ANA CAROLINA VILA DO AMARAL

OS INDO-ARÁBICOS, OS IRRACIONAIS E OS REAIS

Três propostas de atividades para o professor do Ensino Básico

APRESENTAÇÃO

Caro leitor,

Este Produto Educacional é parte da dissertação de mestrado intitulada "Uma investigação histórica acerca de três grandes marcos no desenvolvimento da matemática", desenvolvida no Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado de Santa Catarina, sob a orientação da Profª Drª Elisandra Bar de Figueiredo.

O objetivo desse material é oferecer ao professor do Ensino Básico algumas sugestões de atividades em três diferentes contextos: o sistema de numeração indo-arábico, a descoberta dos irracionais e a completude dos reais.

O produto foi dividido em 3 propostas e cada uma delas aborda um dos três contextos citados. Assim sendo, a Proposta 1 apresenta sugestões de atividades a respeito do sistema de numeração indo-arábico, a Proposta 2 trata sobre a descoberta dos irracionais e a Proposta 3 trabalha com a questão da completude dos números reais.

Cada uma das três propostas possui contexto histórico, teoria, exemplos e atividades para os alunos. Além disso, ao final de cada uma delas, há uma seção destinada ao professor com sugestões de respostas aos exercícios propostos. Ao final, estão dispostas as referências utilizadas para a construção das três propostas.

Sinta-se à vontade para utilizar o material disposto da forma que achar conveniente, tanto integralmente quanto em partes, se assim preferir!

Ana Carolina Vila do Amaral

SUMÁRIO

PROPOSTA 1

O SISTEMA DE NUMERAÇÃO INDO-ARÁBICO

O SISTEMA DE NUMERAÇÃO INDO-ARÁBICO

"O homem desde o princípio, mesmo que de forma intuitiva, já se preocupava em organizar e quantificar objetos e animais campestres para sua subsistência".

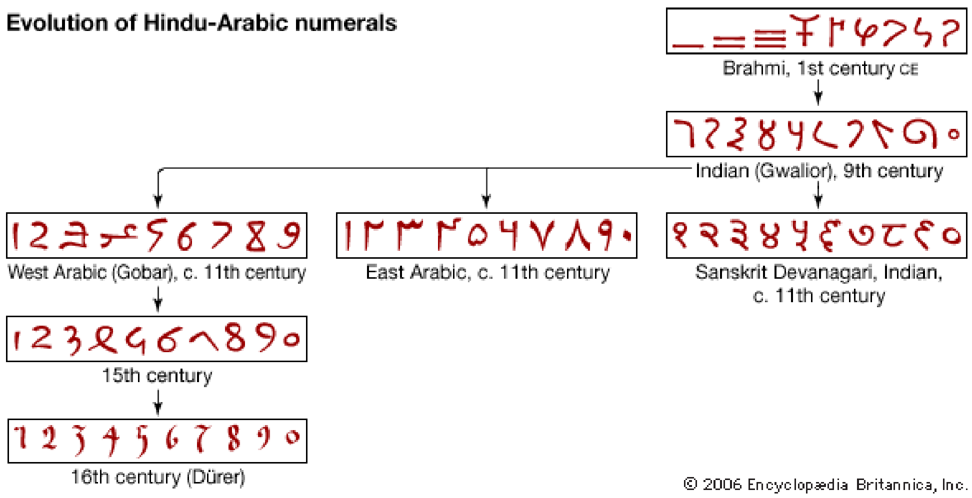
(RUIS, 2014, p. 19)

O sistema indo-arábico, composto pelos dez algarismos

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9

teve sua forma modificada ao longo do tempo, até culminar no modelo que utilizamos atualmente, conforme mostrado na Figura 1.

Figura 1 - Evolução dos algarismos indo-arábicos



Extraído de: Rodrigues (2013, p. 34)

Além dos indo-arábicos, no decorrer da história, outros algarismos foram criados a fim de suprir a necessidade de contagem, como os hieróglifos egípcios (Quadro 1) e os gregos alfabéticos (Quadro 2).

O sistema de numeração egípcia surgiu por volta de 3000 a.C. Utilizavam elementos da fauna e da flora nilótica, provando que a escrita foi desenvolvida nas margens do Nilo. Eles reproduziam seus algarismos esculpindo-os com cinzel e martelo em monumentos de pedra ou com caniço, molhado em colorante, em rochas, cerâmicas ou folhas de papiro.

(IFRAH, 1997)

Quadro 1 - Algarismos hieróglifos egípcios

Símbolo egípcio	Número decimal
	1
	10
	100
	1.000
	10.000
	100.000
	1.000.000

Adaptado de: Ifrah (1997, p. 342)

A numeração grega surgiu por volta de 3300 a.C. Utilizava vinte e sete sinais, dentre os quais estavam as vinte e quatro letras do alfabeto grego e os três sinais alfabéticos (*digama, kopa* e *san*), e os dividia em três classes numéricas (unidades, dezenas e centenas).

(IFRAH, 1997)

Quadro 2 - Algarismos gregos alfabéticos

UNIDADES				DEZENAS				CENTENAS			
Α	α	alfa	1	Ι	ι	iota	10	Ρ	ρ	rô	100
Β	β	beta	2	Κ	κ	kapa	20	Σ	σ	sigma	200
Γ	γ	gama	3	Λ	λ	lambda	30	Τ	τ	tau	300
Δ	δ	delta	4	Μ	μ	um	40	Υ	υ	upsilon	400
Ε	ϵ	épsilon	5	Ν	ν	nu	50	Φ	ϕ	phi	500
Ϝ	ϝ	digama*	6	Ξ	ξ	ksi	60	Χ	χ	khi	600
Ζ	ζ	zeta	7	Ο	o	ômicron	70	Ψ	ψ	psi	700
Η	η	eta	8	Π	π	pi	80	Ω	ω	ômega	800
Θ	θ	teta	9	Ϙ	ϙ	kopa	90	Ϡ	ϡ	san	900

* Nos manuscritos bizantinos, esse algarismo é indicado por ς, condensado de *sigma* e de *tau*. Os gregos de hoje, que conservaram o alfabeto cifrado para alguns usos particulares (um pouco como nós para os algarismos romanos) chamam-no *stigma*.

Adaptado de: Ifrah (1997, p. 467)

1. Imagine que você viva em uma grande fazenda e precise registrar a quantidade de ovelhas que possui. Determine o número de ovelhas presentes na sua fazenda e escreva este número utilizando algarismos:

a) indo-arábicos

____

b) hieroglíficos gregos

____

c) gregos alfabéticos

____

2. O que ocorre em cada caso se a posição dos algarismos for alterada?

a) indo-arábicos

____

____

____

b) hieroglíficos gregos

____

____

____

c) gregos alfabéticos

____

____

____

3. Entre os três sistemas de algarismos apresentados, qual deles é o mais simples de ser utilizado e por quê?

____

____

____

____

A ideia de sistema posicional contribuiu para que o sistema indo-arábico, utilizado atualmente, tenha se popularizado. Logo, a partir dos dez algarismos existentes, é possível representar toda a numeração escrita, simplesmente trocando-os de posição.

"por meio de um número muito reduzido de algarismos de base, ela permite [...] uma representação simples e perfeitamente racional de qualquer número, por maior que seja".

(IFRAH, 1997, p. 676)

A adoção do sistema decimal posicional auxiliou não só na representação dos números escritos, como também na aritmética, bastando apenas aprender as **tabelas de adição e multiplicação** de dois números quaisquer em uma determinada base.

A base decimal se sobrepõe às outras pois a sua quantidade de algarismos é mais fácil de ser decorada, além de evitar consideráveis repetições de símbolos.

(IFRAH, 1997)

"[...] qualquer inteiro *b* maior do que 1 pode servir de base de um sistema posicional [...]. Em um tal sistema necessitaremos de *b* símbolos ou algarismos distintos, cujos valores principais são 0, 1, 2, ..., *b* – 1. Mover um algarismo uma casa para a esquerda significará multiplicar seu valor por *b*, e movê-lo uma casa para a direita [...] significará dividir seu valor por *b*".

(AABOE, 2013, p. 15-16)

Sabe-se que, no sistema posicional utilizado atualmente, adotamos a base decimal, ou seja, b = 10. Na base 2 temos que b = 2 e, portanto, esta base necessita de 2 símbolos distintos: 0 e 1. Este sistema posicional é chamado binário e possui ampla utilização na linguagem computacional, pois a máquina compreende apenas os valores 0 (desligado) e 1 (ligado).

A base binária utiliza apenas os algarismos 0 e 1, e a base ternária, por sua vez, utiliza os algarismos 0, 1 e 2. A sequência dos números nestas bases é da forma:

Decimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Binária	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001
Ternária	0	1	2	10	11	12	20	21	22	100

Você já aprendeu na escola como realizar a adição e a multiplicação entre números da base decimal. A seguir, apresentamos as tabelas de adição e multiplicação das bases binária e ternária, ou seja, para b = 2 e para b = 3.

Tabela de adição da base binária

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Tabela de multiplicação da base binária

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabela de adição da base ternária

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

Tabela de multiplicação da base ternária

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

No exemplo a seguir, mostramos como obter a sequência de números nas bases 4 e 5. Este método pode ser utilizado para qualquer base.

Na sequência, propomos que você construa as tabelas de adição e multiplicação das bases 4 e 5. Inicialmente, devemos definir quais algarismos irão compor estas bases. Para a base 4, os algarismos utilizados serão 0, 1, 2 e 3; para a base 5, os algarismos utilizados serão 0, 1, 2, 3 e 4.

Exemplo 1: Como obter a sequência de números da base 4 e da base 5?

- Escrevemos a sequência de números decimais que já conhecemos:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

- Os números na base 4 possuem apenas os algarismos 0, 1, 2 e 3. Eliminamos os números da sequência que possuem algarismos não pertencentes à base 4:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

Assim, a sequência de números da base 4 é:

0, 1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, ...

- Na base 5, temos apenas os algarismos 0, 1, 2, 3 e 4. Procedemos da mesma forma, eliminando os números que possuem algarismos não pertencentes à base 5:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

Assim, a sequência de números da base 5 é:

0, 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 23, 24, ...

4. Relacione os números da base decimal com os números das bases 4 e 5, seguindo o método do Exemplo 1.

Decimal	Base 4	Base 5
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

5. Construa a tabela de adição da base 4.

+	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

6. Construa a tabela de multiplicação da base 4.

×	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

7. Construa a tabela de adição da base 5.

+	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

8. Construa a tabela de multiplicação da base 5.

×	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

Agora que as tabelas de adição e multiplicação das bases 4 e 5 foram desenvolvidas, podemos realizar operações entre números destas bases.

9. Efetue as operações abaixo.

a) $(3012)_4 + (231)_4$

b) $(2033)_4 \times (13)_4$

c) $(4310)_5 + (1442)_5$

d) $(1441)_5 \times (42)_5$

No Exemplo 1, descobrimos como obter a sequência de números nas bases 4 e 5 para preencher a tabela do Exercício 4 e, em seguida, para realizar operações entre estes números. Este método funcionou pois buscávamos correspondentes de números pequenos.

Reflita...

É viável utilizar o método apresentado para encontrar números maiores, como 84652, por exemplo, nas bases 4 e 5?

O método descrito a seguir converte a base de um número decimal, ou seja, relaciona um número em uma base qualquer b > 1 com o seu correspondente na base 10.

a) Encontrar o representante decimal Y de um número X na base b.

$$(X)_b \rightarrow (Y)_{10}$$

1. Multiplique o algarismo da **unidade** de X por b^0;
2. Multiplique o algarismo da **dezena** de X por b^1;
3. Multiplique o algarismo da **centena** de X por b^2;
4. Continue o processo até multiplicar todos os algarismos de X pela potência de b correspondente;
5. A soma destas multiplicações é Y.

Exemplo 2: Determine o representante decimal do número $(1472)_8$.

- $2 \times 8^0 = 2 \times 1 = 2$
- $7 \times 8^1 = 7 \times 8 = 56$
- $4 \times 8^2 = 4 \times 64 = 256$
- $1 \times 8^3 = 1 \times 512 = 512$
- $2 + 56 + 256 + 512 = 826$

O representante decimal de $(1472)_8$ é o número 826.

b) Encontrar o representante S na base b de um número T na base decimal

$$(T)_{10} \rightarrow (S)_b$$

1. Divida o número T pela base b. O resto desta divisão é a **unidade** do número na base b;
2. Divida o quociente obtido em 1 pela base b. O resto desta divisão é a **dezena** do número na base b;
3. Divida o quociente obtido em 2 pela base b. O resto desta divisão é a **centena** do número na base b;
4. Continue o processo até que o quociente obtido seja 0;
5. A concatenação dos restos das divisões, de baixo para cima, é S.

Exemplo 3: Determine o representante na base 15 do número decimal 6720.

6720	15			
- 6720	448	15		
0	- 435	29	15	
	13	- 15	1	15
		14	- 0	0
			1	

Suponha que a correspondência entre os algarismos da base 15 e os algarismos da base decimal são dados conforme a tabela a seguir. Observação: para bases maiores que 10, é usual utilizar letras do alfabeto para representar os algarismos maiores do que 9.

Decimal	Base 15
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	A
11	B
12	C
13	D
14	E

Logo, o representante na base 15 do número decimal 6720 é $(1ED0)_{15}$.

Um modo simples de efetuar a mudança de base entre dois números em duas bases diferentes de 10 é converter o número dado para a base decimal, para em seguida convertê-lo para a base desejada.

10. Encontre o representante de $(3012)_5$ na base 8.

Passo 1: encontre o representante de $(3012)_5$ na base decimal.

Passo 2: encontre o representante na base 8 do número obtido no Passo 1.

11. Em que base se tem...

a) $3 \times 3 = 10$?

b) $3 \times 3 = 11$?

c) $3 \times 3 = 12$?

12. Determine b de maneira que $79 = (142)_b$.

13. Explique o truque: Pede-se a uma pessoa que pense num número de dois algarismos. Solicita-se então a ela para multiplicar o algarismo das dezenas do número pensado por 5, somar 7, dobrar, somar o algarismo das unidades do número original e anunciar o resultado. Subtraindo-se 14 desse resultado, descobre-se o número pensado.

Para o professor:

1. No primeiro item, o aluno definirá o número de ovelhas que possui em sua fazenda. Exemplo: 38. A partir daí, ele irá verificar no Quadro 1 a correspondência dos algarismos. Exemplo: ∩ ∩ ∩ | | | | | | | |. Para o último item, novamente o aluno irá fazer a correspondência com os algarismos, desta vez tomando como base o Quadro 2. Exemplo: $\lambda\eta$.

2. Neste item, é importante lembrar o aluno de que o sistema indo-arábico é posicional e, por isso, a ordem dos algarismos altera o seu valor. Por outro lado, o sistema de numeração egípcio é aditivo e, assim como a soma de duas parcelas, a ordem não interfere no resultado. Por fim, no sistema de numeração grego alfabético, as unidades, dezenas e centenas já possuíam algarismos próprios e, portanto, não faz sentido alterar a ordem dos seus algarismos.

3. O aluno tende a inferir, com base nos itens 1 e 2, que o sistema de numeração indo-arábico é o mais prático de ser utilizado, pois possui a menor quantidade de algarismos a serem decorados, já que é um sistema de numeração posicional e cada um dos dez algarismos pode ser reutilizado para expressar um valor específico.

4.

Decimal	Base 4	Base 5
0	0	0
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	10	4
5	11	10
6	12	11
7	13	12
8	20	13
9	21	14
10	22	20
11	23	21
12	30	22
13	31	23
14	32	24
15	33	30
16	100	31
17	101	32
18	102	33
19	103	34
20	110	40

5.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

6.

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

7.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

8.

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

9. Para este item, é preciso utilizar as tabelas criadas nos itens anteriores.

a) $(3012)_4 + (231)_4$

$$\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 1 & 2 \\ + & 2 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 0 & 3 \end{array}$$

b) $(2033)_4 \times (13)_4$

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 0 & 3 & 3 \\ & & \times & 1 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & + \\ \hline 3 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{array}$$

c) $(4310)_5 + (1442)_5$

$$\begin{array}{ccccc} & 4 & 3 & 1 & 0 \\ + & 1 & 4 & 4 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{array}$$

d) $(1441)_5 + (42)_5$

		1	4	4	1
			×	4	2
		3	4	3	2
1	2	4	1	4	+
1	3	3	1	2	2

10. Passo 1:

- $2 \times 5^0 = 2 \times 1 = 2$
- $1 \times 5^1 = 1 \times 5 = 5$
- $0 \times 5^2 = 0 \times 25 = 0$
- $3 \times 5^3 = 3 \times 125 = 375$
- $2 + 5 + 0 + 375 = 382$

O representante decimal de $(3012)_5$ é o número 382.

Passo 2:

382	8		
- 376	47	8	
6	- 40	5	8
	7	- 0	0
		5	

O representante na base 8 do número decimal 382 é $(576)_8$.

Desta forma, $(3012)_5 = (576)_8$.

11. Neste item, pode-se sugerir aos alunos que encontrem qual o nono número da sequência em bases pequenas, assim como feito no Exemplo 1.

a) Base 9

b) Base 8

c) Base 7

12. Basta aplicar a técnica descrita no item **a)**. Logo,

$$2 \times b^0 + 4 \times b^1 + 1 \times b^2 = 79$$

$$b^2 + 4b + 2 = 79$$

$$b^2 + 4b - 77 = 0$$

O problema agora resume-se a resolver uma equação de segundo grau. Teremos que b = - 11 ou b = 7. Como a base de um número deve ser sempre maior do que 1, concluímos que b = 7.

13. Traduzindo o truque em expressão matemática, temos:

- Pede-se a uma pessoa que pense num número de dois algarismos: digamos **ab**
- Solicita-se então a ela para multiplicar o algarismo das dezenas do número pensado por 5: **5**a
- Somar 7: 5a **+ 7**
- Dobrar: **2 ×** (5a + 7)
- Somar o algarismo das unidades do número original: 2 × (5a + 7) **+ b**
- Subtraindo-se 14 desse resultado: 2 × (5a + 7) + b **- 14**

A expressão encontrada pode ser simplificada:

$$2 \times (5a + 7) + b - 14$$

$$10a + 14 + b - 14$$

$$10a \cancel{+ 14} + b \cancel{- 14}$$

$$10a + b$$

Perceba que 10a + b é o número pensado, sendo apenas uma forma diferente de representá-lo.

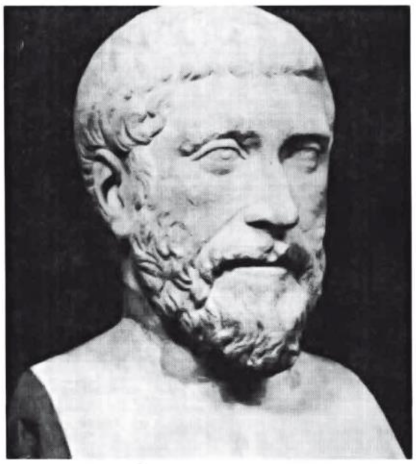
PROPOSTA 2

A DESCOBERTA DOS IRRACIONAIS

A DESCOBERTA DOS IRRACIONAIS

Pitágoras foi um ilustre matemático nascido por volta de 572 a.C., na Grécia.

Figura 1 - Pitágoras



Extraído de: Eves (2011, p. 98)

Sua filosofia tinha como princípio o pensamento de que a base do homem e da matéria são os números inteiros, já que tudo o que existe no mundo concreto é contado utilizando este conjunto de números.

1. Dê exemplos do seu dia a dia que contra-argumentam a filosofia de Pitágoras de que todas as medidas são inteiras.

____

____

____

Observa-se, portanto, que o conjunto dos números inteiros não é suficiente para traduzir determinadas medidas do nosso cotidiano. Por esta razão, houve a necessidade de utilizar frações destas partes inteiras, que agora compõem um novo conjunto de números, chamados **racionais**.

Um número racional é aquele escrito da forma

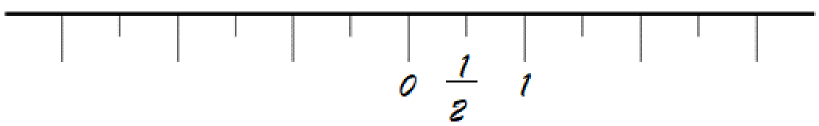
$$\frac{p}{q},$$

com $p,\ q \in \mathbb{Z}$.

Observação 1: lembre-se que q não pode ser 0, pois não é possível realizar uma divisão por 0.

Observação 2: note que se $q = 1$ a fração representa um número inteiro. Portanto, números inteiros também são números racionais.

2. Complete a reta real com números racionais.



3. Marque com um X os números racionais.

( ) 2

( ) $\frac{1}{8}$

( ) π

( ) $\frac{0}{7}$

( ) $\frac{74}{0}$

( ) $-\frac{1}{50}$

( ) $6{,}3$

( ) $\frac{3}{8}$

( ) e

( ) 0

( ) $8{,}74$

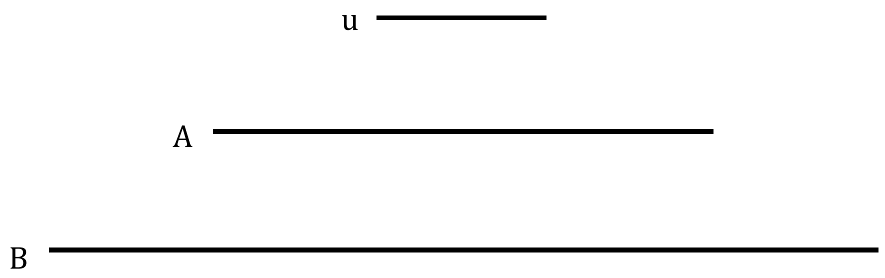
( ) $\frac{3}{\pi}$

( ) $\frac{975}{1}$

( ) -46

O conceito de número racional surgiu através da comensurabilidade entre segmentos. Isto é, dados dois segmentos - A e B - é possível determinar um segmento u que cabe uma quantidade inteira de vezes dentro de A e dentro de B.

4. Com o auxílio de um compasso, verifique quantas vezes o segmento u cabe dentro dos segmentos A e B.



O segmento u cabe ______ vezes dentro do segmento A. Logo

$$A = \_\_\_\_\_\_ \times u$$

O segmento u cabe ______ vezes dentro do segmento B. Logo

$$B = \_\_\_\_\_\_ \times u$$

Você percebeu que o segmento u coube um número inteiro de vezes dentro dos segmentos A e B? Por esta razão, dizemos que A e B são **segmentos comensuráveis**, ou seja, é possível determinar uma medida (neste caso, a medida do segmento u) que caiba um número inteiro de vezes em A e um número inteiro de vezes em B.

> Dados dois objetos quaisquer, de comprimentos a e b, sempre existia alguma unidade u, suficientemente pequena, de tal forma que ambos objetos pudessem ser medidos de modo "exato" com essa unidade u. [...] Desse modo, usando a medida u, um objeto mediria m vezes u e o outro n vezes u. Os objetos (números) a e b são ditos comensuráveis.
>
> (AGUILAR; DIAS, 2015, p. 53)

Ao calcularmos a razão entre a medida do segmento $\mathbf{A}$ e a medida do segmento $\mathbf{B}$, obtemos

$$\frac{A}{B} = \frac{3 \times u}{5 \times u}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{3 \cancel{\times u}}{5 \cancel{\times u}}$$

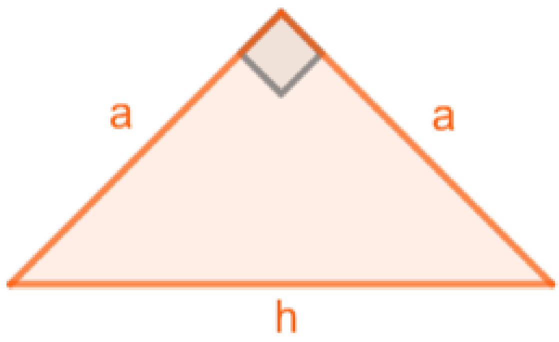
$$\frac{A}{B} = \frac{3}{5}$$

que é racional. Assim, a razão entre segmentos comensuráveis é um número racional.

Será que esta medida $\mathbf{u}$ sempre pode ser determinada, independentemente do tamanho dos segmentos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$?
Ou seja, a razão entre dois segmentos sempre será um número racional?

Acreditava-se que a resposta para esta pergunta era afirmativa. Vamos verificar que, na verdade, a resposta é NÃO. Para isso, considere um triângulo retângulo isósceles, cuja hipotenusa mede h e os catetos medem a, como na Figura 2.

Figura 2 - Triângulo retângulo isósceles



Fonte: Elaborado pela autora (2021)

Do teorema de Pitágoras, temos que

$$h^2 = a^2 + a^2$$
$$h^2 = 2a^2$$
$$\frac{h^2}{a^2} = 2$$
$$\frac{h}{a} = \sqrt{2}$$

Como visto anteriormente, um número racional é da forma $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros. Vamos verificar que a razão entre a hipotenusa e o cateto deste triângulo não é racional.

5. Prove por contradição que o número $\sqrt{2}$ não é racional.

Dicas:

- Para provar por contradição, admita que a hipótese é verdadeira, ou seja, que $\sqrt{2}$ é racional para, ao final, chegar em uma contradição.
- Todo número racional pode ser escrito como um quociente de termos primos entre si.
- Todo número par é da forma 2k.
- Se k^2 é par, então k é par.

Então, a razão entre a hipotenusa **h** e o cateto **a** de um triângulo retângulo isósceles não é um número racional e, por isso, **h** e **a** são segmentos não comensuráveis, ou ainda, incomensuráveis.

"Os inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever mesmo propriedade básicas simples"

(BOYER, 2012, p. 70)

Estes números não racionais, ou seja, números que não admitem serem reescritos como uma fração, foram denominados **irracionais**.

A descoberta dos irracionais gerou uma grande ruptura na matemática da época. A revelação desse novo conjunto de números revolucionou o que se ensinava nas escolas e, além disso, derrubou por terra a teoria pitagórica de que as razões se limitavam a grandezas comensuráveis.

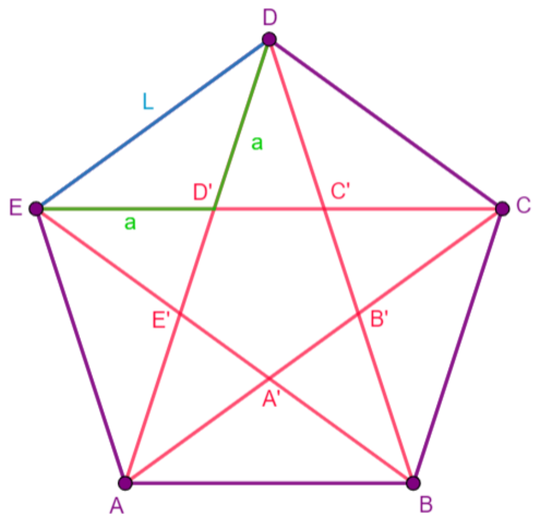
"Por algum tempo, $\sqrt{2}$ foi o único número irracional conhecido. Mais tarde, [...] Teodoro de Cirene (425 a.C.) mostrou que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$ também são irracionais".

(EVES, 2011, p. 107)

Ainda se discute como, de fato, ocorreu a descoberta a respeito de segmentos incomensuráveis. Alguns autores acreditam que, ao invés da razão entre hipotenusa e cateto de um triângulo retângulo isósceles, a descoberta sobre tais segmentos tenha se dado através da razão entre o lado e a diagonal de um pentágono regular, como visto a seguir.

Considere o pentágono regular $\mathbf{ABCDE}$ da Figura 3, onde $\mathbf{A'}$, $\mathbf{B'}$, $\mathbf{C'}$, $\mathbf{D'}$ e $\mathbf{E'}$ são as interseções das suas diagonais.

Figura 3 - Pentágono regular



Fonte: Elaborado pela autora (2021)

Observando o paralelogramo $\mathrm{BAEC'}$ e utilizando as propriedades de paralelogramos, concluímos que os triângulos isósceles $\mathrm{AED'}$ e ABD são semelhantes e, dessa forma,

$$\frac{\mathrm{AD'}}{\mathrm{ED'}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}.$$

Substituindo pelos valores a e L indicados na figura, temos

$$\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{L} + \mathrm{a}}{\mathrm{L}}$$

$$\mathrm{a}^2 + \mathrm{La} - \mathrm{L}^2 = 0$$

$$\mathrm{a} = \frac{-\mathrm{L} \pm \sqrt{\mathrm{L}^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\mathrm{L}^2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-\mathrm{L} \pm \sqrt{5\mathrm{L}^2}}{2} = \frac{-\mathrm{L} \pm \sqrt{5}\mathrm{L}}{2} = \frac{\mathrm{L}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)}{2}.$$

Como $\mathrm{a} > 0$, temos que

$$\mathrm{a} = \frac{\mathrm{L}\left(-1 + \sqrt{5}\right)}{2}$$

$$\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{a}} = \frac{2}{\left(\sqrt{5} - 1\right)}.$$

6. Generalize a demonstração do Exercício 5, provando que $\sqrt{p}$ é irracional para todo p primo.

Logo, pode-se concluir que $\sqrt{5}$ é irracional, pois 5 é primo. Portanto, a relação

$$\frac{L}{a} = \frac{2}{(\sqrt{5} - 1)}$$

é uma medida irracional. Assim, o lado e a diagonal de um pentágono regular são medidas incomensuráveis.

Demonstraram-se assim duas maneiras que possivelmente revelaram a existência de segmentos incomensuráveis nos tempos pitagóricos.

Além de saber identificar um número racional e um irracional, devemos também verificar o que acontece quando realizamos operações entre estes números.

Você já aprendeu que a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão entre números racionais retornam um outro número racional, como mostrado a seguir.

Operações entre números racionais

Considere os números racionais $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$, com p, q, r e s sendo números inteiros e q e s diferentes de zero.

a) Adição e subtração

$$\frac{p}{q} \pm \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s \pm r \cdot q}{q \cdot s}$$

Como p, q, r e s são números inteiros, então $p \cdot s$, $r \cdot q$ e $q \cdot s$ são inteiros. Logo, $p \cdot s \pm r \cdot q$ é um número inteiro e, assim, $\frac{p}{q} \pm \frac{r}{s}$ é um número racional.

b) Multiplicação e divisão

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot s \cdot r \cdot q}{q \cdot s}$$

Segue que $p \cdot s \cdot r \cdot q$ e $q \cdot s$ são números inteiros. Logo, $\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}$ é um número racional.

Para a divisão, temos que

$$\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r},$$

com $r \neq 0$, caindo no caso da multiplicação entre números racionais.

O que ocorre, por outro lado, ao realizarmos operações entre números racionais e números irracionais? Verifique no Exercício 7 a seguir.

7. Prove por contradição que a adição e a multiplicação entre números racionais (não nulos) e irracionais retornam números irracionais. Obs.: Os casos da subtração e da divisão são análogos.

Dica: considere a operação entre um número racional R_1 e um irracional I.

a) Prove que **racional + irracional = irracional**

b) Prove que **racional × irracional = irracional**

Por fim, basta saber o que ocorre ao realizarmos tais operações entre números irracionais. No Exercício 8, nos dois primeiros itens o objetivo é compreender o que ocorre ao efetuar a soma e a multiplicação de dois números irracionais e, no terceiro item, relembrar alguns dos conceitos aprendidos até aqui.

8. Analise as sentenças abaixo, justificando as verdadeiras e dando um contraexemplo, caso seja falsa.

I - A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.

____
____
____
____

II - O produto entre dois números irracionais é sempre um número irracional.

____
____
____
____

III - Todo número real é um número irracional.

____
____
____
____

Além das raízes de números primos serem irracionais, também pode-se encontrar números irracionais quando tratamos de logaritmos.

Faça o seguinte teste: com o auxílio de uma calculadora científica, obtenha o valor de $\log_{10}2$ e escreva abaixo o que encontrou:

$\log_{10}2$ = ____

Este número é racional? A primeira resposta que vem à mente seria que sim, já que a calculadora retornou um valor finito. Porém, a calculadora tem um espaço limitado e acaba por mostrar uma quantidade finita de casas, quando na verdade o número em questão possui infinitas casas decimais após a vírgula!

Vamos verificar que o valor de $\log_{10}2$ não é racional e, portanto, trata-se de um número irracional – ou seja, possui infinitas casas decimais após a vírgula –. Para isso, precisamos do teorema a seguir, conhecido como Teorema Fundamental da Aritmética.

Teorema Fundamental da Aritmética: Seja a um inteiro diferente de 1, -1 e 0. Então existem números primos p_1, p_2, ..., p_r e inteiros positivos α_1, α_2, ..., α_r tais que

$$a = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

Além disso, esta decomposição é única, a menos de ordem dos fatores.

Para decompor um número em fatores primos, é preciso utilizar a fatoração, conforme exemplificado a seguir.

Exemplo 1: Decomponha os números abaixo em fatores primos.

a) 180

$$\begin{array}{l|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, $180 = 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5^1$.

b) 234

$$\begin{array}{l|l} 234 & 2 \\ 117 & 3 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, $234 = 2^1 \,.\, 3^2 \,.\, 13$.

Munidos do teorema apresentado, verifique no Exercício 9 que o valor de $\log_{10}2$ não é racional, diferentemente do que foi apresentado na calculadora. Logo, possui infinitas casas não periódicas após a vírgula.

9. Mostre, por contradição, que $\log_{10}2$ é irracional.

Dica: lembre-se que $x = \log_{10}2$ é o mesmo que $10^x = 2$.

"O ponto crucial no argumento acima foi o fato de 2 e 10 terem fatores primos diferentes. De forma mais precisa, o fator 5 está na decomposição em primos do número 10, mas não está, evidentemente, na decomposição do número 2".

(PINTO; COSTA, 2018, p. 68)

No Exercício 10, verificaremos a condição de irracionalidade de um logaritmo.

10. Sendo a e b positivos, mostre que, se a ou b apresentam pelo menos um fator que não é comum em sua decomposição de fatores primos, então $\log_b a$ é irracional.

Dica: demonstre a contrapositiva da hipótese, ou seja, se $\log_b a$ é racional, então a e b possuem os mesmos fatores primos.

Dessa forma, podemos concluir que, quando tratamos de logaritmos de base 10, apenas são racionais aqueles da forma

$$\log_{10} 10^{k},$$

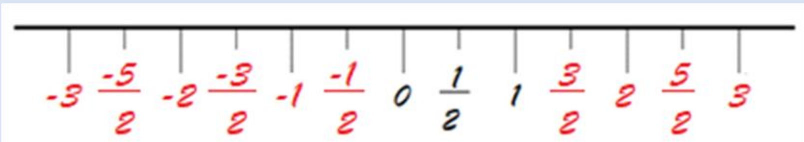
com k racional.

Este conjunto específico de logaritmos é uma pequena fração da totalidade de logaritmos possíveis de serem calculados. Assim, é fácil perceber que a maioria dos logaritmos é, de fato, irracional.

Para o professor:

1. A resposta deste item é livre. Algumas sugestões: ingredientes em receitas, fatias de pizza, notas na escola etc.

2. Os traços maiores correspondem aos números inteiros e os menores aos fracionários.



3. Marque com um X os números racionais.

(X) 2	(X) $\frac{3}{8}$
(X) $\frac{1}{8}$	( ) e
( ) π	(X) 0
(X) $\frac{0}{7}$	(X) $8{,}74 = \frac{874}{100}$
( ) $\frac{74}{0}$	( ) $\frac{3}{\pi}$
(X) $-\frac{1}{50}$	(X) $\frac{975}{1}$
(X) $6{,}3 = \frac{63}{10}$	(X) -46

4. Uma sugestão interessante é iniciar o item instigando o aluno a verificar que o segmento A não cabe um número inteiro de vezes em B, para que ele conclua que há a necessidade de construir um segmento menor, no caso u, para fazer isso. Em seguida, ele irá verificar que o segmento A corresponde a 3 vezes o segmento u; e que o segmento B corresponde a 5 vezes o segmento u.

5. Suponha que $\sqrt{2}$ seja racional. Como visto anteriormente, podemos representar um número racional através da fração $\frac{p}{q}$. Desta forma,

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

com p e q primos entre si. Assim,

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$p^2 = 2q^2$$

Se $p^2 = 2q^2$, temos que p^2 é da forma 2k. Logo, p^2 é par e, consequentemente, p é par. Podemos então reescrever $p = 2c$. Substituindo na equação acima, teremos

$$p^2 = 2q^2$$

$$(2c)^2 = 2q^2$$

$$4c^2 = 2q^2$$

$$2c^2 = q^2$$

Note que $q^2 = 2c^2$, ou seja, é da forma 2k e, por isso, q^2 é par. Isto significa que q também é par. Concluímos então que p e q são pares. Porém, se isto for verdade, p e q possuem um fator em comum e, assim, não são primos entre si. Logo, chegamos em uma contradição e, por isso, a hipótese inicial de que $\sqrt{2}$ é racional é falsa.

6. Suponha que $\sqrt{p}$ seja racional para qualquer p primo. Podemos então reescrever $\sqrt{p}$ como

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b}$$

com a e b primos entre si. Logo,

$$p = \frac{a^2}{b^2}$$

$$a^2 = pb^2$$

Isto significa que a^2 é um múltiplo de p e, portanto, a é um múltiplo de p, ou então, $a = pk$. Substituindo na equação anterior, teremos

$$(pk)^2 = pb^2$$
$$p^2k^2 = pb^2$$
$$pk^2 = b^2$$

Note que $b^2 = pk^2$, ou seja, b^2 é múltiplo de p e, por consequência, b é múltiplo de p. Concluímos então que a e b são múltiplos de p. Porém, se isto for verdade, a e b possuem um fator em comum e, portanto, não são primos entre si. Logo, chegamos em uma contradição e, por isso, a hipótese inicial de que $\sqrt{p}$, com p primo, é racional é falsa.

7.

a) Prove que **racional + irracional = irracional**

Suponha, por contradição, que a soma entre um número racional R_1 e um irracional I retorne um número racional R_2. Ou seja,

$$R_1 + I = R_2\,.$$

Podemos reescrever esta equação como

$$I = R_2 - R_1\,.$$

Vimos anteriormente que a subtração entre números racionais retorna um número racional. Assim,

$$I = R_3$$

e, portanto, I é um número racional. Isto é um absurdo e, portanto, **a adição entre um número racional e um irracional retorna um número irracional**.

b) Prove que **racional × irracional = irracional**

Suponha, por contradição, que a multiplicação entre um número racional R_1 e um irracional I retorne um número racional R_2.

Ou seja,

$$R_1 \cdot I = R_2\,.$$

Podemos reescrever esta equação como

$$I = \frac{R_2}{R_1}.$$

Vimos anteriormente que a divisão entre números racionais retorna um número racional. Assim,

$$I = R_3$$

e, portanto, I é um número racional. Isto é um absurdo e, portanto, **a multiplicação entre um número racional e um irracional retorna um número irracional**.

8.

I - Falsa. Nem sempre é um número irracional, como o caso de $\sqrt{p} + (-\sqrt{p}) = 0$, com p primo, além de variações, como $n + \sqrt{p} + (-\sqrt{p}) = n$, com n natural etc.

II - Falsa. A multiplicação de dois números irracionais pode resultar em um número racional, como $\sqrt{p} \cdot \sqrt{p} = p$, com p primo, além de variações, como $\sqrt{p} \cdot (n \cdot \sqrt{p}) = n \cdot p$, com n natural etc.

III - Falsa, pois o conjunto dos números reais é formado pela união dos números racionais e irracionais, então há números que são reais e não são irracionais.

9. Por contradição, supomos que $\log_{10} 2$ é racional e, portanto, pode ser escrito como

$$\log_{10} 2 = \frac{m}{n},$$

com m e n inteiros. Logo, pela definição de logaritmo,

$$2 = 10^{\frac{m}{n}}\,.$$

Elevando ambos os membros à potência n, obtemos

$$2^n = 10^m = (2 \cdot 5)^m = 2^m \cdot 5^m .$$

Para a igualdade ser válida, devemos ter que $5^m = 1$, ou seja, $m = 0$. Desta forma,

$$2 = 10^{\frac{m}{n}} = 10^{\frac{0}{n}} = 10^0 = 1$$

$$2 = 1.$$

Chegamos a uma contradição e $\log_{10} 2$ é, de fato, irracional.

10. Suponha que $\log_b a$ seja racional. Desta forma, existem m e n inteiros tais que

$$\log_b a = \frac{m}{n}.$$

Assim,

$$a = b^{\frac{m}{n}} \Leftrightarrow a^n = b^m .$$

Da última igualdade, com o auxílio do Teorema Fundamental da Aritmética, concluímos que a e b possuem exatamente os mesmos fatores primos.

De fato, suponha que o número a seja decomposto da forma

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

e b seja decomposto da forma

$$b = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_r^{\beta_r} .$$

Ora, se $a^n = b^m$, então

$$\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}\right)^n = \left(q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_r^{\beta_r}\right)^m$$

$$p_1^{n\alpha_1} p_2^{n\alpha_2} \dots p_r^{n\alpha_r} = q_1^{m\beta_1} q_2^{m\beta_2} \dots q_r^{m\beta_r}$$

e, portanto, $p_k^{n\alpha_k} = q_k^{m\beta_k}$, para $k = 1, 2, \dots, r$. Logo, $p_k = q_k$ e $n\alpha_k = m\beta_k$, para $k = 1, 2, \dots, r$. Ou seja, a e b possuem exatamente os mesmos fatores primos.

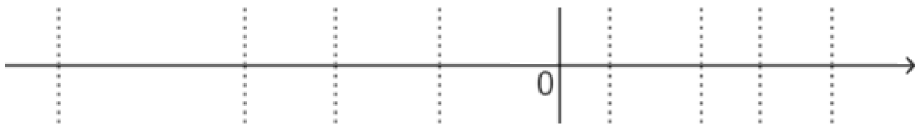
PROPOSTA 3

A COMPLETUDE DOS REAIS

A COMPLETUDE DOS REAIS

O conjunto dos números reais geralmente é associado à reta real. Dessa forma, cada número real pode ser representado por um ponto desta reta.

1. Complete a reta abaixo com os números reais fornecidos.



2	$-\sqrt{5}$	e	-5
$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\pi$	$-\frac{6}{5}$

A "palavra usada para designar a propriedade da reta que distingue os reais dos racionais é 'continuidade', que seria equivalente ao que chamamos de 'completude'."

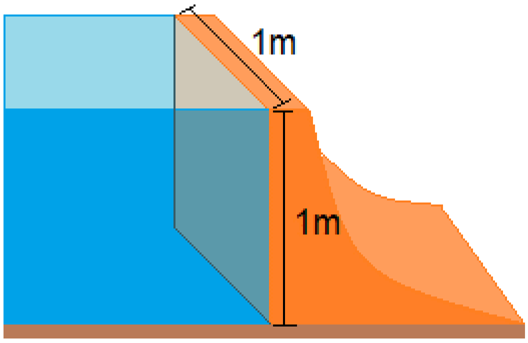
(ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 264).

Você aprendeu sobre os números reais a partir da sua representação decimal. Por isso, seguiremos com a construção dos reais - racionais e irracionais - a partir do método das expansões decimais.

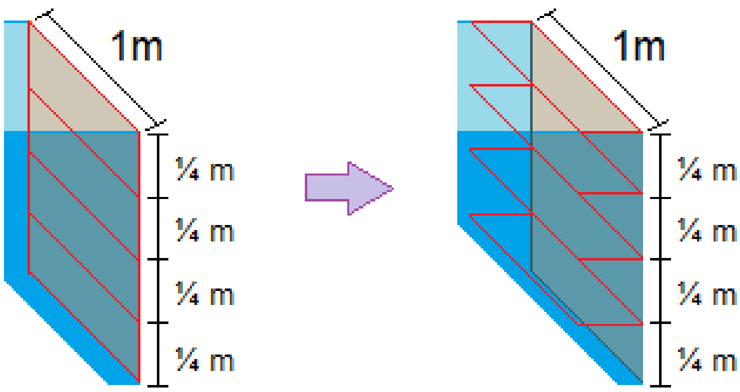
Stevin (1548 - 1620) foi um engenheiro, físico e matemático nascido na Bélgica. Em 1585, ele publicou alguns escritos que explicavam de forma elementar e completa o sistema de frações decimais. Por mais que tal sistema já fosse utilizado na China antiga, na Arábia medieval e na Europa do Renascimento, foi apenas após as suas publicações que as frações decimais se tornaram amplamente conhecidas.

O problema resolvido por Stevin envolvia encontrar a força total que a água aplicava sobre um dique. O passo-a-passo do raciocínio utilizado pelo matemático é descrito a seguir, com base em Boyer (1992).

Considere um dique com a forma de um quadrado, de lado unitário, com um dos lados na superfície da água, como na figura a seguir.



Imagine o quadrado dividido em 4 faixas horizontais e suponha que cada faixa sofra uma rotação de 90° em torno de seu lado superior, ficando sujeita ao peso da água situada sobre ela.



A faixa superior fica na superfície e sustenta um volume de água dado por $1\text{m} \times \frac{1}{4}\text{m} \times \frac{0}{4}\text{m} = \frac{0}{16}\text{m}^3$; a segunda fica à profundidade de $\frac{1}{4}\text{m}$ abaixo da superfície e sustenta um volume de água dado por $1\text{m} \times \frac{1}{4}\text{m} \times \frac{1}{4}\text{m} = \frac{1}{16}\text{m}^3$; a terceira faixa fica à $\frac{2}{4}\text{m}$ abaixo da superfície e sustenta um volume de água dado por $1\text{m} \times \frac{1}{4}\text{m} \times \frac{2}{4}\text{m} = \frac{2}{16}\text{m}^3$; e a quarta faixa fica à profundidade de $\frac{3}{4}\text{m}$ abaixo da superfície e sustenta um volume de água dado por $1\text{m} \times \frac{1}{4}\text{m} \times \frac{3}{4}\text{m} = \frac{3}{16}\text{m}^3$. Assim, o peso total de água sustentado será igual à w (densidade da água) multiplicada pelo volume total:

$$\frac{0}{16}\text{m}^3 + \frac{1}{16}\text{m}^3 + \frac{2}{16}\text{m}^3 + \frac{3}{16}\text{m}^3 = \frac{6}{16}\text{m}^3.$$

2. Generalize o problema do dique de Stevin para n faixas horizontais:

a) rotacionadas em 90° em torno de seu lado superior

___

___

___

___

___

___

___

___

___

b) rotacionadas em 90° em torno de seu lado inferior

No item a), cada faixa foi movida para uma posição acima da original e, no item b), cada uma foi movida para uma posição abaixo da original. Assim, é de se esperar que a força real da água sobre o dique seja um valor intermediário entre os dois resultados encontrados e que seja encontrado ao fazer o número de faixas aumentarem infinitamente.

A generalização do problema do dique de Stevin permite concluir que o peso total de água sustentado pelo dique – e qualquer outro valor real – pode ser aproximado através da soma de infinitas frações. Em 1585, Stevin recomendou que tais frações fossem utilizadas com escalas decimais, ou seja, que fossem da forma $\frac{p}{10^m}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $m \in \mathbb{N}$.

Concluímos, portanto, que todos os números reais admitem uma aproximação por uma representação decimal. Desta forma, sendo r um número real, podemos escrevê-lo como a soma de frações decimais da seguinte forma:

$$r = \pm a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots,$$

onde a_0 é um número natural e $0 \leq a_k \leq 9$, para $k = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$.

3. Determine a expansão decimal dos números abaixo.

a) $8{,}6451$

b) $\frac{1}{3}$

c) $14{,}09\overline{8}$

4. Utilizando expansões decimais, encontre a fração correspondente dos seguintes números:

a) $8{,}42$

b) $4{,}25\overline{25}$

Você percebeu que, quando tratamos de números **racionais**, a expansão decimal representa o número de forma precisa, sem qualquer tipo de erro. Entretanto, quando nos referimos aos números **irracionais**, é possível chegar apenas em uma **aproximação** do seu valor a partir da expansão decimal, visto que não são dízimas periódicas, isto é, sua parte decimal não apresenta um padrão de repetição.

Considere, por exemplo, a aproximação de quatro casas decimais de $\sqrt{2} = 1{,}4142$. A partir daí, pode-se criar uma sequência de expansões racionais que se aproxima de $\sqrt{2}$, como:

$$\begin{cases} x_1 = 1{,}4 = 1 + \dfrac{4}{10} \\ x_2 = 1{,}41 = 1 + \dfrac{4}{10} + \dfrac{1}{10^2} \\ x_3 = 1{,}414 = 1 + \dfrac{4}{10} + \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{4}{10^3} \\ x_4 = 1{,}4142 = 1 + \dfrac{4}{10} + \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{4}{10^3} + \dfrac{2}{10^4} \\ \quad \vdots \end{cases}$$

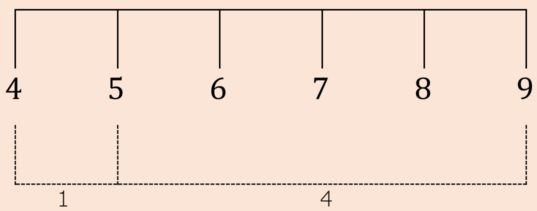
Note que, quanto mais frações são somadas, mais precisa é a aproximação do valor de $\sqrt{2}$. Portanto, é possível aproximar qualquer número real por sequências (x_n) de Cauchy de números racionais.

Para que (x_n) seja uma sequência de Cauchy, é preciso que seus termos x_m, x_n, para valores suficientemente grandes dos índices m, n se aproximem arbitrariamente uns dos outros. Ou seja, se impõe uma condição sobre os termos da própria sequência.

(AGUILAR; DIAS, 2015, p. 59).

Uma forma de aproximar o valor de uma raiz irracional é através da comparação com outras duas raízes racionais, cujos valores são conhecidos. A seguir, exemplificamos este método para obter o valor de $\sqrt{5}$, com precisão de uma casa decimal.

Exemplo 1: Temos que $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$ e, assim, $2 < \sqrt{5} < 3$. Para um bom palpite para o valor de $\sqrt{5}$, vamos analisar a posição do 5 em relação à distância entre 4 e 9:



Note que o número 5 "percorreu" **1 casa** com relação ao percurso total de **5 casas**, do número 4 ao número 9, ou seja, percorreu $\frac{1}{5}$ do percurso. Portanto, um bom palpite para o seu valor é obtido ao somar o valor de partida - $\sqrt{4}$ - com a razão percorrida - $\frac{1}{5}$ -. Assim,

$$\sqrt{4} + \frac{1}{5} = 2 + \frac{1}{5} = 2{,}2\,.$$

Agora, testamos o valor encontrado:

$$2{,}2^2 = 4{,}84\,.$$

Temos, portanto, que $2{,}2^2 < 5$, ou seja, $2{,}2 < \sqrt{5}$. Seguimos aumentando o palpite inicial: $2{,}21^2 = 4{,}8841$; $2{,}22^2 = 4{,}9284$; $2{,}23^2 = 4{,}9729$ e, por fim,

$$2{,}24^2 = \mathbf{5{,}0}176$$

Encontramos o valor $2{,}24^2$ que aproxima, em uma casa decimal, o número 5. Portanto, $\sqrt{5} = 2{,}24$, com aproximação de uma casa decimal.

Reflita...

Por que o valor $\sqrt{9} - \frac{4}{5}$ também é um bom palpite para aproximar $\sqrt{5}$?

5. Encontre o valor aproximado das raízes abaixo, com precisão de uma casa decimal.

a) $\sqrt{45}$

b) $\sqrt{7}$

Vimos até então que as expansões decimais descrevem de forma **exata** um número **racional**. Assim, sempre é possível encontrar uma fração correspondente a um número racional.

Por outro lado, para os números irracionais, as expansões decimais são capazes de apenas **aproximar** o número em questão e, por isso, não é possível encontrar uma fração corresponda exatamente a um número irracional.

Porém, assim como aproximamos os valores das raízes irracionais, é possível **aproximar** uma fração correspondente a um número irracional, conforme o esquema a seguir, exemplificado na sequência.

Encontrar uma fração que aproxima um número irracional

1. Obtenha a forma compacta da fração contínua do número:
    i. Destaque a parte inteira
    ii. Subtraia o número escolhido pela sua parte inteira
    iii. Pare se o resultado for zero e continue se for diferente de zero
    iv. Inverta o resultado
    v. Retorne para o item i
    vi. A forma compacta da fração contínua será escrita na forma $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$, onde a_k, com $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, são as partes inteiras encontradas nas iterações.
2. Encontre uma fração reduzida do número:
    i. Estabeleça algum a_n da fração contínua como limite
    ii. Inverta o a_n escolhido
    iii. Some ao a_{n-1}
    iv. Inverta o resultado e some ao a_{n-2}
    v. Repita o processo até o somar com a_0
    vi. O resultado é uma fração reduzida do número

Exemplo 2: Encontre uma fração que aproxima $\sqrt{2}$.

1. Obtenha a fração contínua de $\sqrt{2}$:

A parte inteira de $\sqrt{2}$ é:

$$a_0 = 1$$

Subtraindo $\sqrt{2}$ pela sua parte inteira:

$$\sqrt{2} - 1 \neq 0$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$$

A parte inteira de $\sqrt{2} + 1$ é:

$$a_1 = 2$$

Subtraindo $\sqrt{2} + 1$ pela sua parte inteira:

$$\sqrt{2} + 1 - 2 = \sqrt{2} - 1 \neq 0$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$$

Perceba que nas duas inversões foram obtidos os mesmos resultados. Assim, os próximos a_n já ficam determinados, isto é, $a_n = 2$, para $n = 1, 2, 3, \dots$. Logo, a forma compacta da fração contínua de $\sqrt{2}$ é

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots].$$

2. Encontre uma fração reduzida do número:

Estabelecendo a_5 como o limite da aproximação, temos

$$\frac{1}{a_5} = \frac{1}{2}$$

Somando com a_4:

$$\frac{1}{2} + a_4 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

Invertendo o resultado e somando com a_3:

$$\frac{2}{5} + a_3 = \frac{2}{5} + 2 = \frac{12}{5}$$

Invertendo o resultado e somando com a_2:

$$\frac{5}{12} + 2 = \frac{29}{12}$$

Invertendo o resultado e somando com a_1:

$$\frac{12}{29} + 2 = \frac{70}{29}$$

Invertendo o resultado e somando com a_0:

$$\frac{29}{70} + 1 = \frac{99}{70}.$$

Assim, a fração $\frac{99}{70}$ aproxima o valor de $\sqrt{2}$.

Vale ressaltar que o esquema apresentado também é válido para obter as frações exatas de números racionais. Para fixar melhor o método apresentado, resolva os exercícios a seguir.

6. Encontre a fração reduzida dos seguintes números racionais:

a) $1,\overline{6}$

b) 2,25

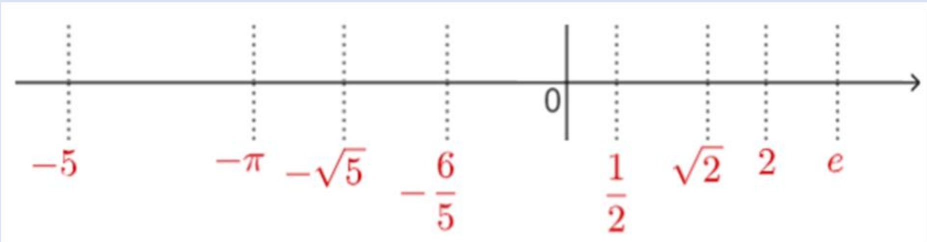
7. Encontre uma fração reduzida que aproxima os seguintes números irracionais:

a) $\sqrt{5}$

b) π

Para o professor:

1.



2.

a) Para n faixas rotacionadas em 90° em torno de seu lado superior, o peso total de água sustentado será igual à w (densidade da água) multiplicada pelo volume total:

$$\frac{0}{n^2}m^3 + \frac{1}{n^2}m^3 + \frac{2}{n^2}m^3 + \cdots + \frac{n-1}{n^2}m^3$$
$$= \frac{1}{n^2}(0 + 1 + 2 + \cdots + n - 1)m^3$$

Note que o problema se resume a uma progressão aritmética de razão 1. Logo,

$$\frac{1}{n^2}(0 + 1 + 2 + \cdots + n - 1)m^3 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2}m^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}m^3.$$

b) Para n faixas rotacionadas em 90° em torno de seu lado inferior, o peso total de água sustentado será igual à w (densidade da água) multiplicada pelo volume total:

$$\frac{1}{n^2}m^3 + \frac{2}{n^2}m^3 + \frac{3}{n^2}m^3 + \cdots + \frac{n}{n^2}m^3 = \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n)m^3$$

Novamente devemos resolver a soma de uma progressão aritmética de razão 1:

$$\frac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n)m^3 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}m^3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}m^3.$$

3.

a) $8{,}6451 = 8 + \frac{6}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \frac{1}{10^4}$

b) $\frac{1}{3} = 0 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots$

c) $14{,}09\overline{8} = 14 + \frac{0}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{8}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \cdots + \frac{8}{10^n} + \cdots$

4.

a) $8{,}42 = 8 + \frac{4}{10} + \frac{2}{10^2} = 8 + \frac{4}{10} + \frac{2}{100} = \frac{800}{100} + \frac{40}{100} + \frac{2}{100} = \frac{842}{100} = \frac{421}{50}$

b) $4{,}25\overline{25} = 4 + \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \cdots + \frac{2}{10^{2n-1}} + \frac{5}{10^{2n}} =$

$4 + 2 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{2n-1}}\right) + 5 \cdot \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \cdots + \frac{1}{10^{2n}}\right) =$

$4 + 2 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10^2}} + 5 \cdot \frac{\frac{1}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}} = 4 + 2 \cdot \frac{10}{99} + 5 \cdot \frac{1}{99} = 4 + \frac{25}{99} = \frac{421}{99}$

5.

a) Note que $\sqrt{36} < \sqrt{45} < \sqrt{49}$, logo $6 < \sqrt{45} < 7$. Um bom palpite para o valor de $\sqrt{45}$ é

$$\sqrt{36} + \frac{45 - 36}{49 - 36} = \sqrt{36} + \frac{9}{13} = 6 + \frac{9}{13} = 6{,}7\,.$$

Testando o valor encontrado:

$$6{,}7^2 = 44{,}89\,.$$

Portanto, $6{,}7 < \sqrt{45}$. Aumentamos o palpite inicial em $0{,}01$:

$$6{,}71^2 = \mathbf{45{,}0}241\,.$$

Logo, $6{,}71$ aproxima o valor de $\sqrt{45}$ com precisão de uma casa decimal.

b) Note que $\sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9}$, logo $2 < \sqrt{7} < 3$. Um bom palpite para o valor de $\sqrt{7}$ é

$$\sqrt{9} - \frac{2}{5} = 3 - \frac{2}{5} = 2{,}6\,.$$

Testando o valor encontrado:

$$2{,}6^2 = 6{,}76\,.$$

Portanto, $2{,}6 < \sqrt{7}$. Aumentamos o palpite inicial de $0{,}01$ em $0{,}01$:

$$2{,}61^2 = 6{,}8121$$

$$2{,}62^2 = 6{,}8644$$

$$2{,}63^2 = 6{,}9169$$

$$2{,}64^2 = 6{,}9696$$

$$2{,}65^2 = \mathbf{7{,}0}225$$

Logo, $2{,}65$ aproxima o valor de $\sqrt{7}$ com precisão de uma casa decimal.

6.

a) $1,\overline{6}$

$1.$ A parte inteira de $1,\overline{6}$ é:

$$a_0 = 1$$

Subtraindo $1,\overline{6}$ pela sua parte inteira:

$$1,\overline{6} - 1 = 0,\overline{6} \neq 0$$

O decimal $0,\overline{6}$ pode ser reescrito como:

$$\frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \cdots = 6 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = 6 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{6}{9}$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{1}{\frac{6}{9}} = \frac{9}{6}$$

A parte inteira de $\frac{9}{6}$ é:

$$a_1 = 1$$

Subtraindo $\frac{9}{6}$ pela sua parte inteira:

$$\frac{9}{6} - 1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

A parte inteira de 2 é:

$$a_2 = 2$$

Subtraindo 2 pela sua parte inteira:

$$2 - 2 = 0$$

Forma compacta da fração contínua de $\mathbf{1,\overline{6}}$:

$$\mathbf{1,\overline{6} = [1; 1, 2]}$$

2. Neste caso, a_2 é o limite da aproximação. Portanto,

$$\frac{1}{a_2} = \frac{1}{2}$$

Somando com a_1:

$$\frac{1}{2} + a_1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

Invertendo o resultado e somando com a_0:

$$\frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}.$$

Assim, $\frac{5}{3}$ é a fração reduzida do número $\mathbf{1,\overline{6}}$.

b) 2,25

1. A parte inteira de $2{,}25$ é:

$$a_0 = 2$$

Subtraindo $2{,}25$ pela sua parte inteira:

$$2{,}25 - 2 = 0{,}25 \neq 0$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{1}{0{,}25} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

A parte inteira de 4 é:

$$a_1 = 4$$

Subtraindo 4 pela sua parte inteira:

$$4 - 4 = 0$$

Forma compacta da fração contínua de $\mathbf{2,25}$:

$$\mathbf{2,25} = [\mathbf{2}; \mathbf{4}]$$

2. Neste caso, a_1 é o limite da aproximação. Portanto,

$$\frac{1}{a_1} = \frac{1}{4}$$

Somando com a_0:

$$\frac{1}{4} + a_0 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

Assim, $\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}$ é a fração reduzida do número $\mathbf{2,25}$.

7.

a) $\sqrt{5}$

1. A parte inteira de $\sqrt{5}$ é:

$$a_0 = 2$$

Subtraindo $\sqrt{5}$ pela sua parte inteira:

$$\sqrt{5} - 2 \neq 0$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \sqrt{5} + 2$$

A parte inteira de $\sqrt{5} + 2$ é:

$$a_1 = 4$$

Subtraindo $\sqrt{5} + 2$ pela sua parte inteira:

$$\sqrt{5} + 2 - 4 = \sqrt{5} - 2$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \sqrt{5} + 2$$

Perceba que nas duas inversões foram obtidos os mesmos resultados. Assim, os próximos a_n já ficam determinados, isto é, $a_n = 4$, para $n = 1, 2, 3, \dots$. Logo, a forma compacta da fração contínua de $\sqrt{5}$ é

$$\sqrt{\mathbf{5}} = [\mathbf{2}; \mathbf{4}, \mathbf{4}, \mathbf{4}, \dots].$$

2. Estabelecendo a_5 como o limite da aproximação, temos

$$\frac{1}{a_5} = \frac{1}{4}$$

Somando com a_4:

$$\frac{1}{4} + a_4 = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$$

Invertendo o resultado e somando com a_3:

$$\frac{4}{17} + a_3 = \frac{4}{17} + 4 = \frac{72}{17}$$

Invertendo o resultado e somando com a_2:

$$\frac{17}{72} + a_2 = \frac{17}{72} + 4 = \frac{305}{72}$$

Invertendo o resultado e somando com a_1:

$$\frac{72}{305} + a_1 = \frac{72}{305} + 4 = \frac{1292}{305}$$

Invertendo o resultado e somando com a_0:

$$\frac{305}{1292} + a_0 = \frac{305}{1292} + 2 = \frac{2889}{1292}$$

Assim, $\frac{\mathbf{2889}}{\mathbf{1292}}$ é uma fração reduzida que aproxima o número $\sqrt{\mathbf{5}}$.

b) π

Obs.: Para este item, é recomendado que o aluno disponha de calculadora científica.

1. Calcularemos até a_5. A parte inteira de π é:

$$a_0 = 3$$

Subtraindo π pela sua parte inteira:

$$\pi - 3 \neq 0$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{1}{\pi - 3}$$

A parte inteira de $\frac{1}{\pi-3}$ é:

$$a_1 = 7$$

Subtraindo $\frac{1}{\pi-3}$ pela sua parte inteira:

$$\frac{1}{\pi - 3} - 7 = \frac{1 - 7(\pi - 3)}{\pi - 3} = \frac{22 - 7\pi}{\pi - 3} \neq 0$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{\pi - 3}{22 - 7\pi}$$

A parte inteira de $\frac{\pi-3}{22-7\pi}$ é:

$$a_2 = 15$$

Subtraindo $\frac{\pi-3}{22-7\pi}$ pela sua parte inteira:

$$\frac{\pi - 3}{22 - 7\pi} - 15 = \frac{\pi - 3 - 15(22 - 7\pi)}{22 - 7\pi} = \frac{106\pi - 333}{22 - 7\pi} \neq 0$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{22 - 7\pi}{106\pi - 333}$$

A parte inteira de $\frac{22-7\pi}{106\pi-333}$ é:

$$a_3 = 1$$

Subtraindo $\frac{22-7\pi}{106\pi-333}$ pela sua parte inteira:

$$\frac{22 - 7\pi}{106\pi - 333} - 1 = \frac{22 - 7\pi - (106\pi - 333)}{106\pi - 333} = \frac{355 - 113\pi}{106\pi - 333} \neq 0$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{106\pi - 333}{355 - 113\pi}$$

A parte inteira de $\frac{106\pi-333}{355-113\pi}$ é:

$$a_4 = 292$$

Subtraindo $\frac{106\pi-333}{355-113\pi}$ pela sua parte inteira:

$$\frac{106\pi-333}{355-113\pi}-292=\frac{106\pi-333-292(355-113\pi)}{355-113\pi}$$

$$=\frac{33102\pi-103993}{355-113\pi}\neq 0$$

Invertendo o resultado:

$$\frac{355-113\pi}{33102\pi-103993}$$

A parte inteira de $\frac{355-113\pi}{33102\pi-103993}$ é:

$$a_5=1$$

Forma compacta da fração contínua de $\boldsymbol{\pi}$:

$$\boldsymbol{\pi}=[\mathbf{3};\mathbf{7},\mathbf{15},\mathbf{1},\mathbf{292},\mathbf{1},\ldots].$$

2. Estabelecendo a_5 como o limite da aproximação, temos

$$\frac{1}{a_5}=\frac{1}{1}=1$$

Somando com a_4:

$$1+a_4=1+292=293$$

Invertendo o resultado e somando com a_3:

$$\frac{1}{293}+a_3=\frac{1}{293}+1=\frac{294}{293}$$

Invertendo o resultado e somando com a_2:

$$\frac{293}{294}+a_2=\frac{293}{294}+15=\frac{4703}{294}$$

Invertendo o resultado e somando com a_1:

$$\frac{294}{4703}+a_1=\frac{294}{4703}+7=\frac{33215}{4703}$$

Invertendo o resultado e somando com a_0:

$$\frac{4703}{33215}+a_0=\frac{4703}{33215}+3=\frac{104348}{33215}$$

Assim, $\boldsymbol{\frac{104348}{33215}}$ é uma fração reduzida que aproxima o número $\boldsymbol{\pi}$.

REFERÊNCIAS

Proposta 1: O SISTEMA DE NUMERAÇÃO INDO-ARÁBICO

AABOE, Asger. Episódios da história antiga da matemática. Tradução de João Bosco Pitombeira. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. Título original: Early History of Mathematics.

IFRAH, Georges. História universal dos algarismos. Tradução de Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. 2º v. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. Título original: Histoire universalle des chiffres.

RODRIGUES, Aroldo Eduardo Athias. Sistemas de numeração: evolução histórica, fundamentos e sugestões para o ensino. 2013. 166 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências da Educação. Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém.

RUIS, André Valner. Sistemas de numeração e grandezas incomensuráveis. 2014. 122 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto.

Proposta 2: A DESCOBERTA DOS IRRACIONAIS

AGUILAR, Ivan; DIAS, Marina Sequeiros. A Construção dos Números Reais e suas Extensões. 2015. 4º Colóquio da Região Centro-Oeste. Universidade Federal Fluminense.

BOYER, Carl. História da matemática. Tradução de Helena Castro. 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2012. Título original: A history of mathematics.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Tradução de Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011. Título original: Introduction to the History of Mathematics.

OLIVEIRA, Raul Rodrigues de. Exercícios sobre números irracionais. Brasil Escola. Disponível em: <https://exercicios.brasilescola.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-numeros-irracionais.htm>. Acesso em: jul. 2021.

PINTO, Ronald Simões de Mattos; COSTA, Liliana Manuela G. C. da. A irracionalidade e transcendência de certos logaritmos. Sociedade Brasileira de Matemática, vol. 6, número 1, p. 67-73, 2018.

REFERÊNCIAS

Proposta 3: A COMPLETUDE DOS REAIS

AGUILAR, Ivan; DIAS, Marina Sequeiros. A Construção dos Números Reais e suas Extensões. 2015. 4º Colóquio da Região Centro-Oeste. Universidade Federal Fluminense.

Aproximação de raízes quadradas para a segunda casa decimal. Produção de Khan Academy Brasil. 2013. 1 vídeo (7min14s). Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=img7MMhZnak. Acesso em: jul. 2021.

BOYER, Carl. Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. Título original: Historical Topics for the Mathematics Classroom.

CORADO, Jean Ferreira. Números irracionais: uma proposta didática para o ensino médio. 2020. 84 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias. Universidade Federal do Oeste da Bahia, Barreiras.

ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, João Bosco. Tópicos de História da Matemática. 1ª ed. Coleção PROFMAT, SBM, 2012.