), subtração (-), multiplicação (.) e divisão (÷).

Álgebra é a parte da matemática que estuda a aritmética aplicada na resolução de equações, polinômios, operações algébricas. Também é aplicada na geometria e em outras áreas do saber como física, biologia e química.

Trigonometria é a parte da matemática que estuda a relação entre triângulos e ângulos. Também se utiliza da aritmética e da álgebra para resolver problemas trigonométricos.

Geometria é uma parte da matemática que estuda as formas geométricas, o espaço e a relação entre eles. Também se utiliza da aritmética e da álgebra para resolver problemas geométricos.

A representação geométrica ou física de números por pontos em um plano e a análise de suas propriedades constituíam um estudo natural para os antigos pitagóricos. Eles buscavam entender a essência dos números e, por isso, desenvolveram os números figurados, que são números expressos como a disposição de pontos em uma configuração específica, ou seja, números cuja representação geométrica assumia a forma de diferentes figuras geométricas.

Para exemplificar os números figurados, temos os números figurados triangulares. Os números triangulares podem ser representados de forma algébrica, assim, temos que $T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n$

Essa representação pode ser traduzida em uma fórmula matemática que é $T_n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \rightarrow$, também chamada de expressão algébrica.

Vejam os exemplos de como isso pode ser representado.

O triângulo 1, trocando na fórmula o valor de “n” por 1, vamos encontrar o valor numérico da expressão algébrica.

$$T_n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \quad T_n = \frac{1 \cdot (1 + 1)}{2} \rightarrow$$

Devemos lembrar da ordem de resolução das expressões numéricas (repare que a expressão deixou de ser algébrica e passou a ser numérica, pois não há mais incógnitas na resolução.) Assim, devemos resolver primeiro as operações matemáticas dentro dos parênteses:

$$T_n = \frac{1 \cdot 2}{2} \rightarrow T_n = \frac{2}{2} \rightarrow T_n = 1$$

Assim, o triângulo 1 é composto por um círculo. O triângulo 2, trocando na fórmula o valor de “n” por 2, vamos encontrar o valor numérico da expressão algébrica.

$$T_n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \quad T_n = \frac{2 \cdot (2 + 1)}{2}$$

$$T_n = \frac{2 \cdot 3}{2} \rightarrow T_n = \frac{6}{2} \rightarrow T_n = 3$$

Assim, o triângulo 2 é composto por três círculos. Outro número figurado descoberto pelos pitagóricos, os números figurados quadrangulares. Eles descobriram que a soma dos números ímpares consecutivos resultava em um número quadrado.

$$Q_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Por exemplo:

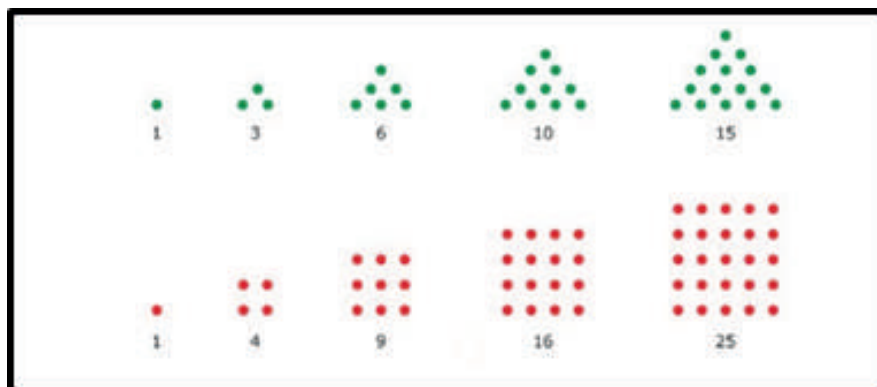
$$1 + 3 = 4 \rightarrow 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 \rightarrow 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 \rightarrow 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 \rightarrow 5^2$$

Figura 25 – Números figurados



Fonte: Google Imagens (2024)

Outra importante contribuição dos pitagóricos para a matemática é que eles despertaram pelo mundo grego um grande interesse de outras pessoas pelo estudo dessa ciência, havendo uma intensa busca e interesse pela forma que os pitagóricos traziam a matemática de maneira racional. Mais do que uma simples escola, Pitágoras conseguiu criar uma comunidade religiosa, filosófica e política. Os alunos que formava iam para ocupar altos cargos no governo local.

Vamos pesquisar

Caro professor, a seguir há algumas áreas que os pitagóricos também estudaram e ajudaram a desenvolver. Como sugestão de atividade, apresenta-se como proposta, que os estudantes pesquisem sobre outras contribuições que os pitagóricos tiveram em campos como astronomia, filosofia, política, medicina e música e tragam para aula para uma discussão em uma roda de conversa sobre a escola pitagórica.

O objetivo é que os alunos possam entender os avanços que a Escola Pitagórica teve na sociedade grega, apresentando uma forma diferente de pensar, o que influenciou na Grécia uma busca pelo conhecimento.

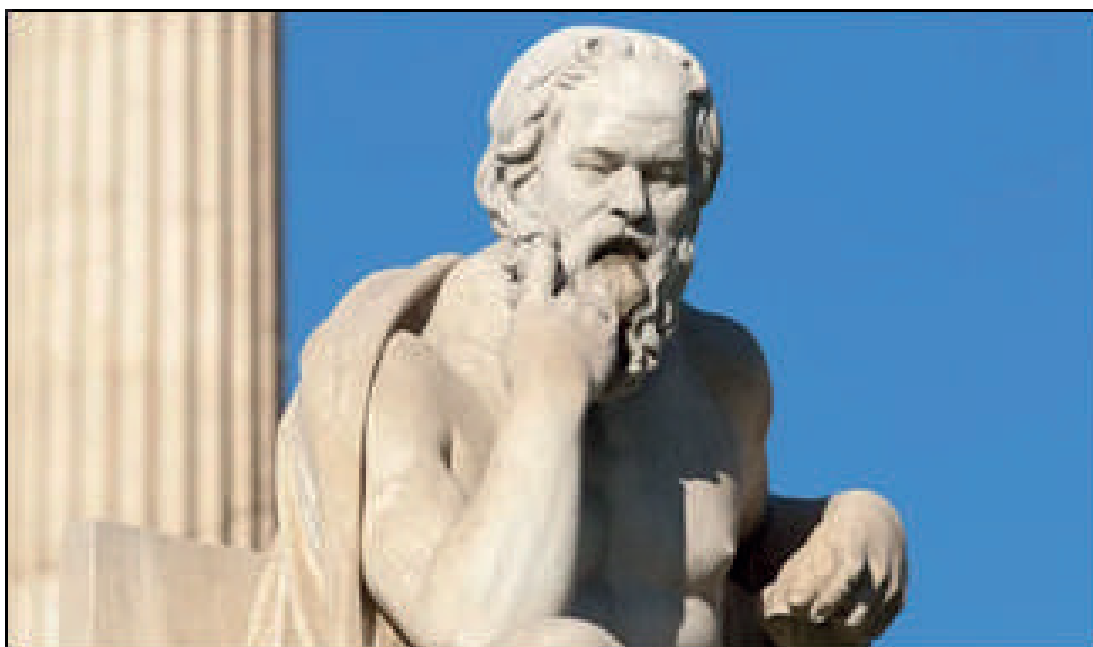
Sugestão para os professores: pesquisar para qual finalidade, para quem e qual era o interesse para que os Pitagóricos tivessem o empenho em estudar a Matemática e tentar modificar a forma como ela era trabalhada e quais mudanças eles conseguiram no modo de pensar nessa ciência.

4.7.3 Platão e a sua academia

Platão (427 a.C.-347 a.C.), cujo nome de nascimento era Arístocles, veio ao mundo durante a Guerra do Peloponeso, um conflito que envolveu Esparta e Atenas, as duas principais cidades-estado da Grécia antiga. Esse confronto marcou o declínio do domínio grego sobre o mundo antigo.

Após ser derrotada militarmente por Esparta, Atenas passou por um período de instabilidade política, sendo governada pelos chamados "Trinta Tiranos". Platão foi discípulo de Sócrates (469 a.C.-399 a.C.), o filósofo renomado condenado à morte sob a acusação de corromper a juventude e de introduzir novos deuses. No entanto, Sócrates, na realidade, criticou os votos da sociedade ateniense e as suas lideranças, destacando os erros que levaram a cidade a situação difícil. Sua prática de questionar abertamente as ações e ideias da época era especialmente incômoda para os poderosos, como frequentemente ocorre em qualquer época. É de Sócrates a famosa frase "Uma vida não questionada não merece ser vivida" (Garbi, 2010).

Figura 26 – Sócrates



Fonte: Google Imagens (2024)

Com a morte do seu professor, Platão decidiu deixar a Grécia, pois considerava que o ambiente não era bom para aqueles que queriam adquirir a sabedoria. Viajou pelo Mar Mediterrâneo e ficou por alguns anos na Magna Grécia (Itália). Lá ele estudou textos do pitagórico Filolau de Crotona. Estudou matemática com Teodoro de Cirene nas costas da África (Líbia) e tornou-se amigo íntimo do matemático e astrônomo Arquitas de Tarento.

Por volta do ano de 386 a.C., Platão volta para Atenas e decide fundar uma escola orientada por propósitos sistemáticos de investigação científica e filosófica. O nome dela é Academia de Platão, pois a escola foi fundada nos jardins que a cidade dedica a Academus, herói mitológico da Guerra de Troia.

Figura 27 – Platão e os Sólidos de Platão



Fonte: Google Imagens (2024)

Para saber mais, escaneie o QR Code com a câmera do seu celular e acesse informações complementares.

A Academia de Platão durou aproximadamente 900 anos. Foi o imperador bizantino Justiniano I (483-565) que tinha uma política de divulgação apenas dos ideais cristãos quem fechou a Academia de Platão, por supostas atividades heréticas.

4.7.4 Euclides de Alexandria e a geometria espacial

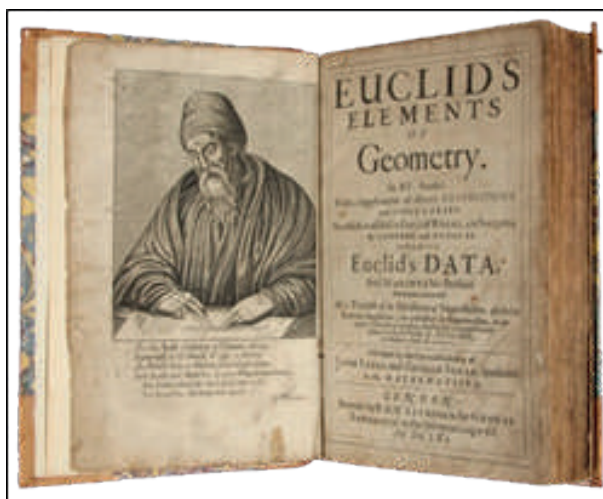
Dois dos maiores marcos no desenvolvimento da geometria surgiram no Egito antigo e na Grécia clássica, onde a disciplina evoluiu de uma ferramenta prática para um campo teórico. Um dos principais personagens da História da Matemática foi o geômetra Grego Euclides de Alexandria (Século III a.C.), considerado o “pai da geometria” por seu trabalho realizado nesse ramo da matemática.

Ptolomeu I, também conhecido como Ptolomeu Sóter (“Sóter ” significa “salvador ” em grego), fundou uma dinastia que governou o Egito por três séculos, sendo Cleópatra (69-31 a.C.) seu último representante. Por volta de 300 a.C., Ptolomeu decidiu transformar Alexandria em um grande centro de conhecimento e cultura. Incentivado pelo filósofo Demétrio de Falero, que havia morado em Atenas, mas deixou a cidade devido a questões políticas, Ptolomeu acatou a ideia de Demétrio de estabelecer um centro de estudos que superasse as cidades gregas.

Assim, foi fundada uma grande biblioteca, chamada "Museu de Alexandria", dedicada às musas, as deusas das artes e ciências. Demétrio atraiu para Alexandria alguns dos maiores intelectuais da época, incluindo Euclides, que começou a ensinar geometria no local (Garbi, 2010).

Para lecionar em Alexandria, Euclides preparou um material didático para o ensino de geometria para os estudantes. Esse material didático é composto por 13 livros chamado de "Os Elementos" e é a segunda obra com maior número de edições em todo o mundo, ficando atrás apenas da Bíblia.

Figura 28 – Euclides e Os Elementos



Fonte: Google Imagens (2024)

Euclides foi o responsável por definir alguns conceitos matemáticos importantes e inovadores para a época, já que a geometria egípcia era muito prática e a grega tinha um caráter mais teórico ligado a demonstrações. Algumas definições contidas em Os elementos são:

Proposição: afirmação que pode ser verdadeira ou falsa.

Axioma: proposição aceita como sendo verdade inicial, não sendo demonstrável pela sua evidência. Exemplo: duas coisas iguais a uma terceira, são iguais entre si.

Teorema: proposição que, para se tornar evidente, precisa de demonstração. Exemplo: Teorema de Pitágoras, o quadrado do valor da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Corolário: consequência imediata de um teorema. Um exemplo de corolário de um teorema é a afirmação "o triângulo é retângulo", que é um corolário do Teorema de Pitágoras.

Demonstração: sucessão de relações válidas, dentre elas axiomas e teoremas já provados, para estabelecer um novo teorema.

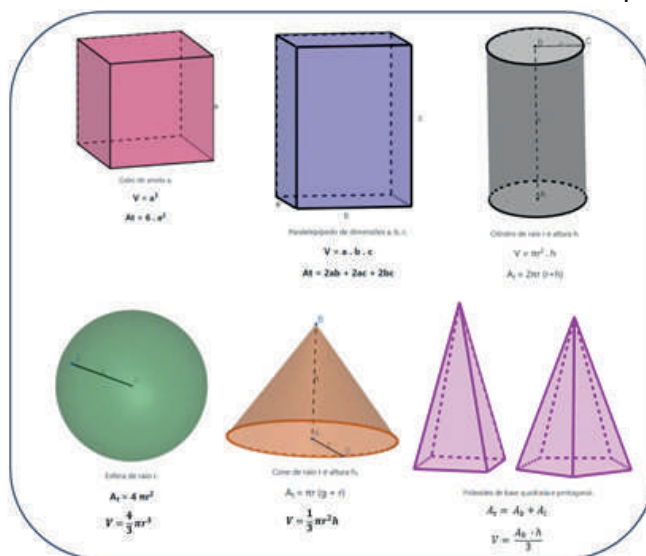
Os elementos não são um conjunto de livros que tratam somente de geometria. Em alguns dos 13 exemplares há outros assuntos envolvidos como a demonstração de que há infinitos números primos (aqueles que possuem dois divisores), também há outra coleção que trata sobre o que hoje é chamado de progressão geométrica e foi muito explorado pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), também

conhecido como “o príncipe da matemática” que foi outro importante matemático. Uma dessas 13 obras de “Os elementos” especificamente o livro XII, é composto por 18 proposições e se dedica ao estudo de áreas e volumes de figuras como esferas, cones e pirâmides. Neste exemplar da coleção, Euclides sistematizou o estudo que hoje é conhecido como geometria espacial.

A importância do trabalho de Euclides reside em sua influência no desenvolvimento da matemática e na inspiração que surgiu para gerações posteriores de estudiosos. Ao apresentar métodos que conectam diretamente a geometria e a lógica, Euclides distribuiu bases sólidas para a matemática como uma ciência dedutiva.

Além disso, a aplicação prática desses estudos foi significativa para os gregos, especialmente na engenharia, arquitetura e astronomia, áreas essenciais para a expansão cultural e tecnológica da época. A sistematização de Euclides não só serviu como manual para o ensino da matemática por séculos, como também destacou o papel da abstração como matemática, um elemento central do pensamento filosófico e científico na Grécia antiga.

Figura 29 – Algumas fórmulas de área e volume de Geometria Espacial



Fonte: Elaborada pelos autores (2025)

4.7.5 O que é cubagem?

Na logística, a cubagem é uma medida relacionada a massa (comumente denominada de “peso”) de uma carga e o volume que essa carga vai ocupar no meio de transporte. Para calcular a cubagem de uma carga o primeiro passo é calcular o volume dela. Para isso, basta multiplicar o comprimento, a largura e a altura da embalagem. Por exemplo, se uma mercadoria possui medidas de 50 cm de comprimento, 30 cm de largura e 40 cm

Figura 30 – Cubagem



Fonte: Canva (2024)

de altura, o volume da caixa acabará sendo de 0,06 metros cúbicos ($0,50 \text{ m} \times 0,30 \text{ m} \times 0,40 \text{ m} = 0,06 \text{ m}^3$).

O próximo passo é entender o que é o fator de cubagem. O fator de cubagem é um coeficiente que sempre será aplicado nos cálculos de peso cubado. Ele é relacionado como a carga “ideal” para um volume proporcional a 1 m^3 transportado.

De acordo com as definições da Associação Nacional do Transporte de Cargas e Logística, o fator de cubagem padrão utilizado no transporte de cargas deve ser de 300 kg por metro cúbico. Seguindo os mesmos dados no exemplo acima, o fator de cubagem nesse caso seria de 18 kg ($0,50 \text{ m} \times 0,30 \text{ m} \times 0,40 \text{ m} \times 300 = 18 \text{ kg}$).

Sugestão para os professores: para saber mais sobre cubagem acesse o *link* a seguir (<https://www.totvs.com/blog/gestao-logistica/cubagem/>).

4.7.6 Geometria plana

A própria palavra geometria (geo = terra e metria = medir) fornece boas dicas de como essa área da matemática surgiu. A história da geometria remonta a milhares de anos, quando as primeiras civilizações começaram a desenvolver formas de medir, calcular e compreender o espaço ao seu redor. No Egito antigo, a geometria surgiu principalmente como uma resposta às necessidades cotidianas, especialmente relacionadas à agricultura e à construção. As cheias anuais do rio Nilo inundavam e redesenhavam o território, apagando as demarcações das terras agrícolas.

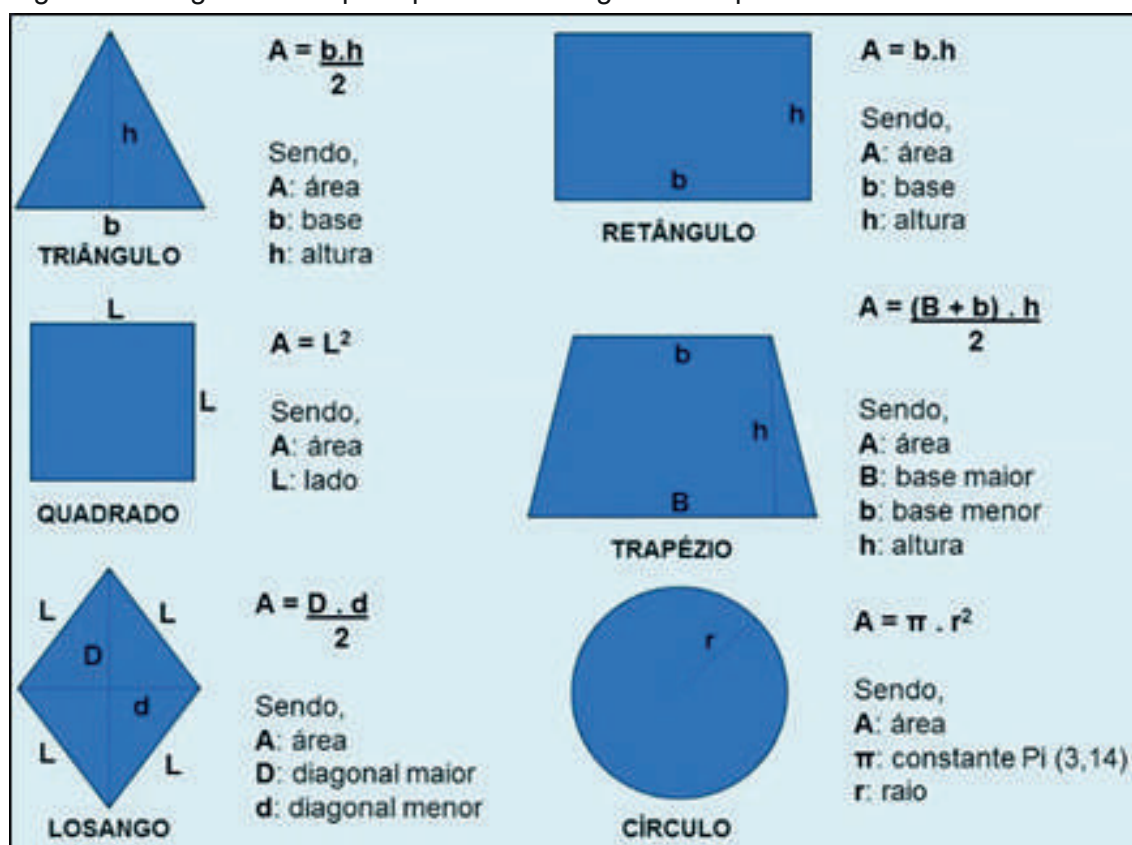
Para reorganizar e redistribuir as propriedades após as cheias, os egípcios desenvolveram métodos geométricos práticos de medição, que permitiram calcular áreas e refazer os limites das terras. A geometria egípcia estava, portanto, profundamente enraizada na observação e no uso de técnicas empíricas, aplicadas diretamente no cotidiano. A construção de pirâmides e templos também foi desenvolvida com conhecimentos geométricos precisos, especialmente no que diz respeito a ângulos e proporções.

Esse uso da geometria focava-se no traçado de formas, no cálculo de comprimentos e na formulação de métodos práticos, sem necessariamente explorar fundamentos teóricos ou abstratos. Esse conhecimento teve raízes práticas e se moldou de acordo com as necessidades específicas de cada cultura.

A geometria plana é o ramo da geometria que estuda as figuras e formas em um plano bidimensional, ou seja, com apenas duas dimensões: largura e altura. Há várias aplicações da geometria plana no cotidiano, como na construção civil, na edificação de casas, prédios, estradas, pontes. Na agricultura ela é utilizada na determinação de áreas e perímetros de plantações, na construção de estufas, canteiros com horta, flores, plantas entre outros cultivos.

Na área de logística, a geometria plana desempenha um papel essencial em várias operações, ajudando a melhorar processos, calcular espaços e melhorar o aproveitamento de recursos. É possível determinar o planejamento de layouts e armazenamento de mercadorias: A geometria plana é usada para planejar o layout de armazéns, estoques e áreas de carga e descarga. Por meio do projeto de áreas e disposições de espaço, é possível organizar o armazenamento de maneira eficiente, maximizando o uso do espaço e facilitando o acesso aos itens.

Figura 31 – Algumas das principais áreas de geometria plana



Fonte: Google Imagens (2024)

Na geometria plana, o perímetro é a medida total do contorno de uma figura bidimensional, ou seja, é a soma de todos os seus lados. O perímetro representa o comprimento da borda da forma, como o contorno de um triângulo, quadrado, retângulo, losango, trapézio e círculo.

Sobre o círculo é importante citar um grande personagem da História da Matemática, que foi o grego Arquimedes de Siracusa. Importante destacar um pouco sobre a vida dele, que é considerado um dos maiores gênios da Antiguidade Clássica.

Arquimedes de Siracusa (287-22 a.C.) foi um matemático, engenheiro, físico, inventor e filósofo grego que foi muito influente sobre a diversidade de trabalhos que ele realizou.

Um dos maiores feitos de Arquimedes foi sua contribuição à geometria, especialmente ao estudo de figuras planas e sólidas. Ele desenvolveu métodos para calcular a área de segmentos de círculos, o volume de esferas e cilindros, além de ter sido o primeiro a formular um princípio fundamental da hidrostática, o Princípio de Arquimedes, que descreve a força de empuxo que um fluido exerce sobre um corpo submerso. Este princípio, descoberto quando ele tentava resolver o problema da pureza da coroa de ouro do rei Hierão II, é a base de muitos conceitos modernos na física e na engenharia (Garbi, 2010).

Figura 32 – Arquimedes de Siracusa



Fonte: Google Imagens (2024)

Para saber mais, escaneie o QR Code com a câmera do seu celular e acesse informações complementares.

Os historiadores romanos registraram várias narrativas pitorescas sobre Arquimedes. Entre eles, destacam-se as investigações das engenhocas criadas por ele para apoiar a defesa de Siracusa durante o cerco imposto pelos romanos sob o comando do general Marcelo. Ele teria desenvolvido catapultas móveis com alcance ajustável, capazes de lançar projetos contra os navios inimigos que se aproximavam demais das muralhas, além de enormes guias que erguiam esses navios diretamente da superfície do mar.

A história de que ele teria usado grandes espelhos para incendiar embarcações inimigas posteriormente é possivelmente verídica. Há também o relato sobre como ele comprovou sua célebre frase “Dê-me uma alavanca e moverei a Terra”, ao deslocar, sozinho e sem esforço, um navio carregado que, de outra forma, precisaria de grande esforço e muitos homens para ser retirado do cais, utilizando apenas um sistema de polias (Eves, 2011).

Arquimedes é considerado um dos primeiros matemáticos a calcular o valor de π pelo método de exaustão. Para isso, Arquimedes inscreveu e circunscreveu polígonos regulares de vários lados ao redor de um círculo. Começando com hexágonos e, progressivamente, aumentando o número de lados dos polígonos (até 96 lados), ele conseguiu aproximar o valor de π dentro de limites superiores e inferiores. Com esse método, Arquimedes chegou à conclusão de que o valor de π estava entre 3,1408 e 3,1428, um valor impressionantemente preciso para a época. Hoje sabe-se que o valor de π é de aproximadamente 3,14 que é obtido pela divisão do comprimento pelo diâmetro de qualquer circunferência.

4.8 René Descartes e o plano cartesiano

Um caminhoneiro estava se direcionando a uma fazenda para realizar a entrega de insumos agrícolas, porém era sua primeira viagem e não conhecia muito bem a rota. Para chegar ao seu destino, ele colocou o endereço no GPS e seguiu o trajeto a partir das instruções. Houve um problema com o equipamento e o motorista pediu ajuda a um pedestre.

- “Amigo, como faço para chegar na Fazenda Feliz?” E o pedestre respondeu:
- “Para chegar nela, siga em frente, vire a segunda à direita e em seguida a primeira à esquerda.”

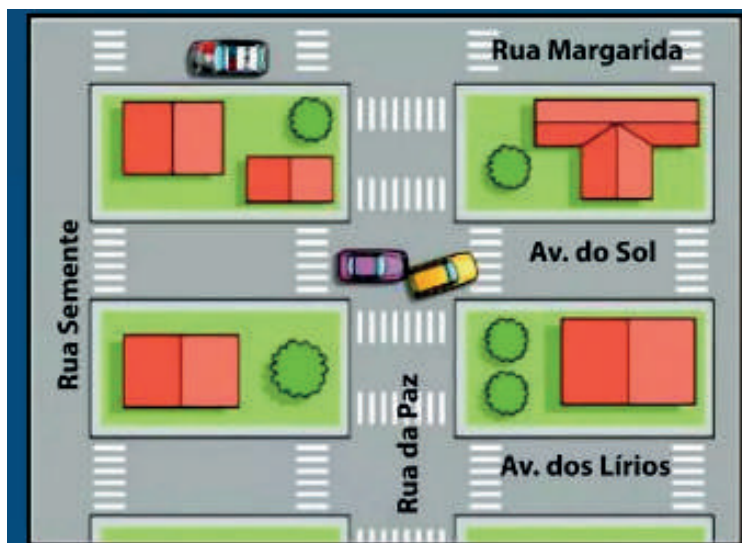
Com essas instruções do pedestre, o condutor conseguiu chegar ao seu destino.

Essa situação é comum no cotidiano das pessoas, que é a necessidade de encontrar locais, procurar objetos, identificar um endereço. No dia a dia do profissional que atua na área de logística é importante entender conceitos de localização, posicionamento que são utilizados para planejar plantas de ruas, bairros, cidades. Vejamos uma situação envolvendo a área de tráfego de um município.

Érica é coordenadora de tráfego e trabalha com a organização do fluxo e do trânsito da cidade. Ele estava analisando o sistema de monitoramento que apontava um acidente leve envolvendo dois veículos e também indicava uma viatura que passava perto, na Rua Margarida. Quais informações ela deve passar para o condutor da viatura para atender essa ocorrência?

Mas como foi possível que isso fosse construído? No que a História da Matemática pode nos ajudar? Para entendermos a construção desses conceitos é importante entendermos o conceito de plano cartesiano. O plano cartesiano ou sistema cartesiano recebe esse nome em homenagem ao matemático e filósofo francês René Descartes, seu criador.

Figura 33 – Esquema de localização das ruas



Fonte: Andrini; Vasconcellos (2015)

René Descartes foi um profundo estudioso da matemática, ciências e filosofia, pois viveu no período da chamada Revolução Científica. Durante sua vida ele questionou tudo o que foi estabelecido até sua época e possibilitou muitas novidades nessas áreas. Descartes via a matemática como um modelo de clareza e certeza. Ele acreditava que os métodos matemáticos poderiam ser aplicados para obter conhecimento seguro em outras áreas, incluindo a filosofia e as ciências.

Considerava a matemática como uma linguagem universal que poderia ser usada para descrever a realidade de maneira precisa. Especificamente em matemática, ele fez importantes contribuições, relacionando a geometria com aritmética e a álgebra, dando bases para a geometria analítica que possibilitou outros avanços em física, engenharia, computação.

Vale ressaltar que Descartes viveu em um período chamado de Renascimento (entre os séculos XIV e XVI), onde ocorreu uma grande transformação para o homem e a sociedade, marcando uma transição do mundo medieval para a modernidade.

Nele houve uma valorização do trabalho humano que passou por significativas transformações, refletindo as mudanças culturais, econômicas e tecnológicas da época. Segundo Della Fonte (2018), no Renascimento, houve uma valorização das chamadas artes mecânicas, como a alfaiataria e a tecelagem, a agricultura, a arquitetura e a alvenaria, a ferraria, a metalurgia, entre outras.

Figura 34 – René Descartes



Fonte: Google Imagens (2024)

Essas atividades eram reconhecidas como essenciais para o desenvolvimento econômico e social. Além disso, foram aprimoradas inovações em ferramentas e máquinas que melhoraram a eficiência do trabalho em várias áreas, incluindo a agricultura e a manufatura, culminando posteriormente na Revolução Industrial (1760).

No cenário econômico as influências renascentistas foram o aumento do comércio internacional e das explorações marítimas que abriram novas oportunidades de trabalho e comércio. Neste período começaram as grandes navegações por vários países europeus como Inglaterra, Holanda, França, Espanha e Portugal, que inclusive em 1500 chega a “Terra de Vera Cruz” (atualmente é a cidade de Porto Seguro, no sul da Bahia), que foi o primeiro nome que os portugueses deram ao Brasil.

No século XV, a atividade matemática concentrou-se especialmente nas cidades italianas e nas cidades de Nuremberg, Viena e Praga, na Europa Central, abrangendo aritmética, álgebra e trigonometria. Dessa maneira, a matemática prosperou principalmente nas cidades mercantis em expansão, impulsionada pelo comércio, navegação, astronomia e agrimensura (Eves, 2011).

Vamos pesquisar

Caro professor, com a intenção de a turma entender um pouco mais sobre a História da Matemática e a importância que o renascimento teve para a matemática, vamos propor uma sugestão de atividade. Os estudantes irão realizar uma pesquisa para explorar o tema e conhecer sobre outros célebres renascentistas que viveram nesse período importante. A seguir, como proposta, temos uma lista com vários deles, dividindo-os em três grupos: os que viveram antes de René Descartes, os que viveram no mesmo tempo que ele e os que viveram depois. Qual foi ou quais foram suas contribuições para o renascimento e para a humanidade?

William Shakespeare

Américo Vespúcio

Michelangelo Buonarroti

Pierre de Fermat

Isaac Newton

Nicolau Copérnico

Galileu Galilei

Evangelista Torricelli

Miguel de Cervantes

Leonado Fibonacci

Girolamo Cardano

Cristóvão Colombo

Leonardo da Vinci

Galileu Galilei

Blaise Pascal

Sugestão para os professores: pesquisar para qual finalidade, para quem e qual era o interesse para que o Renascimento surgisse na história da humanidade e os impactos na História da Matemática.

O plano cartesiano é um sistema de coordenadas composto por duas retas numéricas perpendiculares que se encontram no ponto de origem (0,0). O Eixo horizontal é o eixo das abscissas (eixo x). O Eixo vertical é o eixo das ordenadas (eixo y).

Cada ponto no plano cartesiano é representado por um par ordenado (x, y).

- x (abscissa): Indica a posição horizontal do ponto em relação à origem.
- y (ordenada): Indica a posição vertical do ponto em relação à origem.

Quando x é Zero: Pontos no Eixo y

Quando a coordenada x é zero, o ponto está localizado exatamente no eixo y. Isso significa que a posição horizontal do ponto é zero e ele só se desloca verticalmente. Tais pontos têm a forma (0, y), onde y pode ser qualquer número positivo, negativo ou zero.

Exemplos:

- A (0, 4): O ponto está 4 unidades acima da origem, no eixo y.
- (0, -3): O ponto está 3 unidades abaixo da origem, no eixo y.

Quando y é Zero: Pontos no Eixo x

Quando a coordenada y é zero, o ponto está localizado exatamente no eixo x. Isso significa que a posição vertical do ponto é zero e ele só se desloca horizontalmente. Tais pontos têm a forma (x, 0), onde x pode ser qualquer número positivo, negativo ou zero.

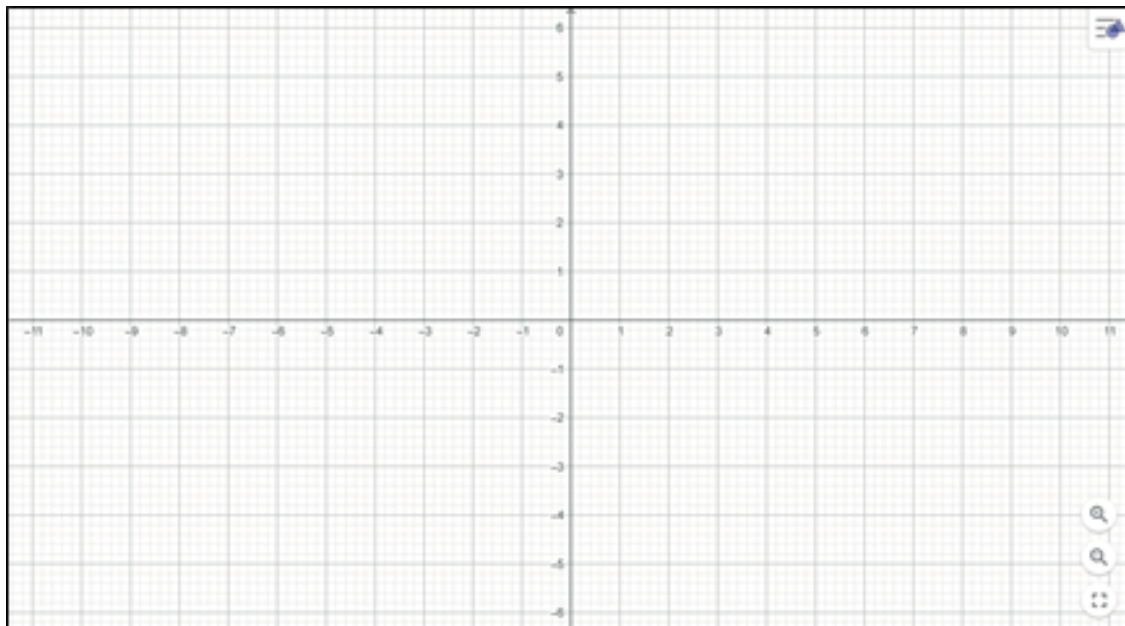
Exemplos:

- (5, 0): O ponto está 5 unidades à direita da origem, no eixo x.
- (-2, 0): O ponto está 2 unidades à esquerda da origem, no eixo x.

O cruzamento dos dois eixos, faz a divisão do plano cartesiano em 4 quadrantes.

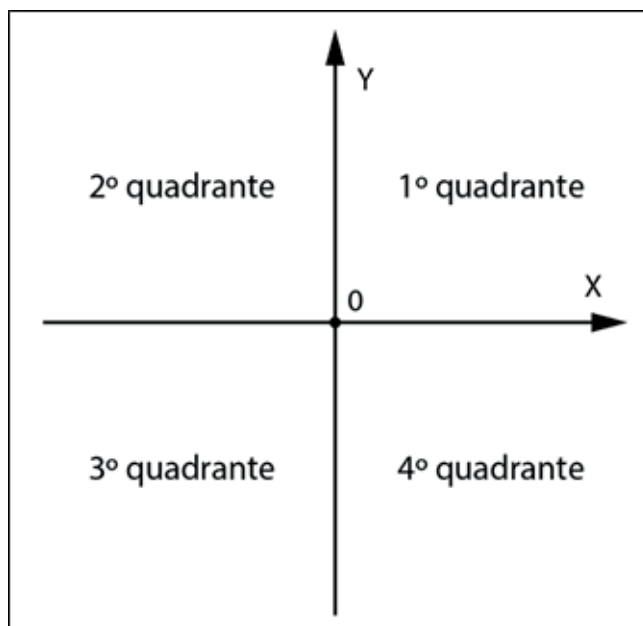
- O 1º quadrante é a região em que os valores de x e de y são positivos.
- O 2º quadrante é a região em que os valores de x são negativos e de y são positivos.
- O 3º quadrante é a região em que os valores de x e de y são negativos.
- O 4º quadrante é a região em que os valores de x são positivos e de y são negativos.

Figura 35 – Representação do plano cartesiano



Fonte: Geogebra (2024)

Figura 36 – Quadrantes do plano cartesiano

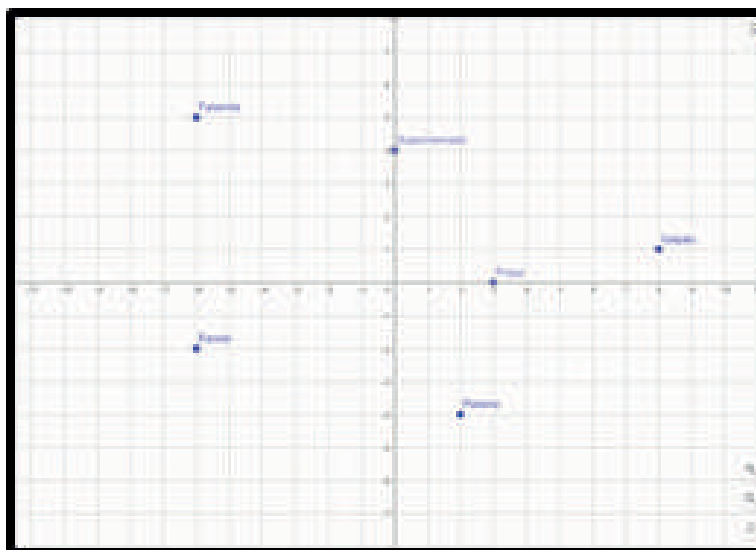


Fonte: Elaborada pelos autores (2025)

Exemplo

Vamos identificar no plano cartesiano as coordenadas dos locais indicados e o respectivo quadrante que pertencem os pontos indicados na imagem a seguir:

Figura 37 – Exemplos no plano cartesiano



Fonte: Geogebra (2024)

Local	Par de Coordenadas (x,y)	Quadrante
Escola		
Fazenda		
Galpão		
Padaria		
Praça		
Supermercado		

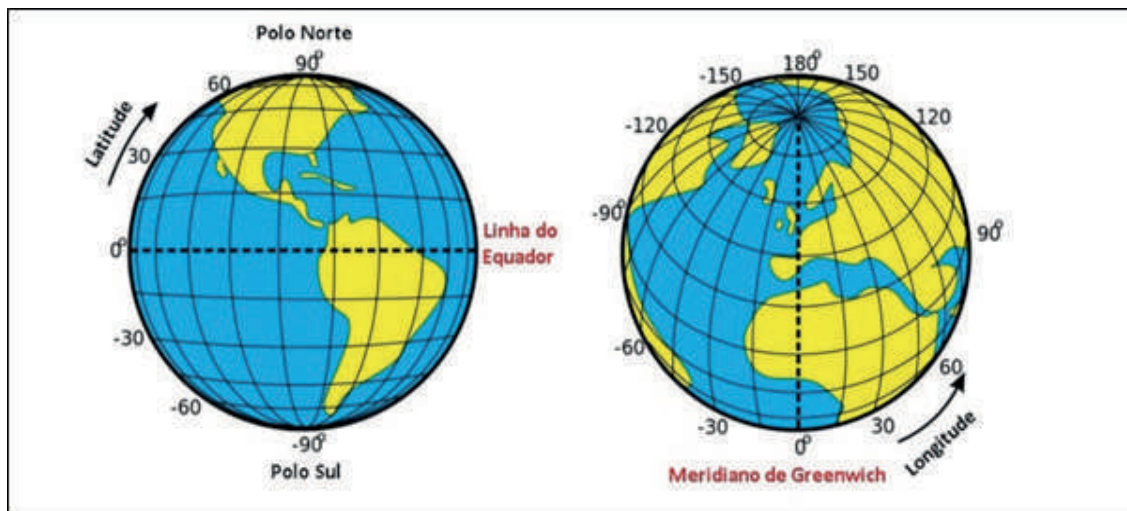
4.9 Latitude, longitude e plano Cartesiano

Por ser um sistema de coordenadas, o plano cartesiano pode ser utilizado para encontrar pontos na superfície do planeta Terra. Comparando com os eixos x e y, as coordenadas geográficas consideram os meridianos e os paralelos.

A latitude é a medida em graus de qualquer ponto da superfície terrestre em relação à Linha do Equador, variando de 0° até 90° para o norte ou para o sul. A longitude, por sua vez, é a medida em graus de qualquer ponto da superfície terrestre em relação ao Meridiano de Greenwich, variando de 0° até 180° para o leste ou para o oeste.

Dessa maneira é possível mapear o planeta e localizar qualquer ponto no planisfério (representação plana do planeta).

Figura 38 – Coordenadas geográficas



Fonte: Google Imagens (2024)

Figura 39 – Planisfério



Fonte: Google Imagens (2024)

Vamos pesquisar

Sugestão para os professores: para saber mais sobre o plano cartesiano.

- Abordagem do conceito de plano cartesiano usando o Google Maps
Disponível no [link:https://www.youtube.com/watch?v=-itM3ARr9jo](https://www.youtube.com/watch?v=-itM3ARr9jo)

- Como o GPS revolucionou a logística e a gestão de frotas?
Disponível no [link: https://www.geotab.com/pt-br/blog/satelites-gps/](https://www.geotab.com/pt-br/blog/satelites-gps/)

5 Aplicação do Conhecimento

A Aplicação do Conhecimento, segundo Delizoicov, Angotti e Pernambuco (2018), consiste na etapa em que os estudantes utilizam os conceitos aprendidos para resolver problemas e práticas relacionadas ao tema treinado. Essa fase visa consolidar o aprendizado ao conectar teoria e prática, incentivando a autonomia e o pensamento crítico.

Destina-se, sobretudo, a abordar sistematicamente o conhecimento que vem sendo incorporado pelo aluno, para analisar e interpretar tanto as situações iniciais que determinaram o seu estudo, como outras situações que não estejam diretamente ligadas ao motivo inicial, mas que são explicadas pelo mesmo conhecimento (Delizoicov; Angotti; Pernambuco, 2018, p. 156).

Nesta seção, foram expostos os trabalhos produzidos pelos alunos, fornecidos como exemplos de como a sistematização do conhecimento pode ocorrer no processo de ensino e aprendizagem. O objetivo é valorizar o protagonismo estudantil, registrando e destacando suas ideias, reflexões e criações. Essa valorização reforça o vínculo entre o estudante e o aprendizado, ao mostrar que suas produções têm importância e impacto no contexto educativo, promovendo maior engajamento e motivação.

Além disso, a inclusão de produções no guia didático pode funcionar como um recurso motivacional para os estudantes, incentivando os colegas a se dedicarem mais às atividades, uma vez que visualizam o potencial de suas próprias contribuições sendo reconhecidas e compartilhadas. Esse processo também promove o aprendizado colaborativo, ao possibilitar que outros estudantes acessem diferentes perspectivas e soluções criadas por seus pares, enriquecendo a construção de conhecimento. Para o professor, a exposição das produções dos alunos representa uma oportunidade de personalizar o material didático, tornando-o mais próximo da realidade da turma. Isso ajuda a contextualizar os conteúdos e a conectar a teoria à prática, alinhando o aprendizado aos interesses e experiências dos estudantes.

Por fim, o uso das produções no guia didático cria um registro coletivo do processo de aprendizagem, evidenciando o desenvolvimento e a criatividade dos alunos. Esse registro pode servir como inspiração para futuras turmas, contribuindo para uma cultura escolar que valoriza a participação ativa dos estudantes e a troca de conhecimentos.

As questões problematizadoras apareceram na Aplicação do Conhecimento. Foram utilizadas algumas dinâmicas para envolver os estudantes, como roda de conversa, debate, cálculos matemáticos e produção de textos.

5.1 Solução das questões problematizadoras 1, 2 e 3

Caro professor, é importante destacar que as questões problematizadoras 1, 2 e 3 estimularam a conversa e o debate, portanto elas foram trabalhadas nas rodas de conversa que foram realizadas com a classe em vários momentos da Intervenção Pedagógica, sendo respondidas pelos estudantes de maneira oral.

Figura 40 – Roda de conversa com a turma



Fonte: Elaborada pelos autores (2025)

Os estudantes participaram da roda de conversa para responder às questões, promovendo uma troca de ideias mais dinâmica e colaborativa. Essa abordagem permitiu que cada aluno compartilhasse suas reflexões e estratégias, enriquecendo o aprendizado coletivo. Além disso, a atividade valorizou a expressão oral e o pensamento crítico, criando um ambiente mais descontraído para o debate. A interação em grupo favoreceu o engajamento e ajudou a esclarecer dúvidas por meio do diálogo. Assim, uma roda de conversa mostrou-se uma ferramenta interessante para consolidar os conteúdos trabalhados nessas questões.

5.2 Solução da questão problematizadora 4

Para a resolução da questão problematizadora 4 deve ser utilizado o modelo de planejamento que foi organizado para a aula 17 (Quadro 1).

Quadro 1 – Planejamento para a aula 17

Planejamento			
Carga horária : 1 hora aula			
Objetivo	Conteúdos	Materiais pedagógicos	Produção
Resolver problema envolvendo área e perímetro do retângulo utilizando o conceito de cúbito egípcio.	Conjunto dos números racionais representados na forma decimal, área e perímetro do retângulo, adição e multiplicação.	Trena, fita métrica, lápis, borracha e caderno.	Resolução do exercício.

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

Procedimentos metodológicos para o professor:

- 1) É importante que os estudantes experimentem e percebam que o valor do cúbito varia de pessoa para pessoa. Embora essa informação pareça simples e óbvia, ela desperta grande curiosidade nos alunos. Por isso, a atividade de medir o cúbito de cada um, utilizando uma trena ou fita métrica, enriquece significativamente a dinâmica, tornando o aprendizado mais contextualizado com a História da Matemática. Pode ser feito individualmente ou em grupos com 3 ou 4 estudantes, a critério do professor.
- 2) Dependendo das dificuldades que os estudantes apresentem é possível que seja necessário fazer uma revisão sobre o conjunto dos números racionais, especialmente os números decimais e as operações de adição e multiplicação com eles.
- 3) Essa questão pode ser resolvida usando a aproximação de 1 cúbito egípcio ser 52,4 cm. Pode ser explicado sobre esse conjunto numérico que foi muito explorado no Egito, especialmente as relações dos egípcios com as frações para dividir terras, heranças e safra de grãos.
- 4) Reapresentar a questão aos estudantes que devem realizar o cálculo no caderno.
- 5) É provável que os estudantes relatem que o cálculo é grande, trabalhoso ou difícil. É uma oportunidade para apresentá-los que a padronização das medidas foi um grande avanço no sentido de reduzir os cálculos e possibilitar outros avanços não só na matemática, mas na engenharia, arquitetura, agrimensura, topografia e cartografia.

Figura 41 – Solução da questão problematizadora 4

Diagrama de um retângulo com dimensões 80 cm e 50 cm.

Cálculo da área:

$$A_{\text{ret}} = 80 \text{ cm} \times 50 \text{ cm} = 4000 \text{ cm}^2$$

Cálculo alternativo (mostrado no texto):

$$A_{\text{ret}} = 52,4 \text{ cm} \times 80 \text{ cm} = 4192 \text{ cm}^2$$

Resultado final da área:

$$\text{Área} = 4192 \cdot 2620 = 10.983.040 \text{ cm}^2$$

Fonte: Elaborada pelos autores (2024)

5.3 Solução da questão problematizadora 5

Para a resolução da questão problematizadora 5 deve ser utilizado o modelo de planejamento que foi organizado para a aula 18 (Quadro 2).

Quadro 2 – Planejamento para a aula 18

Planejamento			
Carga horária : 1 hora aula			
Objetivo	Conteúdos	Materiais pedagógicos	Produção
Resolver problema envolvendo volumes de sólidos de um prisma(paralelepípedo) e de um poliedro (hexaedro)	Volume do paralelepípedo, volume do Hexaedro, potenciação, multiplicação e divisão.	Sólidos geométricos, trena, fita métrica, lápis, borracha e caderno.	Resolução do exercício.

Fonte: Elaborada pelos autores (2024)

Procedimentos metodológicos para o professor:

1) O uso de sólidos geométricos nessa atividade tem como objetivo enriquecer o aprendizado, permitindo que os estudantes manipulem os materiais. No entanto, a ausência desses recursos não impede a realização da atividade. Nesse caso, é possível utilizar moldes com planificações dos sólidos em papel, aproveitando para integrar o estudo de outro conteúdo.

2) Sobre as fórmulas é necessário dialogar com estudantes sobre as incógnitas e seu uso na matemática e aproveitar para apresentar aos alunos que o uso das variáveis não se restringe apenas à álgebra ou a matemática, podendo também ser utilizadas em geometria, física, biologia. Isso contribuiu para os estudantes perceberem que os ramos da matemática têm ligações e que ela converge com outros campos do saber.

3) Reapresentar a questão aos estudantes que devem realizar o cálculo no caderno.

4) Durante o desenvolvimento da questão pelos estudantes é possível abordar, além do conceito de volume, a potenciação e a radiciação e, no caso dos alunos apresentarem alguma dificuldade, fazer um pequeno apanhado desses assuntos, articulando-os à geometria.

Figura 42 – Sólidos geométricos



Fonte: Elaborada pelos autores (2024)

Figura 43 – Solução da questão problematizadora 5

Paralelepípedo:

$$V = a \cdot b \cdot c$$
$$a = 80 \text{ cm}$$
$$b = 40 \text{ cm}$$
$$c = 60 \text{ cm}$$
$$V = 80 \cdot 40 \cdot 60$$
$$V = 3200 \cdot 60$$
$$V = 192.000 \text{ cm}^3$$

hexaedro:

$$V = a^3$$
$$a = 10 \text{ cm}$$
$$V = 10^3$$
$$V = 10 \cdot 10 \cdot 10$$
$$V = 1000 \text{ cm}^3$$

Volume do Paral. = $\frac{192.000}{1000} = 192$

Volume do hex. = $\frac{1000}{1000} = 1$

Resposta: 192 embalagens

Fonte: Elaborada pelos autores (2024)

5.4 Solução da questão problematizadora 6

Para a resolução da questão problematizadora 6 deve ser utilizado o modelo de planejamento que foi organizado para a aula 19 (Quadro 3).

Quadro 3 – Planejamento para a aula 19

Planejamento			
Carga horária : 1 hora aula			
Objetivo	Conteúdos	Materiais pedagógicos	Produção
Resolver problemas que envolvam duas ou mais grandezas diretamente proporcionais.	Grandezas diretamente proporcionais.	Lápis, borracha e caderno.	Resolução do exercício.
Reconhecer a representação algébrica de uma função do primeiro grau e resolver problemas com função desse tipo.	Equação do primeiro grau. Função do primeiro grau.		

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

Procedimentos metodológicos para o professor referentes à letra “a”:

- 1) Como essa questão envolve mais de um conceito matemático é provável que seja necessário fazer uma breve recordação aos estudantes sobre proporcionalidade, especialmente sobre as grandezas diretamente proporcionais que no seu desenvolvimento, dependendo da metodologia adotada, podem recair em uma equação do primeiro grau, logo, também é válido aproveitar a questão para fazer uma revisão sobre o tema.
- 2) Reapresentar a questão aos estudantes que devem realizar o cálculo no caderno.
- 3) Durante o desenvolvimento da questão pelos estudantes é possível que eles desenvolvam o cálculo mas não comparem qual dos dois caminhos é mais sustentável, isto é, qual deles emite a quantidade menor de CO₂. Portanto é importante enfatizar com a classe sobre essa comparação.

Figura 44 – Solução da questão problematizadora 6 - letra "a"

a) Distância = 300 Km

<p>A</p> <p>5 l → 15 Km</p> <p>1,2 Kg CO_2 → 5 l</p>	<p>B</p> <p>9 l → 36 Km</p> <p>1,8 Kg CO_2 → 9 l</p>
--	--

Caminhão A:

l	Km
5	15
x	300

$15 \cdot x = 5 \cdot 300$
 $15x = 1500$
 $x = \frac{1500}{15}$
 $x = 100 \text{ l de óleo em } 300 \text{ Km.}$

Cálculo do CO_2

1,2 Kg CO_2 → 5 l

$$\frac{300 \times 1,2}{5} = \frac{360}{5} = 72 \text{ Kg de } \text{CO}_2$$

Caminhão B:

l	Km
9	36
x	300

$36x = 9 \cdot 300$
 $36x = 2700$
 $x = \frac{2700}{36}$
 $x = 75 \text{ l de óleo em } 300 \text{ Km.}$

Cálculo do CO_2

1,8 Kg CO_2 → 9 l

$$\frac{75 \times 1,8}{9} = \frac{135}{9} = 15 \text{ Kg de } \text{CO}_2$$

Resp: O caminhão A é mais sustentável

Procedimentos metodológicos para o professor referentes à letra “b”:

- 1) A letra “b” depende do cálculo da letra “a”, pois a princípio o estudante não sabe qual dos dois caminhões é o mais sustentável e para resolver a letra “b” é necessário calcular o consumo em litros de óleo diesel.
- 2) Reapresentar a questão aos estudantes que devem realizar o cálculo no caderno.
- 3) Durante o desenvolvimento da questão pelos estudantes é possível abordar o conceito intuitivo de uma função polinomial do primeiro grau, abordando as definições de variáveis, coeficientes e termo constantes.

Figura 45 – Solução da questão problematizadora 6 - letra “b”

b). $C = 6x + 1500$
 $C = 6 \cdot 300 + 1500$
 $C = 600 + 1500$
 $C = 2100$
O custo total do caminhão A é R\$ 2100,00.

Fonte: Elaborada pelos autores (2024)

5.5 Solução da questão problematizadora 7

Para a resolução da questão problematizadora 7 deve ser utilizado o modelo de planejamento que foi organizado para a aula 20 (Quadro 4).

Quadro 4 – Planejamento para a aula 20

Planejamento			
Carga horária : 1 hora aula			
Objetivo	Conteúdos	Materiais pedagógicos	Produção
Resolver problema envolvendo volume de um sólido (cilindro).	Aproximação intuitiva do valor de “pi”. Volume do cilindro e reutilização da água.	Sólido geométrico (cilindro), algum material de formato circular (tampa plástica, latas, potes, embalagens), fita métrica, lápis, borracha e caderno.	Resolução do exercício e roda de conversa.

Fonte: Elaborado pelos aultores (2024)

Procedimentos metodológicos para o professor referentes à letra “a”:

1) Pedir aos estudantes que tragam para aula algum material com formato circular para ser realizada uma dinâmica. Essa dinâmica tem por finalidade explicar a diferença entre círculo e circunferência e o respectivo cálculo que envolve, no caso, a área do círculo, o comprimento da circunferência e também o diâmetro da circunferência. Com os materiais em mãos calcular a medida do diâmetro. Após coletar os dados do comprimento da circunferência e medida do valor do diâmetro, os estudantes devem dividir os números, encontrando uma boa aproximação para o valor de π (3,14).

Com essa questão é possível abordar tanto a geometria plana como a geometria espacial, trazendo a História da Matemática contextualizando a agricultura e a geometria no Egito Antigo, na Mesopotâmia e na Grécia Antiga, trazendo para a aula matemáticos e geômetras notáveis como Arquimedes de Siracusa, Euclides de Alexandria, entre outros.

2) Essa questão aborda o cálculo do volume do cilindro e, se houver um sólido geométrico disponível, a dinâmica da atividade será enriquecida. Caso contrário, é possível construir moldes de papel para apoio. Os próprios estudantes podem fazer e o professor pode aproveitar para trabalhar o conceito de planificação. Ainda assim, a ausência desses materiais não impede a resolução da questão, pois um esquema elaborado no quadro pode ser uma forma de representar para os estudantes.

3) Como essa questão necessita da fórmula do cálculo do volume de um cilindro é uma oportunidade para o professor discutir com os estudantes sobre dois ramos da matemática: álgebra e geometria.

4) Reapresentar a questão aos estudantes que devem realizar o cálculo no caderno.

Sobre a letra “b”, foi realizada uma roda de conversa com os estudantes. Esse debate sobre a reutilização da água, partindo de um problema prático como o do agricultor, é uma oportunidade de trabalhar a formação cidadã dos estudantes. Durante a

Figura 46 – Estudante calculando o valor aproximado de “ π ”



Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

Figura 47 – Solução da questão problematizadora 7 – letra “a”

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
 $\pi = 3,14$
 $r = \frac{4}{2} \quad r = 2 \text{ m}$
 $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
 $37,68 = 3,14 \cdot 2^2 \cdot h$
 $37,68 = 3,14 \cdot 4 \cdot h$
 $37,68 = 12,56 \cdot h$
 $\frac{37,68}{12,56} = h$
 $3 = h$
 $h = 3 \text{ metros}$

discussão eles podem levantar diversos benefícios em reutilizar a água como economia financeira com a redução na conta, preservação de recurso natural no sentido da sustentabilidade, além de evitar o desperdício e servir de exemplo para outras pessoas agirem assim na comunidade. Também é possível que levantem outro ponto importante que é a questão dessa água ser armazenada em um reservatório com tampa, impedindo que mosquito *Aedes Aegypti*, transmissor da dengue, utilize o ambiente para criar e se reproduzir.

Fonte: Elaborada pelos autores (2024)

5.6 Soluções das questões problematizadoras 8 e 9

Para a resolução das questões problematizadoras 8 e 9 deve ser utilizado o modelo de planejamento que foi organizado para a aula 21 (Quadro 5).

Quadro 5 – Planejamento para a aula 21

Planejamento			
Carga horária : 1 hora aula			
Objetivo	Conteúdos	Materiais pedagógicos	Produção
Resolver problema de cálculo de medida de área de figuras planas (retângulo).	Área do retângulo, volume do prisma retangular. Plano cartesiano.	Sólido geométrico (prisma retangular) ou caixa de papelão de mesmo formato, lápis, borracha e caderno.	Resolução do exercício e produção de texto.
Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (Prisma retangular).			
Relacionar localização com coordenadas cartesianas.			

Fonte: Elaborado pelos aultores (2024)

Procedimentos metodológicos para o professor referentes à questão problematizadora 8:

1) O uso do sólido geométrico nessa atividade tem como objetivo enriquecer o aprendizado, permitindo que os estudantes manipulem os materiais. No entanto, a ausência desse recurso não impede a realização da atividade. Nesse caso, é possível utilizar moldes com planificações dos sólidos em papel, aproveitando para integrar o estudo de outro conteúdo.

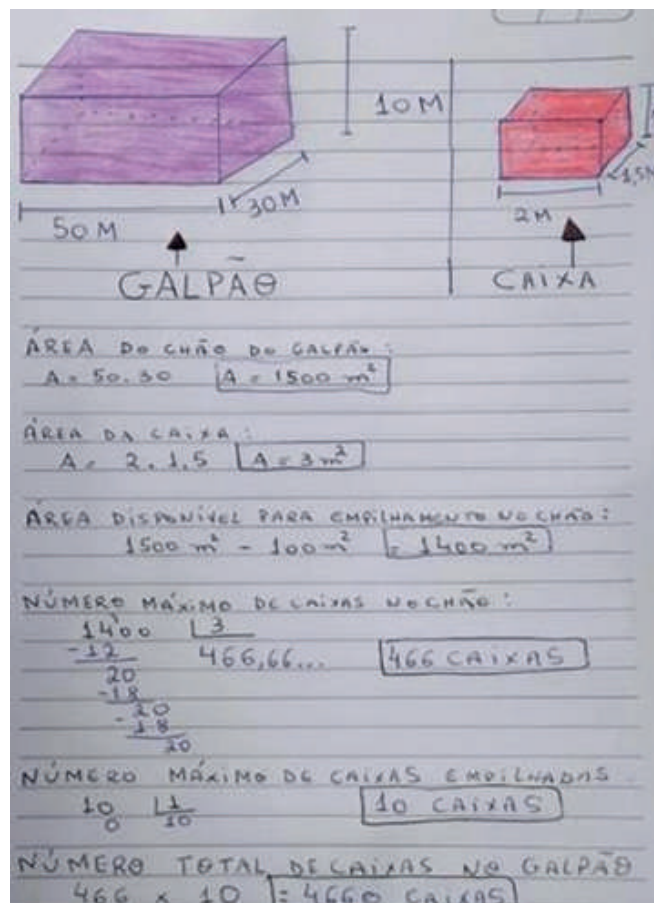
Caso não seja possível providenciar os moldes, solicite que os estudantes tragam caixas de papelão no formato de um prisma retangular que também enriquece a dinâmica e abre possibilidade de trabalhar também a reciclagem. Ainda assim, a ausência desses materiais não impede a resolução da questão, pois um esquema elaborado no quadro pode ser uma forma de representar para os estudantes.

2) Trabalhar essa questão envolvendo a área de um galpão, área da caixa, o conceito de volume e a quantidade de caixas que podem ser armazenadas oferece possibilidades pedagógicas. Primeiramente, conecta o aprendizado matemático a situações reais, tornando o conteúdo mais significativo para os estudantes. Além disso, permite a integração de diferentes conceitos, como geometria e álgebra, estimulando o desenvolvimento matemático dos alunos e a resolução de problemas. Esse tipo de atividade desenvolve habilidades práticas, como o planejamento de espaços e a otimização de recursos, conceitos importantes para o Assistente de Logística.

3) Reapresentar a questão aos estudantes que devem realizar o cálculo no caderno.

4) A questão abre espaço para recordar o conjunto dos números racionais, pois os alunos encontrarão uma dízima periódica no desenvolvimento. É uma oportunidade para discutir com os estudantes sobre a diferença entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais, trazendo o valor de 'pi' novamente à discussão.

Figura 48 – Solução da questão problematizadora 8

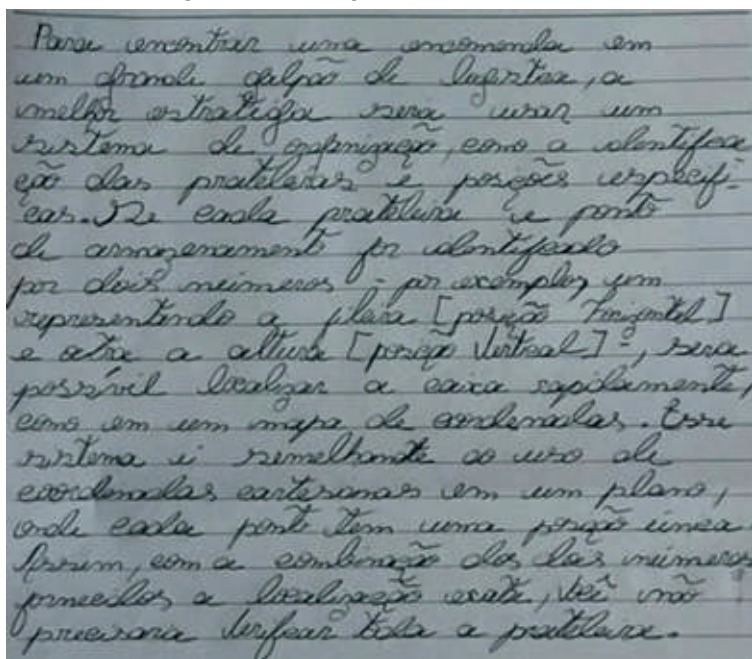


Fonte: Elaborada pelos autores (2024)

Procedimentos metodológicos para o professor referentes à questão problematizadora 9:

1) Essa questão também trabalha conceitos importantes para o profissional da área de logística como posição, armazenamento, identificação de materiais, produtos ou mercadorias e os estudantes podem associar com o plano cartesiano.

Figura 49 – Solução da questão problematizadora 9



Fonte: Elaborada pelos autores (2024)

2) Essa questão também pode ser trabalhada com o uso da malha quadriculada, mas necessita de adaptações como as coordenadas cartesianas.

3) Reapresentar a questão aos estudantes que devem escrever o texto no caderno.

4) Essa questão pode ser explorada de maneira interdisciplinar com o componente curricular língua portuguesa, de modo a contribuir com a produção textual dos alunos.

5.7 Avaliação da Intervenção Pedagógica

O encerramento da Intervenção Pedagógica foi planejado com o objetivo de proporcionar aos alunos uma oportunidade de consolidar os aprendizados de forma reflexiva e prática. Para isso, a produção de um texto foi escolhida como atividade final, realizada com o suporte da professora de língua portuguesa, que auxiliou na organização das ideias, na estruturação do texto e no uso adequado da linguagem.

Essa etapa promoveu uma integração entre as áreas do conhecimento, permitindo que os estudantes utilizassem a História da Matemática para compreender melhor como essa ciência evoluiu, além da articulação com os conteúdos curriculares do curso profissionalizante. Por fim, a produção textual serviu como uma síntese do trabalho desenvolvido, evidenciando os avanços individuais e coletivos, ao mesmo tempo em que reforça a importância da matemática e da língua portuguesa como ferramentas complementares para a formação dos alunos.

Figura 50 – Texto produzido pelos estudantes

A História da matemática

Eu particularmente não gosto de matemática. Quando o professor veio com o assunto da história da matemática eu achei muito estranho, eu nunca tinha ouvido falar nisso. E aquelas aulas em roda achei muito diferente no começo, mas depois que as aulas iam acontecendo ficou bacana demais.

Mas eu gostei muito das aulas e comecei a olhar diferente para a matemática. Primeiramente, quando a gente estudou sobre Egito e Mesopotâmia sobre agricultura eu nunca imaginava que a matemática fosse importante para as plantações antigamente e a dificuldade que era na época para fazer as medições e contas. Gostei muito de fazer a cartolina com verduras que cultivo no quintal como mandioca e abóbora, lembrei do meu ensino primário usando conetinha.

E aqueles sistemas de numeração que usavam muitos desenhos, fico pensando como seria difícil ir no banco ou comprar alguma coisa no supermercado se hoje em dia fossem usados esses números. Não sabia que o Egito era tão importante para a matemática nem que as pirâmides eram túmulos de faraós.

Entendi sobre o início da matéria de Geometria e das dificuldades em demarcar as terras quando o rio enchia.

É depois lá na Grécia que geometria tem -
bém com aqueles matemáticos que muito contri-
buíram.

Agora quando eu vejo uma embalagem em casa
eu procuro olhar com cuidado para saber se é
um cilindro, um prisma ou outra figura geomé-
trica. E são tantas figuras geométricas, que quan-
do o professor levou para sala de aula aquelas
miniaturas em acrílico ficou bem legal, consegui
até ter a pirâmide na minha mão.

Eu entendi que a matemática é uma coisa
só, mesmo que os gregos tenham contribuído e
os egípcios também. Estudei sobre o plano car-
tesiano e o René Descartes e eu tinha estudado
sobre o Renascimento na matéria de história e
nunca tinha visto falar sobre os matemáticos renas-
centistas e como eles foram importantes nesse
movimento. O plano cartesiano achei fácil e
vai me ajudar quando eu for trabalhar com
logística com localizações.

Achei engraçado quando o professor pediu
para trazer objetos circulares. Eu trouxe uma
tampa de um pote e consegui entender sobre
o π , medindo aqueles conceitos de geome-
tria e sobre a história do π que tem in-
úmeros algarismos no cálculo.

Por fim eu continuei com muita afinidade
com a matemática, mas a história da ma-
temática a parte em que fala onde surgiu
os cálculos e qual foi a dificuldade que

originou eu gostei e ficou mais claro para
mim a importância que a matemática tem
na nossa vida e que bom que ela evoluiu.

6 Cronologia da matemática (Mathigon)

Caro professor, a cronologia da matemática, disponível na plataforma Mathigon, é uma ferramenta interativa que apresenta de forma dinâmica e visual os principais eventos, descobertas e personagens que marcaram a História da Matemática ao longo dos séculos.

Por meio de uma linha do tempo detalhada, os professores podem explorar com seus alunos como os conceitos matemáticos desenvolvidos e influenciaram o desenvolvimento da ciência e da tecnologia. Essa abordagem contextualiza o conteúdo, conectando-o com momentos históricos e aplicações práticas. Além disso, a ferramenta permite discussões sobre a contribuição de diferentes culturas para o avanço da matemática, promovendo uma visão global e interdisciplinar do conhecimento. Ideal para enriquecer aulas, a cronologia estimula a curiosidade dos estudantes e favorece o processo de ensino e aprendizagem.

Para saber mais, escaneie o *QR Code* com a câmera do seu celular e acesse essa interessante ferramenta para o professor trabalhar em suas aulas.



7 Considerações finais

Prezado(a) professor(a), este guia didático foi desenvolvido com o intuito de enriquecer as práticas pedagógicas no ensino da matemática, especialmente no contexto da Educação de Jovens e Adultos (EJA) profissionalizante, com foco no curso de logística. A estrutura do material foi concebida com base nos Três Momentos Pedagógicos, proporcionando um percurso de ensino e aprendizagem dinâmica, reflexiva e significativa.

Essa metodologia possibilita uma abordagem que vai além da transmissão de conteúdos, promovendo a problematização, a sistematização do conhecimento e sua aplicação em contexto. A História da Matemática desempenha um papel central neste guia, trazendo um panorama interdisciplinar que conecta saberes matemáticos às realidades históricas, culturais e práticas do mundo do trabalho.

Por meio dela, os estudantes podem compreender que a matemática não é apenas um conjunto de fórmulas e regras, mas uma construção humana que evoluiu ao longo do tempo para atender às necessidades da sociedade. Essa perspectiva histórica é valiosa para promover reflexões sobre a aplicabilidade da matemática no cotidiano, especialmente no setor logístico, e para desmistificar a ideia de que a disciplina é inacessível ou desprovida de significado.

Os professores estão convidados a explorar o guia didático como um recurso que alia teoria e prática, estimulando a interdisciplinaridade como ponto de contato com outras áreas do saber como a história, filosofia, geografia, arte e até língua portuguesa, conforme as próprias contribuições dos estudantes em forma de texto.

Uma sugestão para outros materiais que podem ser desenvolvidos por professores em trabalhos futuros é utilizar outras tendências em Educação Matemática como a etnomatemática, modelagem matemática, resolução de problemas, educação matemática crítica articuladas ou não à História da Matemática.

No caso de os professores optarem por combinar alguma outra tendência em Educação Matemática com a História da Matemática como recurso pedagógico, apesar de exigir tempo, esforço e dedicação, o resultado compensa, trazendo ganhos em significado para os estudantes, contribuindo para o processo de aprendizagem da matemática.

Muito obrigado!

Os autores

Referências

ANDRINI, A; VASCONCELLOS, J. M. **Praticando matemática**. 4. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2015.

ARISTÓTELES. **A Política**. Trad. Roberto Leal Ferreira (Tradução feita a partir da versão francesa de Marcel Prélôt). São Paulo: Martins Fontes, 2006.

BESSA, Bráulio. Eu acredito em Gigantes. **YouTube**, 27 jul. de 2022. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=7wMOHNHRF-o>. Acesso em: 15 nov. 2024.

CREASE, R. P. **A medida do mundo**. Trad. George Schlesinger. Rio de Janeiro: Ed. Zaha, 2013.

DELIZOICOV, D.; ZANETIC, J. A proposta de interdisciplinaridade e o seu Impacto no Ensino Municipal de 1º Grau. In: PONTUSCHKA, N. **Ousadia no diálogo: interdisciplinaridade na escola pública**. 4. ed. São Paulo, SP: Edições Loyola, 1993.

DELIZOICOV, D.; ANGOTTI, J. A.; PERNAMBUCO, M. M. C. A. **Ensino de ciências: fundamentos e métodos**. São Paulo: Cortez, 2018.

DELLA FONTE, S. S. Formação no e para o trabalho. **Educação Profissional e Tecnológica em Revista**, [S. l.], v. 2, n. 2, p. 6-19, 2018. DOI: 10.36524/profept.v2i2.383. Disponível em: <https://ojs.ifes.edu.br/index.php/ept/article/view/383>. Acesso em: 10 set. 2023.

DIAS, José Luciano de Mattos. **Medida, normatização e qualidade**. Rio de Janeiro: Ilustrações, 1998.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática** – Tradução: Hygino H. Domingues. 5 ed. Campinas, SP: Unicamp, 2011.

FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. 65. ed. Rio de Janeiro/São Paulo: Paz e Terra, 2018.

GARBI, G.G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. 5. ed. rev. e ampl. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

MARX, K. **O Capital – Livro I – crítica da economia política: o processo de produção do capital**. Tradução Rubens Enderle. São Paulo: Boitempo, 2013.

PAGLIARINI, C. A.; GARCIA, A. A. O direito fundamental ao trabalho na Constituição Francesa. **R. Themis**, Fortaleza, v. 18, n. 2, p.37-68, jul./dez.2020. Disponível em: <https://revistathemis.tjce.jus.br/THEMIS/article/view/793/pdf>. Acesso em: 20 set.2023.

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012, p. 11.

ROQUE, T; CARVALHO, J. B. P. de. **Tópicos de História da Matemática**. 1. ed. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ROZENBERG I. M. **O Sistema Internacional de Unidades** – Sl. 3 ed. rev. e ampl. São Paulo: Instituto Mauá de Tecnologia, 2006.

SILVA, I. C. da; NASCIMENTO, J. S. do; PEREIRA, A. C. C. Estudando equação do 1o grau por meio do uso de fontes históricas: o papiro de RHIND. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, [S. l.], v. 2, n. 6, p. 37–48, 2018. DOI: 10.30938/bocehm.v2i6.16.

SÓ MATEMÁTICA. Poema: Os egípcios e a Matemática. Disponível em <https://www.somatematica.com.br/poemas/p95.php>. Acesso em: 16 jan. 2024.

VIEGAS, G. História do metro. YouTube, 23 de nov. de 2022. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=1PL6VFNkl64&t=780s>. Acesso em: 6 jan. 2024.

VIEGAS, G. Primeiros registros matemáticos. YouTube, 14 de jul. de 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=q3RmE94-VqM&t=392s>. Acesso em: 20 jan. 2024.

Crédito das Imagens

Figura 4: <https://amigopai.wordpress.com/2015/06/08/economia-no-egito-antigo/>

Figura 9: <https://fazendohistorianova.blogspot.com/2016/02/civilizacao-da-mesopotamia.html>

Figura 14: <https://incaper.es.gov.br/Not%C3%ADcia/acoes-para-ampliar-sustentabilidade-na-cafeicultura-capixaba-devem-alcancar-oito-mil-propriedades-ate-2026>

Figura 21: <https://www.onlineescola.com.br/2024/06/os-legados-da-revolucao-francesa-para.html>

Figura 23: <https://blog.professorferretto.com.br/sistema-metrico-decimal/>

Figura 24: <https://www.todamateria.com.br/pitagoras/>

Figura 25: <https://www.matematica.br/historia/nfigurados.html>

Figura 26: <https://brasilecola.uol.com.br/biografia/socrates-biografia.htm>

Figura 27: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/os-solidos-platao.htm>

Figura 28: <https://www.professoraluizio.com.br/Blog/1294/os-elementos-de-euclides/>

Figura 31: <https://www.todamateria.com.br/areas-de-figuras-planas/>

Figura 32: <https://www.pensador.com/autor/arquimedes/biografia/>

Figura 34: <https://www.todamateria.com.br/descartes/>

Figura 37: <https://www.estadosecapitaisdobrasil.com/coordenadas-geograficas-paralelos-e-meridianos/>

Figura 38: <https://www.sabermais.am.gov.br/odas/planisferio-politico-56369>



ISBN 978-65-5331-004-9