Equilíbrio de Nash

Proposta de aula para o Ensino Médio

Matheus Bett

APRESENTAÇÃO

Caríssimo legente;

O presente documento é resultado da dissertação intitulada “Equilíbrio de Nash no Ensino Médio”, desenvolvido junto ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, no Centro de Ciências Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Catarina, sob orientação do professor Dr. José Rafael Santos Furlanetto.

O objetivo deste material é oferecer a você, docente do Ensino Médio, sugestões de atividades que possam ser trabalhadas em suas aulas, cujo tema é a Teoria dos Jogos. Essas atividades trabalham os conceitos de lógica, operações básicas, conjuntos, operações entre conjuntos, funções e matrizes. Em cada atividade proposta neste caderno haverá uma seção destinada aos exercícios a serem aplicados em sala de aula e uma seção com as resoluções das mesmas.

As práticas existentes neste trabalho são mutáveis, ou seja, podem ser modificadas a todo momento por você. Sinta-se à vontade para utilizá-las do modo que achar mais conveniente, integralmente ou em partes se assim preferir.

Espera-se que esse produto possa contribuir com a sua atividade docente e que desperte em você a usabilidade e as potencialidades que a Teoria dos Jogos pode proporcionar ao ensino de matemática.

Atenciosamente
Matheus Bett

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A palavra jogo corriqueiramente é empregada no cotidiano das pessoas. Alguns exemplos disso são nas brincadeiras de crianças ou adultos, no meio empresarial ou político, produtos lúdicos ou eletrônicos, entre outros. Porém, todas essas situações, a princípio, são bem diferentes, mas empregam essa palavra, pois possuem características em que se assemelham. Essas características são: ter uma quantidade de pessoas que tomam alguma decisão de modo a obter o melhor resultado possível, obedecendo às regras preestabelecidas. Ou seja, pode-se entender que um jogo é uma atividade que tem um grupo de jogadores, um conjunto de estratégias, posições e regras.

Desse modo, desconstruindo o pensamento que relaciona somente os jogos a brincadeiras com finalidades recreativas, pode-se correlacioná-los a situações que ocorrem no cotidiano das pessoas. Atividades como um grupo de amigos escolher entre ir ao cinema ou a uma festa; uma pessoa escolher usar certa roupa para ir a um determinado lugar; ou um indivíduo adotar a ação de flertar uma outra pessoa pode aumentar, ou não, as chances de terem um caso romântico e virarem namorados, ou simplesmente ficarem somente amigos, são considerados jogos também.

Assim, ao realizar pesquisas, encontrou-se que o ente matemático que sistematiza essas situações são a Teoria dos Jogos. Por conta disso, o autor desse caderno produziu uma dissertação intitulada **Equilíbrio de Nash no Ensino Médio**, na qual aborda toda formulação matemática e os principais resultados da Teoria dos Jogos, assim como documentos que indicam a aplicabilidade da Teoria dos Jogos no Ensino Médio.

A Teoria dos Jogos é uma área de estudos na matemática cujo objeto de estudo são situações nas quais uma ou mais pessoas devam tomar alguma decisão, de modo a obter o melhor resultado possível no problema dado. Ou seja, busca-se entender qual é a melhor jogada inicial em um determinado jogo, quais são as ações mais desejáveis a se adotar a uma ação do oponente, a probabilidade de obter êxito na estratégia escolhida, entre outras situações. Portanto, a Teoria dos Jogos pretende encontrar a racionalidade dos agentes envolvidos nos jogos.

A Teoria dos Jogos pode ser dividida em dois ramos: a *Teoria Combinatória dos Jogos* e a *Teoria Econômica dos Jogos*.

A Teoria Combinatória dos Jogos estuda jogos em que os jogadores fazem jogadas alternadas e sabem todas as informações que o jogo tem, como posições, jogadas, peças, e o número de movimentos é finito; não podem ter nenhum dispositivo que ocorra situações aleatórias ou sorte, como dados e sorteio de cartas; existe uma posição na qual não pode ocorrer nenhum movimento, gerando o término do mesmo; e no final do jogo haverá um resultado bem definido: a vitória para um dos participantes ou um empate. Alguns exemplos de jogos combinatórios são: Xadrez, Mancala, Jogo da velha, Jogo de Nim, Damas, Jogo da Vida, entre outros.

Já a Teoria Econômica dos Jogos investiga a inter-relação de um grupo de pessoas racionais que se comportam e tomam alguma ação de modo estratégico. Ou seja, a Teoria

Econômica dos Jogos busca compreender a tomada de decisão, em especial a decisão estratégica, em situações de conflito.

Neste trabalho o foco é a Teoria Econômica dos Jogos, especialmente no Equilíbrio de Nash, e serão apresentadas propostas de atividades a serem trabalhadas no Ensino Médio. Assim, este documento será divido em cinco capítulos.

O primeiro capítulo é essa introdução apresentada. No segundo capítulo será apresentada uma breve história da Teoria dos Jogos e os conceitos importantes que fundamentam essa área da matemática. Já no terceiro capítulo haverá propostas de atividades para o Ensino Médio. No quarto capítulo terá a resolução dos exercícios propostos para o Ensino Médio. Por fim, no quinto capítulo serão apresentadas as considerações finais sobre esse material.

Vale salientar que esse material é construído através das pesquisas apresentadas na dissertação **Equilíbrio de Nash no Ensino Médio**, sendo assim, você leitor, necessitará dominar os conteúdos apresentados na dissertação para ler e entender esse caderno.

2 TEORIA DOS JOGOS

Neste primeiro capítulo será apresentado um pouco da história da Teoria dos Jogos. Em seguida será explanado, de maneira sucinta, os conceitos mais importantes da Teoria Econômica dos Jogos. Também será explanado um pouco sobre os jogos e a educação.

2.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

Dados históricos apontam que primeiros sinais de jogos, mais precisamente jogos de salão, são por volta de 2600 A.C. Em diversas culturas ancestrais essas brincadeiras eram utilizadas para rituais religiosos, adivinhação ou para simulações de batalhas (SANTOS, 2016).

Estudar os jogos, até por volta do século XVII, gerava uma certa desconfiança ou descaso, por conta que muitas vezes, essas brincadeiras envolviam dispositivos aleatórios e imprevisíveis que poderiam favorecer mais um participante do que outro. Essa visão começou a mudar com o surgimento da teoria das probabilidades, e assim podendo resolver vários problemas que envolviam os jogos de acaso, mais precisamente, os jogos de azar.

O primeiro registro de estudo de um jogo de azar foi feito por volta do século XVIII com Pierre Rémond de Montmort e Nicolaus Bernoulli. Eles trocavam correspondência sobre o jogo de cartas chamado Le Her (SARTINI et al., 2004).

Le Her é um jogo de azar e estratégico em um baralho de 52 cartas, com quantidade miníma de participantes sendo dois e a máxima a quantidade de cartas do baralho. Para ilustração, considere apenas dois jogadores, Pierre e Paul. Pierre entrega uma carta do baralho para Paul e depois pega uma carta para si. Paul pode ficar com essa carta ou trocar pela do Pierre (Pierre só pode negar a troca se a sua carta for um rei). Após Paul tomar a sua decisão de ficar ou trocar de carta, Pierre escolhe entre ficar com a carta que possui ou trocá-la por uma do baralho. Se Paul e Pierre tem carta de mesmo valor, Pierre é considerado perdedor. O jogador com a carta de maior valor ganha a partida, caso haja um empate, como Pierre deu as cartas ele ganhará o jogo. Vale destacar que a sequência dos valores das cartas, em ordem crescente é A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, Q, J, K (BELLHOUSE; FILLION, 2015; TODHUNTER, 1985).

Fica claro que as cartas de valores menores que sete terão mais chances de serem trocadas e as de valores maiores que sete terão a possibilidade de permanecer na mão. A dúvida fica justamente para a carta de valor sete, que é a intermediária desse baralho.

Montmort escreveu esse problema para quatro pessoas. A sua pergunta para esse grupo foi: quais são as chances de cada jogador em relação à ordem de suas jogadas? Após várias correspondências trocadas de modo a solucionar o problema, conseguiram chegar em algumas conclusões, sendo-as bem parecidas. Contudo esses resultados continham alguns erros, que foram detectados por James Waldegrave (BELLHOUSE; FILLION, 2015).

Após algumas correspondências entre Waldegrave e Montmort de modo a mostrar o erro, Waldegrave envia uma carta com a sua conclusão sobre o problema. Para ele, para que tanto Paul quanto Pierre possam ganhar no jogo, deve-se escolher uma estratégia que contenha uma certa aleatoriedade, e não uma regra fixa. Assim Pierre deve adotar uma estratégia de manter cartas com valor igual a oito ou superior (e trocar cartas menores) numa probabilidade de $\frac{5}{8}$ e trocar cartas de oito ou abaixo com probabilidade de $\frac{3}{8}$. Já Paul deve utilizar as probabilidades contrárias, ou seja, trocar com probabilidade de $\frac{5}{8}$ e manter com probabilidade de $\frac{3}{8}$ (SANTOS, 2016). Segundo Sartini, et.al (2004), essa solução apresentada por Waldegrave fornece uma resposta através de um equilíbrio de estratégias mistas, porém não se estendeu no estudo para uma teoria mais geral.

O primeiro a desenvolver e expor informações sistemáticas para a Teoria dos Jogos foi Antoine Augustin Cournot. No seu livro *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*, de 1838, há um modelo de mercado no qual duas empresas dividem entre si toda uma produção, ou seja, um duopólio, que leva seu nome: o duopólio de Cournot. A sua proposta consiste em considerar que:

- As empresas oferecem produtos iguais ao mercado, sendo assim, os consumidores não conseguem diferenciar os produtos por sua procedência;
- A única variável de controle é a quantidade produzida por cada empresa;
- Cada empresa decide, de forma independente e simultânea, a quantidade de produtos que produzirá;
- O custo de produção é uma função definida como $C(q_i) = cq_i$, com $i \in \{1,2\}$; donde q_i é a quantidade produzida pela indústria i e a constante c é o custo de produção de uma peça;
- As fábricas podem atender toda demanda que forem receber, ou seja, a sua produção é “infinita”;
- As empresas vendem o produto por um mesmo preço, uma vez que os compradores tendem sempre a comprar o produto mais barato;
- O preço é a função $P = a - bQ$, na qual $Q = q_1 + q_2$, e a é o maior valor que os indivíduos pagariam pela unidade do produto (SANTOS, 2016).

Baseado nesses pontos e sabendo que as empresas pretendem maximar os seus lucros, Cournot indica que as empresas devem decidir que a quantidade de produção de suas fábricas tenham que ser compatíveis entre si, ou seja, ambos devem produzir a mesma quantidade.

Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo ajudou na fundamentação da Teoria dos Jogos. Em 1913, ele demonstrou que em cada rodada do xadrez, ao menos um dos jogadores possui uma estratégia que lhe dará a vitória ou um empate.

Alguns anos depois, Félix Edouard Justin Emile Borel fez uma grande contribuição. O seu interesse era nos jogos que dependiam da habilidade do jogador e da sorte, ou seja, jogos estratégicos. Por conta disso, foi o primeiro a formular o conceito de estratégia, sendo esse utilizado até os dias de hoje.

Mesmo havendo vários autores que estudaram os jogos e ajudaram a formular a Teoria dos Jogos, o seu vínculo de surgimento e criação está ligada a John Von Neumann. Sua primeira divulgação sobre o estudo dos jogos foi através do livro *Mathematische Zur Theorie der Gessellchaftsspiele*, de 1928, que trazia um teorema referente a todos os jogos que possui um ganhador e um perdedor. Esse tipo de jogo é conhecido como jogo de soma zero com dois jogadores. Esse resultado indica que todos os jogos de soma zero com dois jogadores possui uma solução estratégica em estratégias mistas. Através de uma parceria com Oskar Morgenstern saiu o livro *The Theory of Games and Economic Behavior*, de 1944. Nesse manuscrito, além de trazer jogos de soma zero, também indicava a representação dos jogos em sua forma extensiva. Por conta desse livro, a Teoria dos Jogos foi conquistando a economia e a matemática aplicada. Segundo Fiani (2006) muitos estudiosos da Teoria dos Jogos consideram a leitura desse livro como primordial para compreender e seguir no ramo da Teoria dos Jogos.

Os estudos de Von Neumann e Morgenstern se limitam apenas a jogos de soma zero, e isso gera uma restrição séria uma vez que há mais jogos que não são de soma zero. Essa situação começa a mudar por volta de 1950, pois surgem ferramentas que investem nessa limitação. Essas ferramentas proporcionaram a três pessoas ganharem o Prêmio Nobel de Economia de 1994.

Um desses ganhadores foi Jonh C. Harsanyi. A sua contribuição para a teoria está presente em três artigos, intitulados *Games with Incomplete information Played by "Bayesian" Players, Part I, Part II and Part III*. Nesses textos, ele indica que muitas vezes os agentes possuem alguma informação que os privilegia em relação aos demais.

Reinhard Selten foi o outro ganhador. Em suas pesquisas, foi capaz de aprimorar a ideia de equilíbrio, sendo conhecida como Equilíbrio Perfeito em Subjogos. Para que uma estratégia seja Equilíbrio Perfeito em Subjogos ela tem que ser a melhor entre todos os casos de interação entre os jogadores. Através dessa noção fica fácil detectar quais são as chances de ocorrerem ou não os compromissos e ameaças nos jogos. Esse resultado está presente em seu artigo intitulado *Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetrgheit*.

O último ganhador do prêmio foi John Forbes Nash Jr.. Em seus trabalhos foi capaz de produzir grandes contribuições para jogos não-cooperativos. Em uma dessas contribuições ele foi capaz de englobar e expandir os estudos de Von Neumann e Morgenstern, mostrando a existência de um equilíbrio em estratégias mistas, atualmente chamado de Equilíbrio de Nash. Esses resultados estão presentes nos artigos *Equilibrium Points in n-Person Games* e *Non-cooperative Games*. A outra contribuição está presente nos artigos *The Bargaining Problem* e *Two Person Cooperative Games*, na qual indica uma teoria de barganha e prova uma existência de solução para o problema da barganha de Nash. "*Isto revolucionou a Teoria dos Jogos, trazendo a ideia de interações estratégicas considerando-se todas as possíveis jogadas do oponente*" (SOBRINHO, 2013, p.17).

2.2 RESUMO DOS CONCEITOS IMPORTANTES DA TEORIA DOS JOGOS

Nessa seção serão apresentadas de forma sucinta os conceitos mais importantes da Teoria dos Jogos. Para um melhor aprofundamento de cada ente matemático apresentado nesta parte, indica-se a leitura da dissertação **Equilíbrio de Nash no Ensino Médio**.

Lembre-se que jogo é compreendido como sendo as situações que possui interação de um grupo de agentes (ou jogadores) racionais que se comportam estrategicamente, obedecendo certas regras que possam existir. Desse modo, a primeira noção é a de quantidade de jogadores. Essa quantidade se supõem finita e natural, e define-se como sendo n a quantidade de jogadores. Os jogadores são representados por g_i, com $i \in \{1,2,3,...,n\}$. E o conjunto de todos os jogadores presentes no jogo é definido por $G = \{g_1, g_2, g_3, ..., g_n\}$.

Cada jogador escolhe uma estratégia que pode ser aplicada no jogo. As estratégias são representadas por s_{ij}, com $j \in \{1,2,3,...,m\}$ e $m \in \mathbb{N}$. Haverá sempre mais de uma estratégia a ser escolhida pelo jogador, pois caso contrário ficaria nítido qual ação a pessoa iria adotar. O conjunto das estratégias de cada jogador é representando por $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, \ldots, s_{ij}\}$, com $i \in \{1,2,3,...,n\}$.

A escolha das estratégias pode ser feita por meio da escolha sob a certeza ou a incerteza, principalmente se o jogo for de uma pessoa.

Na escolha sob a certeza, o indivíduo possui todas as informações possíveis sobre o jogo, assim como possui preferência em tomar alguma decisão. Já na escolha sob a incerteza, a adoção das estratégias se baseia em tomar atitudes que possam ser:

- Conservadoras: Nesse cenário o jogador escolhe o melhor resultado no pior cenário possível. Esse caso é conhecido como Maximin;

- Otimista: Nessa situação o jogador escolhe o melhor resultado no melhor cenário possível. Esse caso é conhecido como Maximax; ou

- Arrependida: Nesse caso a pessoa escolhe uma ação de modo a minimizar o quão arrependido fica ao descobrir o verdadeiro estado da natureza. Esse caso é conhecido como Minimax Arrependimento.

As possíveis estratégias que podem ser adotadas por todos os agentes, chamado de Espaço de Estratégia, é definido por $S = \prod_{i=1}^{n} S_i = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$, ou seja, é a realização do produto cartesiano entre os conjuntos.

O Espaço de Estratégias pode ser feito por Estratégias Puras ou Estratégias Mistas. As Estratégias Puras são as estratégias que os agentes tomam no jogo. As Estratégias Mistas são as possíveis estratégias que podem ser adotadas no jogo, ou seja, é aplicada uma distribuição de probabilidade.

Para determinar os ganhos dos agentes envolvidos, existe uma função, chamada função Utilidade, que associa o ganho[1] do jogador g_i, chamado de u_i, a cada perfil de estratégia s que pertence a S. Ou seja:

$$\begin{aligned} u_i \quad : \quad & S \rightarrow \mathbb{R} \\ & \mathbf{s} \mapsto u_i(\mathbf{s}). \end{aligned} \tag{1}$$

E, por fim, todos os jogos podem ser escritos na forma tabular. Na Teoria dos Jogos, essa tabela é chamada de matriz de payoff. A tabela 1 indica como ficaria um jogo de duas pessoas, g_1 e g_2, com as suas estratégias, n para o jogador g_1 e m para o jogador g_2 e seus ganhos.

Tabela 1 – Matriz de payoff de um jogo com dois jogadores e com as suas respectivas estratégias e funções utilidades.

			g_2	
		s_{21}	$\cdots$	s_{2m}
	s_{11}	$(u_1(s_{11},s_{21}),u_2(s_{11},s_{21}))$	$\cdots$	$(u_1(s_{11},s_{2m}),u_2(s_{11},s_{2m}))$
	s_{12}	$(u_1(s_{12},s_{21}),u_2(s_{12},s_{21}))$	$\cdots$	$(u_1(s_{12},s_{2m}),u_2(s_{12},s_{2m}))$
g_1	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
	s_{1n}	$(u_1(s_{1n},s_{21}),u_2(s_{1n},s_{21}))$	$\cdots$	$(u_1(s_{1n},s_{2m}),u_2(s_{1n},s_{2m}))$

Fonte: Acervo do autor

Vale salientar que todos os jogos aqui descritos possuem solução, sendo que a mais desejada a se encontrar é a solução estratégica. Essa solução estratégica é conhecida como Equilíbrio de Nash.

Para determinar o Equilíbrio de Nash pode-se utilizar dois processos. O primeiro é o Teorema Minimax de Von Neumman. Para isso, deve-se pegar o mínimo de cada linha e o máximo de cada coluna da tabela de ganhos de um jogador. Determinados esses valores, do resultado do mínimo de cada linha, deve-se escolher o maior valor, e do máximo de cada coluna deve-se adotar o menor valor. Se os valores forem iguais, então esse ponto será o Equilíbrio de Nash.

O segundo processo é o método de Pereira[2]. Para realizar esse processo, deve-se considerar a matriz de payoff, representada pela Tabela 2.

Para encontrar o Equilíbrio de Nash analisa-se os seguintes aspectos:

- se $\alpha \geq \mu$ e $\beta \geq \lambda$ então o ponto (S,E) é um Equilíbrio de Nash em estratégias puras;
- se $\mu \geq \alpha$ e $\sigma \geq \varphi$ então o ponto (I,E) é um Equilíbrio de Nash em estratégias puras;
- se $\gamma \geq \tau$ e $\lambda \geq \beta$ então o ponto (S,D) é um Equilíbrio de Nash em estratégias puras;

[1] Na Teoria dos Jogos usa-se a palavra payoff para designar os ganhos dos jogadores.

[2] O método de Pereira está presente na dissertação Equilíbrio de Nash no Ensino Médio na página 58. Também pode encontrá-lo em Pereira (2014,p. 77).

Tabela 2 – Matriz de payoff de um jogo com dois agentes

		J_2	
		E	D
J_1	S	(α, β)	(γ, λ)
	I	(μ, σ)	(τ, φ)

Fonte: Adaptado de Pereira (2014, p.76)

- se $\tau \geq \gamma$ e $\varphi \geq \sigma$ então o ponto (I, D) é um Equilíbrio de Nash em estratégias puras;
- considerando $p \in [0, 1]$ e $q \in [0, 1]$ então o Equilíbrio de Nash em estratégias mistas é dado por $p = \frac{\varphi - \sigma}{\beta - \lambda + \varphi - \sigma}$ e $q = \frac{\tau - \gamma}{\alpha - \mu + \tau - \gamma}$

A aplicação desses resultados é indicada no Capítulo 4.

2.3 OS JOGOS NO MEIO EDUCACIONAL

Jogar é algo inato nas pessoas, ou seja, desde quando nascemos até os últimos dias de vida estaremos envoltos por brincadeiras e tomadas de decisões. Desse modo, no meio educacional também há jogos, gerando contribuições tanto para a Teoria dos Jogos quanto para a educação.

> Uma contribuição, indireta, é o trabalho The moral judgment of the children publicado em 1932, de Jean Piaget (1896-1980), no qual faz uma comparação da aplicação real das regras pelas pessoas e a consciências das mesmas. O objetivo da comparação é definir a natureza pela qual os indivíduos atuam, em um sentido psicológico, ou sejam tomam decisões ou condutas frente a outros. Nos termos da atual Teoria dos Jogos seria a forma como as pessoas interagem nas situações estratégicas (os jogos) (SANTOS, 2016, p.11).

Segundo Grando (2000), pensar em uma aula em que aplica jogos e a Teoria dos Jogos aprimora e facilita o aprendizado, em especial dos conhecimentos matemáticos dos estudantes, pois serão construídos os conceitos envolvidos e memorizados por eles. Ainda afirma que o seu uso em sala de aula torna o ambiente mais agradável e eficiente do que uma lista de exercícios.

D'Ambrosio (2009) afirma que a matemática importante para a sociedade, em um futuro não tão distante, será Matemática Discreta, Teoria do Caos, Fractais, Fuzzies, **Teoria dos Jogos**, Pesquisa Operacional e Programação Dinâmica. Portanto, inserir tópicos de Teoria dos Jogos já na educação básica não seria utópico, mas desejável, uma vez que iria trazer à tona uma matemática que muito provavelmente o estudante irá encontrar na vida fora da escola.

Pensando em qualidade de ensino, em 2013 foi produzido um documento oficial e nacional que se preocupa com esse tema. Esse documento são as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica. Por conta desse fato esse material considera a educação como sendo um processo de socialização entre as diferentes culturas presentes no ambiente escolar, sendo que se constroem, mantêm e transformam os conhecimentos e os valores de cada indivíduo (BRASIL, 2013).

Ou seja, para que a educação seja de qualidade os estudantes devem ser capazes de interagir e tomar decisões que afetem a sociedade ao seu redor. Com isso, é perceptível a ação presente dos jogos e da Teoria dos Jogos na vida dos estudantes.

Para que os estudantes sejam capazes de tomar as decisões, eles devem adquirir habilidades que possam solucionar problemas. Essas habilidades são adquiridas durante toda a vida escolar, juntamente com as competências definidas pela Base Comum Curricular. Através das dez competências gerais da Base Comum Curricular, os estudantes devem tomar atitudes e valores que possam resolver problemas complexos da vida cotidiana, do exercício da cidadania e do mundo do trabalho. (BRASIL, 2018).

Portanto, para que os estudantes resolvam os problemas que possam aparecer, estes devem tomar uma ação de modo a receber um resultado positivo, negativo ou nulo. Novamente fica perceptível a influência dos jogos e da Teoria dos Jogos no cotidiano dos educandos.

Um modo de resolver esses problemas é "transformá-los" em jogos. Realizar esse processo é uma forma interessante, pois admite que os problemas possam ser vistos de uma maneira mais atrativa, favorecendo a criatividade na hora de produzir as estratégias para solucioná-lo (BRASIL, 1998).

Desse modo, os documentos oficiais indicam a possibilidade da aplicação dos jogos e da Teoria dos Jogos na Educação Básica. Portanto, elaborar e aplicar atividades, em especial no Ensino Médio é concebível, uma vez que utiliza conteúdos abordados nesse nível para solucionar os jogos e reforça aos estudantes escolherem as melhores opções em uma situação de conflito. Assim, no próximo capítulo serão expostas propostas de atividades a serem abordadas no Ensino Médio.

3 ENSINO MÉDIO

Essa é a última etapa do Ensino Básico, por isso os estudantes já possuem uma bagagem matemática grande. Por conta desses fatores, é possível estudar e compreender os conceitos da Teoria dos Jogos como jogadores, estratégias, espaço de estratégias, estratégias puras e mistas, representação tabular (matriz de payoff) e Equilíbrio de Nash.

Para esse nível é proposto uma sequência didática, ou seja, uma aula que possui um encadeamento de passos, etapas e atividades interligadas e de forma sequencial de modo a tornar o ensino-aprendizagem mais eficiente.

Para essa sequência, as habilidades a serem adquiridas pelos estudantes estão presentes na Tabela 3, os conceitos estruturantes da área de Matemática utilizados são Álgebra; Geometria; Probabilidade e Estatística e os objetos de conhecimentos empregados são Funções; Tabelas e Gráficos, Planilhas Eletrônicas e Probabilidade. O tempo estimado para a sua aplicação é de 10 à 11 aulas (aulas de 45 a 50 minutos).

O objetivo geral desse plano de aula é compreender os conceitos que dão base à Teoria dos Jogos, identificando-os nas mais diversas áreas do conhecimento, como economia, política, guerras, e no cotidiano das pessoas.

Os objetivos específicos a serem alcançados pelos estudantes são: compreender os conceitos de jogador(es), estratégias, racionalidade, espaço de estratégias, função utilidade e matriz de payoff; aplicar os conceitos da Teoria dos Jogos em situações-problemas; identificar e solucionar jogos de uma pessoa; identificar jogos de vários jogadores em diversas situações; encontrar o Equilíbrio de Nash nos jogos; solucionar situações que são modeladas como jogos de soma zero com dois jogadores, utilizando como ferramenta o Teorema Minimax de Von Neumman ou o Método de Pereira[1].

A metodologia a ser utilizada nessa sequência é uma aula expositiva, com explicação do professor trazendo exemplos práticos e concretos presentes no dia a dia, e explanativa, através da participação dos estudantes nos tópicos abordados. Os recursos utilizados para a sequência são textos, material impresso ou projetado, lousa e materiais para escrita.

Pensando em uma metodologia e recursos para a educação inclusiva, sugere-se que os textos e atividades elaboradas sejam adaptados de modo a utilizar gravuras e elementos lúdicos que representem o conteúdo trabalhado, respeitando, sempre que possível, a especificidade de cada estudante.

A avaliação pode ser feita através das participações dos alunos nas aulas, execução das atividades propostas pelo ou pela docente realizadas em sala e nas tarefas para casa, assim como uma avaliação realizada em sala. A recuperação dos conteúdos acontecerá sempre que houver a necessidade de melhoria da aprendizagem, podendo ser em forma de recuperação de conteúdo, avaliação substitutiva ofertada aos alunos com dificuldades de aprendizagem, ou na forma de

[1] O método de Pereira está presente na dissertação Equilíbrio de Nash no Ensino Médio na página 59. Também pode encontrá-lo em Pereira (2014, p. 77).

trabalho realizado em sala de aula, servindo como nota complementar.

Tabela 3 – Tabela das habilidades que os estudantes do Ensino Médio adquirem ao estudarem a Teoria dos Jogos

Código	Habilidades
(EM13MAT101)	Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT102)	Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.
(EM13MAT106)	Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
(EM13MAT203)	Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
(EM13MAT301)	Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT302)	Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT311)	Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT401)	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
(EM13MAT501)	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT511)	Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: Adaptado de Brasil(2013, p. 543-546)

3.1 PRIMEIRA ATIVIDADE: ÁREA DE ESTUDOS E CONHECIMENTOS PRÉVIOS SOBRE A TEORIA DOS JOGOS

Nessa primeira atividade, cujo objetivo é compreender a formação e aplicação da Teoria dos Jogos, sugere-se iniciar a aula colocando no quadro as perguntas a seguir, pedindo que os estudantes respondam cada uma:

- O que são jogos para vocês?
- Quem são os jogadores?
- Quantos jogadores podem ter em um jogo? Há uma quantidade miníma ou máxima?
- O que são as estratégias?
- Para escolher uma estratégia é necessário saber a estratégia do outro jogador?
- Seria possível quantificar a preferência de um jogador?
- Quais seriam os possíveis ganhos dos jogadores nos jogos? Esses ganhos podem ser quantificados?
- Existem estratégias em um jogo de modo que todos os jogadores podem obter o melhor ganho dentro de todas as combinações de estratégias possíveis?

Realizar essa atividade fará com que você, educador, diagnostique os conhecimentos prévios que cada estudante possui. Em seguida, para cada item apresente e defina os conceitos importantes da Teoria dos jogos, como o que é jogo, jogadores, estratégias, ganhos e Equilíbrio de Nash. Para isso, utilize como base para explicação o texto apresentado na Seção 2.2 e a dissertação **Equilíbrio de Nash no Ensino Médio** do autor desse caderno.

A resposta de cada um desses itens feitos pelos estudantes, mais a explanação do professor com os conceitos importantes citados anteriormente visa resultar na compreensão dos conceitos fundamentais da Teoria dos Jogos. Para a pergunta *Quem são os jogadores?*, seria interessante, perguntar se os animais poderiam ser considerados jogadores.

Após essa atividade, apresentar uma breve história da Teoria dos Jogos, a sua finalidade, objetivo, algumas áreas do conhecimento que a utilizem e a noção de jogos de soma zero. Uma sugestão de texto ou tópicos a serem abordados em sala de aula é a seguinte:

· A Teoria dos Jogos tem seu início vinculado a John von Neumann, por conta de suas publicações intituladas *Mathematische Zur Theorie der Gesellchaftsspiele* de 1928 e *The Theory of Games and Economic Behavior* de 1944. Este último ele escreveu em parceria com Oskar Morgenstern.

· Porém, há registro de estudo de jogos por volta de 2600 A.C. Como Neumann fundamentou e apresentou maneiras de solucionar jogos, em especial os jogos com dois jogadores em que resulta em um vencedor, então foi dado a ele esse título de “pai da Teoria dos Jogos”.
· John Forbes Nash aprimorou os conhecimentos apresentados por Neumann e Morgenstern de modo a generalizar a busca pela melhor solução, ou seja, Nash trouxe meios e ferramentas que apresenta a melhor estratégia a ser adotada por cada jogador de modo a obter o melhor resultado possível dentro de todos os casos. Esse resultado é chamado de Equilíbrio de Nash.
· Essa teoria foi desenvolvida com a intenção de analisar situações que envolvam interesses conflitantes entre pessoas; empresas; organizações; entre outros; de modo que cada jogador deseja maximizar os seus ganhos ou minimizar suas perdas.
· A aplicação da Teoria dos Jogos pode ser vista nas áreas da economia, da ciência política, da psicologia, da sociologia, das finanças, da guerra e na evolução biológica que possui fatores quantificáveis.
· Os jogos podem ser classificados em jogos de soma zero ou jogos de soma não zero.
· Os jogos de soma zero são jogos que necessariamente precisa haver um vencedor e um perdedor ou empatar. Recebe esse nome, pois ao somar os ganhos dos jogadores em cada situação sempre resultará em zero.
· Os jogos de soma não zero são jogos que podem resultar em ganhos positivos, negativos ou nulo para cada jogador. Recebem esse nome, pois ao somar os ganhos dos jogadores em cada situação não resultará em zero em todos os casos. Nesses jogos podem haver mais de um vencedor ou perdedor.

3.2 SEGUNDA ATIVIDADE: RECONHECER OS JOGOS DE SOMA ZERO E OS JOGOS DE SOMA NÃO ZERO

A segunda atividade pretende distinguir os jogos de soma zero dos que não tem essa caraterística. Através desse exercício, o educando será capaz de perceber que há diversos jogos e identificar quando um jogo é de soma zero. Essa habilidade será importante para o decorrer desta sequência.

Para esse exercício, relembre o que define um jogo ser de soma zero e coloque no quadro, ou entregue em uma folha impressa, a seguinte atividade:

Sabendo que os jogos de soma zero são jogos em que deve existir sempre um vencedor e um perdedor, classifique os jogos abaixo como sendo Jogos de Soma Zero (Z) e jogos de Soma Não Zero (N) .
(___) Jogo de *Cara ou Coroa*: Dois jogadores decidem em escolher Cara ou Coroa de uma moeda. Em seguida lança-se a moeda para o alto de modo a obter um dos dois resultados. Ganha o jogador que escolheu a face voltada para cima da moeda;

(___) Jogo de *Pedra, Papel ou Tesoura*: Dois jogadores optam escolher entre Pedra, Papel ou Tesoura. Em seguida apresentam a estratégia escolhida. Os resultados são: Pedra ganha de Tesoura, Tesoura ganha de Papel, Papel ganha de Pedra e se houver estratégias iguais haverá um empate;
(___) Jogo da *Galinha (covarde)*: Dois participantes posicionam os seus automóveis em uma pista reta, com cada um em lados opostos da pista, ou seja, frente a frente, e devem arrancar ao mesmo tempo. Os jogadores possuem duas opções: desistir, desvia do caminho, ou não desistir, segue em frente. Caso os dois oponentes não desistam, perdem tudo, inclusive a vida. Se apenas um desiste, o que não desiste ganha, e o outro perde. Se ambos desistem, ambos perdem o respeito dos amigos, mas ainda têm seus carros e suas vidas;
(___) Game show *Sete ou Meio*: Duas pessoas se posicionam um de frente ao outro e recebem duas placas que contêm: **7** e **meio**. A dupla tinha que conversar e assim convencer, um ao outro, a escolher a carta **meio**, para que ele escolha a **7**. Ou seja, se um deles escolhesse **7** e o outro **meio**, aquele que escolhesse **7** levava sozinho uma grande quantia de dinheiro conquistado por ambos. Se ambos escolhessem **meio**, cada um ficava com metade da soma e se escolhessem **7** ninguém levava;
(___) Duas pessoas combinam em trocar malas fechadas, com o acordo de que uma delas tenha dinheiro e a outra um objeto que está sendo comprado. Cada jogador pode escolher entre seguir o acordo, colocando o que foi combinado dentro da mala, ou enganar e entregar uma mala vazia.
(___) Duas pessoas jogam um jogo com um baralho de 13 cartas de um mesmo naipe que são embaralhadas. Cada jogador recebe uma carta que só ele vê e uma terceira carta é colocada virada para baixo que ninguém vê o valor. O jogador 1 deve decidir se mantém a sua carta ou a troca com a carta do jogador 2. O jogador 2 deve decidir se mantém a sua carta ou troca com a carta que está virada na mesa. Ganha quem tiver a carta de maior valor.
(___) Dois caçadores se reuniram e combinaram de caçar um cervo. Como esse animal é de grande porte muito rápido e ágil, nenhum dos dois caçadores teria condição de caçar esse animal sozinho, sendo assim, é necessária a ajuda de uma outra pessoa. Para que a caçada tenha maiores chances de sucesso, cada um vai para uma direção da mata, não conseguindo se comunicar entre si. Porém, nessa mata também é possível caçar lebre, porém a carne da lebre é de menor valor, uma vez que a quantidade de carne de uma lebre não chega a metade da de um cervo. Dessa forma cada caçador pode escolher entre caçar o cervo ou caçar lebre.
(___) Duas empresas concorrentes produzem um mesmo produto e têm custos fixos por mês, independente de quanto conseguem vender. Ambas competem pelo mesmo mercado e devem escolher entre um preço alto ou um preço baixo. Se uma empresa vender a preço alto e a outra a preço baixo, a que tem preço baixo irá vender todo o estoque e terá um ganho positivo em relação ao concorrente. Se ambos venderem a preço baixo ou a preço alto, ambos terão que dividir o valor, e desse modo receberão nenhum ganho em cima do oponente.

Após a realização da atividade, socialize os resultados obtidos pelos estudantes e discuta cada item.

Estima-se que o tempo de aplicação da primeira e segunda atividades juntas seja de aproximadamente 45 a 50 minutos, ou seja, uma aula.

3.3 TERCEIRA ATIVIDADE: DETERMINAR OS JOGADORES E ESTRATÉGIAS ATRAVÉS DO JOGO CARA OU COROA

Essa atividade tem como objetivo determinar os conjuntos dos jogadores e das estratégias, assim como distinguir as estratégias puras das mistas. Com isso, o estudante relembra, ou é introduzido, os conceitos de conjuntos e produto cartesiano.

Para esse exercício, relembre os conceitos de estratégias com os estudantes (que foram apresentados na primeira atividade).

Neste exercício, peça para que os estudantes formem duplas, de modo a jogarem entre si o jogo Cara ou Coroa[2]. Para isso, peça para os alunos fazerem alguma marcação em um dos lados de sua borracha para definir esse lado como sendo Cara. Em seguida, entregue uma cópia para cada estudante da seguinte atividade:

Vamos jogar Cara ou Coroa. Para isso, formem duplas e joguem apenas uma rodada. Lembrem-se, para jogar esse jogo um de vocês devem escolher **Cara**, e o outro deve escolher **Coroa**. Em seguida complete a tabela abaixo com os resultados obtidos nessa partida única.

EU ESCOLHI	MEU PARCEIRO ESCOLHEU	RESULTADO (GANHEI OU PERDI)	QUAL FOI O MOTIVO DE ESCOLHER ESSA AÇÃO?

Agora vamos jogar mais cinco partidas desse mesmo jogo. Anote os resultados obtidos na tabela abaixo.

[2] Lembre-se que o jogo Cara ou Coroa é uma brincadeira com dois jogadores que decidem em escolher uma das faces *Cara* ou *Coroa* de uma moeda. Em seguida lança-se a moeda para o alto de modo a obter um dos dois resultados. Ganha o jogador que escolher a face voltada para cima da moeda.

RODADA	EU ESCOLHI	MEU PARCEIRO ESCOLHEU	RESULTADO (GANHEI OU PERDI)
1			
2			
3			
4			
5			

Após anotar os resultados, responda as seguintes perguntas:

1) Você adotou a mesma estratégia para cada rodada?

___

___

___

2) Como você poderia narrar a sua estratégia para vencer o jogo?

___

___

___

3) Qual é o conjunto dos jogadores?

___

___

___

4) Qual é o conjunto de estratégia de cada jogador?

____

____

____

5) Seria possível quantificar os seus ganhos, ou seja, dá para indicar um número para vitória e outro para a derrota? Se sim qual valor você acha melhor para colocar?

____

____

____

Após todos realizarem a atividade e explanarem os resultados, você, docente, oriente e explique a diferença entre as Estratégias Puras e Estratégias Mistas. Lembre-se que as Estratégias Puras são as ações adotadas em cada situação possível e as Estratégias Mistas consistem na alternância das ações através do uso de probabilidade em cada estratégia escolhida.

Também estimule discussões sobre os ganhos (função Utilidade) que esse e outros jogos possuem. Para isso, a atividade a seguir propõem que os estudantes elenquem as suas preferências musicais, atribuindo valores de 1 a 5, sendo 1 “não gosta tanto” e 5 “gosta mais sobre de todas as opções”. Discuta com os estudantes que em determinadas situações geralmente não aparece a preferência de seu maior gosto ao realizar alguma ação, e por isso deve escolher “a menos pior”. Também, pergunte se foi fácil elencar as preferências e se houve alguma dificuldade, questionando as suas escolhas.

Nos parênteses abaixo, elenque de forma numérica as suas preferências de gosto musical, sendo a escala de 1 a 5 na qual 5 é o ritmo musical que mais prefere ouvir e 1 para o que menos prefere.

(___) Rock; (___) Pagode; (___) Sertanejo; (___) Funk; (___) Eletrônica.

Após a realização da atividade, socialize os resultados obtidos pelos estudantes e discuta com eles os resultados.

O tempo estimado para a aplicação desse exercício é de aproximadamente 45 a 50 minutos, ou seja, uma aula.

3.4 QUARTA ATIVIDADE: DETERMINAR OS CONCEITOS DE JOGADOR, ESTRATÉGIA, PERFIL DE ESTRATÉGIAS E OS GANHOS DE UM JOGO

Para essa atividade serão retomados os conceitos de conjuntos, produto cartesiano e tabelas que os estudantes já aprenderam. Caso deseje aplicar para as turmas do primeiro ano, esse tema pode servir como sendo uma introdução ao conteúdo de conjuntos. Sugere-se relembrar com os estudantes os conceitos aprendidos na Atividade 1.

A atividade que se sugere para aplicar e compreender esses conceitos é a seguinte:

(**Batalha dos Sexos**) Suponha que um casal, Cris e Eli, estão decidindo qual será o programa da noite. Ambos valorizam, mais do que qualquer outra coisa, passar juntos a noite. Eles têm a opção ***ir ao jogo de futebol*** ou ***ir a um show de música***. Cris gosta de ir e assistir um jogo de Futebol. Eli gosta de assistir um show de música. Suponha uma escala de 0 à 10 em relação ao gosto de ir ao jogo de futebol ou a ir a um show de música. Se ambos forem ao jogo de futebol, Cris terá um ganho de 10, pois gosta muito de futebol e está em casal no evento, e Eli terá um ganho de 5, pois está em casal mas não gosta muito de futebol. Se ambos forem ao show, Eli terá um ganho de 10, pois gosta muito de show e está com a pessoa amada, e Cris terá um ganho de 5, pois está em casal no evento mas não gosta muito do show. Se Cris for para o jogo de futebol e Eli for para o show ou Eli for para o jogo de futebol e Cris for para o show, ambos terão ganho de 0 pois não gostam de estar sozinhos nos eventos, mas sim juntos. Analisando essa situação, responda as seguintes questões:

a) Qual é o conjunto que representa os jogadores nesse jogo?

____

____

____

b) Qual é o conjunto da estratégia que Cris pode escolher? E de Eli?

____

____

____

c) Qual é o perfil de estratégias desse jogo? Ou seja, qual é o conjunto "combinação" dos conjuntos estratégias dos jogadores?

____

____

____

d) Qual é o conjunto dos ganhos de cada jogador?

____

____

____

e) As Tabelas 9 e 10, representam os ganhos dos jogadores em cada situação. Complete essas tabelas, inserindo os ganhos de cada jogador em cada situação que pode acontecer nesse jogo.

f) A tabela 11 é conhecida como Matriz de payoff. Complete a Tabela 11 para representar esse jogo na forma tabular, considerando α, γ, μ e τ, sendo os ganhos do Jogador 1 e β, λ,σ e φ os ganhos do Jogador 2.

g) Se você fosse escolher um perfil de estratégias, qual você escolheria? Por quê?

____

____

____

h) Você indicaria se existe pelo menos uma solução que seja boa para ambos? Por quê?

____

____

____

Após a realização da atividade, socialize os resultados obtidos pelos estudantes e discuta cada item, em especial no item (h), pois é uma questão para introduzir a noção de Equilíbrio de Nash. A atividade que irá abordar mais a fundo esse tema é próxima atividade. Espera-se que os estudantes cheguem nos perfis (Futebol, Show) e (Show, Futebol) pois esses perfis são Equilíbrios de Nash.

Tabela 9 – Tabela de ganhos de Cris

		Eli	
		Futebol	Show
Cris	Futebol		
	Show		

Fonte: Acervo do Autor

Tabela 10 – Tabela de ganhos de Eli

		Eli	
		Futebol	Show
Cris	Futebol		
	Show		

Fonte: Acervo do Autor

Estima-se que o tempo dessa atividade seja de aproximadamente uma aula, cerca de 45 a 50 minutos.

Tabela 11 – Matriz de payoff do jogo Batalha dos Sexos

		Jogador 2:_____	
		Estratégia 1:_____	Estratégia 2:_____
Jogador 1:_____	Estratégia 1:__________	(α,β) (_____, _____)	(γ,λ) (_____ _____)
	Estratégia 2:__________	(μ,σ) (_____, _____)	(τ,φ) (_____ _____)

Acervo do Autor

3.5 QUINTA ATIVIDADE: DETERMINAR O EQUILÍBRIO DE NASH EM JOGOS DE SOMA NÃO ZERO PELO MÉTODO DE PEREIRA

O objetivo dessa atividade é perceber e aplicar um método de resolução de jogos que facilite a busca da determinação do Equilíbrio de Nash. Para isso, o estudante irá utilizar o método de Pereira[3]. Vale destacar e salientar que esse processo só é válido em jogos de duas pessoas.

Para isso, retorne ao jogo da atividade anterior e traga à tona as respostas que os estudantes elencaram nos itens (g) e (h). Em seguida, traga novamente o conceito do Equilíbrio de Nash que foi apresentado na primeira atividade. Após, coloque no quadro a matriz de payoff desse jogo, que está representada na Tabela 12, e a matriz de payoff genérica, representada pela Tabela 13.

Tabela 12 – Matriz de payoff do jogo Batalha dos sexos

		Eli	
		Futebol	Show
Cris	Futebol	(10, 5)	(0,0)
	Show	(0,0)	(5,10)

Fonte: Acervo do Autor

Tabela 13 – Matriz de payoff genérica

		J_2	
		E	D
J_1	S	(α,β)	(γ,λ)
	I	(μ,σ)	(τ,φ)

Fonte: Acervo do Autor

Em seguida, faça os seguintes questionamentos:

[3] O método de Pereira está presente na dissertação Equilíbrio de Nash no Ensino Médio na página 59. Também pode encontrá-lo em Pereira (2014, p. 77).

1) Compare a tabela de ganhos do jogo anterior com a genérica e responda os seguintes itens:
a) Qual é o valor de $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \sigma, \tau$ e φ?
$\alpha =$ ____________________
$\beta =$ ____________________
$\gamma =$ ____________________
$\lambda =$ ____________________
$\mu =$ ____________________
$\sigma =$ ____________________
$\tau =$ ____________________
$\varphi =$ ____________________
b) Classifique as sentenças a seguir em verdadeiras ou falsas.
(___) $\alpha \geq \mu$ e $\beta \geq \lambda$
(___) $\mu \geq \alpha$ e $\sigma \geq \varphi$
(___) $\gamma \geq \tau$ e $\lambda \geq \beta$
(___) $\tau \geq \gamma$ e $\varphi \geq \sigma$.
c) Alguma dessas quatro sentenças é verdadeira? Se sim, o perfil de estratégias encontrado por esse método é o mesmo discutido no início da aula? Por quê?
____
____
____
d) É possível inferir e concluir que esse processo resulta na obtenção do Equilíbrio de Nash?
____
____
____

Após a realização desse exercício, discuta em sala de aula os resultados obtidos pelos estudantes. Após terem realizado essa conversa, retome os conceitos de estratégias puras e mistas e mostre que o Equilíbrio de Nash encontrado nos exercícios anteriores é uma estratégia pura. Para encontrar o Equilíbrio de Nash em estratégias mistas, realize o seguinte exercício:

Um modo de encontrar o Equilíbrio de Nash em estratégia mistas é determinar as probabilidades que irão ser aplicadas em cada estratégia. A "fórmula" que indica qual é o perfil de estratégias mistas que é Equilíbrio de Nash, é dada por $p = \frac{\varphi-\sigma}{\beta-\lambda+\varphi-\sigma}$ e $q = \frac{\tau-\gamma}{\alpha-\mu+\tau-\gamma}$ donde $p \in [0,1]$ e $q \in [0,1]$. Caso os valores encontrados por p ou q estiverem fora deste intervalo, não "há" um perfil de estratégia mistas que soluciona o problema.

Desta forma, voltando ao problema anterior, qual será o perfil de Estratégias Mistas que soluciona esse problema?

Após a realização da atividade, socialize os resultados obtidos pelos estudantes e discuta cada item.

Afirme para os estudantes que esse processo de determinar o Equilíbrio de Nash em Estratégias Puras e Mistas funciona nos jogos de soma não zero, como é a Batalha dos Sexos, e os de soma zero. É importante salientar esse fato pois senão os estudantes cairiam na falácia de usar esse método nos jogos de soma não zero, uma vez que a próxima atividade irá abordar o Teorema Minimax de Von Neumann que só se aplica nos jogos de soma zero.

Estima-se que o tempo de aplicação dessa atividade é de aproximadamente uma aula, ou seja, 45 a 50 min.

3.6 SEXTA ATIVIDADE: DETERMINAR O EQUILÍBRIO DE NASH EM JOGOS DE SOMA ZERO USANDO O TEOREMA MINIMAX DE VON NEUMANN

O objetivo dessa atividade é compreender de forma prática a aplicabilidade do Teorema Minimax de Von Neumann em jogos de soma zero a fim de determinar o melhor resultado. A realização desse exercício proporciona nos educandos aprimorar a leitura e interpretação de problemas, assim como compreender a utilização da matriz de pagamentos como uma simplificação do problema.

Inicie a aula fazendo os seguintes questionamentos aos estudantes:

- Se pudesse tomar uma decisão em cima dos resultados de um jogo, você preferiria escolher dentro de todos os piores resultados o melhor (Pessimista-Otimista), ou dentro de todos os melhores resultados o pior (Otimista-pessimista)? Por quê?

- Você acha que se em uma situação o melhor resultado dentro de todos os piores for igual ao pior resultado dentro todos os melhores, então essa estratégia será melhor a ser adotada por ambos jogadores? Por quê?

Após responderem e discutirem as respostas, entregue em uma folha, ou escreva no quadro, a seguinte situação:

Sejam duas empresas que estão disputando lugar no mercado, de modo que se uma ganha espaço a outra perde. A primeira é a empresa Von que tem a possibilidade de lançar quatro tipos diferentes de produtos, que são chamadas pelos codinomes A, B, C e D. A segunda empresa é a Neumann e também pode lançar 4 tipos diferentes de produtos, que são conhecidos como X, Y, Z e T. Cada empresa só pode lançar um produto de cada vez. A Tabela 17 abaixo indica a matriz de payoff de cada combinação dos lançamento dos produtos:

Responda as questões a seguir:
1) Qual é a matriz de payoff da empresa Von?
2) Complete a Tabela 18, determinando o valor mínimo de cada linha (pior cenário) e máximo de cada coluna (melhor cenário). Em seguida responda:
a) Entre os valores mínimos de cada linha, qual é o maior valor? __________________ (Este valor é chamado Maxmin).
b) Entre os valores máximos de cada linha, qual é o menor valor ? __________________ (Este valor é chamado Minimax).
c) Qual deve ser a solução ótima neste jogo? __________________
d) O minimax é igual ao maximin? Se sim, esse seria o melhor resultado, ou seja, o Equilíbrio de Nash? _____________

Tabela 17 – Tabela de ganhos das empresas

		Neumann			
		X	Y	Z	T
Von	A	(- 10, 10)	(20,-20)	(-15,15)	(30,-30)
	B	(40,-40)	(30,-30)	(50,-50)	(55,-55)
	C	(35,-35)	(-25,25)	(-20,20)	(40,-40)
	D	(25,-25)	(-15,15)	(35,-35)	(-60,60)

Fonte: Acervo do Autor

Após a realização da atividade, socialize os resultados obtidos pelos estudantes e discuta cada item. Nesse momento, você docente deve apresentar o Teorema Minimax de Von Neumann e explicar que só funciona para os jogos de soma zero.

Estima-se que o tempo de aplicação dessa atividade é de aproximadamente uma aula, ou seja, 45 a 50 min.

Tabela 18 – Tabela dos ganhos da empresa Von - Mínimo de cada linha e máximo de cada coluna

		Neumann				
		X	Y	Z	T	Mínimo linha
Von	A					
	B					
	C					
	D					
	Máximo coluna					

Fonte: Acervo do Autor

3.7 SÉTIMA ATIVIDADE: DETERMINAR O EQUILÍBRIO DE NASH NO JOGO DILEMA DOS PRISIONEIROS

Nesta atividade o objetivo é encontrar o Equilíbrio de Nash no jogo Dilema dos Prisioneiros. Para isso será realizada uma atividade lúdica com esse jogo, ou seja, os estudantes serão os "prisioneiros" e terão que tomar a decisão de "confessar o crime" ou "negar o crime".

Peça para que todos os estudantes saiam da sala e esperem fora. Prepare o ambiente da maneira que achar mais conveniente, e deixe reservado dois lugares de modo a ficarem distantes um do outro. Chame dois estudantes e peça para irem a esses locais reservados que, cada um, conterá um pedaço de papel com a seguinte informação:

> Você e seu parceiro que está nesta sala de aula estão sendo acusados de um mesmo crime. Você pode escolher entre negar o crime ou confessar o crime. Saibam que se ambos negarem, terão uma pena de 1 ano. Se ambos confessarem, então ambos receberão uma pena de 5 anos. Se um negar e outro confessar, então o que confessou será libertado e o que negou ficará preso por 10 anos.
> Qual será a sua escolha?
>
> (___) Confessar (___) Negar
>
> Por que tomou essa decisão?
>
> ____
>
> ____
>
> ____

Após todos participarem dessa dinâmica, mostre os resultados obtidos em cada rodada, indicando a justificativa da escolha. Em seguida, questione se as duplas agiram estrategicamente ou não, e peça para que os estudantes criem a matriz de payoff do jogo e indique qual será o Equilíbrio de Nash em Estratégias Puras e Mistas. Espera-se que os alunos cheguem no perfil (Confessar, Confessar).

Estima-se que o tempo dessa atividade será de duas aulas de cerca de 45 á 50 min.

3.8 OITAVA ATIVIDADE: AVALIAÇÃO

Neste exercício o objetivo é avaliar os estudantes em relação à aprendizagem obtida com as atividades anteriores. Para isso, peça para os estudantes que formem grupos, de até quatro pessoas, e produzam jornais sobre o jogo que cada equipe irá receber.

A sugestão é que essa atividade final seja interdisciplinar, ou seja, possa conversar e se relacionar com as áreas de conhecimentos.

Como a intenção é produzir um jornal, então já estaria se relacionando com a área das Linguagens. Os jogos propostos para os estudantes solucionarem serão situações de guerra, em especial da Segunda Guerra Mundial. Assim, esses jogos estarão interligados com a disciplina de História.

O jornal deverá conter, no mínimo, a descrição da situação (jogo), mapa da localidade onde ocorreu o jogo, a matriz de ganhos e os Equilíbrios de Nash em Estratégias Puras e Mistas.

As propostas de situações são as seguintes:

Batalha do Mar de Bismark[4]

Em dezembro de 1942 o alto comando japonês decidiu transferir reforços da China e do Japão para Lae, em Papua-Nova Guiné. Isso permitiria que os japoneses se recuperassem da derrota de Guadalcanal e se preparassem para a próxima ofensiva aliada. Para isso os japoneses reuniram oito destróieres, oito transportadores de tropas e mais cem aviões de escolta para a operação. A frota japonesa partiu de Rabaul, também em Papua-Nova Guiné, em 28 de fevereiro de 1943, transportando cerca de 6.900 soldados para reforçar suas linhas de defesa em Lae.

O comboio japonês poderia adotar duas rotas: a rota pelo sul, que apresentava tempo bom e boa visibilidade, e a rota pelo norte, que apresentava tempo ruim e baixa visibilidade. As forças aliadas possuíam, aviões de reconhecimento para pesquisar uma rota por vez. Cada pesquisa consumia um dia inteiro de busca. Dessa forma, se as forças aliadas enviassem seus aviões de reconhecimento para a rota certa, poderiam começar o ataque em seguida, mas se mandassem os aviões para a rota errada, perderiam um dia de bombardeio. O tempo para realizar essa operação é de no máximo três dias.

[4] Adaptado de Fiani (2006).

Assim, se os aliados e os japoneses escolhessem a rota sul, os aliados teriam três dias de bombardeios pois foram localizados de imediato e há sempre um bom tempo. Se os aliados mandassem os aviões para o sul mas os japoneses tivessem escolhido a rota norte, os aliados teriam um dia para realizar os bombardeios, pois erraram o local da busca e nesta rota sempre há uma baixa visibilidade.
Agora, se os aliados mandarem seus aviões para a rota norte, independente da escolha dos japoneses, sempre haverá dois dias de bombardeios, pois se mandarem os aviões para o local errado a outra rota terá boa visibilidade, mas se mandarem para o local certo a rota terá uma baixa visibilidade, fazendo assim perder um dia de bombardeio.

Batalha de Fornovo di Taro[5]
Na tarde do dia 27 de abril de 1945, um dia antes da ofensiva a Fornovo di Taro, o major brasileiro Cordeiro Oeste convenceu um vigário que levasse aos alemães a sugestão de se renderem. O vigário caminhou seis quilômetros até o local onde se encontrava os oficiais alemães. Indagado sobre o poderio e a localização das tropas brasileiras, o vigário afirmou que os alemães estavam cercados e deviam se render. Um desses oficiais, pediu ao vigário que obtivesse por escrito condições para a rendição e voltasse com elas.
Desta forma, na manhã do dia seguinte o oficial brasileiro redigiu o ultimato de rendição e o vigário levou esse ultimato aos alemães, retornando com uma mensagem dizendo que a resposta seria dada depois de consulta a seus superiores.
Como combinado entre os aliados, no dia 28 começou o ataque à cidade, porém a noite deste mesmo dia, oficiais alemães cruzaram as linhas brasileiras para negociar os pormenores da rendição.
Desta forma, os oficiais brasileiros poderiam aceitar condições dos oficiais para a rendição ou negar as condições. E por sua vez os oficiais alemães poderiam se render ou não.
Se os brasileiros aceitassem as condições e os alemães se rendessem, os brasileiros teriam um ganho de valor um, pois as condições iriam favorecer os alemães. Caso os alemães não se rendessem, mesmo os brasileiros aceitando as condições, os brasileiros receberiam um valor negativo de uma unidade, pois acreditaram nos alemães e deram a eles benefícios.
Agora se os brasileiros não aceitam condições, em ambas as situações os seus ganhos teriam um valor de dois, pois caso os alemães se rendessem o moral das tropas iria aumentar drasticamente, e se os alemães não se rendessem, as tropas brasileiras iriam destruir toda a resistência, também assim aumentando o moral das tropas.

[5] Produzido pelo Autor.

Dia D[6]

No ano de 1944 os aliados começaram a elaborar um plano de invasão a França, a fim de retirar os alemães desse local. Para isso, os aliados começaram a realizar algumas movimentações na Grã-Bretanha, mais precisamente na região de Kent e Sussex. Essa região da Grã-Bretanha é a mais próxima da França, tendo cerca de quatrocentos quilômetros de distância. A cidade francesa mais perto é Calais.

Sabendo desse fato, o alto comando aliado planejava invadir a França em junho, ou pela cidade de Calais ou na região da Normandia, sendo esta bem distante de Calais. Já os alemães teriam a opção de reforçar as tropas em Calais ou não, uma vez que acreditavam que seria por essa rota a invasão aliada.

Se os aliados atacarem em Calais e os alemães reforçarem a cidade, os aliados teriam um prejuízo no valor de dez, pois a cidade estaria bem preparada e esperando o ataque aliado. Se os alemães não reforçarem a cidade de Calais, o ganho dos aliados seria no valor de cinco, pois como é a cidade mais próxima da Grã-Bretanha então ela está bem fortificada.

Se os aliados atacarem a Normandia, em qualquer decisão que os alemães adotarem, o ganho dos aliados será de 10, pois os alemães acreditam fielmente que os aliados farão uma incursão em Calais, e deste modo não esperam que haja um ataque na Normandia.

Batalha de Avranche [7]

Em agosto de 1944, o exército estadunidense estava transportando cerca de 100 mil soldados por uma passagem ao sul da Normandia, após o dia D. Essas forças se deslocavam nas direções sul, leste e noroeste da França. Porém, a passagem podia ser fechada caso o exército alemão alcançasse a cidade de Avranches, no sul da Normandia, isolando toda a península na qual as tropas aliadas se encontravam instaladas na França.

Desta forma, o oficial alemão sofria com o seguinte dilema: atacar as tropas aliadas para tentar fechar a passagem de suprimentos, isolando as tropas estadunidenses que se moviam no interior da França ou recuar, para fortalecer e consolidar suas defesas. Já o oficial estadunidense tinha duas opções: avançar para atacar o exército alemão em seu flanco ou aguardar com as forças de reserva até que os alemães adotassem escolher atacar ou recuar.

[6] Produzido pelo Autor.
[7] Adaptado de Fiani (2006).

Assim, se os alemães recuassem e os aliados avançassem então os aliados poderiam exercer uma forte pressão sobre a retirada alemã e sofreriam algumas baixas, obtendo assim um ganho no valor de cinco. Porém, se os aliados avançassem e os alemães atacassem a passagem, a linha de suprimentos seria totalmente danificada e muito provavelmente seria fechada a passagem, deixando os aliados em situação muito difícil. Desta forma, os aliados sofreriam um prejuízo de um valor de dez.
Agora se os aliados aguardassem com as forças reservas, haveria a possibilidade de deslocar as tropas para defender a passagem, caso os alemães atacassem, tendo a chance de cercar as forças inimigas e impor-lhes uma severa derrota, sendo assim, ganhando valor de oito. Também os aliados poderiam exercer alguma pressão, ainda que moderada, sobre uma retirada alemã. Neste cenário, receberiam um ganho no valor de sete.

Vale salientar que o professor tem a autonomia de adotar as situações que achar mais conveniente. Sendo assim, pode trazer questões de economia ou outras batalhas das diversas guerras.

O tempo estimado para a realização dessa atividade é de três a quatro aulas de aproximadamente 45 a 50 min.

4 SOLUÇÕES DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Neste capítulo serão apresentados as soluções das atividades propostas.

4.1 SOLUÇÃO DA PRIMEIRA ATIVIDADE

As possíveis respostas para cada item, que o estudante possa responder, podem ser:

- O que são jogos para vocês?
  R: São situações na qual há interações entre entidades de modo a gerar um bônus.
- Quem são os jogadores?
  R: As entidades que participam de maneira racional em cada situação, que podem ser pessoas, empresas, governos, entre outros.
- Quantos jogadores podem ter em um jogo? Há uma quantidade miníma ou máxima?
  R: Pode ter a quantidade que a situação permitir, ou seja, desde uma entidade até várias, podendo ser infinitos jogadores.
- O que são as estratégias?
  R: São as ações que cada agente toma no jogo.
- Para escolher uma estratégia é necessário saber a estratégia do outro jogador?
  R: Não é obrigatório, mas se está buscando o melhor resultado possível é melhor saber ou prever a estratégia do oponente.
- Seria possível quantificar a preferência de um jogador?
  R: Sim é possível, pois cada jogador tem preferência em cima de algo, elencando as que prefere mais das que prefere menos. Dessa forma, é possível associar um número a cada preferência obedecendo as relações de ordem.

4.2 SOLUÇÃO DA SEGUNDA ATIVIDADE

A solução da segunda atividade é a seguinte:

- (**Z**) Jogo de Cara ou Coroa;
- (**Z**) Jogo de Pedra, Papel ou Tesoura;
- (**N**) Jogo da Galinha (covarde) ;
- (**N**) Game show Sete ou Meio;

- (**N**) Duas pessoas combinam em trocar malas fechadas, com o acordo de que uma delas tenha dinheiro e a outra um objeto que está sendo comprado. Cada jogador pode escolher entre seguir o acordo, colocando o que foi combinado dentro da mala, ou enganar e entregar uma mala vazia.
- (**Z**) Duas pessoas jogam um jogo com um baralho de 13 cartas de um mesmo naipe que são embaralhadas. Cada jogador recebe uma carta que só ele vê e uma terceira carta é colocada virada para baixo que ninguém vê o valor. O jogador 1 deve decidir se mantém a sua carta ou a troca com a carta do jogador 2. O jogador 2 deve decidir se mantém a sua carta ou troca com a carta que está virada na mesa. Ganha quem tiver a carta de maior valor.
- (**N**) Dois caçadores se reuniram e combinaram de caçar um cervo. Como esse animal é de grande porte muito rápido e ágil, nenhum dos dois caçadores teria condição de caçar esse animal sozinho, sendo assim, é necessária a ajuda de uma outra pessoa. Para que a caçada tenha maiores chances de sucesso, cada um vai para uma direção da mata, não conseguindo se comunicar entre si. Porém nessa mata também é possível caçar lebre, porém a carne da lebre é de menor valor, uma vez que a quantidade de carne de uma lebre não chega a metade da de um cervo. Dessa forma cada caçador pode escolher entre caçar o cervo ou caçar lebre.
- (**Z**) Duas empresas concorrentes produzem um mesmo produto e têm custos fixos por mês, independente de quanto conseguem vender. Ambas competem pelo mesmo mercado e devem escolher entre um preço alto ou um preço baixo. Se uma empresa vender a preço alto e a outra a preço baixo, a que tem preço baixo irá vender todo o estoque e terá um ganho positivo em relação ao concorrente. Se ambos venderem a preço baixo ou a preço alto, ambos terão que dividir o valor, e desse modo receberão nenhum ganho em cima do oponente.

4.3 SOLUÇÃO DA TERCEIRA ATIVIDADE

As respostas dessa atividade são pessoais, mas algumas possíveis respostas de cada item podem ser:

- Qual foi o motivo que fez você adotar essa escolha?
  R: Tenho 50% de acerto em todas as chances; aleatório; Gosto mais da cara; ...
- 1) Você adotou a mesma estratégia para cada rodada?
  R: Não, pois ficaria mais fácil de identificar minha estratégia; Sim, pois tentei enganar meu oponente para ele achar que eu mudaria em algum momento; ...
- 2) Como você poderia narrar a sua estratégia para vencer o jogo?
  R: Pensei na estratégia que o adversário fosse jogar e usei um número contrário do

que supostamente ele iria jogar; Usei o número contrário do que falei, para enganar o oponente; ...
3) Qual é o conjunto dos jogadores?
R: G = {Eu, Meu parceiro}

- 4) Qual é o conjunto de estratégia de cada jogador?
R: S_{Eu} = {Cara, Coroa} e $S_{\text{Meu parceiro}}$ = {Cara, Coroa}

- 5) Seria possível quantificar os seus ganhos, ou seja, dá para indicar um número para vitória e outro para a derrota? Se sim, qual valor você acha melhor para colocar?
R: Sim, é possível quantificar e ordenar as estratégias em relação às preferências. Um possível valor para representar a vitória seria 1 e a derrota - 1.

4.4 SOLUÇÃO DA QUARTA ATIVIDADE

As respostas das questões dessa atividade são:

- a) Qual é o conjunto que representa os jogadores nesse jogo?
R: $G = \{\text{Cris, Eli}\}$

- b) Qual é o conjunto da estratégia que Cris pode escolher? E de Eli?
R: $S_{\text{Cris}} = \{\text{Futebol, Show}\}$ e $S_{\text{Eli}} = \{\text{Futebol, Show}\}$

- c) Qual é o perfil de estratégias desse jogo? Ou seja, qual é o conjunto "combinação" dos conjuntos estratégias dos jogadores?
R:
$S = S_{\text{Cris}} \times S_{\text{Eli}} = \{\text{(Futebol, Futebol), (Futebol, Show), (Show, Futebol), (Show, Show)}\}$

- d) Qual é o conjunto dos ganhos de cada jogador?
R: $P_{\text{Cris}} = \{0, 5, 10\}$ e $P_{\text{Eli}} = \{0, 5, 10\}$

- e) As Tabelas 9 e 10, representam os ganhos dos jogadores em cada situação. Complete essas tabelas, inserindo os ganhos de cada jogador em cada situação que pode acontecer nesse jogo.
R:

Tabela de ganhos de Cris

		Eli	
		Futebol	Show
Cris	Futebol	10	0
	Show	0	5

Tabela de ganhos de Eli

		Eli: Futebol	Eli: Show
Cris	Futebol	5	0
	Show	0	10

- f) A tabela 11 é conhecida como Matriz de payoff. Complete a Tabela 11 para representar esse jogo na forma tabular, considerando α, γ, μ e τ, sendo os ganhos do Jogador 1 e β, λ,σ e φ os ganhos do Jogador 2.
  R:

		Jogador 2: Eli — Estratégia 1: Futebol	Jogador 2: Eli — Estratégia 2: Show
Jogador 1: Cris	Estratégia 1: Futebol	(α,β) (10, 5)	(γ,λ) (0, 0)
	Estratégia 2: Show	(μ,σ) (0, 0)	(τ,φ) (5, 10)

- g) Se você fosse escolher um perfil de estratégias, qual você escolheria? Por quê?
  R: Escolheria (Futebol, Futebol) ou (Show, Show) pois são os melhores resultados que pode-se obter.

- h) Você indicaria se existe pelo menos uma solução que seja boa para ambos? Por quê?
  R: Sim existem soluções, pois nos perfis (Futebol, Futebol) ou (Show, Show) nenhum dos jogadores se sente motivado a trocar a sua estratégia, uma vez que trocando de estratégia iriam receber ganhos menores.

4.5 SOLUÇÃO DA QUINTA ATIVIDADE

As respostas dessas questões são as seguintes:

- 1) Analisando essa tabela de ganhos, a escolha de lançar os produtos B e Y continua sendo a melhor decisão? Por quê?
  R: Sim, continua a melhor decisão, pois nenhuma empresa tem interesse em lançar outro produto, uma vez que esse resultado dá melhores ganhos a todos.

- 2) a) Qual é o valor de $\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu,\sigma,\tau$ e φ?
  $\alpha = 10$
  $\beta = 5$
  $\gamma = 0$

$\lambda = 0$
$\mu = 0$
$\sigma = 0$
$\tau = 5$
$\varphi = 10$
b) Classifique as sentenças a seguir em verdadeiras ou falsas.
(**V**) $\alpha \geq \mu$ e $\beta \geq \lambda$
(**F**) $\mu \geq \alpha$ e $\sigma \geq \varphi$
(**F**) $\gamma \geq \tau$ e $\lambda \geq \beta$
(**V**) $\tau \geq \gamma$ e $\varphi \geq \sigma$.
c) Alguma dessas quatro sentenças é verdadeira? Se sim, o perfil de estratégias encontrado por esse método é o mesmo discutido no início da aula? Por quê?
R: Sim, tem-se duas sentenças que são verdadeiras e estas resultaram nos perfis (Futebol,Futebol) e (Show,Show) que foram discutidos e apontados como melhores soluções no início da aula.
d) É possível inferir e concluir que esse processo resulta na obtenção do Equilíbrio de Nash?
R: Sim, é possível concluir isso pois sabe-se que os melhores resultados esperados em um jogo são as estratégias que são Equilíbrios de Nash.

- Um modo de encontrar o Equilíbrio de Nash em estratégia mistas é determinar as probabilidades que irão ser aplicadas em cada estratégia. A "fórmula" que indica qual é o perfil de estratégias mistas que é Equilíbrio de Nash, é dada por $p = \frac{\varphi-\sigma}{\beta-\lambda+\varphi-\sigma}$ e $q = \frac{\tau-\gamma}{\alpha-\mu+\tau-\gamma}$ donde $p \in [0,1]$ e $q \in [0,1]$. Caso os valores encontrados por p ou q estiverem fora deste intervalo, não "há" um perfil de estratégia mistas que soluciona o problema.
  Desta forma, voltando ao problema anterior, qual será o perfil de estratégias mistas que soluciona esse problema?
  R:

$$p = \frac{10-0}{5-0+10-0} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$q = \frac{5-0}{10-0+5-0} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Portanto, o perfil $(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ é um Equilíbrio de Nash.

4.6 SOLUÇÃO DA SEXTA ATIVIDADE

As respostas dessas questões são as seguintes:

- Se pudesse tomar uma decisão em cima dos resultados de um jogo, você preferiria escolher dentro de todos os piores resultados o melhor (Pessimista-Otimista), ou dentro de todos os melhores resultados o pior (Otimista-pessimista)? Por quê?
  R: Qualquer um dos dois, pois não teria tanta diferença escolher uma ou outra se for adotar a escolha estratégica.

- Você acha que se em uma situação o melhor resultado dentro de todos os piores for igual ao pior resultado dentro todos os melhores, então essa estratégia será melhor a ser adotada por ambos jogadores? Por quê?
  R: Sim, pois mostra que se adotar uma escolha mais conservadora-otimista ou mais otimista-pessimista não resultará em ganhos melhores para qualquer jogador.

- Responda as questões a seguir:
  1) Qual é a matriz de payoff da empresa Von?
  R:

Tabela dos ganhos da empresa Von

		Neumann			
		X	Y	Z	T
Von	A	- 10	20	-15	30
	B	40	30	50	55
	C	35	-25	-20	40
	D	25	-15	35	-60

2) Complete a Tabela 18, determinando o valor mínimo de cada linha (pior cenário) e máximo de cada coluna (melhor cenário). Em seguida responda:

Tabela dos ganhos da empresa Von - Mínimo de cada linha e máximo de cada coluna

		Neumann				
		X	Y	Z	T	Mínimo linha
Von	A	- 10	20	-15	30	- 15
	B	40	30	50	55	30
	C	35	-25	-20	40	-25
	D	25	-15	35	-60	-60
	Máximo coluna	35	30	50	55	

a) Entre os valores mínimos de cada linha, qual é o maior valor?

R: 30.

b) Entre os valores máximos de cada linha, qual é o menor valor ?

R: 30.

c) Qual deve ser a solução ótima neste jogo?

R: A melhor solução seria a empresa Von lançar o produto B e a empresa Neumann lançar o produto Y

d) O minimax é igual ao maximin? Se sim, esse seria o melhor resultado, ou seja, o Equilíbrio de Nash?

R: Sim, são iguais e seria o melhor resultado, pois dentro de todos os cenários possíveis, esse é o que resulta nos melhores ganhos para ambas as empresas.

4.7 SOLUÇÃO DA SÉTIMA ATIVIDADE

A resposta dessa questão é pessoal de cada estudante. Abaixo segue a matriz de payoff do jogo e o Equilíbrio de Nash.

Tabela 24 – Matriz de payoff do jogo O Dilema dos Prisioneiros.

		Jogador 2	
		Confessar	Negar
Jogador 1	Confessar	$(-5,-5)$	$(0,-10)$
	Negar	$(-10,0)$	$(-1,-1)$

O Equilíbrio de Nash em estratégias puras desse jogo é o perfil $(Confessar, Confessar) = (-5,-5)$, pois $\alpha = \beta = -5 > -10 = \mu = \lambda$.

O Equilíbrio de Nash em estratégias mistas é dado por:

$$p = \frac{-1-0}{-5-(-10)+(-1)-0} = -\frac{1}{4}$$

e

$$q = \frac{-1-0}{-5-(-10)+-1-0} = -\frac{1}{4}.$$

Como os resultados deram valores negativos, então nesse jogo não há uma distribuição de probabilidade sobre as estratégias puras. Sendo assim, o único ponto que é Equilíbrio de Nash é (-5,-5).

4.8 SOLUÇÃO DA OITAVA ATIVIDADE

Nesta seção serão apresentados as matrizes de payoff dos jogos propostos e o Equilíbrio de Nash de cada jogo.

No jogo Batalha do Mar de Bismark, a matriz de payoff é a seguinte:

Tabela 25 – Matriz de payoff do jogo A batalha do Mar de Bismark

		Japão	
		Sul	Norte
EUA	Sul	$(3,-3)$	$(1,-1)$
	Norte	$(2,-2)$	$(2,-2)$

Fonte: Acervo do Autor

O Equilíbrios de Nash em Estratégia Pura do jogo Batalha do Mar de Bismark é dada por (Norte, Norte) = (2,-2), por causa do Minimax de Von Neumann e por $\tau = -2 \geq -1 = \gamma$ e $\varphi = -2 \geq -2 = \sigma$. O Equilíbrio de Nash em Estratégias Mistas é dada por:

$$p = \frac{-2-(-2)}{-3-(-1)+(-2)-(-2)} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$q = \frac{2-1}{3-2+2-1} = \frac{1}{2}.$$

Ou seja o perfil $(0,1;\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ é o Equilíbrio de Nash. Assim, conclui-se que que os japoneses teriam 50% de chance de escolher a rota sul, enquanto os americanos teriam 0% de chance de escolher a rota sul.

Já no jogo Batalha de Fornovo di Taro, tem-se que a matriz de payoff é a seguinte:

Tabela 26 – Matriz de payoff do jogo Batalha de Fornovo di Taro

		Alemães	
		Render	Não se render
Brasileiros	Aceitar condições	$(1,-1)$	$(-1,1)$
	Não aceita condições	$(2,-2)$	$(2,-2)$

Fonte: Acervo do Autor

O Equilíbrio de Nash em estratégias puras para o jogo Batalha de Fornovo di Taro é (Não aceitar condições, Render) = (2,-2). Chega-se neste resultado pelo Teorema Minimax de Von Neumann ou por $\mu = 2 \geq 1 = \alpha$ e $\sigma = -2 \geq -2 = \varphi$. Já o Equilíbrio de Nash deste jogo é dado por

$$p = \frac{-2-(-2)}{-1-1+(-3)-(-2)} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$q = \frac{2-(-1)}{1-2+2-(-1)} = \frac{3}{2}.$$

Como q deu resultado maior que 1, então esse jogo não terá uma distribuição de probabilidades.

Tabela 27 – Matriz de payoff do jogo Dia D

		Alemães	
		Reforçar Calais	Não reforçar Calais
Aliados	Atacar Calais	$(-10,10)$	$(5,-5)$
	Atacar Normandia	$(10,-10)$	$(10,-10)$

No jogo Dia D, a tabela de ganhos é representado pela seguinte matriz de payoff acima.

O Equilíbrio de Nash deste jogo em estratégias puras é *(Atacar Normandia, Reforçar Calais)* = $(10,-10)$. Para encontrar esse resultado usa-se o Teorema minimax de Von Neumann ou $\mu = 10 \geq -10 = \alpha$ e $\sigma = -10 \geq -10 = \varphi$. Já o Equilíbrio de Nash em estratégias mistas é dado por:

$$p = \frac{-10-(-10)}{10-(-5)+(-10)-(-10)} = \frac{0}{15} = 0$$

$$q = \frac{10-5}{-10-10+10-5} = \frac{5}{-15} = -\frac{1}{3}.$$

Portanto, como q deu um valor negativo, então esse jogo não possui uma distribuição de estratégias que resulte no Equilíbrio de Nash.

A matriz de payoff do jogo Batalha de Avranche é a seguinte:

Tabela 28 – Matriz de payoff do jogo Batalha de Avranche

		Alemães	
		Atacar	Recuar
Aliados	Avançar	$(-10,10)$	$(5,-5)$
	Esperar	$(8,-8)$	$(7,-7)$

O Equilíbrio de Nash da Batalha de Avranche em estratégias puras é $(Esperar, Recuar) = (7,-7)$. Para encontrar esse resultado usa-se o Teorema minimax de Von Neumann ou $\tau = 7 \geq 5 = \lambda$ e $\varphi = -7 \geq -8 = \sigma$. Já o Equilíbrio de Nash em estratégias mistas é dado por:

$$p = \frac{-7-(-8)}{10-(-5)+-7-(-8)} = \frac{1}{16}$$

e

$$q = \frac{7-5}{-10-8+7-5} = \frac{2}{-16} = -\frac{1}{8}$$

Como o valor de q deu resultado negativo, então não há uma distribuição de probabilidade sobre as estratégia neste jogo.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse documento se propõem a trazer de forma sucinta conceitos e teoremas da Teoria dos Jogos, assim como indicar ferramentas e meios de inserir esse conteúdo nas aulas do Ensino Médio. Sendo assim espera-se que este material possa servir como motivação e incentivo aos educadores em suas práticas pedagógicas.

As atividades propostas para o Ensino Médio utilizam conhecimentos, habilidades e competências que os estudantes adquirem durante toda a sua vida escolar, em especial os desse nível da Educação Básica. Sendo assim, aplicar esses exercícios pode ser como um meio de iniciar ou reforçar os assuntos de relação de ordem, conjuntos, produto cartesiano, funções, matrizes e probabilidade.

Também, aplicar essas atividades no Ensino Médio introduz outros conhecimentos matemáticos como relação de preferência, estratégias, jogadores e jogos. Portanto, os exercícios propostos para esse nível tem a finalidade de trazer os arcabouços matemáticos presentes na Teoria dos Jogos, de modo que os estudantes adquiram essas ferramentas, para assim poderem resolver situações que podem ser modeladas como jogos.

Vale destacar que aprender a Teoria dos Jogos pode ajudar no desenvolvimento da inteligência emocional e das tomadas de decisões do dia a dia, uma vez que todas as nossas ações geram ganhos ou prejuízos, e dessa forma vivemos dentro de um “jogo”.

REFERÊNCIAS

BELLHOUSE, David.R; FILLION, Nicolas. Le her and other problems in probability discussed by bernoulli, montmort and waldegrave. **Statistical Science**, Institute of Mathematical Statistics, v. 30, n. 1, p. 26–29, 2015. Disponível em: <https://projecteuclid.org/journals/statistical-science/volume-30/issue-1/Le-Her-and-Other-Problems-in-Probability-Discussed-by-Bernoulli/10.1214/14-STS469.full>. Acesso em: 04 jan. 2022.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 10 jan. 2023.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Comum Currícular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 24 set. 2022.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curiculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 24 set. 2022.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:Da teoria à prática**. 17. ed. Campinas: Papirus, 2009.

FIANI, Ronaldo. **Teoria dos Jogos: com aplicações em Economia, Administração e Ciências Sociais**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

GRANDO, Regina Célia. **O Conhecimento Matemático e o uso de jogos na sala de aula**: Doutorado em educação. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação, Campinas, 2000. Descrição física. Disponível em: <https://repositorio.unicamp.br/Busca/Download?codigoArquivo=457042>. Acesso em: 15 jan. 2023.

PEREIRA, Emanoel Fabiano Menezes. **Teoria dos Jogos com Aplicações no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do ABC, Santo André, 2014. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=1446&id2=462>. Acesso em: 10 dez. 2022.

SANTOS, Carlos Souza. **Introdução à Teoria dos Jogos para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado) — Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas.Universidade Federal de Sergipe, Aracaju, 2016. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://ri.ufs.br/bitstream/riufs/8805/2/CLEVERTON_SOUZA_SANTOS.pdf>. Acesso em: 11 jan. 2022.

SARTINI, Brígida Alexandre et al. Uma introdução a teoria dos jogos. **Bienal da SBM**, Anais.Salvador: Universidade Federal da Bahia, v. 2, p. 62, 2004. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~rvicente/IntroTeoriaDosJogos.pdf>. Acesso em: 11 jan. 2022.

SOBRINHO, Carlos Alberto Silva. **Estratégias discretas em teoria dos jogos**. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Matemática e Estatística. Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=522&id2=41482>. Acesso em: 11 jan. 2022.

TODHUNTER, Issac. **A History of the Mathematicaln Theory of Probability From the time of Pascal to that Laplace**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/books/history-of-the-mathematical-theory-of-probability/2760F1E18CD24818F5937EEED9BF8433>. Acesso em: 24 abr. 2023.