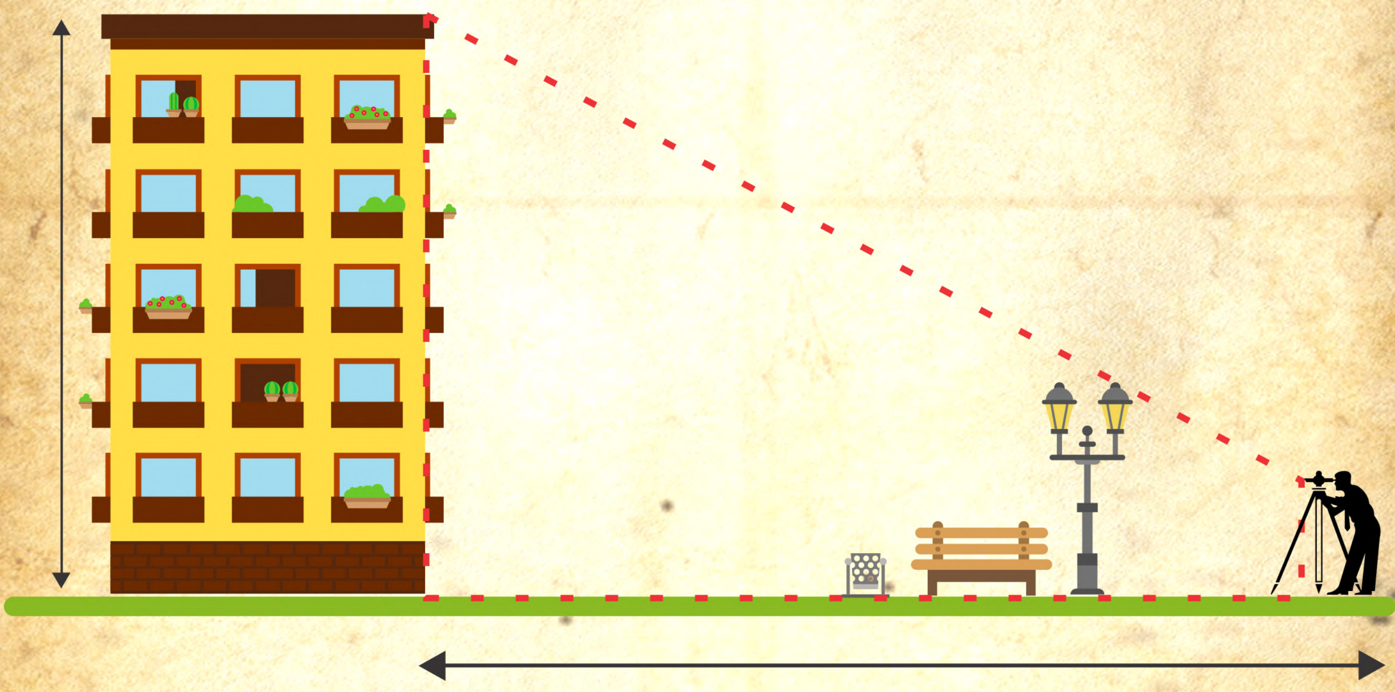
MANUAL DE USO DO TEODOLITO NAS AULAS DE MATEMÁTICA



Cassiano Henrique Monteiro Corrêa Ramos

Márcio Rostirolla Adames

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Ramos, Cassiano Henrique Monteiro Corrêa
Manual do uso do teodolito nas aulas de matemática [livro eletrônico] / Cassiano Henrique Monteiro Corrêa Ramos, Márcio Rostirolla Adames. -- 1. ed. -- Curitiba, PR : Ed. dos Autores, 2021.
PDF

ISBN 978-65-00-30529-6

1. Geometria - Estudo e ensino 2. Matemática I. Adames, Márcio Rostirolla. II. Título.

21-80654 CDD-516.007

Índices para catálogo sistemático:

1. Geometria : Estudo e ensino 516.007

Aline Graziele Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

Cassiano Henrique Monteiro Corrêa Ramos

Márcio Rostirolla Adames

Manual de Uso do Teodolito nas Aulas de Matemática

1ª edição

Curitiba / PR
2021

Prefácio

O propósito desse manual é servir como um guia prático para o professor de ensino básico que deseje explorar temáticas da geometria no contexto da topografia. As temáticas exploradas nesse manual são: o Teorema de Tales; Semelhança de Triângulos; Razões Trigonométricas; o Teorema de Pitágoras; Lei dos Senos; Lei dos Cossenos e o Teorema de Heron.

O manual é organizado da seguinte forma:

- Cada capítulo inicia com uma apresentação curta do tema matemático tradado nele. A apresentação é destacada em uma caixa no mesmo estilo deste prefácio.
- Em seguida são apresentadas algumas aplicações do tema do capítulo na topografia. Essas aplicações são destacadas por caixas com uma barra lateral amarela.

Aplicação na topografia 0.1. Exemplo de uma caixa contendo uma aplicação na topografia.

- Seguem exercícios resolvidos de provas e concursos, relacionados ao tema do respectivo capítulo e que envolvem questões diretas de topografia ou técnicas aplicáveis na topografia. Eles são destacados com uma barra lateral vermelha.

Questões de provas 0.2 (UFXX, 20XX)**.** Exemplo de uma caixa contendo uma aplicação na topografia.

- Apresentamos em seguida sugestões de atividades práticas, com indicações do material necessário (a maioria envolvendo o uso de um teodolito) e com o procedimento preciso para seu desenvolvimento com os estudantes. Estas são indicadas por barras laterais marrons.

Atividade prática 0.3. Exemplo de uma caixa com atividades práticas que podem ser desenvolvidas pelos estudantes.

- Blocos de advertência dão, ainda, recomendações de como aplicar as técnicas descritas.

!! Leve os estudantes para aplicar as técnicas da topografia.

Não temos como objetivo que o presente manual seja um guia aprofundado na matemática dos temas tratados ou substitua o livro didático nos assuntos específicos; mas buscamos produzir uma referência rápida para permitir intervenções pontuais ligando os conceitos estudados na escola a aplicações práticas da matemática no mundo real, que foram de grande importância na navegação e na cartografia e que estão implícitas em muitas técnicas modernas.

O foco principal desse trabalho é oferecer uma possibilidade de trabalhar, em sala de aula e com atividades práticas, a interdisciplinaridade e a contextualização no âmbito da topografia, que através de seu levantamento planimétrico e altimétrico utiliza fórmulas advindas da geometria e da trigonometria e que são, por vezes, apresentadas sem muita contextualização pelos professores do ensino fundamental e médio.

Também desenvolvemos um modelo de Teodolito Didático, que pode ser impresso com uma impressora 3D, e está disponível em:

`https://www.thingiverse.com/thing:3001363`

As atividades podem ser desenvolvidas com qualquer teodolito e a impressão 3D do modelo disponibilizado é apenas uma opção.

1- Teorema de Tales

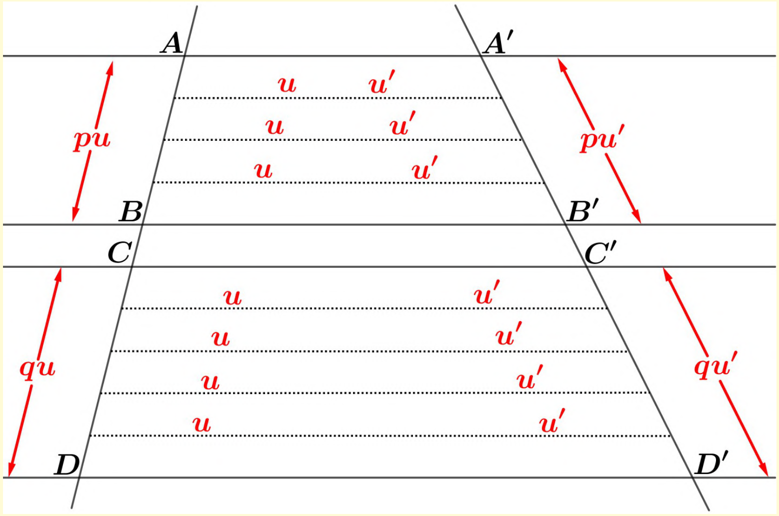
O Teorema de Tales, atribuído ao matemático (entre tantas outras ocupações) grego antigo Tales de Mileto é um resultado fundamental da geometria e tem diversas aplicações, que serão exploradas ao longo desse capítulo. Apresentamos uma demonstração do teorema apenas para o caso de segmentos comensuráveis, contudo ressaltamos que o teorema também vale para segmentos quaisquer.

Teorema 1.1 (Teorema de Tales)**.** *Se um feixe de retas paralelas corta duas transversais quaisquer, então a razão entre as medidas de dois segmentos obtidos em uma das transversais é igual à razão entre as medidas dos segmentos correspondentes da outra transversal.*

Demonstração. Considere $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dois segmentos comensuráveis[a] de uma transversal e $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ são os respectivos segmentos correspondentes da outra transversal. Vamos provar que:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}.$$

E como tratam-se de segmentos comensuráveis, existe um segmento u que é submúltiplo de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, ou seja, existem p, $q \in \mathbb{N}$ tais que $\overline{AB} = p.u$ e $\overline{CD} = q.u$, conforme a figura abaixo.



Daí segue:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{p \cdot u}{q \cdot u} = \frac{p}{q} \tag{I}$$

Os segmentos AB e CD ficam então divididos em p e q segmentos de comprimento u. Traçando retas paralelas ao feixe adicionais pelos pontos de divisão, dividimos os segmentos $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ também em p e q segmentos respectivamente. Observe que as paralelas pelos pontos de divisão dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dividem os segmentos $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$ em segmentos de comprimentos iguais[b] u'. temos $\overline{A'B'} = p.u'$ e $\overline{C'D'} = q.u'$, logo:

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{p \cdot u'}{q \cdot u'} = \frac{p}{q} \tag{II}$$

De (I) e (II) vem que:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}.$$

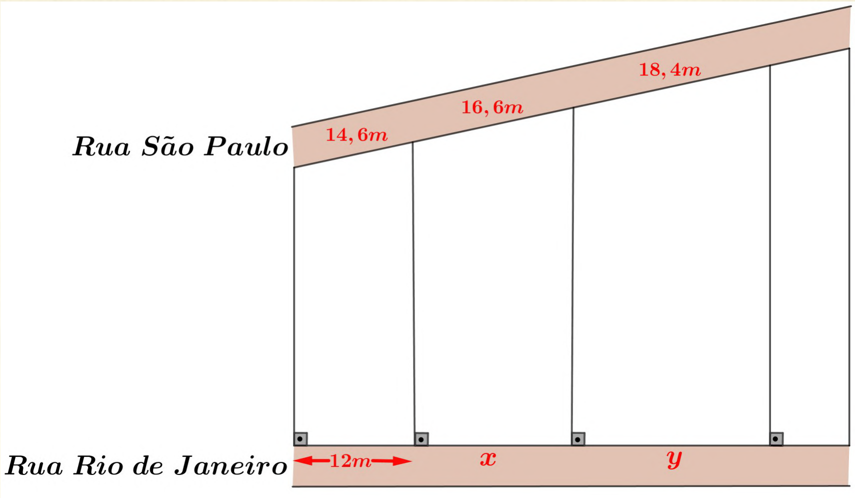
□

[a] Em aplicações práticas podemos sempre considerar segmentos comensuráveis, pois nossas medidas possuem um número limitado de casas decimais após a vírgula. De modo que sempre consideramos números racionais nas medidas práticas e quaisquer dois segmentos de medida racional são comensuráveis.

[b] Omitimos a demonstração dessa afirmação, que é baseada na semelhança de triângulos.

Aplicações - Teorema de Tales na Topografia

Aplicação na topografia 1.2. Observe a planta de um loteamento na Vila Planalto



Quais as medidas das frentes dos lotes, representados por x e y respectivamente, em relação à Rua Rio de Janeiro?

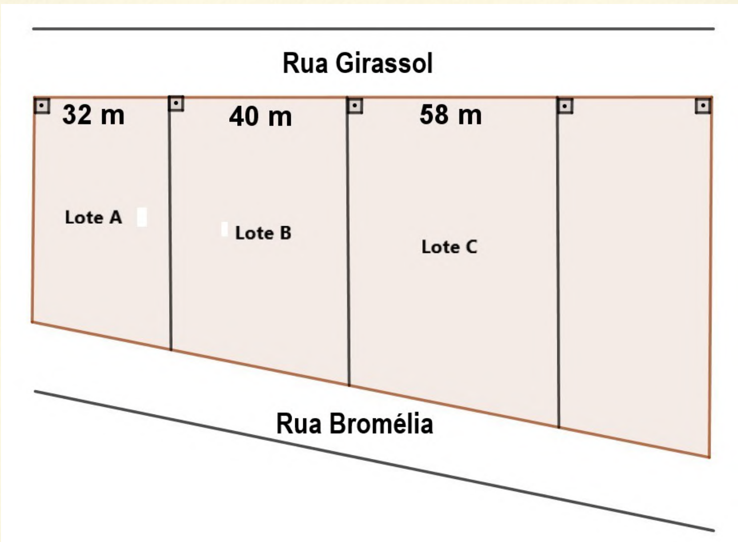
Resolução:

Esse problema pode ser resolvido usando-se o Teorema de Tales, admitindo os limites laterais dos lotes como retas paralelas e as frentes (Rua Rio de Janeiro) e fundo (Rua São Paulo) como transversais. Sendo assim:

$$\frac{12}{x} = \frac{14{,}6}{16{,}6} \Longrightarrow 14{,}6x = 199{,}2 \Longrightarrow x \simeq 13{,}7m.$$
$$\frac{12}{y} = \frac{14{,}6}{18{,}4} \Longrightarrow 14{,}6y = 220{,}8 \Longrightarrow y \simeq 15{,}1m.$$

⊗

Aplicação na topografia 1.3. Três terrenos têm frente para a Rua Bromélia e fundo para a Rua Girassol, como na figura abaixo. As divisas laterais são perpendiculares à Rua Girassol. Sabendo que a frente dos 03 terrenos na Rua Bromélia mede 195 m, qual a medida da frente de cada um dos terrenos dessa rua?



Resolução:

Como as retas que contém as divisas laterais são perpendiculares à reta da rua Girassol, elas formam um feixe de paralelas e podemos aplicar o Teorema de Tales.

Sabemos que a medida dos fundos dos 03 lotes é $32m + 40m + 58m = 130m$ e que a medida da frente dos 03 lotes é $195m$.

Denotando a frente do lote A por x, temos

$$\frac{195}{130} = \frac{x}{32} \Longrightarrow 130x = 6240 \Longrightarrow x = 48m.$$

Denotando a frente do lote B por y, temos

$$\frac{195}{130} = \frac{y}{40} \Longrightarrow 130y = 7800 \Longrightarrow y = 60m.$$

Denotando a frente do lote C por z, temos

$$\frac{195}{130} = \frac{z}{58} \Longrightarrow 130z = 11310 \Longrightarrow z = 87m.$$

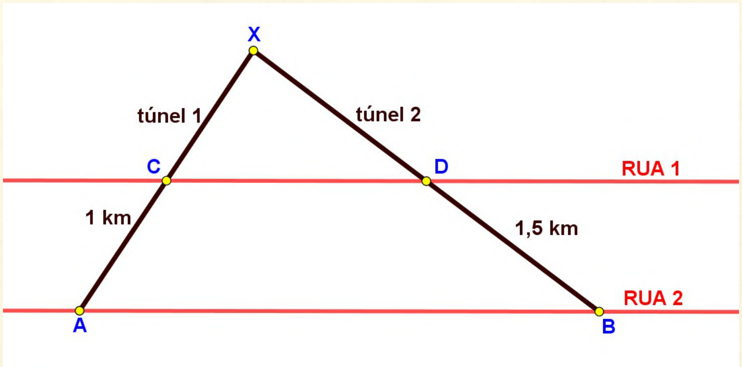
$\otimes$

Provas e Concursos: Teorema de Tales

Questões de provas 1.4 (UFV-MG, 2007)**.** Sob duas ruas paralelas de uma cidade serão construídos, a partir das estações A e B, passando pelas estações C e D, dois túneis retilíneos, que se encontrarão na estação X, conforme ilustra a figura abaixo.

A distância entre as estações A e C é de $1km$ e entre as estações B e D, de $1{,}5km$. Em cada um dos túneis são perfurados $12m$ por dia. Sabendo que o túnel 1 demandará 250 dias para ser construído e que os túneis deverão se encontrar em X, no mesmo dia, é CORRETO afirmar que o número de dias que a construção do túnel 2 deverá anteceder à do túnel 1 é:

a) ( ) 135 b) ( ) 145 c) ( ) 125 d) ( ) 105 e) ( )115



Adaptado de (UFV-MG, 2007)

Resolução:

Como $\overline{CD}//\overline{AB}$ e os demais segmentos são transversais à eles, podemos aplicar o Teorema de Tales (para enquadrar exatamente no enunciado do teorema, precisamos considerar uma reta paralela à $\overline{CD}$ passe por X).

Sabemos que todo dia são perfurados $12m$, e que o túnel 1 leva 250 dias para ser construído, logo seu tamanho (AX) será:

$$12m \cdot 250 = 3000m = 3km$$

Para saber o tamanho do túnel 2 (BX) utilizaremos o Teorema de Tales da seguinte forma:

$$\frac{AC}{AX} = \frac{BD}{BX} \Longrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1{,}5}{BX} \Longrightarrow BX = 4{,}5km = 4500m.$$

Retornando à informação de que a cada dia constrói-se 12 metros, o número de dias necessários para construir o túnel 2 será:

$$\frac{4500}{12} = 375 \text{ dias}.$$

Como o túnel 1 levará 250 dias para ser construído, a diferença será:

$$375 - 250 = 125 \text{ dias}$$

Portanto o túnel 2 deve ser iniciar 125 dias antes da construção do túnel 1 e a resposta é c).

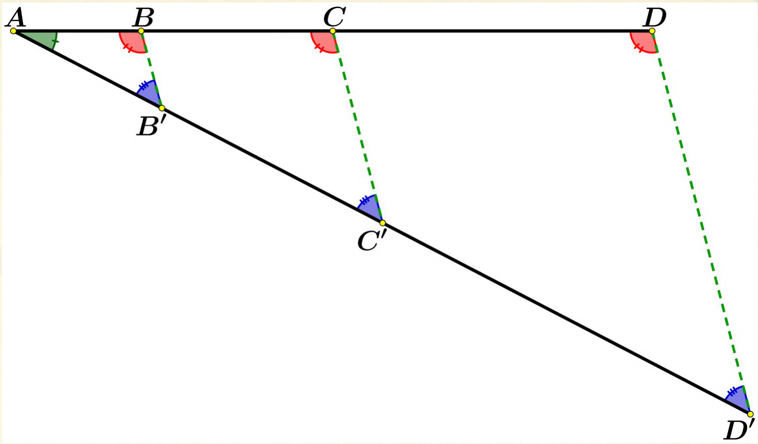
$\otimes$

Questões de provas 1.5 (Unicamp-SP, 1993). A figura a seguir mostra um segmento AD dividido em três partes: $AB = 2cm$, $BC = 3cm$ e $CD = 5cm$.

O segmento $\overline{AD'}$ mede $13cm$ e as retas $\overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são paralelas a $\overline{DD'}$.

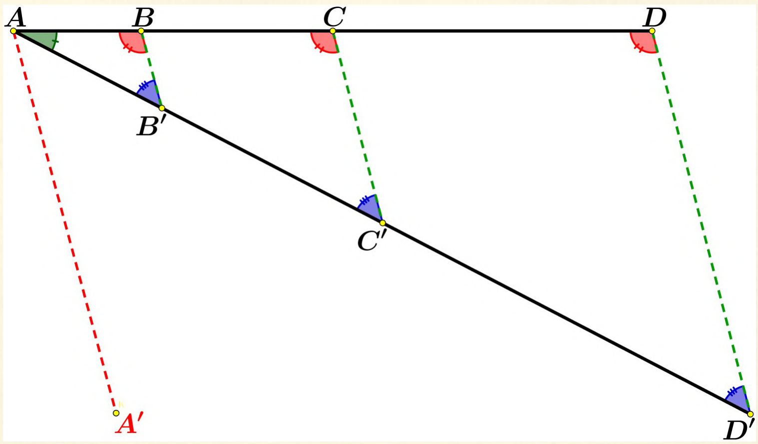
Determine o comprimento do segmento $\overline{AB'}$.

a) ( ) 2,6 b) ( ) 2,7 c) ( ) 2,8 d) ( ) 2,9 e) ( )3,0



Resolução:

Como $\overline{BB'}//\overline{CC'}//\overline{DD'}$ e como pelo ponto A passam infinitas retas, podemos escolher uma reta conveniente $\overline{AA'}$, conforme figura abaixo, tal que seja paralelas a todas as retas anteriores. Sendo assim podemos aplicar o Teorema de Tales para resolver essa questão.



Para isso utilizaremos o segmento $\overline{AD}$, que mede $AD = AB + BC + CD = 2 + 3 + 5 = 10$. Sendo assim

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AD}{AD'} \Longrightarrow \frac{2}{AB'} = \frac{10}{13} \Longrightarrow 10 \cdot AB' = 2 \cdot 13 \Longrightarrow AB' = \frac{26}{10} = 2{,}6.$$

O comprimento do segmento $\overline{AB'}$ é 2,6, item a).

⊗

Teorema de Tales com o Teodolito Didático

Atividade prática 1.6. Cálculo de uma distância inacessível utilizando o Teodolito Didático e aplicando o Teorema de Tales.

Material Necessário:

- Teodolito Didático;
- Trena;
- 03 balizas ou cabo de vassouras para alinhamento.

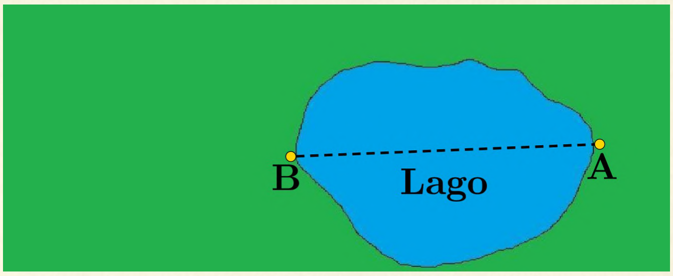
Procedimento:

Explique aos alunos que a prática realizada requer conhecimentos de geometria plana, reveja conceitos de ângulos suplementares, ângulos correspondentes em retas paralelas e o Teorema de Tales. Para essa atividade pode-se escolher um objeto que esteja a uma distância inacessível ou simular essa situação (Ex.: árvore do outro lado de um lago).

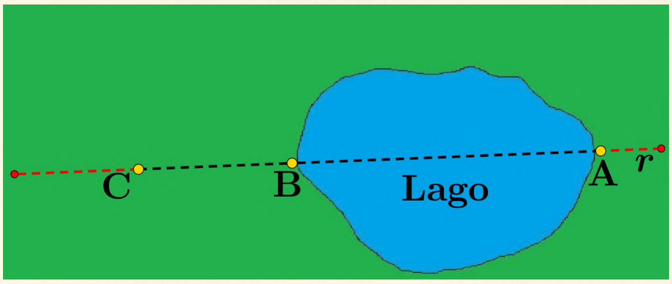
Atividade prática:

O procedimento de captura de dados é:

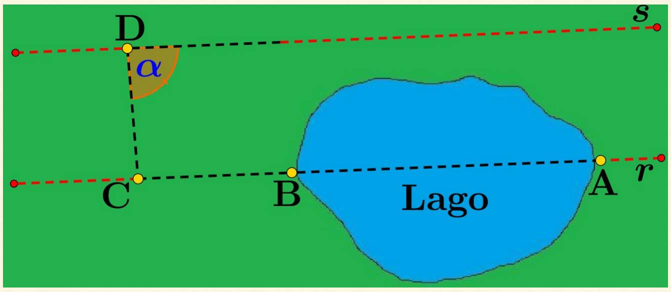
1. localizar os pontos entre os quais se deseja calcular a distância. Nesse caso denominamos ponto A no lado inacessível e ponto B do lado acessível (Passo 1);



2. alinhado aos pontos A e B localizar um ponto C na reta que contém A e B, que chamaremos de r, de modo que BC possa ser medida com uma trena (Passo 2);

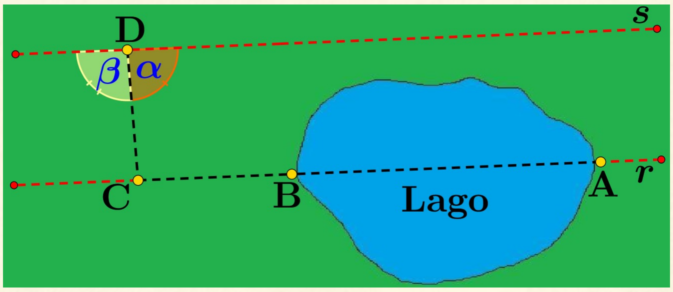


3. distar de forma concorrente ao ponto C, e definir um ponto D, de tal forma que seja possível traçar uma reta transversal s, externa ao obstáculo, e que seja possível medir distâncias de pontos de saté os pontos A e B da reta r;

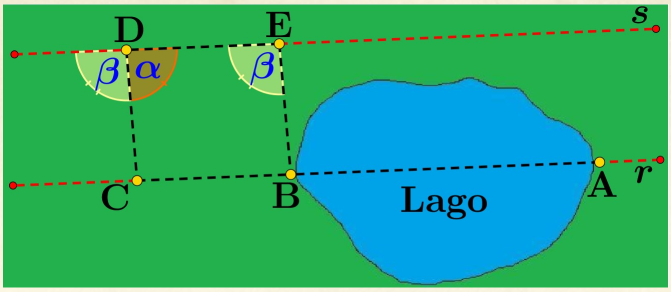


4. com o teodolito instalado no ponto D medir o ângulo horizontal α da reta s em relação ao ponto C (Passo 3);

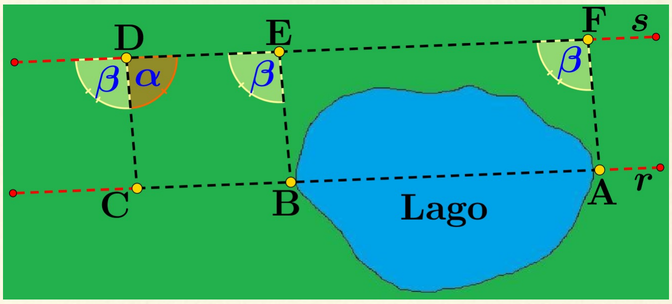
5. calcular o valor de β que seja suplementar à α, logo $\beta = 180° - \alpha$ (Passo 4);



6. posicionar duas balizas (ou cabos de vassoura) alinhadas a reta s de forma que seja possível caminhar com o teodolito pela reta s até avistar de um ponto E, o ponto B da reta r sob um ângulo interno $\measuredangle BED = \beta$. Esse procedimento garante que os segmentos CD e BE sejam paralelos. Medir com a trena a distância de D até E (Passo 5);



7. fazer procedimento análogo ao anterior, até encontrar o ponto F na reta s, de modo que o ângulo interno tenha medida $\measuredangle AFE = \beta$, fazendo assim $AF//BE//CD$. Medir com a trena a distância de E até F (Passo 6).



Feito o procedimento acima descrito, podemos calcular a distância inacessível AB utilizando o Teorema de Tales:

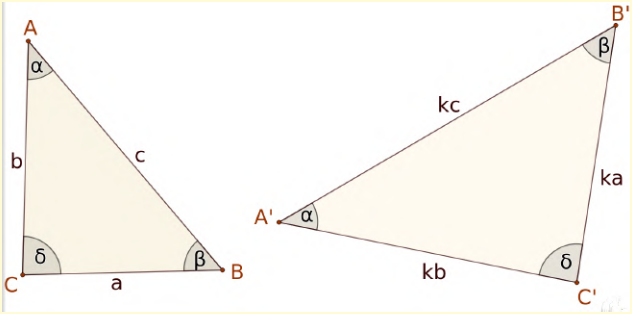
$$\frac{AB}{BC} = \frac{EF}{DE}$$

Resolvendo a regra de três acima achamos o valor de AB, que é a distância desejada.

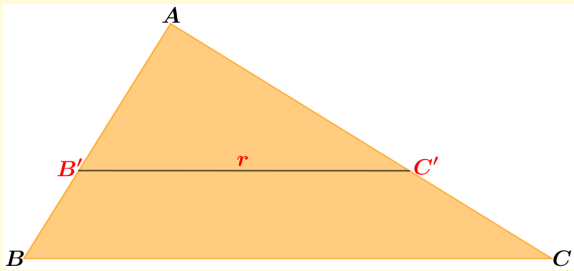
2- Semelhança de Triângulos

Utilizando a semelhança de triângulos podemos calcular indiretamente medidas inacessíveis. Apresentamos a definição de semelhança de triângulos abaixo e, em seguida, 4 resultados importantes para as aplicações sem demonstração.

Definição 2.1. Dizemos que dois triângulos[a] $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ são semelhantes, e escrevemos $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, quando os ângulos internos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes possuem medidas proporcionais.



Teorema 2.2 (Teorema Fundamental da Proporcionalidade)**.** *Sejam $\triangle ABC$ um triângulo e r uma reta que intercepta os segmentos AB e AC em pontos distintos B' e C', respectivamente. Então $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$ se, e somente se, r é paralela à reta que contém BC.*



Apresentamos sem demonstração as seguintes proposições, cujas demonstrações podem ser encontradas em Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana de Pompeo e Dolce.

Proposição 2.3 (Caso AA de semelhança)**.** Se dois triângulos possuem dois ângulos congruentes, então eles são semelhantes, ou seja:

$$\begin{cases} \measuredangle CAB = \measuredangle C'A'B' \\ \measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C' \end{cases} \Longrightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

Proposição 2.4 (Caso LAL de semelhança)**.** Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos respectivos lados de outro triângulo e os ângulos compreendidos entre eles são congruentes, então os triângulos são semelhantes, ou seja, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} A'B' = k \cdot AB \\ \measuredangle CAB = \measuredangle C'A'B' \\ A'C' = k \cdot AC \end{cases} \Longrightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

Proposição 2.5 (Caso LLL de semelhança)**.** Se dois triângulos têm os lados respectivos proporcionais, então eles são semelhantes, ou seja, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{cases} A'B' = k \cdot AB \\ A'C' = k \cdot AC \\ B'C' = k \cdot BC \end{cases} \Longrightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

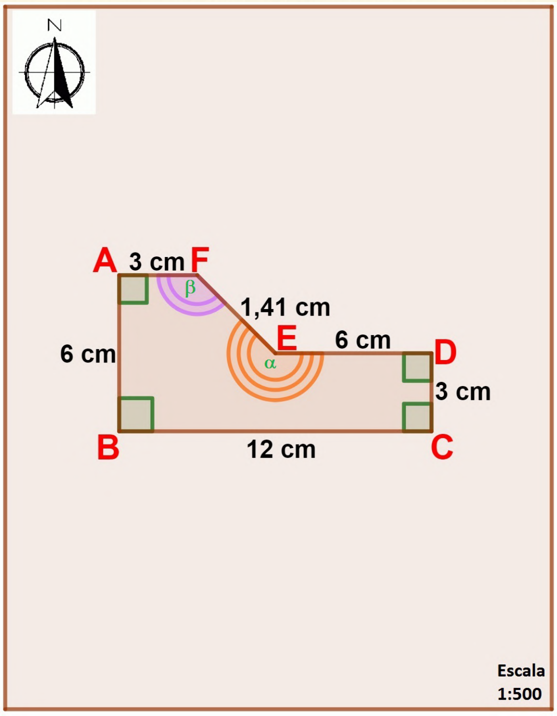
[a] Analogamente dois polígonos são semelhantes se têm os ângulos internos congruentes e os respectivos lados proporcionais.

Aplicações - Semelhança na Topografia

Aplicação na topografia 2.6. Um cliente procurou um técnico para que ele resolvesse um problema. O cliente havia recebido um desenho de seu terreno mas o achou muito pequeno, ele queria ampliar o desenho sem mexer no formato do terreno. O desenho que ele levou estava num papel A4 e numa escala de 1:500. As medidas do terreno original foram convertidos em escala, da seguinte forma:

$$\begin{cases} AB = 30m \text{ (tamanho real) } = 6cm \text{ (escala 1:500)} \\ BC = 60m \text{ (tamanho real) } = 12cm \text{ (escala 1:500)} \\ CD = 15m \text{ (tamanho real) } = 3cm \text{ (escala 1:500)} \\ DE = 30m \text{ (tamanho real) } = 6cm \text{ (escala 1:500)} \\ EF = 7{,}05m \text{ (tamanho real) } = 1{,}41cm \text{ (escala 1:500)} \\ FA = 15m \text{ (tamanho real) } = 3cm \text{ (escala 1:500)} \\ \measuredangle FAB = \measuredangle ABC = \measuredangle BCE = \measuredangle CDE = 90^\circ \\ \measuredangle DEF = \alpha \\ \measuredangle EFA = \beta \end{cases}$$

A figura abaixo ilustra o desenho do cliente.



Resolução:

O técnico, ao receber o desenho, verificou que as dimensões do papel A4 (21cm × 29,7cm) não permitiam duplicar o tamanho da figura com o papel na mesma orientação, pois o lado BC (maior lado do desenho), que media 12cm, não caberia nos 21cm da largura do papel A4 quando duplicado.

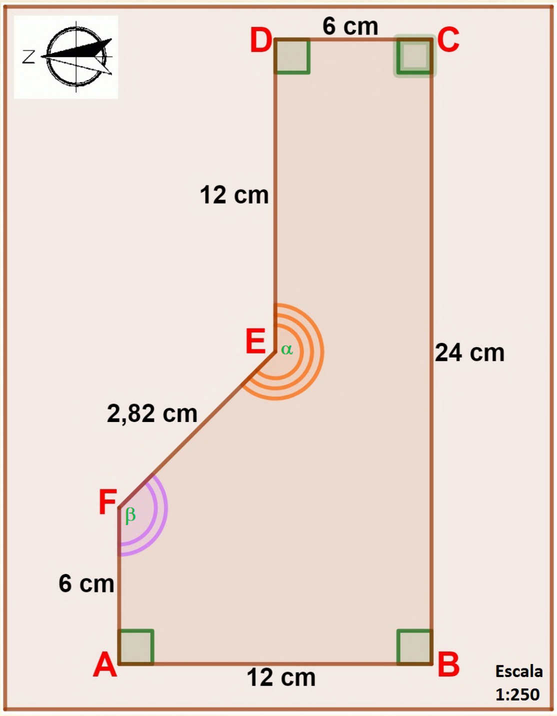
Mas rapidamente ele mudou a orientação do papel e percebeu que o lado BC duplicado daria 24cm e caberia nos 29,7cm da folha. Todas as outras medidas caberiam nas duas orientações.

Por fim ele desenhou o mesmo mapa em escala 1:250, portanto com o dobro do tamanho, e manteve os mesmos ângulos internos, mantendo assim a semelhança das figuras.

As novas medidas do desenho ficaram da seguinte forma:

$$\begin{aligned} AB = 30m \text{ (tamanho real) } &= 12cm \text{ (escala 1:250)} \\ BC = 60m \text{ (tamanho real) } &= 24cm \text{ (escala 1:250)} \\ CD = 15m \text{ (tamanho real) } &= 6cm \text{ (escala 1:250)} \\ DE = 30m \text{ (tamanho real) } &= 12cm \text{ (escala 1:250)} \\ EF = 7{,}05m \text{ (tamanho real) } &= 2{,}82cm \text{ (escala 1:250)} \\ FA = 15m \text{ (tamanho real) } &= 6cm \text{ (escala 1:250)} \end{aligned}$$

Esse segundo mapa está representado na figura abaixo. Note que a orientação do terreno em relação ao Norte magnético foi mantida no segundo desenho.



⊗

Aplicação na topografia 2.7. Um técnico com bons conhecimentos em topografia e matemática foi chamado para resolver um problema. Um produtor precisava calcular a maior dimensão de um lago que atravessava sua propriedade, mas não dispunha de aparelhos topográficos, apenas trena e balizas. Como o técnico poderia calcular essa distância aproximada?

Resolução:

O técnico respondeu que calcularia isso, e que precisaria apenas de 3 balizas, 5 piquetes e a trena, além de um ajudante.

Primeiramente ele fixou dois piquetes nos pontos extremos do lago na propriedade consultada, e os chamou de pontos A e B. A partir daí ele procurou um ponto dentro da propriedade que avistasse os dois pontos e do qual fosse possível medir a distância até os pontos A e B com o uso da trena, e que permitisse também estender os segmentos por mais uns metros sem obstáculos, e nomeou esse terceiro ponto de C. Ao medir as distâncias entre os pontos B e C obteve $35m$, e repetindo o procedimento entre os pontos A e C obteve $56m$.

Em seguida o técnico fez o seguinte procedimento:

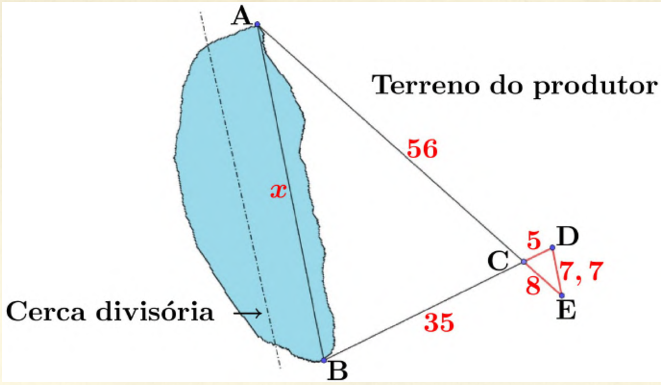
- alinhado à reta $\overline{AC}$ ele mediu mais $8m$ e marcou o ponto D;
- da mesma forma, alinhado à reta $\overline{BC}$ ele mediu mais $5m$ e marcou o ponto E.

E justificou ao curioso proprietário que utilizou a escala $7:1$ para reduzir as medidas, pois $7 \cdot 8 = 56$ e $7 \cdot 5 = 35$.

Finalmente, o técnico fez uma última medida, entre os pontos D e E e obteve $7{,}7m$. Após uma simples conta na calculadora respondeu ao proprietário que a distância procurada era de aproximadamente $54m$.

O proprietário espantado pediu que o técnico explicasse como resolveu isso. O técnico pediu uma folha e uma régua.

Ao desenhar o esboço das medidas, o técnico obteve dois triângulos semelhantes, conforme figura abaixo:



Explicou ao proprietário que os triângulos ABC e CDE eram semelhantes, com escala $7:1$, ou razão de semelhança igual a 7.

De fato, conforme figura acima, verifiquemos que

$$\begin{cases} \dfrac{AC}{CE} = 7 \\ \measuredangle ACB \equiv \measuredangle ECD \quad \text{(opostos pelo vértice)} \implies \Delta ACB \equiv \Delta ECD \qquad \text{(Caso LAL)} \\ \dfrac{BC}{CD} = 7 \end{cases}$$

Logo, pela semelhança de triângulos, temos que

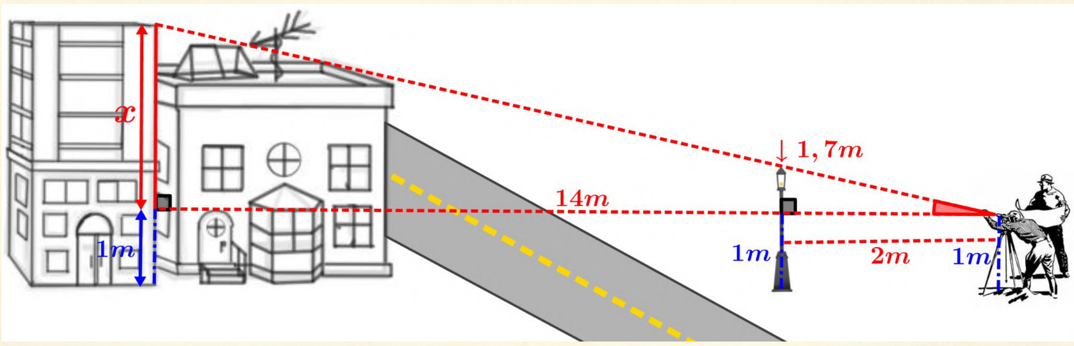
$$\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{CE} = \frac{x}{DE} \implies \frac{35}{5} = \frac{56}{8} = \frac{x}{7{,}7}$$

Daí segue que

$$\frac{35}{5} = \frac{x}{7{,}7} \implies 5x = 269{,}5 \implies x = 53{,}9m \simeq 54m$$

$\otimes$

Aplicação na topografia 2.8. Um técnico precisava medir a altura de um prédio, e dispunha apenas de um teodolito simples e uma trena. Como seria possível para ele calcular essa altura?



Resolução:

Como o prédio e o poste são perpendiculares ao solo, eles formam um ângulo reto em relação à reta horizontal que passa pela luneta do teodolito. Se avistarmos o topo do prédio e do poste sob uma mesma reta teremos dois triângulos semelhantes (pelo caso AA).

Sabendo isso o técnico fez o seguinte procedimento:

1. procurou um local do outro lado da rua, de forma que entre o teodolito e o prédio tivesse um obstáculo que fosse fácil conhecer a altura, nesse caso ele localizou um poste de $1{,}7m$ de altura;

2. instalou e nivelou o teodolito de forma que, pela luneta do teodolito, ele pudesse ver o topo do prédio atrás do topo do poste;

3. depois ele mediu a distância horizontal do teodolito até o poste $(2m)$, até o prédio $(14m)$ e a altura do teodolito do chão $(1m)$.

Feito esse procedimento e utilizando a semelhança de triângulos, conforme a figura acima, ele calculou o valor de x da seguinte forma:

$$\frac{2}{1{,}7-1}=\frac{14}{x}\Longrightarrow 2x=14\cdot 0{,}7\Longrightarrow x=\frac{9{,}8}{2}=4{,}9m.$$

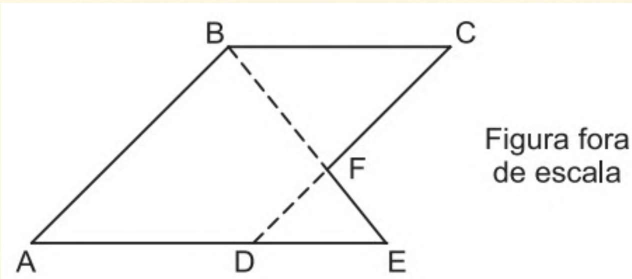
Logo, a altura do prédio será o valor de x mais a altura do teodolito, nesse caso $4{,}9+1=5{,}9$ metros.

$\otimes$

Semelhança em Provas e Concursos

Questões de provas 2.9 (FGV-SP, 2004)**.** Dados $AB=18cm$, $AE=36cm$ e $DF=8cm$, e sendo o quadrilátero $ABCD$ um paralelogramo, o comprimento de BC, em cm, é igual a

a) ( ) 20 b) ( ) 22 c) ( ) 24 d) ( ) 26 e) ( )30



Fonte: (FGV-SP, 2004)

Resolução:

Do paralelogramo $ABCD$ temos $\overline{BC}//\overline{AD}$. Note ainda que $AE=AD+DE$. Como

$$\measuredangle BAE=\measuredangle FDE \quad \text{(ângulos correspondentes)}$$
$$\measuredangle AEB=\measuredangle DEF \quad \text{(ângulo comum)}$$

temos, pelo caso AA de semelhança, $\triangle AEB\sim\triangle DEF$. E assim:

$$\frac{AB}{DF}=\frac{AE}{DE}\Longrightarrow\frac{18}{8}=\frac{36}{DE}\Longrightarrow 18\cdot DE=288\Longrightarrow DE=\frac{288}{18}=16cm.$$

Do paralelogramo $ABCD$ temos que $\overline{BC}\equiv\overline{AD}$. Para achar o valor de BC usaremos

$$AE=BC+DE\Longrightarrow BC=AE-DE=36-16=20cm.$$

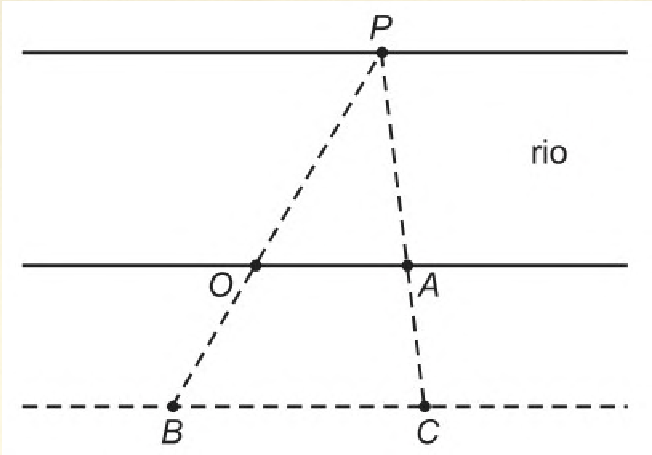
Portanto, o comprimento de BC é 20 cm e a resposta é a).

$\otimes$

Questões de provas 2.10 (VUNESP, 2004)**.** Um observador situado num ponto O, localizado na margem de um rio, precisa determinar sua distância até um ponto P, localizado na outra margem, sem atravessar o rio. Para isso marca, com estacas, outros pontos do lado da margem em que se encontra, de tal forma que P, O e B alinhados entre si e P, A e C também. Além disso, $\overline{OA}$ é paralelo a $\overline{BC}$, $OA=25m$, $BC=40m$ e $OB=30m$, conforme a figura.

A distância, em metros, do observador em O até o ponto P é:

a) ( ) 30 b) ( ) 35 c) ( ) 40 d) ( ) 45 e) ( )50



Fonte: (VUNESP, 2004)

Resolução:

Observe que $\triangle OPA \sim \triangle BPC$ pelo caso AA, pois

$$\measuredangle POA = \measuredangle PBC, \qquad \text{(ângulos correspondentes)}$$
$$\measuredangle PAO = \measuredangle PCB, \qquad \text{(ângulos correspondentes)}$$

e que $PB = PO + OB$. Denotando $PO = x$ temos:

$$PB = x + 30$$

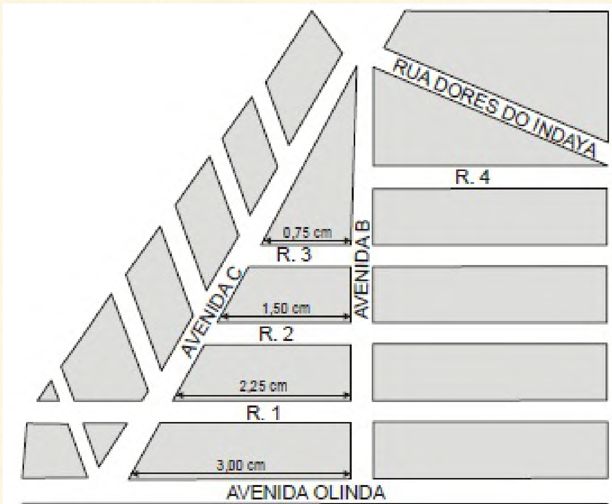
Da semelhança de triângulos temos

$$\frac{PO}{PB} = \frac{OA}{BC} \Longrightarrow \frac{x}{x+30} = \frac{25}{40} \Longrightarrow 40x = 25 \cdot (x+30) \Longrightarrow 40x = 25x + 750 \Longrightarrow 40x - 25x = 750$$
$$\Longrightarrow 15x = 750 \Longrightarrow x = \frac{750}{15} = 50m.$$

A distância do ponto O até o ponto P é de 50 metros e a resposta é e).

$\otimes$

Questões de provas 2.11 (UFG-GO, 2007)**.** O desenho abaixo, construído na escala 1 : 7000, representa parte do bairro Água Branca em Goiânia. As ruas R.1, R.2 e R.3 são paralelas à Av. Olinda. O comprimento da Av. B, da esquina com a Av. Olinda até a esquina com a Rua Dores do Indaya, é de $350m$.

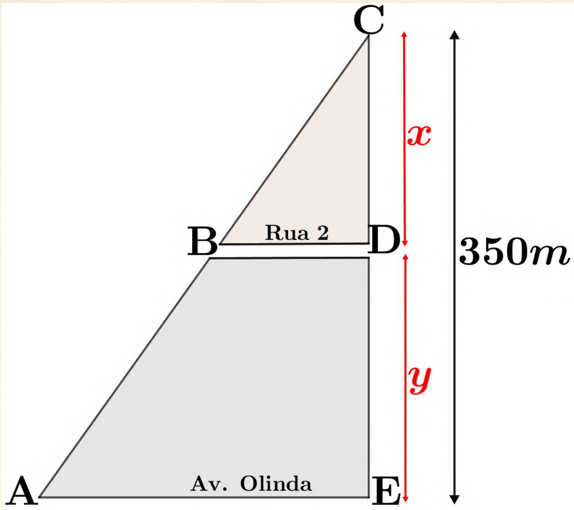


Fonte: [UFG-GO, 2007]

Considerando-se que cada rua mede $7m$ de largura, calcule quantos metros um pedestre caminhará na Av. B, partindo da esquina com Av. Olinda, até a esquina com a rua R.2, sem atravessá-las.

Resolução:

Esse problema pode ser resolvido usando-se a semelhança de triângulos. Note que a Avenida Olinda e a Rua 2 determinam triângulos semelhantes junto com as avenidas B e C.



Pela figura acima, e utilizando a escala 1 : 7000, do enunciado, temos:

Figura	Real
1	7000
1,5	BD

$$BD = 10500cm = 105m.$$

Analogamente temos

Figura	Real
1	7000
3	AE

$$AE = 21000cm = 210m.$$

Note que

$$\overline{AE}//\overline{BD} \Longrightarrow \Delta ACE \sim \Delta BCD \qquad \text{(TFP)}$$

Logo, pela semelhança de triângulos

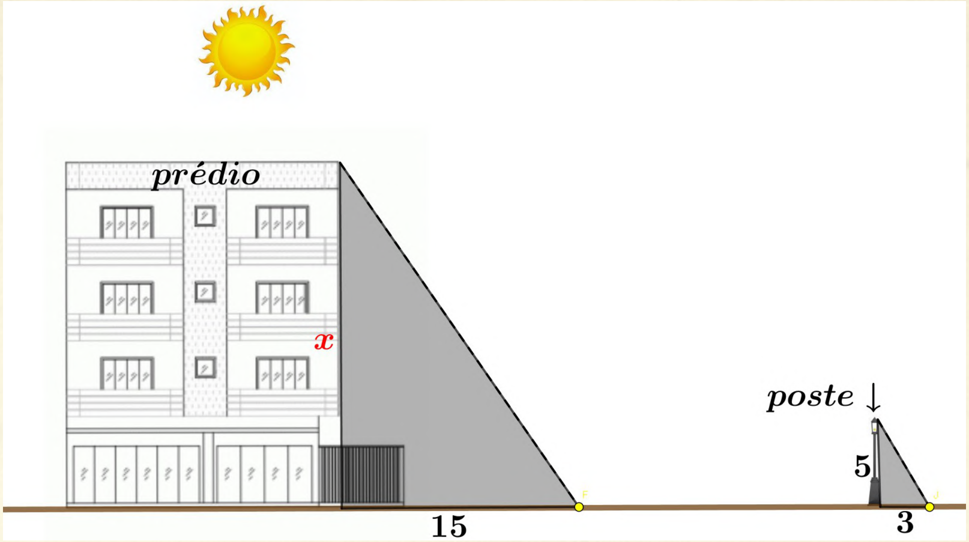
$$\frac{BD}{AE} = \frac{CD}{CE} \Longrightarrow \frac{105}{210} = \frac{x}{350} \Longrightarrow x = \frac{36750}{210} = 175m.$$

Como a rua mede $7m$ de largura (pelo enunciado), a distância percorrida da Av. Olinda à Rua 2 será:

$$y = 350m - x - 7m = 350m - 175m - 7m = 168m.$$

$\otimes$

Questões de provas 2.12 (UNESP,2002)**.** A sombra de um prédio, num terreno plano, numa determinada hora do dia, mede $15m$. Nesse mesmo instante, próximo ao prédio, a sombra de um poste de altura $5m$ mede $3m$.



A altura do prédio, em metros é:
a) ( ) 25 b) ( ) 29 c) ( ) 30 d) ( ) 45 e) ( )75

Resolução:

Assumimos que os raios solares chegam paralelos à Terra, devido à distância enorme. Como o prédio e os postes são perpendiculares ao solo, os ângulos superiores são congruentes e os ângulos inferiores são retos. Assim a sombra do sol determina dois triângulos semelhantes.

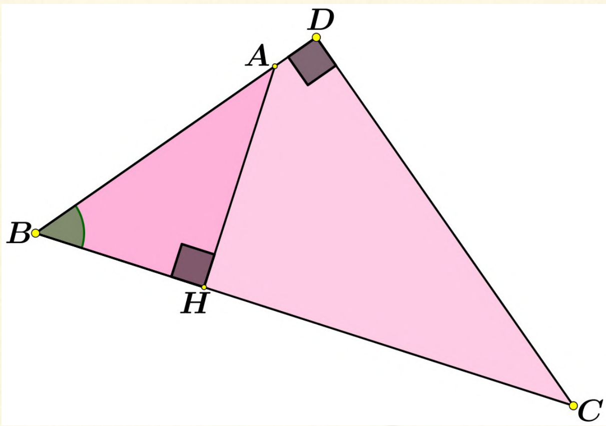
Sendo assim, pela definição de semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{x}{5} = \frac{15}{3} \Longrightarrow 3x = 75 \Longrightarrow x = \frac{75}{3} = 25m.$$

A altura do prédio é de 25 metros e a resposta é a).

⊗

Questões de provas 2.13 (Mackenzie-SP,2002)**.** Na figura, $AH = 4$, $BC = 10$ e $DC = 8$.



A medida de AB é:
a) ( ) 4,8 b) ( ) 5,2 c) ( ) 5,0 d) ( ) 4,6 e) ( )5,4

Resolução:

Observe os triângulos $\triangle AHB$ e $\triangle CDB$. Note que ambos são triângulos retângulos com um ângulo congruente ($\measuredangle AHB = \measuredangle CDB = 90°$) e possuem um ângulo comum ($\widehat{B}$), logo, pelo caso AA, são semelhantes.

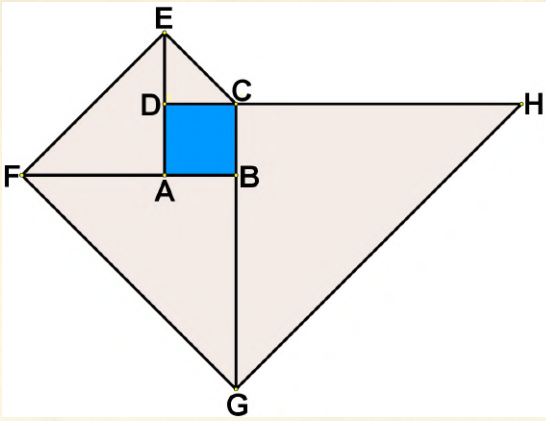
Sendo assim, pela definição de semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{AH}{CD} = \frac{AB}{BC} \Longrightarrow \frac{4}{8} = \frac{AB}{10} \Longrightarrow 8 \cdot AB = 40 \Longrightarrow x = \frac{40}{8} = 5.$$

A medida de AB é 5 e a resposta é c).

⊗

Questões de provas 2.14 (UFBA, 2007)**.** Na figura abaixo, todos os triângulos são retângulos isósceles, e $ABCD$ é um quadrado.



Nessas condições, determine o quociente $\dfrac{GH}{CE}$.

Resolução:

Como todos os triângulos são retângulos isósceles, podemos afirmar que, dois a dois, eles são semelhantes pelo caso LAL.

Denotaremos a medida dos lados do quadrado de x, sendo assim, no $\triangle EDC$ temos:

$$DE = DC = x \qquad \text{(I)}$$

De (I) e analisando o $\triangle EAF$ temos:

$$\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE} \Longrightarrow AF = AE = x + x = 2x \qquad \text{(II)}$$

De (II) e analisando o $\triangle FBG$ temos:

$$\overline{BF} = \overline{BA} + \overline{AF} \Longrightarrow BF = x + 2x \Longrightarrow BG = BF = 3x \qquad \text{(III)}$$

De (III) e analisando o $\triangle GCH$ temos:

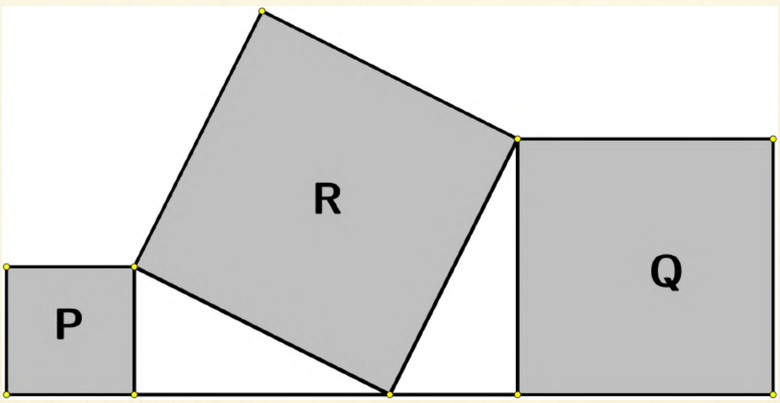
$$\overline{CG} = \overline{CB} + \overline{BG} \Longrightarrow CG = x + 3x \Longrightarrow GH = CG = 4x \qquad \text{(IV)}$$

Como $\triangle EAF \sim \triangle GCH$, os lados correspondentes são semelhantes e a razão de semelhança entre eles é $\dfrac{CG}{CD}$. Sendo assim:

$$\frac{GH}{CE} = \frac{CG}{CD} = \frac{4x}{x} \Longrightarrow \frac{GH}{CE} = 4.$$

$\otimes$

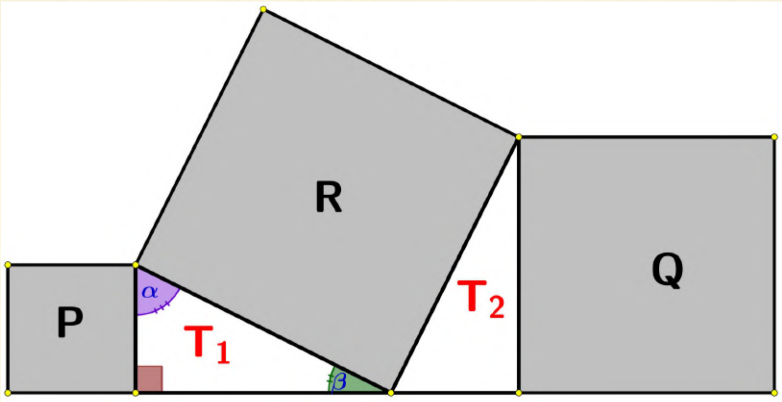
Questões de provas 2.15 (OBMEP 1ª Fase Nível 3, 2016)**.** Na figura, a área dos quadrados P e R são iguais a $24cm^2$ e $168cm^2$, respectivamente. Qual a área do quadrado Q?



a) ( ) $96cm^2$ b) ( ) $100cm^2$ c) ( ) $121cm^2$ d) ( ) $144cm^2$ e) ( )$156cm^2$

Resolução:

Da figura acima, chamaremos de T_1 o triângulo retângulo formado pelos quadrados P e R. Analogamente, chamaremos de T_2 o triângulo retângulo formado pelos quadrados Q e R. No triângulo T_1 temos um ângulo reto com o vértice apenas no quadrado P, e chamaremos de α o ângulo formado pelos lados dos quadrados P e R e de β o ângulo que contém o vértice apenas no quadrado R, conforme a figura abaixo.



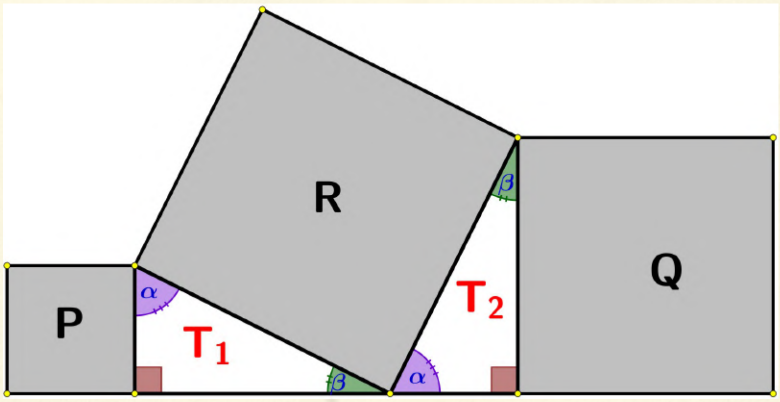
Vejamos que os triângulos T_1 e T_2 são congruentes:

Primeiramente note que $\alpha + \beta = 90°$[a] e, somando $90°$ de ambos os lados, obtemos

$$\alpha + \beta + 90° = 180°$$

Por outro lado o ângulo raso[b] formado pelos vértices que contém os ângulos retos de T_1 e T_2 pode ser decomposto na soma de β, um ângulo reto de R e um ângulo de T_2. e, pela equação acima, esse ângulo de T_2 também deve ter medida α.

Pelo caso AA de semelhança, os triângulos T_1 e T_2 são semelhante, mas por terem hipotenusas de mesma medida (lados de R) a razão de semelhança é 1 e os dois triângulos são congruentes.



Vamos agora descobrir quanto mede o lado do quadrado Q, que chamaremos de l_Q, e sua área(A_Q) será $A_Q = l_Q^2$.

Analisando o quadrado P e sabendo que sua área(A_P) é $24cm^2$, basta utilizar a fórmula da área do quadrado para saber quanto mede seu lado(l_P). Sendo assim:

$$A_P = l_P^2 \Longrightarrow l_P^2 = 24 \Longrightarrow l_P = \sqrt{24}cm.$$

Analogamente, no quadrado R, de área(A_R) igual a $168cm^2$, o lado(l_R) será:

$$A_R = l_R^2 \Longrightarrow l_R^2 = 168 \Longrightarrow l_R = \sqrt{168}cm.$$

Sendo assim, T_1 e T_2 possuem um dos catetos que medem $\sqrt{24}cm$ e hipotenusa que mede $\sqrt{168}cm$.

Para achar o outro cateto (l_Q) basta aplicar o Teorema de Pitágoras em qualquer um dos dois triângulos congruentes. Nesse caso:

$$l_R^2 = l_P^2 + l_Q^2 \Longrightarrow l_Q^2 = l_R^2 - l_P^2 = \left(\sqrt{168}\right)^2 - \left(\sqrt{24}\right)^2 = 168 - 24 = 144$$

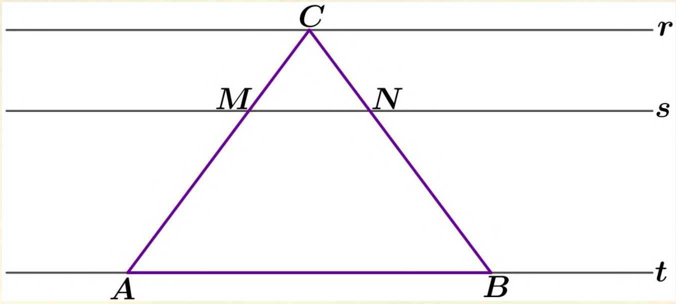
Portanto, a área do quadrado Q é $A_Q = l_Q^2 = 144cm^2$, item d).

⊗

[a]Pela propriedade da soma interna dos ângulos de um triângulo.

[b]O ângulo se torna raso quando seus lados são semi – retas opostas e a medida for de dois retos de $180°$.

Questões de provas 2.16 (UFMS, 2003)**.** Na figura abaixo estão representadas três retas coplanares e paralelas r, s e t, tais que à distância entre r e s é igual a $2cm$ e a distância entre s e t é igual a $3cm$.

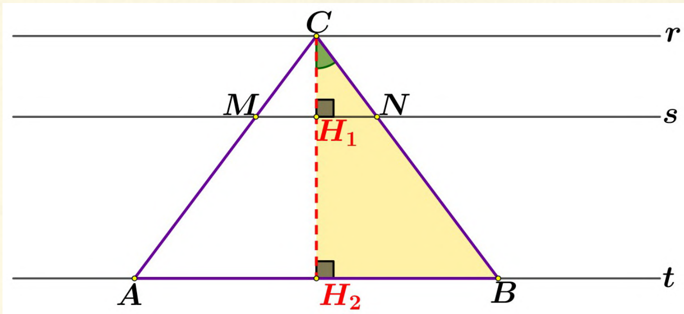


Sabendo-se que o segmento MN tem $4cm$, a área do triângulo ABC vale

a) ( ) $25cm^2$ b) ( ) $22{,}5cm^2$ c) ( ) $20cm^2$ d) ( ) $17{,}5cm^2$ e) ( )$15cm^2$

Resolução:

Sabendo que $r//s//t$, traçaremos a partir de C, uma reta perpendicular a s e t e chamaremos de H_1 o pé da altura relativa à reta s e de H_2 o pé da altura relativa à reta t, conforme a figura abaixo.



A distância da reta r à reta t é:

$$CH_2 = CH_1 + H_1H_2 = 2 + 3 = 5.$$

Note que $\triangle CH_1N \sim \triangle CH_2B$ pelo caso AA, pois $\widehat{C}$ é comum e $\measuredangle CH_1N \equiv \measuredangle CH_2B = 90°$.
Das relações de semelhança de triângulos temos:

$$\frac{CH_1}{CH_2} = \frac{MN}{AB} \Longrightarrow \frac{2}{5} = \frac{4}{AB} \Longrightarrow 2 \cdot AB = 20 \Longrightarrow AB = \frac{20}{2} = 10cm.$$

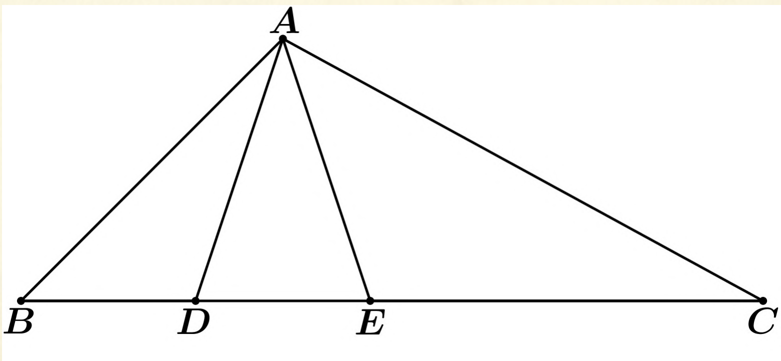
E a área do triângulo ABC é:

$$A = \frac{AB \cdot CH_2}{2} = \frac{10 \cdot 5}{2} = \frac{50}{2} = 25cm^2.$$

Portanto, a área do triângulo ABC é $25cm^2$ e a resposta é a).

$\otimes$

Questões de provas 2.17 (ENA-PROFMAT, 2017)**.** No triangulo $\triangle ABC$ da figura abaixo, $\measuredangle ABC = \measuredangle EAC$, $\measuredangle ACB = \measuredangle DAB$, $\overline{BD} = 2$ e $\overline{CE} = 3$.



Com base nas informações acima, podemos afirmar que a razão $\dfrac{AB}{AC}$ é igual a:

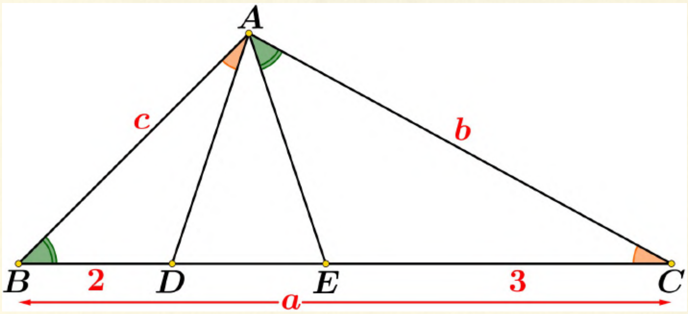
a) ( ) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ b) ( ) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ c) ( ) $\dfrac{2}{3}$ d) ( ) $\dfrac{3}{2}$ e) ( ) $\dfrac{4}{9}$

Resolução:

Denotando $BC = a$, $AB = c$ e $AC = b$, queremos determinar $\dfrac{c}{b}$.

Pelos ângulos fornecidos no enunciado, conforme verificamos na figura abaixo, podemos afirmar pelo caso AA que:

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \qquad \text{(I)}$$
$$\triangle ABC \sim \triangle EAC \qquad \text{(II)}$$



Da semelhança (I) temos:

$$\frac{c}{a} = \frac{2}{c} \Longrightarrow c^2 = 2a \qquad \text{(III)}$$

Da semelhança (II) temos:

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{b} \Longrightarrow b^2 = 3a \qquad \text{(IV)}$$

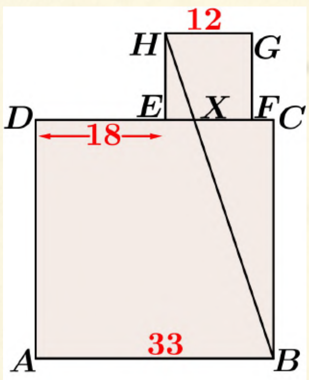
De (III) e (IV) temos:

$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3} \Longrightarrow \frac{c}{b} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Portanto a razão $\dfrac{AB}{AC} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ e a resposta certa é item a).

$\otimes$

Questões de provas 2.18 (ENA-PROFMAT,2016)**.** Sejam $ABCD$ e $EFGH$ quadrados de lados 33 e 12, com $\overline{EF}$ sobre o lado $\overline{DC}$. Seja X o ponto de intersecção dos segmentos $\overline{HB}$ e $\overline{DC}$, como mostrado na figura abaixo.

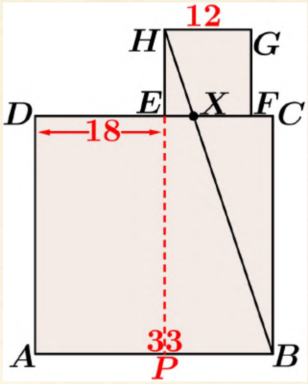


Se $DE = 18$, então EX é igual a:

a) ( ) 3 b) ( ) 3,5 c) ( ) 4 d) ( ) $3\sqrt{2}$ e) ( ) 5

Resolução:

Prolonguemos o segmento $\overline{HE}$ até interceptar o segmento $\overline{AB}$ e denominamos esse ponto de P, conforme figura abaixo.



Note que

$$PB = AB - AP = 33 - 18 = 15. \qquad \text{(I)}$$

Temos, pelo TFP, que $\triangle HEX \sim \triangle HPB$. Dessa semelhança de triângulos e de (I) temos:

$$\frac{HE}{HP} = \frac{EX}{PB} \Longrightarrow \frac{12}{12+33} = \frac{EX}{15} \Longrightarrow 45 \cdot EX = 180 \Longrightarrow EX = \frac{180}{45} = 4.$$

$\otimes$

Portanto o segmento $\overline{EX}$ mede 4 e a resposta certa é item c).

Semelhança com o Teodolito Didático

Atividade prática 2.19. Cálculo de distância entre dois objetos com um obstáculo entre eles.

Material Necessário:

- Teodolito Didático;
- Trena.

Procedimento:
Revise com os alunos o caso LAL de semelhança e o caso LAL de congruência de triângulos.
Atividade prática:
Podemos resolver esse problema de duas maneiras:
Caso 1. Congruência de Triângulos

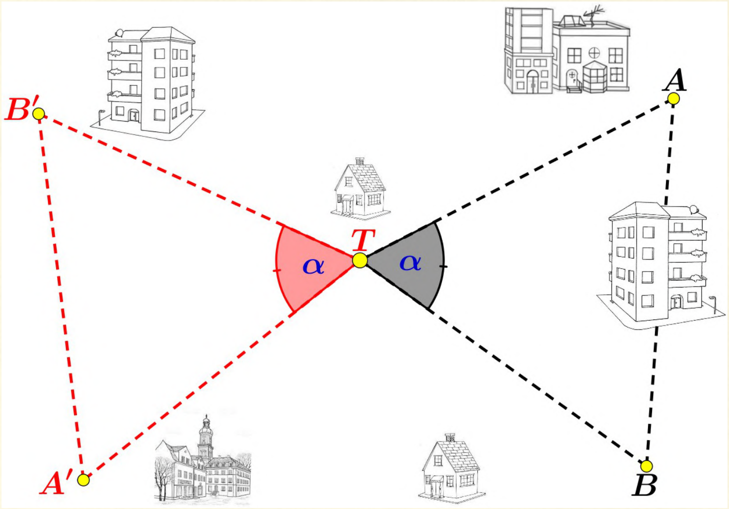
1. localizar o Teodolito Didático a uma distância dos pontos de forma que seja possível medir distâncias com a trena e sem obstáculos, e que seja possível em alguma direção refazer esse mesmo triângulo sem obstáculo;
2. instalar e nivelar o teodolito;
3. localizar o primeiro ponto (de preferência o ponto mais à esquerda [a]) e medir a distância horizontal até o teodolito (ponto A na figura ilustrativa abaixo);
4. zerar o teodolito, ou seja, alinhar o transferidor no valor 0 grau;
5. girar a luneta até localizar o segundo ponto e medir a distância horizontal até o teodolito (ponto B na figura ilustrativa abaixo);
6. verificar o valor em graus do alinhamento em relação ao primeiro ponto e determinar o ângulo α;
7. sem tirar o teodolito do lugar escolha uma direção sem obstáculos e com a trena faça um outro ponto inicial auxiliar(ponto A' na figura ilustrativa abaixo) com a mesma distância em relação ao primeiro ponto (Ponto A);

8. zerar o teodolito, ou seja, alinhar o transferidor no valor 0 grau;

9. girar o transferidor até dar o mesmo valor do passo 6 e medir um ponto final auxiliar (Ponto B') de mesma distância que o segundo ponto (Ponto B), em relação ao teodolito;

10. medir a distância entre os dois pontos auxiliares (Pontos A' e B').

Chamando o Teodolito Didático de T e fazendo com cuidado os procedimentos acima garantimos dois triângulos congruentes ($\triangle ATB \equiv \triangle A'TB'$), dessa forma as distâncias correspondentes são iguais, ou seja, $AB \equiv A'B'$, conforme a figura abaixo ilustra.



Caso 2. Semelhança de Triângulos

1. localizar o Teodolito Didático a uma distância dos pontos de forma que seja possível medir distâncias com a trena e sem obstáculos, e que seja possível em alguma direção refazer esse mesmo triângulo sem obstáculos;

2. instalar e nivelar o teodolito;

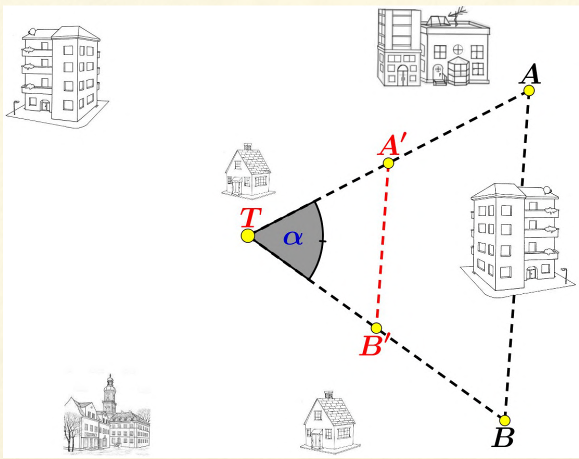
3. localizar o primeiro ponto e medir a distância horizontal até o teodolito (ponto A na figura ilustrativa abaixo);

4. calcular a metade[b] da distância até o primeiro ponto e marcar um primeiro ponto auxiliar (Ponto A');

5. girar a luneta até localizar o segundo ponto e medir a distância horizontal até o teodolito (ponto B na figura ilustrativa abaixo);

6. calcular a metade [c] da distância até o segundo ponto e marcar um segundo ponto auxiliar (Ponto B');

7. medir a distância entre os dois pontos auxiliares (Pontos A' e B').



Chamando o Teodolito Didático de T e fazendo com cuidado os procedimentos acima garantimos dois triângulos semelhantes, onde a razão de semelhança nesse caso específico é 2, pelo caso LAL de semelhança e:

$$\frac{TA}{TA'} = \frac{TB}{TB'} = \frac{AB}{A'B'} = 2$$

Dessa forma, como as distâncias correspondentes são proporcionais, posso afirmar que a distância entre os pontos A e B é o dobro da distância entre os pontos A' e B', ou seja $AB \equiv 2 \cdot A'B'$, conforme a figura acima ilustra.

[a]Nesse caso a leitura no sentido horário garante a leitura do ângulo interno.

[b]Estabelecer uma razão de semelhança de forma que entre os pontos auxiliares não hajam obstáculos, nesse caso, pela praticidade, escolhemos 1:2 (metade).

[c]É obrigatório que seja a mesma razão do item 4.

!! Escolha um obstáculo razoavelmente grande, como uma casa ou um pequeno lago, organize seus estudantes em grupos e peça que utilizem o Teodolito Didático para medir a distância entre dois objetos em lados opostos do obstáculo com as técnicas ilustradas acima.

Atividade prática 2.20. Cálculo de altura aplicando semelhança de triângulos.

Material Necessário:

- Objeto de altura conhecida (poste, pedaço de madeira, cabo de vassoura etc);
- Piquetes ou outro marcador (giz, pincel, tinta, lápis etc.);
- Trena.

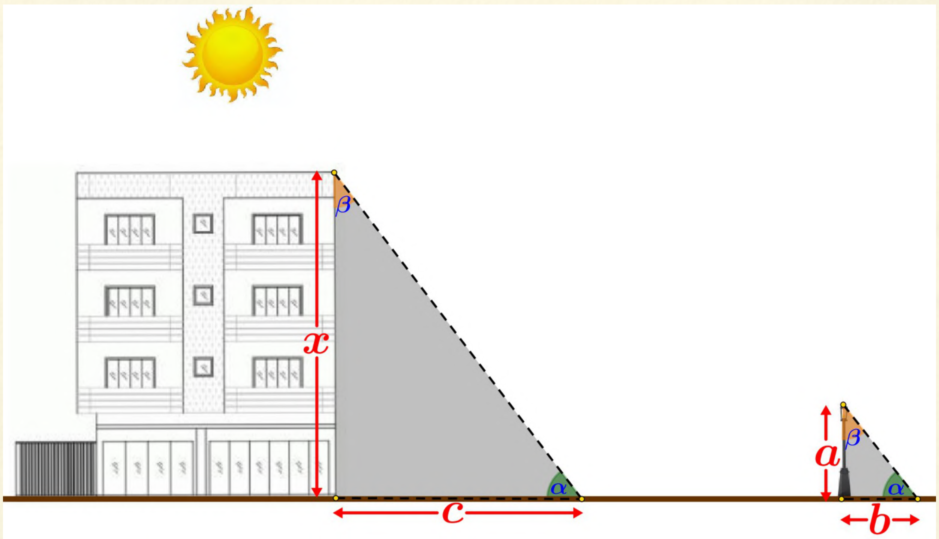
Procedimento:

Explique aos alunos que a origem dessa prática de medir alturas utilizando a sombra é atribuída a Tales de Mileto, um dos sete sábios da Grécia Antiga, e se achar conveniente, conte a lenda de Tales de Mileto e a altura da Pirâmide de Queops [a]. Para essa atividade pode-se escolher qualquer objeto vertical (Ex.: casa, árvore, poste etc.).

Atividade prática:

O procedimento é:

1. localizar o objeto que deseja calcular a altura;
2. localizar um objeto auxiliar, cuja medida é conhecida;
3. em determinado instante marcar a sombra do objeto que deseja calcular a altura e do objeto auxiliar.



Assumimos que os raios solares chegam paralelos à Terra, devido a enorme distância entre o Sol e nosso planeta. Como o prédio e os postes são perpendiculares ao solo, os ângulos superiores são congruentes e os ângulos inferiores são retos. Assim, pelo caso AA de semelhança, a sombra do sol determina triângulos semelhantes nos dois objetos.

Feito esse procedimento[b] ele usou a semelhança de triângulos, para isso denominou, conforme a figura acima:

$$\begin{aligned} a &= \text{ tamanho do objeto auxiliar,} \\ b &= \text{ tamanho da sombra do objeto auxiliar,} \\ c &= \text{ tamanho da sombra do objeto a ser medido e} \\ x &= \text{ tamanho do objeto a ser medido} \end{aligned}$$

Uma solução é aplicar a semelhança de triângulos da seguinte forma:

$$\frac{x}{c} = \frac{a}{b}$$

Resolvendo a regra de três acima achamos o valor de x e será a a altura do objeto a ser medido.

[a] A história de Tales de Mileto e essa lenda está disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm28/tales.htm.
[b] todas as medidas devem estar na mesma unidade (Ex.: cm ou m).

!! Escolha um prédio ou algum marco em sua escola, organize seus estudantes em grupos e peça que utilizem a sombra da obra de interesse e a sombra de outro objeto acessível, como um pequeno poste, para calcular a altura da primeira (omo na atividade prática acima).

Atividade prática 2.21. Cálculo de altura utilizando o Teodolito Didático e aplicando Semelhança de triângulos.

Material Necessário:

- Teodolito Didático;
- Trena;
- Pedaço de madeira reto com tamanho conhecido (ex.: cabo de vassoura medido com a trena).

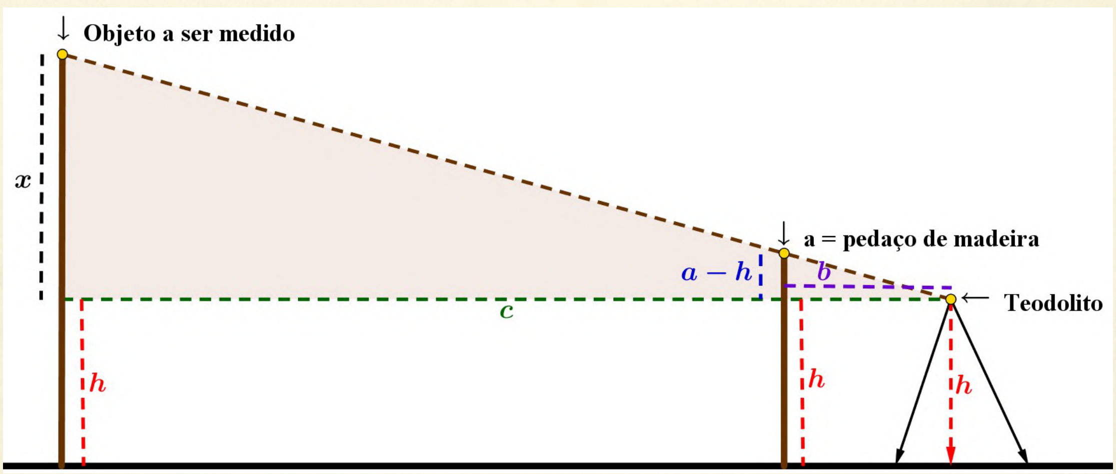
Procedimento:

Explique aos alunos que o pedaço de madeira e objeto a ser medido precisam estar perpendiculares ao solo e o terreno de preferência será ser plano, para facilitar os cálculos. Para uma melhor precisão o teodolito precisa estar paralelo ao solo e a altura do teodolito deverá ser retirada do pedaço de madeira e adicionada à altura final do objeto. Para essa atividade pode-se escolher qualquer objeto vertical (ex.: casa, árvore, poste etc.).

Atividade prática:

O procedimento de captura de dados é:

1. localizar o Teodolito Didático a uma distância possível de ser medida com a trena e sem obstáculos;
2. instalar e nivelar o teodolito de forma que pela luneta do teodolito seja possível ver a parte superior do pedaço de madeira e altura a ser medida no objeto numa mesma visada (única reta);
3. medir a distância horizontal do teodolito ao pedaço de madeira;
4. medir a distância horizontal do teodolito até o objeto a ser medido.



Feito esse procedimento[a] ele usou a semelhança de triângulos, para isso denominou, conforme a figura acima:

$$\begin{aligned} a &= \text{ tamanho do pedaço de madeira,} \\ b &= \text{ distância do teodolito ao pedaço de madeira,} \\ c &= \text{ distância do teodolito ao objeto e} \\ h &= \text{ altura do teodolito em relação ao solo} \\ x &= \text{ objeto a ser medido} \end{aligned}$$

Uma solução é aplicar a semelhança de triângulos da seguinte forma:

$$\frac{(a-h)}{b} = \frac{x}{c}$$

Resolvendo a regra de três acima achamos o valor de x, e a altura do objeto a ser medido é $x + h$.

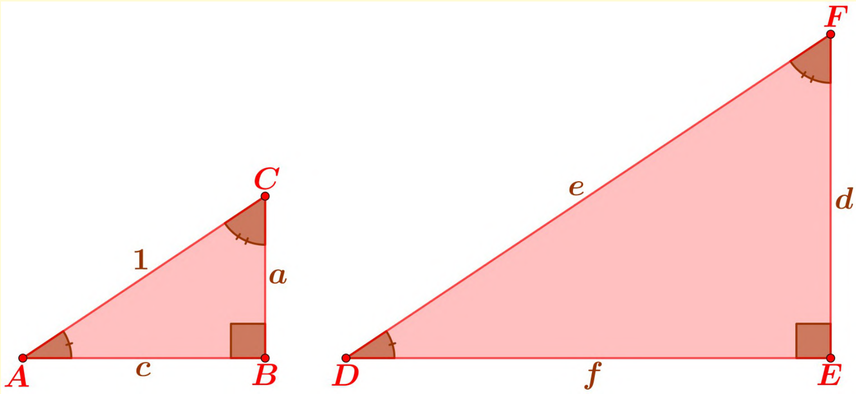
[a] todas as medidas devem estar na mesma unidade (Ex.: cm ou m).

!! Escolha um prédio ou algum marco em sua escola, organize seus estudantes em grupos e peça que utilizem o Teodolito Didático para medi-lo.

3- Razões Trigonométricas

Se dois triângulos são semelhantes, então a proporção entre dois lados de um dos triângulos e os respectivos lados do outro triângulo é a mesma. Assim podemos escolher triângulos em que calcular essas proporções não seja tão difícil e usar as proporções obtidas nesses triângulos para comparar todos os outros.

Escolhemos como referência um triângulo retângulo com a hipotenusa medindo 1, como o $\triangle ABC$.

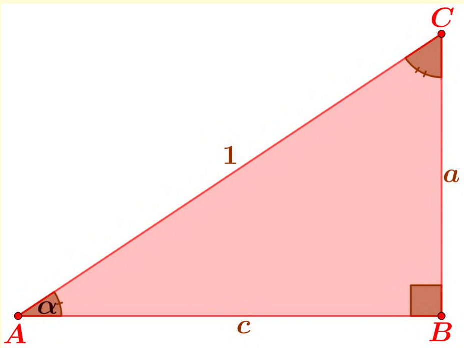


Os triângulos na figura acima são semelhantes e obtemos as seguintes relações entre as medidas de seus lados:

$$a = \frac{a}{1} = \frac{d}{e}, \;\; c = \frac{c}{1} = \frac{f}{e}, \;\; \frac{a}{c} = \frac{d}{f}.$$

Essas proporções são utilizadas com muita frequência em diversas aplicações, ao ponto dos navegadores, construtores e astrônomos antigos carregarem livros com tabelas de valores dessas proporções (hoje em dia temos calculadoras). Devido a importância delas, damos nomes para essas proporções: seno, cosseno e tangente.

Definição 3.1. Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo em B, com hipotenusa medindo 1, e α a medida do ângulo $\angle CAB$. Sejam a e c as medidas dos catetos oposto e adjacente ao ângulo $\angle CAB$, como na figura abaixo.



Definimos o *seno*, o *cosseno* e a *tangente* de α, respectivamente como

$$\text{sen}(\alpha) := a, \;\; \cos(\alpha) := c, \;\; \tan(\alpha) := \frac{a}{c} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Devido à semelhança entre os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, segue que

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{d}{e}, \;\; \cos(\alpha) = \frac{f}{e}, \;\; \tan(\alpha) = \frac{d}{f} = \frac{d/e}{f/e} = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Alguns autores preferem definir o seno, o cosseno e a tangente como as proporções entre os catetos e a hipotenusa em triângulos retângulos quaisquer. Ambas as definições são equivalentes.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo com hipotenusa de comprimento 1 obtemos:

Proposição 3.2 (Relação Fundamental da Trigonometria)**.**

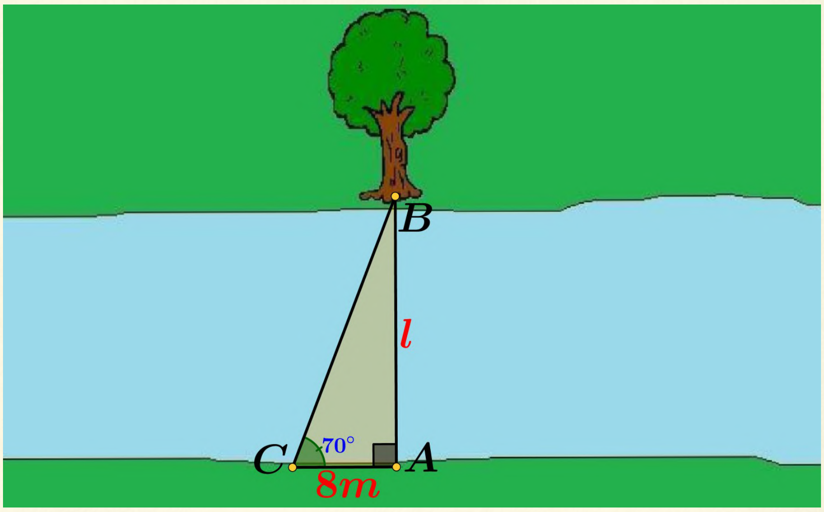
$$\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

!! Sugerimos que o professor calcule, com os estudantes, o valor do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos de 30° e 60°, utilizando o triângulo equilátero de lado medindo 1, e o ângulo de 45° utilizando um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa medindo 1.

Aplicações - Razões Trigonométricas

Aplicação na topografia 3.3. Queremos saber a largura l de um rio sem atravessá-lo. Para isso adotamos o seguinte processo:

- escolhemos o ponto B do outro lado da margem (no caso uma árvore) e marcamos o ponto A do desse lado da margem com uma estaca, de modo que o segmento $\overline{AB}$ seja perpendicular ao sentido do rio;
- marcamos um ponto C à distância que quisermos, de tal modo que o ângulo no vértice A seja reto; (no caso escolhemos o ponto distante $8m$ de A, onde fixamos o teodolito);
- medimos com o teodolito o ângulo no vértice C (no caso obtemos a medida de 70° para o ângulo $\measuredangle ACB$).



Nas condições da figura acima, qual a largura l do rio? (Dados: sen 70° = 0,94 e cos 70° = 0,34)

Resolução:

Obtemos da Definição 3.1 e do enunciado

$$\tan 70° = \frac{sen 70°}{cos 70°} = \frac{0{,}94}{0,34} \approx 2{,}76$$

Aplicando a definição de tangente em $\triangle ABC$ teremos:

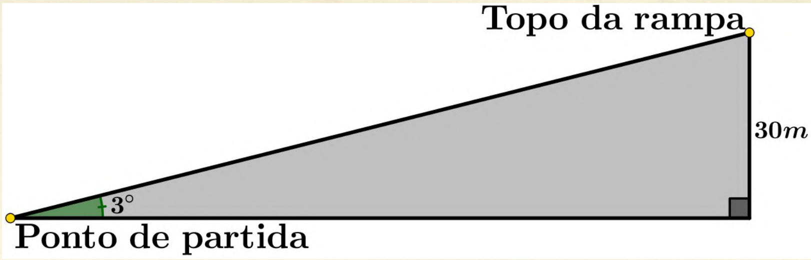
$$\tan 70° = \frac{l}{8} \Longrightarrow 2{,}76 \approx \frac{l}{8} \Longrightarrow l = 22{,}12$$

Portanto a largura do rio é de aproximadamente 22 metros.

$\otimes$

Razões Trigonométricas em Provas e Concursos

Questões de provas 3.4 (UNESP,2007). Um ciclista sobe, em linha reta, uma rampa com inclinação de 3 graus a uma velocidade constante de 4 metros por segundo. A altura do topo da rampa em relação ao ponto de partida é $30m$.



Use a aproximação sen 3° = 0,05 e responda. O tempo, em minutos, que o ciclista levou para percorrer completamente a rampa é

a) ( ) 2,5. b) ( ) 7,5. c) ( ) 10. d) ( ) 15. e) ( ) 30.

Resolução:

Primeiramente iremos descobrir a distância do ponto de partida até o topo da rampa.

Como a figura é um triângulo retângulo e possui uma medida e um ângulo, é possível resolver utilizando as razões trigonométricas.

Aplicando a definição de Seno no triângulo retângulo temos:

$$\text{sen } 3° = \frac{30}{x} \Longrightarrow 0{,}05 = \frac{30}{x} \Longrightarrow 0{,}05x = 30 \Longrightarrow x = \frac{30}{0{,}05} \Longrightarrow x = 600m$$

Agora iremos calcular o tempo que ele levará para percorrer a distância.

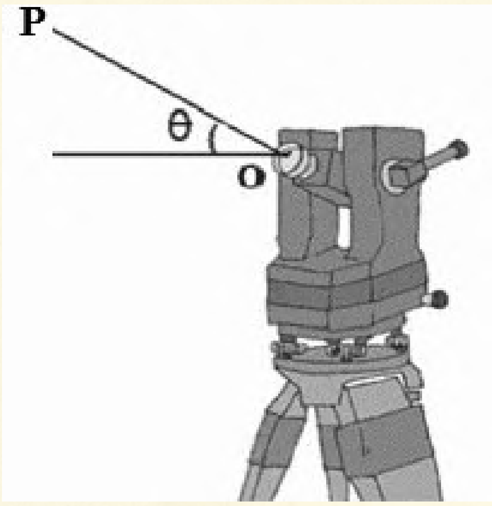
Como ele percorre 4 metros por segundo, para percorrer 600 metros, ele gastará $\frac{600}{4} = 150$ segundos.

Como cada minuto tem 60 segundos, ele levará $\frac{150}{60} = 2{,}5$ minutos.

O ciclista levará 2,5 minutos para percorrer a distância até o topo da rampa.

⊗

Questões de provas 3.5 (Unirio-RJ,2008)**.** O teodolito é um instrumento ótico usado principalmente por engenheiros civis e agrônomos para realizar medidas indiretas de grandes distâncias e alturas. Uma luneta, apoiada em um tripé, permite que um observador O mire em um referencial P e o teodolito indica o ângulo agudo θ que o segmento $\overline{OP}$ faz com o plano horizontal.

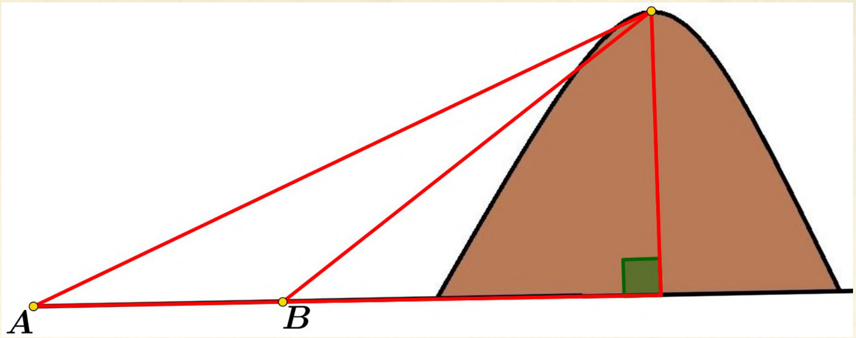


Fonte: (Unirio-RJ, 2008)

Um engenheiro usou o teodolito para medir a altura do Pão de Açúcar do seguinte modo:

a) Em um ponto A, o teodolito indicou um ângulo de 45°.

b) Em seguida o engenheiro foi em direção ao Pão de Açúcar até um ponto B, distante 99 metros de A e o teodolito indicou um ângulo cujo seno é 0,8.



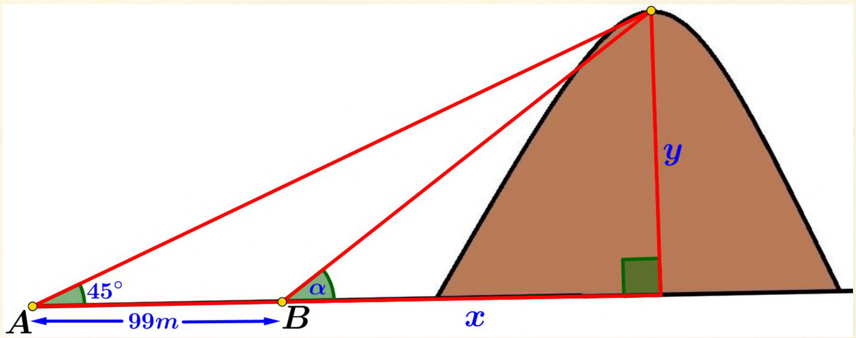
Para calcular a altura do Pão de Açúcar, o engenheiro desprezou a distância da luneta do teodolito ao solo. A altura calculada foi:

a) ( ) 384 metros
b) ( ) 388 metros
c) ( ) 392 metros
d) ( ) 396 metros
e) ( ) 400 metros

Resolução:

Tomemos, conforme ilustra a figura abaixo:

x : distância do ponto B até o pé do morro
$x+99$: distância do ponto A até o pé do morro
y : altura do pão de açúcar
α : ângulo cujo seno é 0,8



Para achar a altura do pão de açúcar utilizaremos a definição de tangente:

$$\tan\,\alpha = \frac{y}{x} \Longrightarrow y = x \cdot \tan\,\alpha \qquad \text{(I)}$$

Para achar o valor de $\tan\,\alpha$ utilizaremos duas relações trigonométricas:

$$\text{sen}\,^2\alpha + \cos\,^2\alpha = 1 \Longrightarrow (0{,}8)^2 + \cos\,^2\alpha = 1 \Longrightarrow \cos\,^2\alpha = 1 - 0{,}64 \Longrightarrow \cos\,\alpha = \sqrt{0,36} = 0{,}6$$

$$\tan\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\,\alpha} = \frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{4}{3} \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I) temos:

$$y = x \cdot \tan\,\alpha \Longrightarrow y = \frac{4}{3}x \qquad \text{(III)}$$

De (III) e sabendo que $\tan\,45^\circ = 1$ temos:

$$\tan\,45^\circ = \frac{y}{x+99} \Longrightarrow 1 = \frac{\frac{4x}{3}}{x+99} \Longrightarrow x + 99 = \frac{4x}{3} \Longrightarrow 4x = 3x + 297 \Longrightarrow x = 297 \qquad \text{(IV)}$$

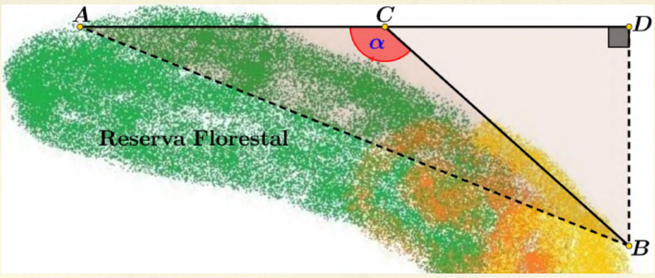
Substituindo (IV) em (I) temos:

$$y = x \cdot \tan\,\alpha = 297 \cdot \frac{4}{3} = 396.$$

Portanto a altura do pão de açúcar é de aproximadamente 396 metros e a resposta correta é a d).

$\otimes$

Questões de provas 3.6 (UFG-GO,2007). Uma empresa de engenharia deseja construir uma estrada ligando os pontos A e B, que estão situados em lados opostos de uma reserva florestal, como mostra a figura abaixo.



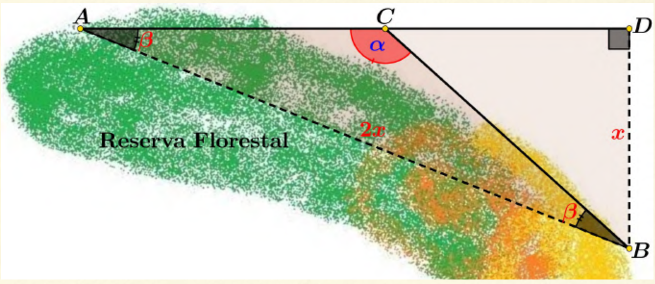
A empresa optou por construir dois trechos retilíneos, denotados pelos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, ambos com o mesmo comprimento. Considerando que a distância de A até B, em linha reta, é igual ao dobro da distância de B até D, o ângulo α formado pelos dois trechos retilíneos da estrada, mede:

a) ( ) 150° b) ( ) 140° c) ( ) 130° d) ( ) 120° e) ( ) 110°

Resolução:

Conforme figura abaixo tomemos:

$$DB = x, \quad AB = 2x, \quad \measuredangle ACB = \alpha, \quad \measuredangle CAB = \measuredangle DAB = \beta.$$



Aplicando a definição de seno em $\triangle ADB$ temos:

$$\text{sen}\ \beta = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \beta = 30^\circ$$

Como $\triangle ACB$ é isósceles[a] então $\measuredangle CAB = \measuredangle CBA = \beta$, e pela soma dos ângulos internos temos:

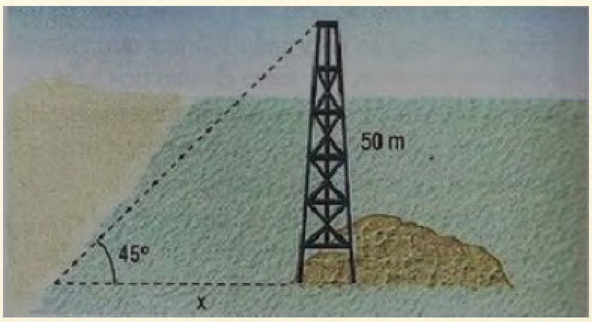
$$\alpha + \beta + \beta = 180^\circ \Longrightarrow \alpha = 180^\circ - 2\beta = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Portanto o ângulo α formado pelos dois trechos da estrada mede 120° e a resposta correta é a d).

$\otimes$

[a]Como o triângulo $\triangle ACB$ é isósceles, os ângulos da base $\overline{AB}$ são iguais.

Questões de provas 3.7 (CESESP-PE,2012). Do alto de uma torre de 50 metros de altura localizada numa ilha, avista-se a margem da praia sob um ângulo 45° em relação ao plano horizontal. Para transportar material da praia até a base da torre, localizada na ilha, um barqueiro cobra R$ 0,20 por metro navegado. Quanto ele recebe por cada transporte que faz?



Fonte: (CESESP-PE,2012)

Resolução:

Como a figura acima representa um triângulo retângulo, e são conhecidas uma distância e um ângulo, podemos achar as demais medidas através das razões trigonométricas do triângulo retângulo.

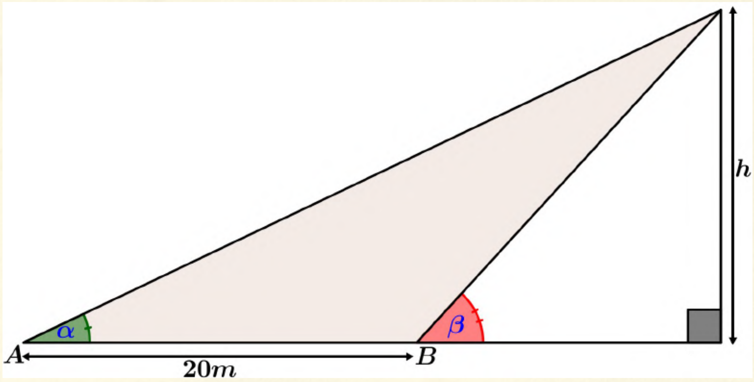
Nesse caso, sabendo que tan 45° = 1 aplicaremos a definição de cosseno, sendo assim:

$$\tan 45^\circ = \frac{x}{50} \Longrightarrow 1 = \frac{x}{50} \Longrightarrow x = 50m$$

Como o barqueiro cobra R\$ 0,20 por metro navegado, ele receberá em cada transporte que faz $50 \cdot 0{,}20 = 10$ reais.

$\otimes$

Questões de provas 3.8 (UFMS, 2000)**.** Para obter a altura de uma torre, um topógrafo posiciona o teodolito em A, obtendo um ângulo $\alpha = 15°$. Em seguida, aproxima-se $20m$ da torre,coloca o teodolito em B e agora obtém um ângulo $\beta = 30°$.



Se for desprezada a altura do teodolito, a altura h da torre será de:

a) ( ) $10m$ b) ( ) $10\sqrt{3}m$ c) ( ) $10\left(2-\sqrt{3}\right)m$ d) ( ) $10\left(2+\sqrt{3}\right)m$ e) ( ) $\dfrac{10}{\sqrt{3}}m$

Resolução:

Chamando o topo da Torre de T e sua base de C, temos dois triângulos retângulos $\triangle ACT$ e $\triangle BCT$, ambos retos em $\widehat{C}$, e um triângulo obtusângulo $\triangle ABT$.

Como $B \in \overline{AC}$, o ângulo β é suplementar ao ângulo $\measuredangle ABT$, logo:

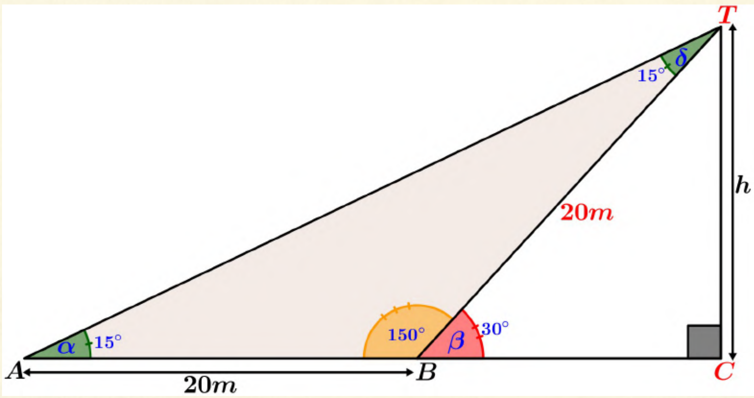
$$\measuredangle ABT + \beta = 180° \Longrightarrow \measuredangle ABT = 180° - 30° = 150° \qquad \text{(I)}$$

No $\triangle ABT$, tomando $\measuredangle ATB = \delta$.

De (I) e pela propriedade da soma dos ângulos internos em $\triangle ABT$ temos:

$$\alpha + \delta + 150° = 180° \Longrightarrow 15° + \delta + 150° = 180° \Longrightarrow \delta = 180° - 165° = 15° \qquad \text{(II)}$$

De (II) temos que $\alpha = \delta = 15°$, logo $\triangle ABT$ é isósceles, e daí temos que $AB = BT = 20m$, conforme a figura abaixo ilustra.



Por fim, analisando agora o triângulo retângulo $\triangle BCT$, como temos um ângulo e uma medida, podemos aplicar as definições das razões trigonométricas para calcular a altura (h) da Torre.

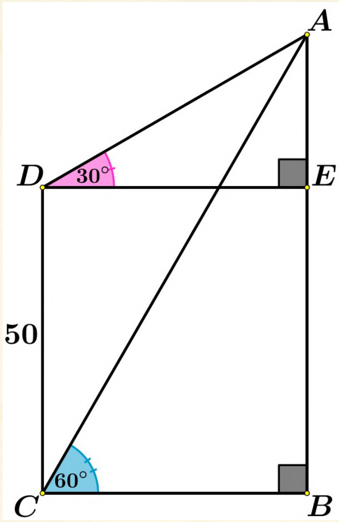
Sabendo que sen $30° = \dfrac{1}{2}$ e aplicando a definição de Seno em $\triangle BCT$ temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{h}{BT} \Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{20} \Longrightarrow 2 \cdot h = 1 \cdot 20 \Longrightarrow h = \frac{20}{2} = 10m$$

Portanto a altura do Torre será de 10 metros a resposta certa é item a).

$\otimes$

Questões de provas 3.9 (Mackenzie-SP, 2008). Calcule a medida do segmento AB na figura abaixo, sabendo que BCDE é um retângulo.



Resolução:

Como $BCDE$ é um retângulo temos que:

$$\measuredangle CDA = \measuredangle CDE + \measuredangle EDA = 90° + 30° = 120°. \tag{I}$$

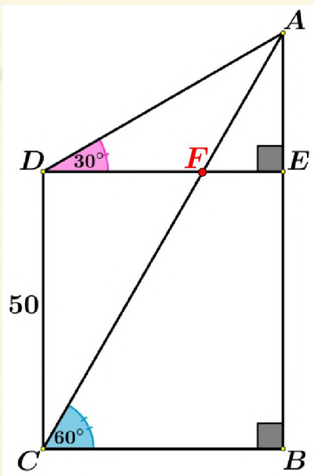
O valor do[a] sen $120° = \text{sen } (180° - 120°) = \text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Observe que

$$\measuredangle ACD = \measuredangle BCD - \measuredangle BCA = 90° - 60° = 30°. \tag{II}$$

De (I) e (II), e pela soma dos ângulos internos do $\triangle ADC$ temos:

$$30° + 120° + \measuredangle DAC = 180° \Longrightarrow \measuredangle DAC = 180° - 150° = 30°. \tag{III}$$

Denominamos de F a interseção de $\overline{AC}$ e $\overline{DE}$, conforme figura abaixo.



Observando o $\triangle CDF$ podemos determinar CF usando a definição de cosseno:

$$\cos 30° = \frac{50}{CF} \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{50}{CF} \Longrightarrow \sqrt{3} \cdot CF = 50 \cdot 2 \Longrightarrow CF = \frac{50 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 50\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

e determinar DF usando a definição de seno:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{DF}{CF} \Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{DF}{50\frac{2\sqrt{3}}{3}} \Longrightarrow 2 \cdot DF = 50\frac{2\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow DF = 50\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

De (II) e (III) temos que o triângulo $\triangle ADF$ é isósceles e $AF = DF$. Assim

$$AC = CF + DF = 50\frac{2\sqrt{3}}{3} + 50\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e aplicando a definição de seno em $\triangle ABC$ temos:

$$\frac{AB}{AC} = \operatorname{sen} 60^\circ \Longrightarrow AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(50\frac{2\sqrt{3}}{3} + 50\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 50 + 25 = 75.$$

Solução alternativa. Uma solução alternativa faz os passos (I), (II) e (III) e aplica a Lei dos Senos[b] para resolver o valor de AC, conforme segue abaixo.

O valor do $\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$.

De (I) e (II) e aplicando a Lei dos Senos em $\triangle ADC$ temos:

$$\frac{AC}{\operatorname{sen} \widehat{D}} = \frac{DC}{\operatorname{sen} \widehat{A}} \Longrightarrow \frac{AC}{\operatorname{sen} 120^\circ} = \frac{50}{\operatorname{sen} 30^\circ} \Longrightarrow \frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{50}{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \frac{AC}{2} = \frac{50\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow AC = 50\sqrt{3} \qquad \text{(IV)}$$

De (IV) e aplicando a definição de seno no $\triangle ABC$ temos:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{AB}{AC} \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{50\sqrt{3}} \Longrightarrow 2 \cdot AB = 50\left(\sqrt{3}\right)^2 \Longrightarrow AB = \frac{150}{2} = 75$$

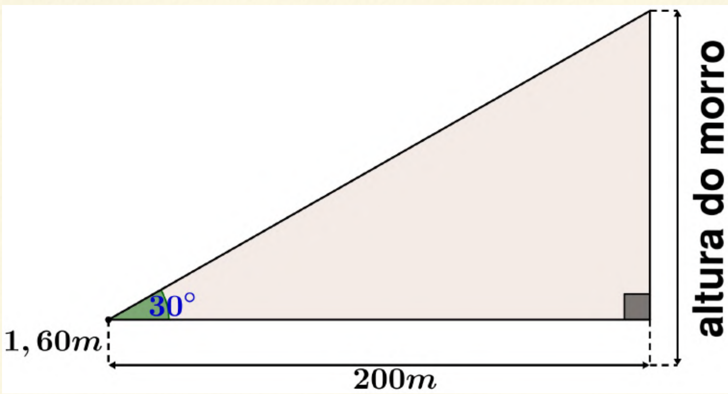
Portanto $AB = 75$.

$\otimes$

[a] Uma propriedade que não demonstraremos nesse trabalho diz que, para ângulos obtusos, $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\ (180^\circ - x)$.

[b] Essa seção sobre Lei dos Senos será vista posteriormente.

Questões de provas 3.10 (ENA-PROFMAT, 2015)**.** Para calcular a altura de um morro, um topógrafo posicionou-se com seu teodolito a 200 m do morro e o aparelho forneceu a medida do ângulo de visada do morro: 30°. O topógrafo, olhando numa tabela, considerou $\tan 30^\circ = 0{,}57$. Se a altura do teodolito é $1{,}60m$, qual é a altura do morro obtida pelo topógrafo?



a) ( ) $352{,}48m$ b) ( ) $125{,}60m$ c) ( ) $118{,}20m$ d) ( ) $115{,}60m$ e) ( ) $114m$

Resolução:

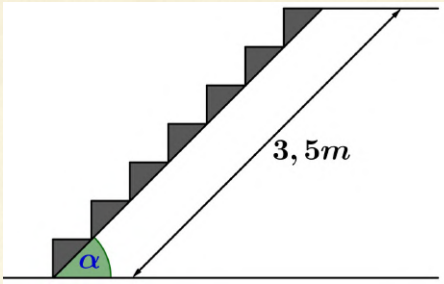
Indicando por x o cateto oposto ao ângulo de 30°, e aplicando a definição de tangente teremos:

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{200} \Longrightarrow 0{,}57 = \frac{x}{200} \Longrightarrow x = 114m. \qquad \text{(I)}$$

Do enunciado sabemos que a altura do teodolito é $1{,}60m$, logo a altura do morro é $114 + 1{,}60 = 115{,}60m$ e a resposta certa é letra d).

$\otimes$

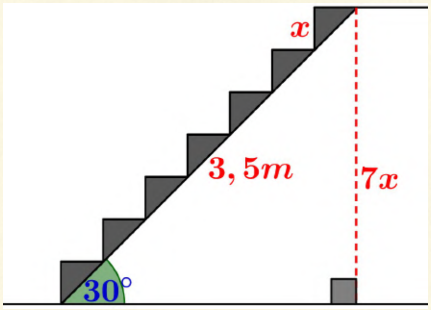
Questões de provas 3.11 (OMIF-Simulado, 2018)**.** Sobre uma rampa plana de 3,5m de comprimento e inclinação α, como mostra a figura, será construída uma escada com 7 degraus, todos de mesma altura.



Se $\alpha = 30°$, então a altura de cada degrau, em cm, é:
a) ( ) 10 b) ( ) 15 c) ( ) 20 d) ( ) 25 e) ( ) 30

Resolução:

Pode-se observar que a escada forma com o solo um triângulo retângulo, conforme a figura abaixo. Tomando a altura de cada degrau como x, a altura desse triângulo será $7x$ e do enunciado temos $\alpha = 30°$.



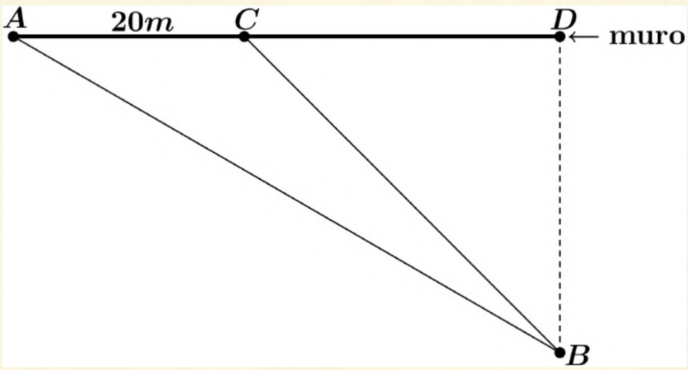
Sabendo que sen $30° = \dfrac{1}{2}$ e aplicando a definição de seno temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{7x}{3{,}5} \Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{7x}{3{,}5} \Longrightarrow 14x = 3{,}5 \Longrightarrow x = \frac{3{,}5}{14} = 0{,}25m.$$

Portanto a altura de cada degrau é 25cm e a resposta certa é item d).

$\otimes$

Questões de provas 3.12 (OMIF-Simulado, 2018)**.** Conforme a figura abaixo, um fio de eletricidade completamente esticado sai do poste A até a casa B. O ângulo entre o fio que parte de A e o muro da propriedade é de 30°. Do outro poste C, que está a 20 metros de A, parte a fiação de telefone até a casa B. O fio que parte de C, por sua vez, faz um ângulo de 45° com o mesmo muro reto. Impossibilitado de invadir a propriedade, Abílio conseguiu saber a menor distância em linha reta da casa até o muro somente com esses dados.

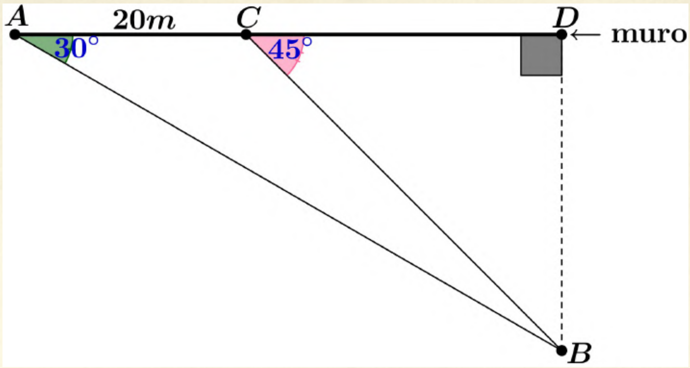


Essa distância é mais próxima de: (Considere $\sqrt{3} = 1{,}7$)
a) ( ) 18,25m b) ( ) 19,70m c) ( ) 23,25m d) ( ) $25,35m$ e) ( ) 26,15m

Resolução:

Observe que são formados dois triângulos retângulos, $\triangle ADB$ e $\triangle CDB$, conforme figura abaixo:

Sabendo que



Sabendo que tan 45° $= 1$ e aplicando a definição de tangente em $\triangle CDB$ teremos:

$$\tan 45^\circ = \frac{DB}{CD} \Longrightarrow 1 = \frac{DB}{CD} \Longrightarrow CD = DB \qquad \text{(I)}$$

De (I) e sabendo que $\tan 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, aplicando a definição de tangente em $\triangle ADB$ teremos:

$$\tan 30^\circ = \frac{DB}{AC + CD} \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{DB}{DB + 20} \Longrightarrow \frac{1{,}7}{3} \approx \frac{DB}{DB + 20} \Longrightarrow 1{,}7 \cdot DB + 34 \approx 3 \cdot DB$$

$$\Longrightarrow 1,3 \cdot DB \approx 34 \Longrightarrow DB \approx \frac{34}{1,3} \Longrightarrow DB \approx 26{,}15m.$$

Portanto, a menor distância em linha reta da casa até o muro é de aproximadamente 26,15 metros e a resposta é letra d).

⊗

Razões Trigonométricas com o Teodolito Didático

Atividade prática 3.13. Cálculo de distância horizontal inacessível (Ex.: largura de um rio).

Material Necessário: O Teodolito Didático, uma trena e uma baliza.

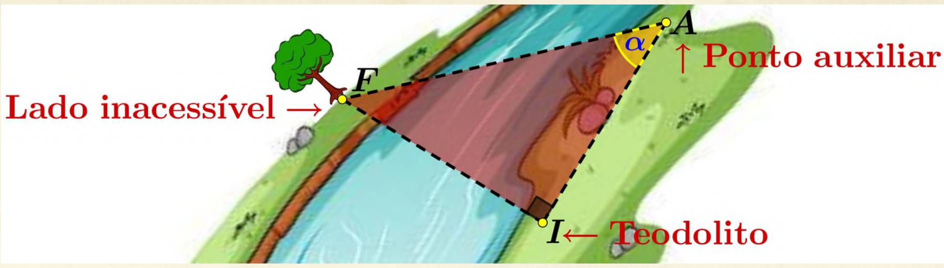
Procedimento: Explique aos alunos que para medir essa distância utilizará as razões trigonométricas, para isso precisa apenas de uma medida de distância horizontal e um ângulo em um triângulo retângulo.

Atividade prática: O objetivo dessa atividade é calcular a distância de um ponto inicial acessível (I) a um ponto final inacessível (F).

Levantamento de Dados:

1. instalar e nivelar o Teodolito Didático no ponto I de forma que seja possível visualizar sem obstáculo o objeto de referência do lado inacessível (ponto F);
2. zerar o teodolito, ou seja, alinhar o transferidor no valor 0 grau, no objeto do lado inacessível;
3. localizar um ponto (de preferência o ponto mais à direita [a])do lado acessível(ponto A na figura ilustrativa abaixo) de forma que o ângulo seja reto (90°), e medir a distância horizontal até o teodolito;
4. inverter as posições, ou seja, colocar o Teodolito Didático no ponto A e uma baliza no ponto I.
5. zerar o teodolito, ou seja, alinhar o transferidor no valor 0 grau, no ponto I;
6. girar a luneta até localizar o objeto do lado inacessível (ponto F) e verificar quantos graus tem esse alinhamento, chamando esse ângulo de α;

Fazendo com cuidado os procedimentos acima garantimos um triângulo retângulo $\triangle AIF$, com ângulo reto em $\widehat{I}$, um cateto $(\overline{IA})$ e um ângulo agudo α, conforme a figura abaixo ilustra.



Aplicando a definição de tangente em α temos:

$$\tan\alpha = \frac{IF}{IA} \Longrightarrow IF = IA \cdot \tan\alpha$$

Como IA e α são conhecidos, o resultado da multiplicação acima é a distância até o ponto inacessível.

[a] Nesse caso a leitura no sentido horário garante a leitura do ângulo interno.

!! Leve os alunos para um local com espaço suficiente para simular essa situação, localize objetos inacessíveis e peça aos alunos que calculem a distância entre os pontos utilizando a técnica ilustrada na atividade prática 3.13.

Atividade prática 3.14. Cálculo de altura de um objeto (Ex.: árvore, prédio etc.).

Material Necessário:

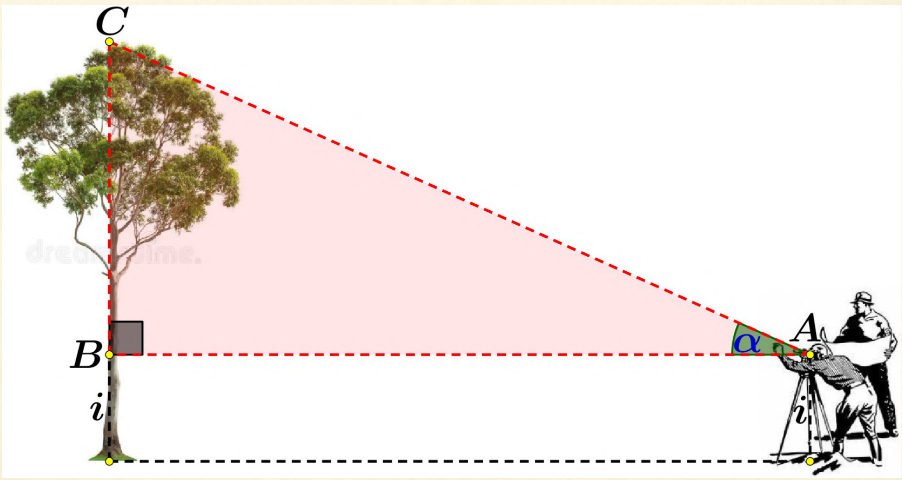
- Teodolito Didático;
- Trena.

Procedimento: Explique aos alunos que para medir essa altura utilizará a definição de tangente, para isso precisa apenas de uma medida de distância horizontal e que o objeto esteja na vertical. Explique ainda, que ao final do cálculo, precisará adicionar a altura do Teodolito.

Atividade prática: O objetivo dessa atividade é calcular a altura de um objeto a partir da horizontal da luneta do Teodolito. O procedimento de leitura de dados é:

1. instalar e nivelar o Teodolito Didático no ponto A de forma que seja possível visualizar sem obstáculo um ponto no objeto que se deseja calcular a altura, e chamaremos esse ponto de B;
2. zerar o ângulo vertical e depois levantar a luneta do teodolito até visualizar o topo do objeto e chamaremos de ponto C, anotar o ângulo vertical $\measuredangle BAC$, que chamaremos de α;
3. medir a distância horizontal até o ponto B;
4. medir a altura do Teodolito Didático, que chamaremos de i.

Fazendo com cuidado os procedimentos acima garantimos um triângulo retângulo $\triangle ABC$, com ângulo reto em $\widehat{B}$, a medida de um cateto ($\overline{AB}$) e um ângulo agudo α, conforme a figura abaixo ilustra.



Aplicando a definição de tangente em α temos:

$$\tan\,\alpha = \frac{BC}{AB} \Longrightarrow BC = AB \cdot \tan\,\alpha$$

Além da distância BC precisamos adicionar a altura do teodolito (i), e como os valores de $\overline{AB}$, α e i são conhecidos, a altura do objeto será:

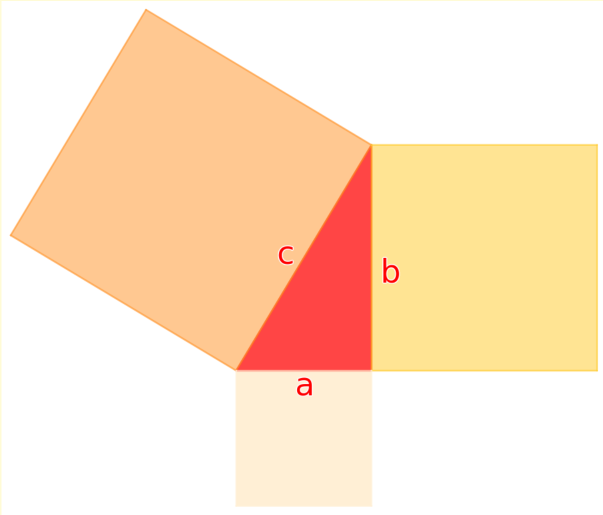
$$h = (AB \cdot \tan\,\alpha) + i.$$

!! Localize um objeto (árvore, prédio da escola, igreja, ou o próprio teto da sala) e calcule a altura do objeto através da técnica ilustrada na atividade 3.14.

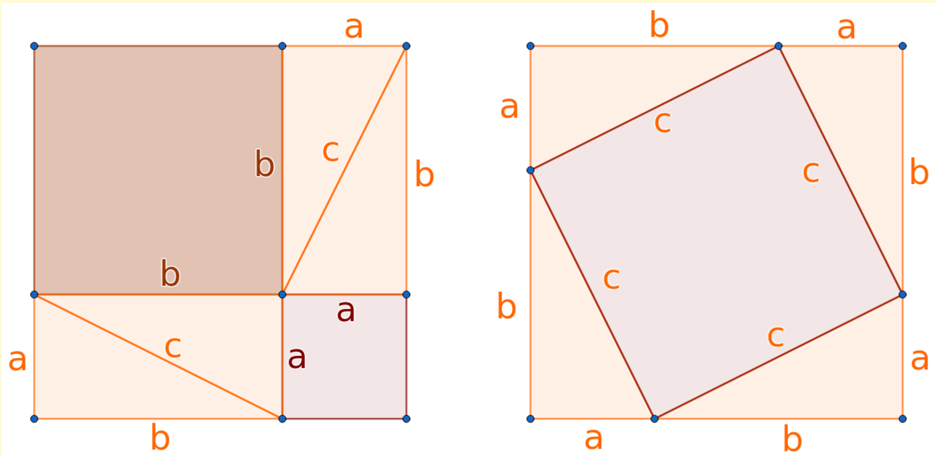
4- Teorema de Pitágoras

Teorema 4.1 (de Pitágoras)**.** *Em um triângulo retângulo de catetos a e b e hipotenusa c vale a relação*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Demonstração. Para qualquer triângulo retângulo de catetos medindo a e b, podemos construir dois quadrados de lados $a + b$ dispondo-os como na figura abaixo:



Os dois quadrados são congruentes e, portanto, têm a mesma área. Note que quadriláteros de lados a, b e c têm ângulos retos e portanto também são quadrados. Se removermos os quatro triângulos retângulos de cada figura ainda permaneceremos com figuras de mesma área. Assim a soma das áreas dos quadrados de lado a e b é igual à área do quadrado de lado c, ou seja,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

□

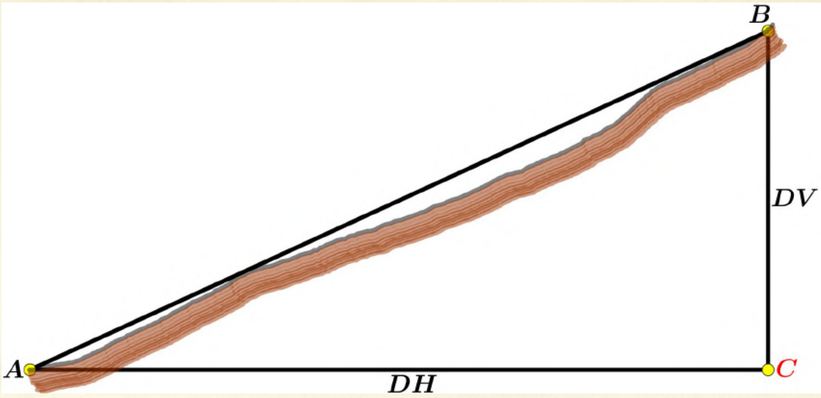
Aplicações - Teorema de Pitágoras

Aplicação na topografia 4.2. Após fazer uma medição topográfica um técnico obteve as seguintes cotas[a] e distâncias entre dois pontos num terreno inclinado: Cota de $A = 20{,}184$; Cota de $B = 22{,}584$; Distância Horizontal de A a $B = 18m$.

Qual a distância inclinada de A a B?

Resolução:

Se traçarmos uma reta vertical que passa por B e uma reta horizontal que passa por A, a intersecção dessas retas, que chamaremos de C, terá a cota igual a cota de A, conforme figura abaixo.



Note que

$$DV = COTA_B - COTA_C \implies DV = COTA_B - COTA_A$$
$$\implies DV = 22{,}584 - 20{,}184 \implies DV = 2{,}4$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras em $\triangle ABC$ teremos:

$$AB^2 = DH^2 + DV^2 = 18^2 + 2{,}4^2 \implies AB = \sqrt{329{,}76} \simeq 18{,}16m.$$

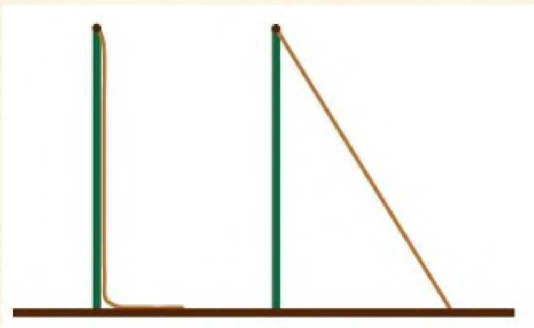
Portanto a distância inclinada de A a B é de aproximadamente 18,16 metros.

$\otimes$

[a]Cota é um valor na topografia relativa ao nível do mar ou um valor horizontal aleatório, e utiliza-se para o cálculo de distâncias verticais. A distância vertical é a diferença das duas cotas.

Teorema de Pitágoras em Provas e Concursos

Questões de provas 4.3 (UEMG,2008)**.** No alto de um bambu vertical está presa uma corda. A parte da corda em contato com o solo mede $2m$. Quando a corda é esticada, sua extremidade toca no solo a uma distância de $7m$ do pé do bambu, conforme mostra a figura abaixo.



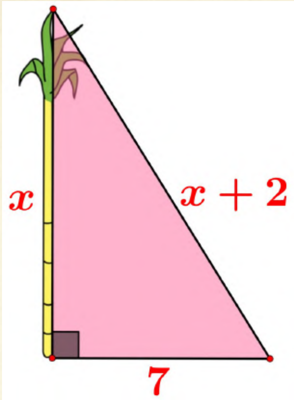
Fonte: (UEMG,2008)

De acordo com o enunciado acima, a altura do bambu corresponde a:
a) ( ) 15,1 b) ( ) 12,7 c) ( ) 11,25 d) ( ) 15,25

Resolução:

Note que após esticar a corda, forma-se um triângulo retângulo, e o único ângulo conhecido é o ângulo reto. Como as medidas são fornecidas por números ou em função da altura do bambu, resolveremos aplicando o Teorema de Pitágoras.

Deseja-se descobrir a altura do bambu, que chamaremos de x. Antes de esticar a corda, ela tinha o tamanho do bambu e mais 2 metros no chão, logo a corda esticada formará a hipotenusa do triângulo retângulo e medirá $x + 2$. O outro cateto é a distância da corda até o bambu ($7m$, dado no enunciado), conforme a figura abaixo ilustra.



Aplicando o Teorema de Pitágoras temos:

$$(x+2)^2 = x^2 + 7^2 \Longrightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 49 \Longrightarrow \underbrace{x^2 - x^2}_{0} + 4x = 49 - 4 \Longrightarrow 4x = 45$$

$$\Longrightarrow x = \frac{45}{4} = 11{,}25m$$

A resposta certa é 11,25 metros, item c).

$\otimes$

Questões de provas 4.4 (UFAC,2007)**.** É conhecido que em um triângulo retângulo: A soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa [Pitágoras (571 − 480 a.c.)]. Esta relação induz o conceito de "terno pitagórico", que é toda terna de inteiros positivos $(a,\ b,\ c)$ tal que $a^2 + b^2 = c^2$. Neste sentido, se $(a,\ b,\ c)$ é um terno pitagórico, vale que:

a) ( ) (a, c, b) é um terno pitagórico.
b) ( ) (ka, kb, kc) é um terno pitagórico, se k é um inteiro positivo.
c) ( ) $(a-b,\ a-c,\ b-c)$ é um terno pitagórico.
d) ( ) (b, c, a) é um terno pitagórico.
e) ( ) $(a+b, a+c, b+c)$ é um terno pitagórico.

Resolução:

Para resolver essa questão utilizaremos a terna pitagórica mais conhecida, que é (3, 4, 5), visto que satisfaz as condições do enunciado, pois:

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \Longrightarrow 9 + 16 = 25 \Longrightarrow 25 = 25.$$

Nesse caso temos $a = 3$, $b = 4$ e $c = 5$. Dadas essas condições e aplicando a definição do Teorema de Pitágoras, analisaremos cada uma das alternativas acima:

a) (a, c, b) **é um terno pitagórico.**

Para mostrarmos que uma afirmação é falsa, basta apresentarmos um contra-exemplo. Contudo para $(a, b, c) = (3{,}4{,}5)$ temos $(a, c, b) = (3{,}5{,}4)$ e

$$3^2 + 5^2 = 34 \neq 16 = 4^2,$$

e a alternativa é falsa (F).

b) (ka, kb, kc) **é um terno pitagórico, se k é um inteiro positivo.**

Utilizando que $a^2 + b^2 = c^2$, temos

$$(ka)^2 + (kb)^2 = k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2 = (kc)^2,$$

assim (ka, kb, kc) é um terno pitagórico e a alternativa é verdadeira (V).

c) $(a-b, a-c, b-c)$ **é um terno pitagórico.**

O terno pitagórico (3,4,5) também é um contra-exemplo para esse caso. Temos que $(a-b, a-c, b-c)$ não é um terno pitagórico pois:

$$(3-4,\ 3-5,\ 4-5) = (-1,\ -2,\ -1)\,,$$

que não são inteiros positivos e a alternativa é falsa (F).

d) (b, c, a) **é um terno pitagórico.**

Basta apresentarmos um contra-exemplo. Para $(a, b, c) = (3,4,5)$ temos $(b, c, a) = (4,5,3)$ e

$$4^2 + 5^2 = 41 \neq 9 = 3^2,$$

e a alternativa é falsa (F).

e) $(a + b, a + c, b + c)$ **é um terno pitagórico.**

Basta apresentarmos um contra-exemplo. Para $(a, b, c) = (3,4,5)$ temos $(a+b, a+c, b+c) = (7, 8, 9)$

$$7^2 + 8^2 = 113 \neq 81 = 9^2$$

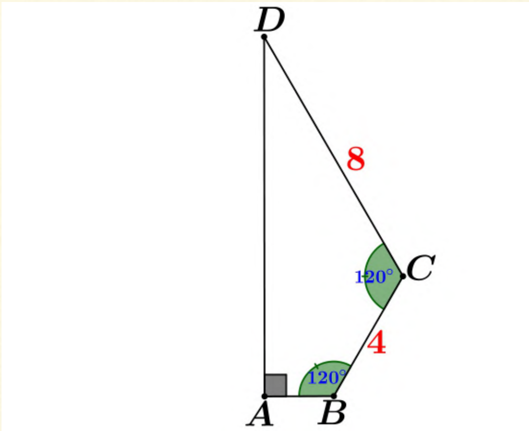
e a alternativa é falsa (F).

Portanto, a resposta certa é a alternativa **b**: (ka, kb, kc) é um terno pitagórico, se k é um inteiro positivo.

$\otimes$

Questões de provas 4.5 (OBMEP,2017 - 1ª Fase - Nível 3)**.** Na figura, os ângulos $\measuredangle ABC$ e $\measuredangle BCD$ medem 120°, o ângulo $\measuredangle BAD$ é reto, e os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ medem $4cm$ e $8cm$, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero ABCD em cm^2?

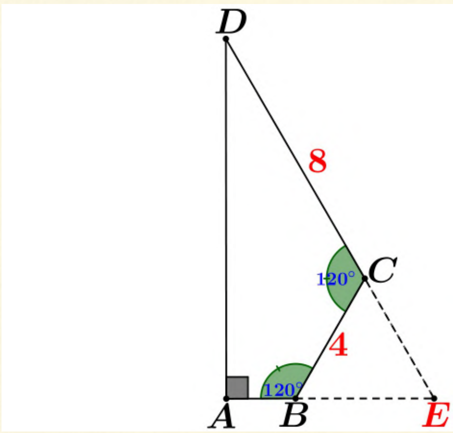
a) ( ) $14\sqrt{3}$ b) ( ) $28\sqrt{3}$ c) ( ) $32\sqrt{3}$ d) ( ) $36\sqrt{3}$ e) ( ) $40\sqrt{3}$



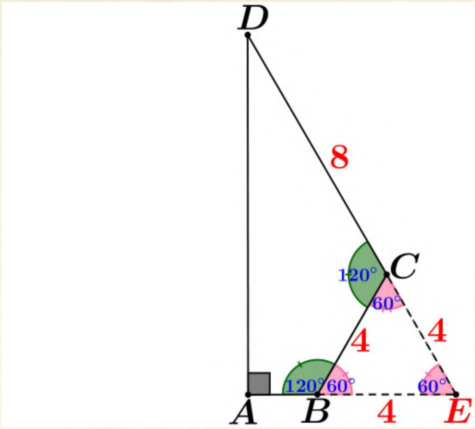
Resolução:

Para resolver essa questão faremos algumas construções geométricas, utilizando os ângulos e medidas fornecidos no enunciado.

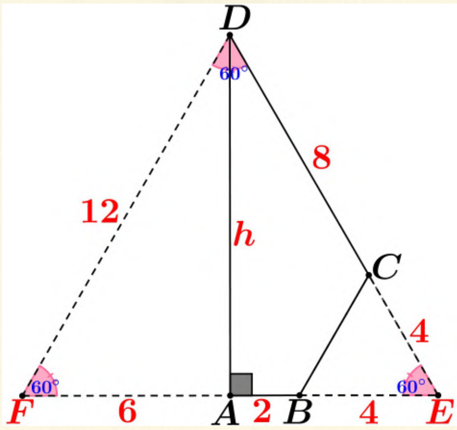
Prolongando os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ até se encontrarem num ponto E teremos um triângulo, conforme a figura abaixo.



No triângulo $\triangle BCE$ é fácil observar que $\measuredangle BCE \equiv \measuredangle CBE = 60°^a$, logo o triângulo $\triangle BCE$ é equilátero de lado igual a 4, conforme figura abaixo.



Se duplicarmos o triângulo $\triangle ADE$ no eixo AD e denominaremos de F o ponto simétrico a E, teremos um triângulo com dois ângulos de $\widehat{E} \equiv \widehat{F} = 60°$ assim, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$, $\widehat{D} = 60°$ e o triângulo $\triangle DEF$ é equilátero de lado 12. Chamaremos de h a altura desse triângulo equilátero, conforme figura abaixo.



Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo FAD acharemos o valor de h:

$$12^2 = 6^2 + h^2 \Longrightarrow h^2 = 144 - 36 \Longrightarrow h = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

Observe que a área do polígono ABCD pode ser deduzido da subtração da área dos triângulos $\triangle AED$ e $\triangle BEC$.

A área do triângulo $\triangle AED$ é:

$$\frac{6 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3} \tag{I}$$

A área do triângulo $\triangle BEC^b$ é:

$$\frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \tag{II}$$

De (I) e (II) temos que a área do polígono ABCD é $18\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$ e a resposta é item a).

$\otimes$

[a] São ângulos suplementares de $\measuredangle ABC$ e $\measuredangle BCD$ respectivamente.

[b] A área de um triângulo equilátero é $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

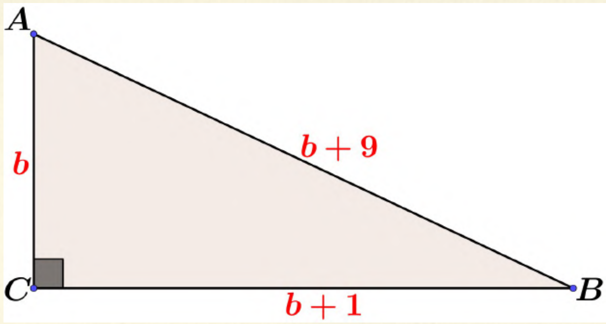
Questões de provas 4.6 (ENA-PROFMAT,2018 - Prova H)**.** Em um triangulo retângulo $\triangle ABC$, o lado AB excede em 8 unidades o lado BC que por sua vez mede uma unidade a mais que o lado AC. A hipotenusa deste triangulo mede

a) ( ) 20 b) ( ) 21 c) ( ) 25 d) ( ) 27 e) ( ) 29

Resolução:

Do triângulo $\triangle ABC$ fornecido tomemos:

$$b : \overline{AC} \quad \text{(cateto)}$$
$$a : \overline{BC} = b + 1 \quad \text{(cateto)}$$
$$c : \overline{AB} = a + 8 = b + 1 + 8 = b + 9 \quad \text{(hipotenusa)}$$



Aplicando o Teorema de Pitágoras teremos:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow (b+9)^2 = (b+1)^2 + b^2 \Longrightarrow b^2 + \underbrace{b^2 + 2b + 1}_{(b+1)^2} = \underbrace{b^2 + 18b + 81}_{(b+9)^2}$$
$$b^2 - 16b - 80 = 0 \Longrightarrow (b+4) \cdot (b-20) = 0 \Longrightarrow b' = -4 \text{ e } b" = 20$$

Como b é uma medida de comprimento seu valor é positivo, nesse caso b $=$ 20, e portanto o valor da hipotenusa é $20 + 9 = 29$, e a resposta é letra e).

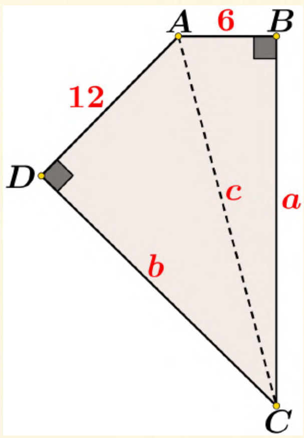
$\otimes$

Questões de provas 4.7 (ENA-PROFMAT,2017 - Prova 1)**.** No quadrilátero ABCD, os ângulos internos $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$ são retos. Sendo $AB = 6$, $BC = a$, $CD = b$ e $AD = 12$, o valor de $\sqrt{a^2 - b^2}$ é:

a) ( ) $6\sqrt{3}$ b) ( ) $6\sqrt{5}$ c) ( ) 3 d) ( ) $8\sqrt{3}$ e) ( ) 6

Resolução:

Do enunciado e denominando $c = AC$ temos a figura abaixo.



Aplicando o Teorema de Pitágoras em $\triangle ADC$ e $\triangle ABC$ temos, respectivamente

$$c^2 = b^2 + 12^2 \qquad \text{(I)}$$
$$c^2 = a^2 + 6^2 \qquad \text{(II)}$$

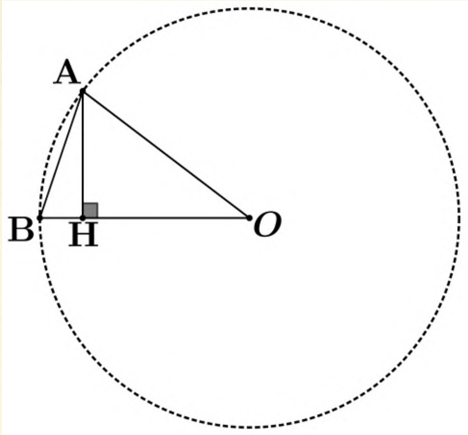
Substituindo (II) em (I) teremos:

$$a^2 + 6^2 = b^2 + 12^2 \Longrightarrow a^2 - b^2 = 144 - 36 \Longrightarrow \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{108} \Longrightarrow \sqrt{a^2 - b^2} = 6\sqrt{3}$$

Portanto a resposta certa é item a).

$\otimes$

Questões de provas 4.8 (ENA-PROFMAT,2017 - Prova 1)**.** Na figura, a corda AB tem medida 5 e o raio OA mede 10.

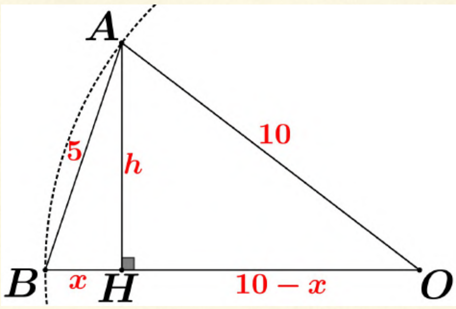


A medida do segmento $\overline{AH}$, perpendicular ao segmento $\overline{OB}$, é igual a:

a) ( ) $\dfrac{5\sqrt{15}}{4}$ b) ( ) 5 c) ( ) $5\sqrt{3}$ d) ( ) $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ e) ( ) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

Resolução:

Tomando $x = BH$ teremos $OH = 10 - x$. Denominando $h = AH$ teremos, conforme a figura abaixo, dois triângulos retângulos $\triangle AHB$ e $\triangle AHO$.



Aplicando o Teorema de Pitágoras em $\triangle AHB$ e $\triangle AHO$ teremos:

$$5^2 = x^2 + h^2 \Longrightarrow h^2 = 25 - x^2 \quad \text{(I)}$$

$$10^2 = (10-x)^2 + h^2 \Longrightarrow h^2 = 100 - \underbrace{\left(100 - 20x + x^2\right)}_{(10-x)^2} = -x^2 + 20x \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I) temos:

$$-x^2 + 20x = 25 - x^2 \Longrightarrow \underbrace{-x^2 + x^2}_{0} + 20x = 25 \Longrightarrow x = \frac{25}{20} = \frac{5}{4} \quad \text{(III)}$$

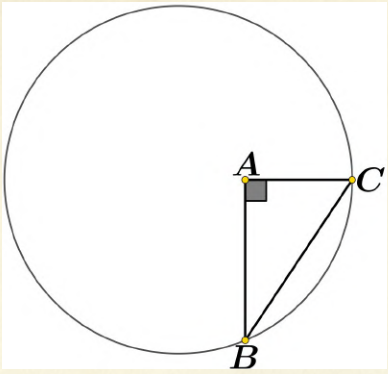
Substituindo (III) em (I) teremos:

$$h^2 = 25 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{400-25}{16} \Longrightarrow h = \sqrt{\frac{375}{16}} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

Portanto $AH = \dfrac{5\sqrt{5}}{4}$ e a resposta certa é item a).

$\otimes$

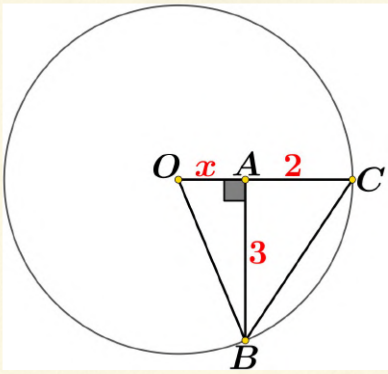
Questões de provas 4.9 (ENA-PROFMAT,2015)**.** Na figura abaixo, o segmento $\overline{AC}$ está contido em um diâmetro da circunferência. Sabendo que $AB = 3$, $AC = 2$ e o ângulo $\measuredangle BAC$ é reto, qual é o raio da circunferência?



a) ( ) $\frac{13}{4}$ b) ( ) $\frac{13}{2}$ c) ( ) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ d) ( ) $\sqrt{13}$ e) ( ) $\frac{5}{4}$

Resolução:

Sejam O o centro da circunferência, r o raio e $x = OA$. Como $\overline{OC}$ e $\overline{OB}$ são raios, ambos medem $x + 2$, conforme figura abaixo.



Como $\triangle OAB$ é retângulo, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras. Sendo assim:

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 \Longrightarrow (x+2)^2 = x^2 + 3^2 \Longrightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 9 \Longrightarrow 4x = 9 - 4 \Longrightarrow x = \frac{5}{4}$$

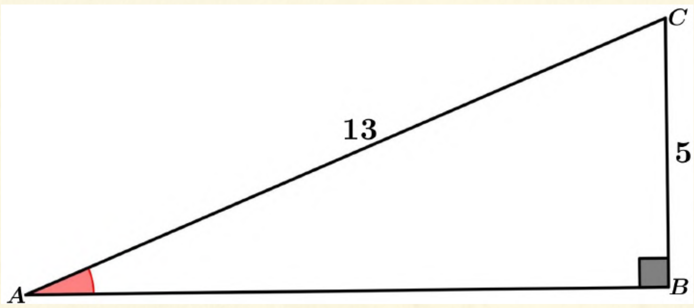
Com o valor de x temos o valor do raio:

$$r = x + 2 = \frac{5}{4} + 2 = \frac{5+8}{4} = \frac{13}{4}$$

Portanto o valor do raio da circunferência é $\frac{13}{4}$ e a resposta certa é item a).

$\otimes$

Questões de provas 4.10 (UFC-CE, 2004)**.** Na figura abaixo, o triângulo $\triangle ABC$ é retângulo em B.



O cosseno do ângulo $B\widehat{A}C$ é:

a) ( ) $\frac{12}{13}$ b) ( ) $\frac{11}{13}$ c) ( ) $\frac{10}{13}$ d) ( ) $\frac{6}{13}$ e) ( ) $\frac{1}{13}$

Resolução:

Tomando $x = AB$, como $\triangle ABC$ é retângulo e são conhecidas duas medidas, basta aplicar o Teorema de Pitágoras para achar a terceira medida. Sendo assim:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Longrightarrow 13^2 = x^2 + 5^2 \Longrightarrow x^2 = 169 - 25 \Longrightarrow x = \sqrt{144} = 12. \qquad \text{(I)}$$

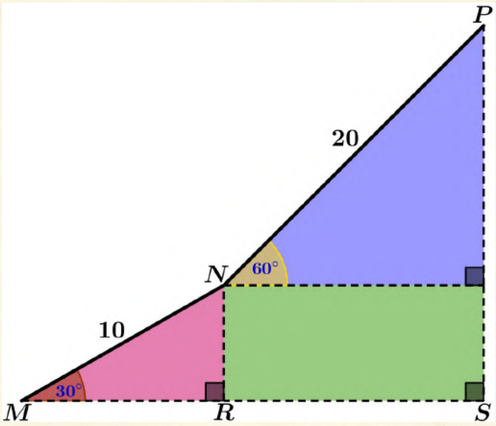
De (I) e aplicando a definição de cosseno temos:

$$\cos \widehat{A} = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{13}.$$

Portanto, na figura acima, o cosseno do ângulo $B\widehat{A}C$ é $\dfrac{12}{13}$ e a resposta certa é item a).

$\otimes$

Questões de provas 4.11 (UFRN,2001)**.** Ao se tentar fixar as extremidades de um pedaço de arame reto, de $30m$ de comprimento, entre os pontos M e P de um plano, o arame, por ser maior do que o esperado entortou como mostra a figura.



A partir desses dados, calcule, em metros:
a) O comprimento dos segmentos $\overline{MS}$ e $\overline{SP}$;
b) Quanto o arame deveria medir para que medisse o mesmo tamanho do segmento $\overline{MP}$?

Resolução:

Item a.

Chamaremos de Q o vértice do ângulo reto no triângulo $\triangle NQP$.
Note que $\overline{MS} = \overline{MR} + \overline{RS}$, e que $\overline{NQ} \equiv \overline{RS}^a$, da mesma forma $\overline{PS} = \overline{PQ} + \overline{QS}$, e que $\overline{NR} \equiv \overline{QS}$.
Aplicando a definição de Seno nos triângulos $\triangle MRN$ e $\triangle NQP$ temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{NR}{10} \Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{NR}{10} \Longrightarrow 2 \cdot NR = 10 \cdot 1 \Longrightarrow NR = \frac{10}{2} = 5 \qquad \text{(I)}$$

$$\text{sen } 60° = \frac{PQ}{20} \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{PQ}{20} \Longrightarrow 2 \cdot PQ = 20 \cdot \sqrt{3} \Longrightarrow PQ = \frac{20 \cdot \sqrt{3}}{2} = 10 \cdot \sqrt{3} \qquad \text{(II)}$$

Aplicando a definição de Cosseno nos triângulos $\triangle MRN$ e $\triangle NQP$ temos:

$$\cos 30° = \frac{MR}{10} \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{MR}{10} \Longrightarrow 2 \cdot MR = 10 \cdot \sqrt{3} \Longrightarrow MR = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{2} = 5 \cdot \sqrt{3} \qquad \text{(III)}$$

$$\cos 60° = \frac{NQ}{20} \Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{NQ}{20} \Longrightarrow 2 \cdot NQ = 20 \cdot 1 \Longrightarrow NQ = \frac{20}{2} = 10. \qquad \text{(IV)}$$

De (III) e (IV) temos o valor de MS igual a:

$$MS = MR + RS = 5 \cdot \sqrt{3} + 10 = 5\left(\sqrt{3} + 2\right) m$$

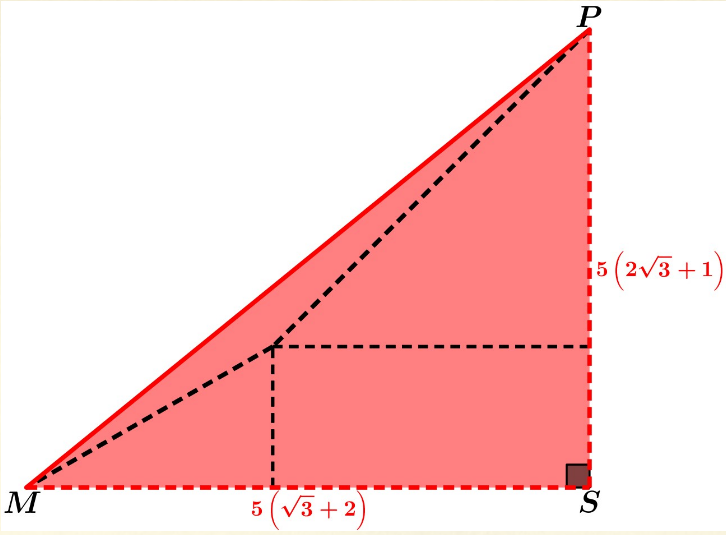
De (II) e (I) temos o valor de PS igual a:

$$PS = PQ + QS = 10 \cdot \sqrt{3} + 5 = 5\left(2\sqrt{3} + 1\right) m$$

Portanto, o comprimento de MS é $5\left(\sqrt{3} + 2\right)$ metros e o comprimento de PS é $5\left(2\sqrt{3} + 1\right)$ metros.

Item b.

Da resolução do item anterior temos a figura abaixo.



Para calcular o comprimento de MP aplicaremos a definição do Teorema de Pitágoras em $\triangle MSP$, sendo assim:

$$\begin{aligned} MP^2 = MS^2 + PS^2 &= \left[5\left(\sqrt{3}+2\right)\right]^2 + \left[5\left(2\sqrt{3}+1\right)\right]^2 \\ &= 25\left(3+4\sqrt{3}+4\right) + 25\left(4\cdot 3+4\sqrt{3}+1\right) \\ &= 75+100\sqrt{3}+100+300+100\sqrt{3}+25 = 500+200\sqrt{3} \\ MP &= \sqrt{500+200\sqrt{3}} = \left(10\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right) m \end{aligned}$$

Portanto, o arame deveria medir $\left(10\sqrt{5+2\sqrt{3}}\right)$ metros para que medisse o mesmo tamanho do segmento $\overline{MP}$.

$\otimes$

[a]Uma propriedade que não demonstraremos aqui diz que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.

.
.
.
.

Teorema de Pitágoras com o Teodolito Didático

Atividade prática 4.12. Cálculo de distância com obstáculo utilizando o Teodolito Didático e aplicando Teorema de Pitágoras.

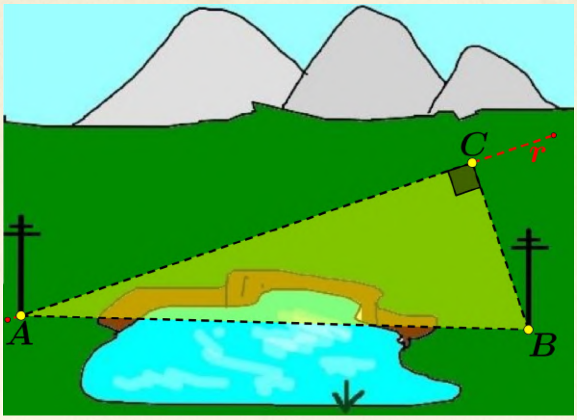
Material Necessário: Teodolito Didático; trena; 03 piquetes ou marcadores.

Procedimento: Explique aos alunos que esse procedimento é muito praticado por técnicos e engenheiros, dado que entre dois objetos pode existir um obstáculo que impeça a leitura de distância direta. Para essa atividade pode-se escolher dois objetos quaisquer, como nesse exemplo dois postes em lados distintos de um lago.

Atividade prática:

O procedimento de captura de dados é:

1. identificaremos os dois postes de A e B;
2. a partir do ponto A trace uma reta r, de forma que seja possível chegar ao ponto B[a] através de uma perpendicular a r, sem obstáculos;
3. fixar o teodolito no ângulo reto, mantendo o zero na direção do ponto A, e percorrer a reta r até achar o ponto onde é possível visualizar o ponto B sob o ângulo de 90°, chamar esse ponto de C;
4. medir a distância horizontal de A a C, e da mesma forma, a distância de C a B.



Feito esse procedimento[b] podemos usar o Teorema de Pitágoras para determinar a distância aos pontos inacessíveis, para isso denominamos:

$$a = \text{ distância de A a B (hipotenusa),}$$
$$b = \text{ distância de A a C (cateto) e}$$
$$c = \text{ distância de C a B (cateto).}$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle ABC$ temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Portanto, a distância desejada é dada por $a = \sqrt{b^2 + c^2}$.

[a] É necessário um pouco de perspectiva do professor para prever que a reta até o ponto B será perpendicular à reta r.
[b] todas as medidas devem estar na mesma unidade (Ex.: *cm* ou *m*).

!! Leve os alunos para uma praça, pátio ou um local que possa ser possível simular essa ou propor outra situação análoga, e junto com os alunos façam as medidas para em sala-de-aula, utilizando o Teorema de Pitágoras, resolverem esse problema.

!! Dê cópias do mapa no Anexo 1 do manual aos estudantes, explique que cada lado dos quadrados da grade equivale a 200 metros, e peça que eles calculem as distâncias entre os pontos marcados A, B, C e D utilizando o Teorema de Pitágoras.

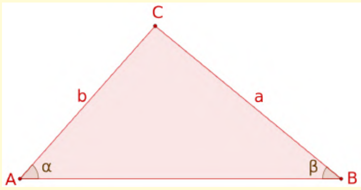
5- Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

No capítulo 2 vimos a importância dos casos LAL e AA de semelhança e suas muitas aplicações. Essas proposições têm equivalentes de congruências, que são igualmente importantes: os casos LAL (lado - ângulo - lado) de congruência e o caso ALA (ângulo - lado - ângulo) de congruência.

LEI DOS SENOS

O significado da existência da congruência ALA é que, ao fixarmos dois ângulos de um triângulo e o lado entre eles, já ficam determinados os outros dois lados e o outro ângulo do triângulo. Todavia, como conseguiremos calcular as medidas dos lados[a] utilizando os ângulos conhecidos e o tamanho do lado conhecido? Para isso podemos utilizar a Lei dos Senos, que demonstramos abaixo apenas para triângulos acutângulos, apesar da lei valer para triângulos quaisquer.

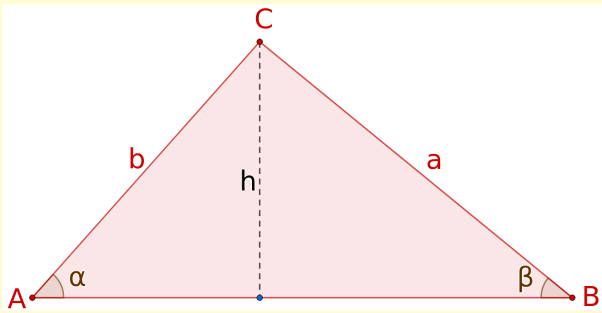
Teorema 5.1 (Lei dos Senos)**.** *Seja $\triangle ABC$ um triângulo com $\measuredangle BAC = \alpha$ e $\measuredangle ABC = \beta$; e, além disso, $BC = a$ e $AC = b$, como na figura abaixo.*



Então

$$\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b}.$$

Demonstração. (Apenas para o caso do triângulo acutângulo.) Tracemos a altura do triângulo $\triangle ABC$ relativa ao lado $\overline{AB}$ e chamemos sua medida de h, como na figura abaixo.



Então

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{h}{b} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(\beta) = \frac{h}{a} \Longrightarrow b \operatorname{sen}(\alpha) = h \quad \text{e} \quad a \operatorname{sen}(\beta) = h$$

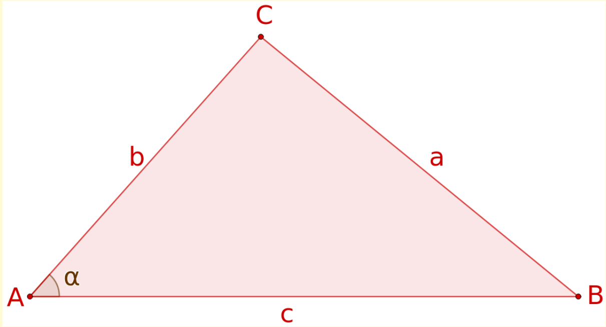
$$\Longrightarrow b \operatorname{sen}(\alpha) = a \operatorname{sen}(\beta) \Longrightarrow \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{b}.$$

□

LEI DOS COSSENOS

O significado da existência da congruência LAL é que, ao fixarmos dois lados de um triângulo e o ângulos entre eles, já ficam determinados os outros dois ângulos e o outro lado do triângulo. Todavia, como conseguiremos calcular a medida do outro lado e os outros dois ângulos utilizando os comprimentos dos lados conhecidos e o ângulo entre eles? Para isso podemos utilizar a Lei dos Cossenos, que demonstramos abaixo apenas para triângulos acutângulos, apesar da lei valer para triângulos quaisquer.

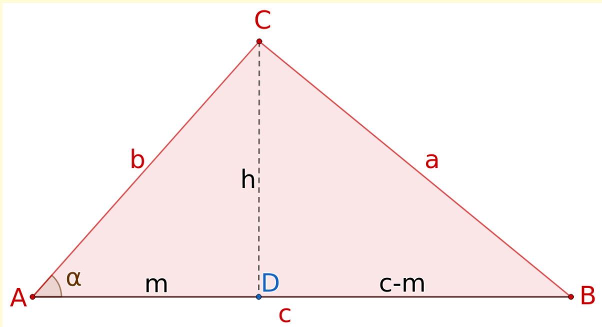
Teorema 5.2 (Lei dos Cossenos)**.** *Seja $\triangle ABC$ um triângulo com $\measuredangle BAC = \alpha$ e, além disso, $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$, como na figura abaixo.*



Então

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos(\alpha).$$

Demonstração. (Apenas para o caso do triângulo acutângulo.) Tracemos a altura do triângulo $\triangle ABC$ relativa ao lado $\overline{AB}$ e chamemos sua medida de h e de m a medida de AD, onde D é o pé da altura, como na figura abaixo.



Então, pelo Teorema de Pitágoras,

$$a^2 = (c - m)^2 + h^2 = c^2 - 2cm + m^2 + h^2. \quad (5.1)$$

Contudo, pela definição de cosseno e pelo Teorema de Pitágoras no $\triangle ADC$,

$$b^2 = m^2 + h^2 \text{ e } m = b\ \cos(\alpha),$$

pelo Teorema de Pitágoras e a definição de cosseno no triângulo $\triangle ACD$. Substituindo $m^2 + h^2$ por b^2 e m por $b\ \cos(\alpha)$ na equação (5.1), obtemos

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\ \cos(\alpha).$$

□

[a]Para determinar o terceiro ângulo podemos usar o fato que a soma dos três ângulos de um triângulo é 180°.

Aplicações - Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

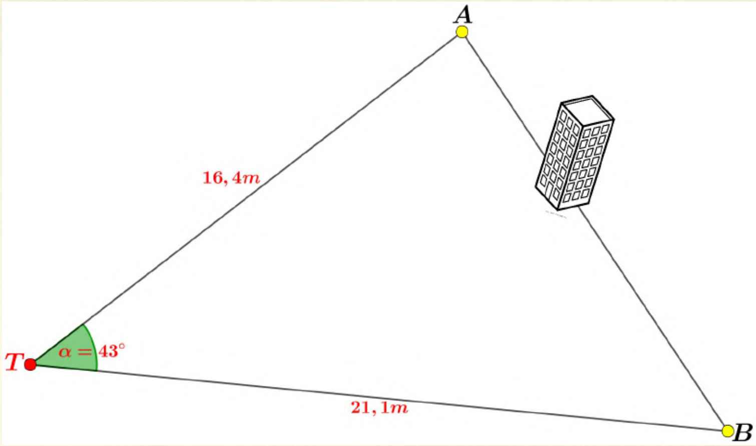
Aplicação na topografia 5.3. Um técnico foi chamado para resolver um problema. Desejava-se medir a distância entre dois pontos A e B, o problema é que um prédio entre eles impedia a medição direta dessa distância.

Resolução:

A solução adotada pelo técnico foi utilizar a Lei dos Cossenos para medir essa distância. O procedimento do técnico foi o seguinte:

1. Posicionou o teodolito em um ponto T de onde pudesse avistar, sem obstáculos, os pontos A e B;
2. Em seguida ele calculou a distância $TA = 16{,}4m$;
3. Ele zerou o teodolito no ponto A e girou até localizar o ponto B, obtendo um ângulo $\measuredangle ATB = \alpha = 43°$;

4. Finalmente, ele mediu a a distância $TB = 21{,}1m$.



Feitas essas medidas ele aplicou a Lei dos Cossenos para obter a distância AB. Para isso considerou $a = AB$, $b = TA$ e $c = TB$.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\,\alpha = 16{,}4^2 + 21{,}1^2 - 2 \cdot 16{,}4 \cdot 21{,}1 \cdot \cos\,43^\circ \\ &= 268{,}96 + 445{,}21 - 506{,}1553 = 208{,}0147 \\ a &= \sqrt{208{,}0147} \simeq 14{,}42 \end{aligned}$$

Portanto, a distância entre os pontos A e B é de 14,42 metros.

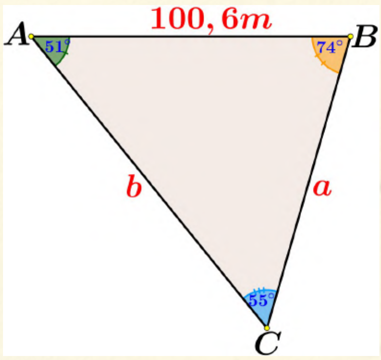
$\otimes$

Aplicação na topografia 5.4. Na observação de um triângulo que servirá de apoio para um levantamento, obtiveram-se os seguintes valores:

$$\begin{cases} \widehat{A} = 51^\circ; \;\; \widehat{B} = 74^\circ; \;\; \widehat{C} = 55^\circ; \\ AB = 100{,}6m \end{cases}$$

Com base nessas informações, calcule os comprimentos dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

Resolução:



Tomando $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, conforme figura acima, e aplicando a Lei dos Senos no ΔABC temos:

$$\frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \widehat{C}} \Longrightarrow \frac{a}{\text{sen } 51^\circ} = \frac{b}{\text{sen } 74^\circ} = \frac{100{,}6}{\text{sen } 55^\circ} \Longrightarrow \frac{a}{0{,}777} = \frac{b}{0{,}961} = \frac{100{,}6}{0{,}819}$$

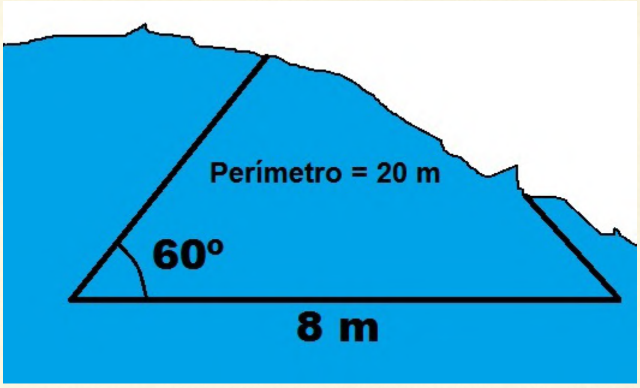
Resolvendo dois a dois, de forma conveniente, acharemos os valores de a e b. Segue que:

$$\frac{a}{0{,}777} = \frac{100{,}6}{0{,}819} \Longrightarrow 0{,}819a = 100{,}6 \cdot 0{,}777 \Longrightarrow a = \frac{78{,}1662}{0{,}819} \simeq 95{,}44$$
$$\frac{b}{0{,}961} = \frac{100{,}6}{0{,}819} \Longrightarrow 0{,}819b = 100{,}6 \cdot 0{,}961 \Longrightarrow b = \frac{96{,}6766}{0{,}819} \simeq 118{,}04$$

$\otimes$

Lei dos Senos e Lei dos Cossenos em Provas e Concursos

Questões de provas 5.5 (UEM-PR,2008)**.** Um engenheiro precisa conhecer a medida de cada lado de um terreno triangular cujo perímetro é 20 m, porém a planta do terreno foi rasgada e o que restou foi um pedaço, como na figura a seguir.



Os lados do triângulo que não aparecem totalmente na planta do terreno medem
a) ( ) $3\sqrt{3}m$ e $\left(12-3\sqrt{3}\right)m$
b) ( ) $5m$ e $7m$
c) ( ) $4{,}5m$ e $7{,}5m$
d) ( ) $8m$ e $4m$
e) ( ) $3m$ e $9m$

Resolução:

No triângulo completo da figura acima, tomemos:

$$\begin{aligned} x &: \text{ lado adjacente ao ângulo de } 60^\circ \\ y &: \text{ lado oposto ao ângulo de } 60^\circ \\ P &: \text{ perímetro do triângulo} \end{aligned}$$

Aplicando a definição de perímetro[a] temos:

$$P = x + y + 8 \Longrightarrow 20 = x + y + 8 \Longrightarrow y = 20 - 8 - x = 12 - x \qquad \text{(I)}$$

De (I) e aplicando a Lei dos Cossenos temos:

$$\begin{aligned} & y^2 = x^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 60^\circ \Longrightarrow (12-x)^2 = x^2 + 64 - 16 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \\ & 144 - 24x + x^2 = x^2 + 64 - 8x \Longrightarrow \underbrace{x^2 - x^2}_{0} - 24x + 8x = 64 - 144 \quad \cdot (-1) \\ & 16x = 80 \Longrightarrow x = \frac{80}{16} = 5 \end{aligned}$$

Substituindo em (I) temos:

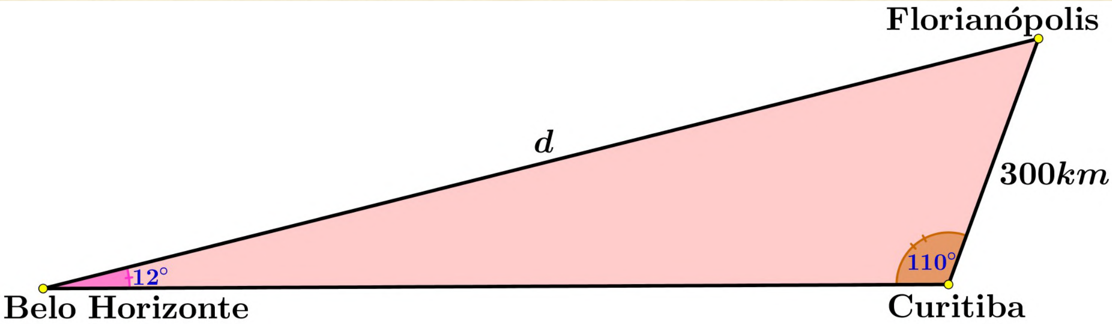
$$y = 12 - x = 12 - 5 = 7$$

Portanto, o lado adjacente ao ângulo de 60° mede 5 metros e o lado oposto mede 7 metros e a resposta é b).

$\otimes$

[a] Perímetro é a soma dos lados de um polígono.

Questões de provas 5.6 (FURB-SC,2006)**.** Florianópolis, Curitiba e Belo Horizonte, respectivamente, capitais de Santa Catarina, Paraná e Minas Gerais, estão localizadas conforme a figura a seguir.



A partir dos dados fornecidos, qual a distância entre Florianópolis e Belo Horizonte?
(Dados: $\cos 110° = -0,34$, $\text{sen } 110° = 0{,}93$, $\cos 12° = 0{,}97$ e $\text{sen } 12° = 0{,}2$.
a) ( ) 1700km b) ( ) 2395km c) ( ) 1395km d) ( ) 2700km e) ( ) 2390km

Resolução:

Como o enunciado fornece dois ângulos e uma medida, podemos resolver essa questão aplicando a Lei dos Senos.

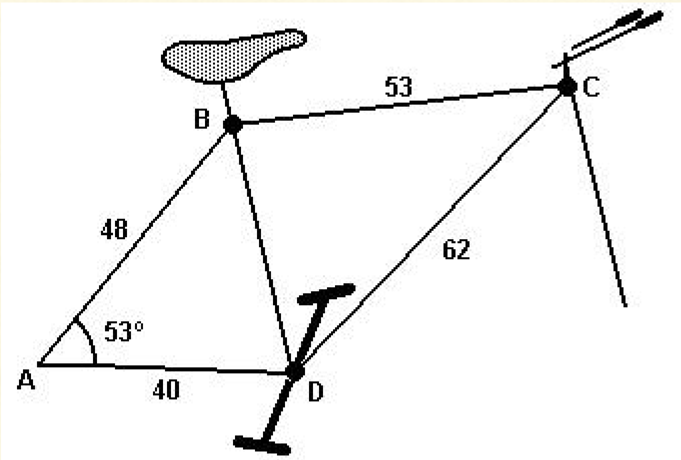
Da figura acima e aplicando a Lei dos Senos temos:

$$\frac{300}{\text{sen } 12°} = \frac{d}{\text{sen } 110°} \Longrightarrow \frac{300}{0{,}2} = \frac{d}{0{,}93} \Longrightarrow 0{,}2d = 300 \cdot 0{,}93 \Longrightarrow d = \frac{279}{0{,}2} = 1395km$$

Portanto a distância de Florianópolis a Belo Horizonte é 1395 km.

$\otimes$

Questões de provas 5.7 (PUC-SP,2005)**.** Considere que, na figura abaixo, tem-se a planificação do quadro de uma bicicleta e as medidas indicadas estão em centímetros.



Fonte: (PUC-SP,2005)

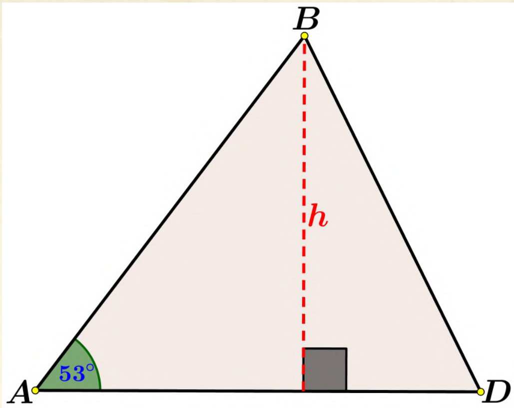
Se necessário, utilize $\text{sen } 53° = 0{,}8$, $\cos 53° = 0{,}6$ e $\tan 53° = 1,3$.
1) A área do triângulo ABD, em centímetros quadrados, é igual a:
a) ( ) 480 b) ( ) 576 c) ( ) 640 d) ( ) 768 e) ( ) 824
2) O perímetro do triângulo BCD, em centímetros, é igual a:
a) ( ) 148 b) ( ) 152 c) ( ) 155 d) ( ) 160 e) ( ) 172

Resolução:

Questão 1.

Note que, conforme figura abaixo, a altura relativa (h) ao lado $\overline{AD}$ no triângulo $\triangle ABD$ mede, pela definição de seno:

$$\text{sen } 53° = \frac{h}{48} \Longrightarrow h = 48 \cdot \text{sen } 53°$$



Sendo assim, a área do triângulo $\triangle ADB$ será:

$$A_{ADH} = \frac{AD \cdot h}{2} = \frac{40 \cdot 48 \cdot \text{sen } 53°}{2} = \frac{1536}{2} = 768.$$

Portanto a área do triângulo[a] $\triangle ABD$ é $768cm^2$ e a resposta certa é item d).

Questão 2.

Como o enunciado fornece duas medidas e o ângulo entre eles, podemos calcular o lado $\overline{BD}$ desse triângulo aplicando a Lei dos Cossenos.

Sendo assim, da figura acima e aplicando a Lei dos Cossenos em $\triangle ADB$ temos:

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos \measuredangle BAD \Longrightarrow = 48^2 + 40^2 - 2 \cdot 48 \cdot 40 \cdot \cos 53° \\ &= 2304 + 1600 - 2304 \\ BD &= \sqrt{1600} = 40 \end{aligned}$$

Tendo os três lados do triângulo $\triangle BCD$ seu perímetro (P) será:

$$P = BD + BC + DC = 40 + 53 + 62 = 155cm$$

Portanto o perímetro do triângulo $\triangle BCD$ é $155cm$ e a resposta certa é item c).

$\otimes$

[a] Dado qualquer triângulo, conhecendo a medida de dois lados (a) e (b) e o ângulo interno entre esses lados (α), a área desse triângulo é $\dfrac{a \cdot b \cdot \text{sen } \alpha}{2}$.

Lei dos Senos e Lei dos Cossenos com o Teodolito Didático

Atividade prática 5.8. Cálculo de distância horizontal inacessível (Ex.: largura de um rio).

Material Necessário:

- Teodolito Didático;
- Trena;
- 01 baliza;

Procedimento:

Explique aos alunos que para medir essa distância utilizaremos a Lei dos Senos que resolve essa questão para qualquer triângulo.

Atividade prática: O objetivo dessa atividade é calcular a distância de um ponto inicial acessível (I) a um ponto final inacessível (F).

Levantamento de dados:

1. instalar e nivelar o Teodolito Didático no ponto I de forma que seja possível visualizar sem obstáculo o objeto de referência do lado inacessível (ponto F);
2. zerar o teodolito, ou seja, alinhar o transferidor no valor 0 grau, no objeto do lado inacessível;

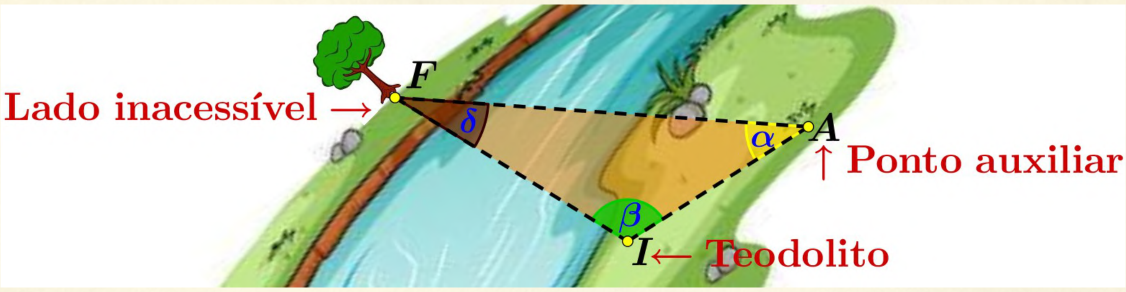
3. localizar um ponto (de preferência o ponto mais à direita)do lado acessível(ponto A na figura ilustrativa abaixo) e ver qual ângulo forma em relação ao ponto I chamando esse ângulo de β, e medir a distância horizontal até o teodolito;

4. inverter as posições, ou seja, colocar o Teodolito Didático no ponto A e uma baliza no ponto I.

5. zerar o teodolito, ou seja, alinhar o transferidor no valor 0 grau, no ponto I;

6. girar a luneta até localizar o objeto do lado inacessível (ponto F) e verificar quantos graus tem esse alinhamento, chamando esse ângulo de α;

Fazendo com cuidado os procedimentos acima garantimos um triângulo $\triangle AIF$, com dois ângulos medindo α e β e um cateto (de comprimento IA) entre eles, conforme a figura abaixo ilustra.



Para conhecer a distância até o ponto inacessível (IF) é só aplicar a Lei dos Senos no triângulo $\triangle AIF$, utilizaremos para isso a distância IA e os ângulos opostos às duas medidas.

Chamaremos de δ o ângulo oposto a IA e seu valor será:

$$\alpha + \beta + \delta = 180^\circ \Longrightarrow \delta = 180^\circ - \alpha - \beta \tag{I}$$

De (I) e aplicando a Lei dos Senos em $\triangle AIF$ temos:

$$\frac{IF}{\text{sen } \alpha} = \frac{IA}{\text{sen } \delta} \Longrightarrow IF \cdot \text{sen } \delta = IA \cdot \text{sen } \alpha \Longrightarrow IF = \frac{IA \cdot \text{sen } \alpha}{\text{sen } \delta}$$

Como IA, α e δ são conhecidos a solução da expressão acima é a distância até o ponto inacessível (IF).

Atividade prática 5.9. Cálculo do comprimento dos limites de uma poligonal e da área com o Teodolito Didático.

Material Necessário:

- Teodolito Didático;
- Trena;
- piquetes ou marcadores.

Procedimento:

Explique aos alunos que esse procedimento simula um método de levantamento topográfico chamado de irradiação, onde de um único ponto é possível medir todos os vértices do polígono sem precisar mudar o aparelho ponto a ponto.

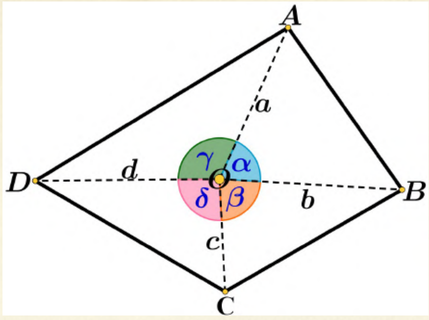
Atividade prática: O objetivo dessa atividade é calcular as distâncias entre os vértices de um polígono e sua área através das Leis dos Cossenos e dos Senos. O procedimento de captura de dados é:

1. marcar todos os vértices do polígono e colocar piquetes (ou marcadores);

2. localizar um ponto interno (para simplificar, o ponto poderia ser externo) ao polígono, de onde seja possível avistar e medir a distância a todos os vértices, e chamaremos esse ponto de O;

3. zerar o ângulo horizontal num vértice qualquer e medir a distância até esse ponto, anotando esse valor;

4. a partir desse primeiro ponto, no sentido horário localizar ponto a ponto todos os vértices até retornar ao ponto inicial, medir as distâncias e o ângulo interno, lembrando que a cada marcação o ângulo horizontal é zerado.



Na figura acima simulamos esse procedimento em um polígono de quatro vértices (A,B,C,D) de onde temos as seguintes distâncias e ângulos:

$\measuredangle AOB = \alpha$	$a:$ comprimento de $\overline{OA}$
$\measuredangle BOC = \beta$	$b:$ comprimento de $\overline{OB}$
$\measuredangle COD = \delta$	$c:$ comprimento de $\overline{OC}$
$\measuredangle DOA = \gamma$	$d:$ comprimento de $\overline{OD}$

Para o cálculo das distâncias entre os vértices do polígono foi aplicada a Lei dos Cossenos:

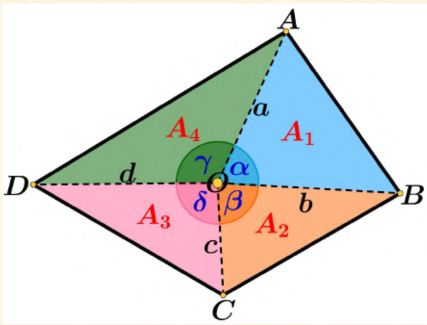
$$\text{comprimento de } \overline{AB}: AB^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\,\alpha \Longrightarrow AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\,\alpha} \qquad \text{(I)}$$

$$\text{comprimento de } \overline{BC}: BC^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\,\beta \Longrightarrow BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\,\beta} \qquad \text{(II)}$$

$$\text{comprimento de } \overline{CD}: CD^2 = c^2 + d^2 - 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos\,\delta \Longrightarrow CD = \sqrt{c^2 + d^2 - 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos\,\delta} \qquad \text{(III)}$$

$$\text{comprimento de } \overline{DA}: DA^2 = d^2 + a^2 - 2 \cdot d \cdot a \cdot \cos\,\gamma \Longrightarrow DA = \sqrt{d^2 + a^2 - 2 \cdot d \cdot a \cdot \cos\,\gamma} \qquad \text{(IV)}$$

Para o cálculo da área do polígono também é feito em cada triângulo medido, onde a área do polígono será a soma da área de cada polígono, conforme a figura abaixo:



A área do triângulo A_1 pode ser calculada através da fórmula $b \cdot h/2$, onde h é a altura relativa ao lado $\overline{OB}$. Contudo podemos perceber que essa altura pode ser calculada, com ajuda da definição de seno, por $h = a\ \text{sen}(\alpha)$. Deste modo obtemos para a área de A_1 e, analogamente, para as áreas de A_2, A_3 e A_4:

$$\text{área }(A_1) = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen } \alpha}{2}$$

$$\text{área }(A_2) = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen } \beta}{2}$$

$$\text{área }(A_3) = \frac{c \cdot d \cdot \text{sen } \delta}{2}$$

$$\text{área }(A_4) = \frac{d \cdot a \cdot \text{sen } \gamma}{2}$$

E a área total do polígono é:

$$\text{Área}_{total} = \text{área}\,(A_1) + \text{área}\,(A_2) + \text{área}\,(A_3) + \text{área}\,(A_4)$$

!! Leve a turma até um terreno vazio e calcule a área e o perímetro do terreno através da técnica ilustrada na atividade 5.9.

6- Teorema de Heron

Em um problema prático de medir a área de uma região planar, podemos dividi-la em regiões triangulares e assim necessitamos calcular as áreas de vários triângulos. Muitas vezes alguns dados já são conhecidos ou são muito mais fáceis de obter do que outros. Nesse contexto pode ser interessante conseguir calcular a área de um triângulo conhecendo apenas seus lados. Existe um modo de fazer isso, conhecido como Teorema de Heron, e que deduzimos abaixo para um triângulo acutângulo, apesar da fórmula valer para quaisquer triângulos.

A fórmula utiliza o *semi-perímetro* do triângulo, que é definido como a metade do perímetro:

$$p = \frac{a+b+c}{2},$$

e consequência imediata[a]:

$$p - a = \frac{b+c-a}{2}.$$

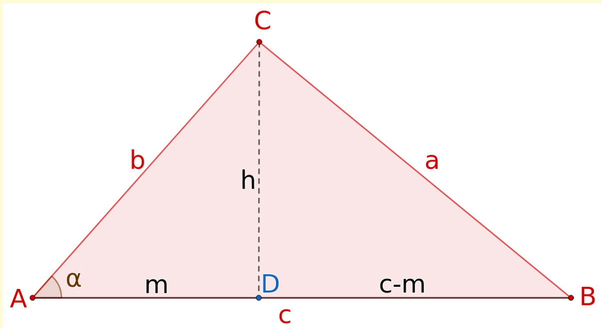
Teorema 6.1 (Teorema de Heron)**.** *A área de um triângulo de lados a, b e c é*

$$\mathcal{A} = \sqrt{(p-c)(p-b)(p-a)p}.$$

Demonstração. (Para o caso de um triângulo acutângulo.) No triângulo $\triangle ABC$ traçamos a altura relativa ao lado $\overline{AB}$, de medida h. A área do triângulo pode ser calculada por

$$\mathcal{A} = \frac{ch}{2}.$$

Vamos calcular h em termos de a, b e c. Para isso consideramos o pé da altura D, que divide o segmento $\overline{AB}$ em dois[b], como na figura abaixo:



No triângulo $\triangle ADC$ obtemos, pelo Teorema de Pitágoras, que

$$b^2 = m^2 + h^2 \implies m = \sqrt{b^2 - h^2}$$

e aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $\triangle BCD$, obtemos

$$\begin{aligned}
a^2 = h^2 + (c-m)^2 &= h^2 + c^2 - 2cm + m^2 = h^2 + c^2 - 2c\sqrt{b^2-h^2} + (b^2 - h^2) \\
\implies a^2 &= c^2 + b^2 - 2c\sqrt{b^2-h^2} \implies \sqrt{b^2-h^2} = \frac{c^2+b^2-a^2}{2c} \\
\implies h^2 &= b^2 - \frac{(c^2+b^2-a^2)^2}{4c^2} = \frac{(2bc)^2 - (c^2+b^2-a^2)^2}{4c^2} \\
&= \frac{(2bc - (c^2+b^2-a^2))(2bc + (c^2+b^2-a^2))}{4c^2} \\
&= \frac{(a^2 - (c-b)^2)((c+b)^2 - a^2))}{4c^2} \\
&= \frac{(a-(c-b))(a+(c-b))((c+b)-a)((c+b)+a)}{4c^2} \\
&= \frac{(a+b-c)(a+c-b)(c+b-a)(c+b+a)}{4c^2} \\
\implies h &= \frac{\sqrt{4(p-c)(p-b)(p-a)p}}{c}.
\end{aligned}$$

substituindo essa expressão para h na fórmula da área, obtemos

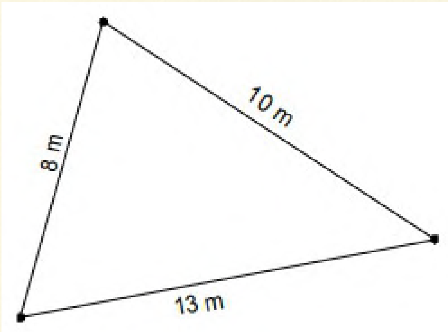
$$\mathcal{A} = \frac{ch}{2} = \sqrt{(p-c)(p-b)(p-a)p}.$$

□

[a]Que, é claro, pode ser usada em expressões análogas para $p - b$ e $p - c$.
[b]Pois o triângulo é acutângulo.

Aplicações - Teorema de Heron

Aplicação na topografia 6.2. Calcule a área do terreno cuja forma e dimensões estão representadas pela figura abaixo.



Fonte: (PASTANA, pg.25)

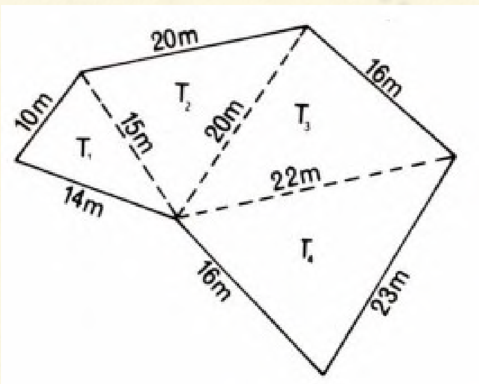
Resolução:

Como não consta ângulos na figura aplicaremos a Fórmula de Heron, que calcula a área utilizando apenas as medidas dos lados do triângulo, sendo assim:

$$a = 8m,\ b = 10m \text{ e } c = 13m$$
$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{8+10+13}{2} = \frac{31}{2} = 15{,}5m$$
$$S = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)} = \sqrt{15{,}5.(15{,}5-8).(15{,}5-10).(15{,}5-13)}$$
$$= \sqrt{15{,}5 \cdot 7{,}5 \cdot 5{,}5 \cdot 2{,}5} = \sqrt{1598{,}44} \simeq 39{,}98m^2.$$

⊗

Aplicação na topografia 6.3. Para o terreno representadas pela figura abaixo calcule a área.



Fonte: (PASTANA, pg.25)

Resolução:

Como não consta ângulos na figura aplicaremos a Fórmula de Heron, que calcula a área utilizando apenas as medidas dos lados do triângulo, sendo assim, para cada um dos triângulos que o perímetro foi dividido chamaremos de a_i, b_i e c_i os lados do triângulo e calcularemos o semiperímetro (p_i) e a área

$((T_i))$, onde $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, sendo assim:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 14m,\ b_1 = 10m \text{ e } c_1 = 15m\\
p_1 &= \frac{a_1+b_1+c_1}{2} = \frac{14+10+15}{2} = \frac{39}{2} = 19{,}5m\\
S(T_1) &= \sqrt{p_1\cdot(p_1-a_1)\cdot(p_1-b_1)\cdot(p_1-c_1)}\\
&= \sqrt{19{,}5\cdot(19{,}5-14)\cdot(19{,}5-10)\cdot(19{,}5-15)} = \sqrt{19{,}5\cdot 5{,}5\cdot 9{,}5\cdot 4{,}5}\\
&= \sqrt{4584{,}94} \simeq 67{,}71m^2\\
a_2 &= 15m,\ b_2 = 20m \text{ e } c_2 = 20m\\
p_2 &= \frac{a_2+b_2+c_2}{2} = \frac{15+20+20}{2} = \frac{55}{2} = 27{,}5m\\
S(T_2) &= \sqrt{p_2\cdot(p_2-a_2)\cdot(p_2-b_2)\cdot(p_2-c_2)}\\
&= \sqrt{27{,}5\cdot(27{,}5-15)\cdot(27{,}5-20)\cdot(27{,}5-20)} = \sqrt{27{,}5\cdot 12{,}5\cdot 7{,}5\cdot 7{,}5}\\
&= \sqrt{19335{,}94} \simeq 139{,}05m^2\\
a_3 &= 20m,\ b_3 = 16m \text{ e } c_3 = 22m\\
p_3 &= \frac{a_3+b_3+c_3}{2} = \frac{20+16+22}{2} = \frac{58}{2} = 29m\\
S(T_3) &= \sqrt{p_3\cdot(p_3-a_3)\cdot(p_3-b_3)\cdot(p_3-c_3)}\\
&= \sqrt{29\cdot(29-20)\cdot(29-16)\cdot(29-22)} = \sqrt{29\cdot 9\cdot 13\cdot 7} = \sqrt{23751} \simeq 154{,}11m^2\\
a_4 &= 22m,\ b_4 = 23m \text{ e } c_4 = 16m\\
p_4 &= \frac{a_4+b_4+c_4}{2} = \frac{22+23+16}{2} = \frac{61}{2} = 30{,}5m\\
S(T_4) &= \sqrt{p_4\cdot(p_4-a_4)\cdot(p_4-b_4)\cdot(p_4-c_4)}\\
&= \sqrt{30{,}5\cdot(30{,}5-22)\cdot(30{,}5-23)\cdot(30{,}5-16)} = \sqrt{30{,}5\cdot 8{,}5\cdot 7{,}5\cdot 14{,}5}\\
&= \sqrt{28193{,}44} \simeq 167{,}91m^2
\end{aligned}
$$

Feito esses cálculos, a área total do polígono será:

$$
\begin{aligned}
S &= S(T_1) + S(T_2) + S(T_3) + S(T_4)\\
&= 67{,}71 + 139{,}05 + 154{,}11 + 167{,}91 = 528{,}78m^2
\end{aligned}
$$

$\otimes$

Cálculo da Área com o Teorema de Heron

Atividade prática 6.4. Cálculo de área sem o uso de Teodolito Didático.

Material Necessário:

- Trena;
- piquetes ou marcadores.

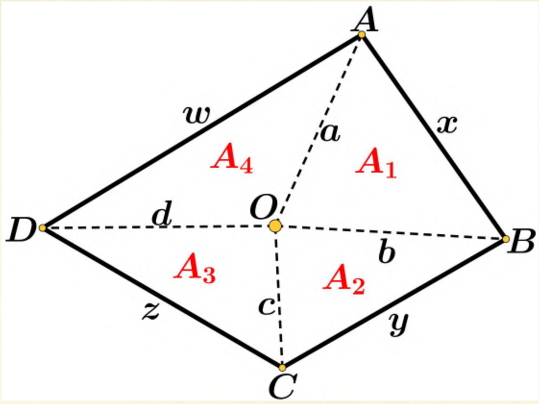
Procedimento:

Explique aos alunos que esse procedimento serve apenas para o cálculo das áreas, e recebe o nome matemático de Teorema de Herão[a]. Ele utiliza apenas as medidas e o semiperímetro[b] para o cálculo da área.

Atividade prática: O objetivo dessa atividade é calcular a área de um polígono onde se conhecem todas as medidas de seus lados. O procedimento de captura de dados é:

1. marcar todos os vértices do polígono e colocar piquetes (ou marcadores);
2. localizar um ponto interno ao polígono, de onde seja possível avistar e medir a distância a todos os vértices, e chamaremos esse ponto de O, a partir dele o terreno é dividido em triângulos;
3. a partir do ponto O, medir as distâncias do ponto O a cada vértice do polígono e anotar;

4. a partir de um ponto inicial, no sentido horário ou anti horário, medir a distância para o próximo ponto, e repetir o processo até retornar ao ponto inicial.



Na figura acima simulamos esse procedimento em um polígono de quatro vértices (A,B,C,D) de onde temos as seguintes distâncias:

$$
\begin{array}{ll}
a: \text{ comprimento de } \overline{OA}; & b: \text{ comprimento de } \overline{OB}; \\
c: \text{ comprimento de } \overline{OC}; & d: \text{ comprimento de } \overline{OD}; \\
x: \text{ comprimento de } \overline{AB}; & y: \text{ comprimento de } \overline{BC}; \\
z: \text{ comprimento de } \overline{CD}; & w: \text{ comprimento de } \overline{DA}.
\end{array}
$$

Para o cálculo da área do polígono é feito o cálculo da área em cada triângulo medido, onde a área do polígono será a soma da área de cada polígono.

Aplicamos o Teorema de Heron da seguinte forma:

$$
\begin{array}{ll}
p_1 = \dfrac{a+b+x}{2} \Longrightarrow & \text{área}\,(A_1): \sqrt{p_1 \cdot (p_1 - a) \cdot (p_1 - b) \cdot (p_1 - x)} \\
p_2 = \dfrac{b+c+y}{2} \Longrightarrow & \text{área}\,(A_2): \sqrt{p_2 \cdot (p_2 - b) \cdot (p_2 - c) \cdot (p_2 - y)} \\
p_3 = \dfrac{c+d+z}{2} \Longrightarrow & \text{área}\,(A_3): \sqrt{p_3 \cdot (p_3 - c) \cdot (p_3 - d) \cdot (p_3 - z)} \\
p_4 = \dfrac{d+a+w}{2} \Longrightarrow & \text{área}\,(A_4): \sqrt{p_4 \cdot (p_4 - d) \cdot (p_4 - a) \cdot (p_4 - w)}
\end{array}
$$

E a área total do polígono é:

$$
\text{Área}_{total} = \text{área}\,(A_1) + \text{área}\,(A_2) + \text{área}\,(A_3) + \text{área}\,(A_4)\,.
$$

[a] Ou Heron, pois é atribuído ao matemático Heron de Alexandria.
[b] O semiperímetro é a metade do perímetro de um polígono.

!! Calcule a área de um terreno, sem o uso de um Teodolito Didático, apenas com o uso de uma fita métrica, utilizando a técnica ilustrada na aplicação 6.4.

Posfácio

Esse trabalho foi escrito paralelamente à dissertação de mestrado do primeiro autor, Cassiano Henrique Monteiro Corrêa Ramos, que versa sobre o mesmo tema; mas com maior riqueza de detalhes e pode ser encontrada em:

`https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/`

Além disso o primeiro autor teve apoio da CAPES através de uma bolsa de estudos durante a realização do mestrado.

A ilustração utilizada como fundo nas páginas foi disponibilizada pelo usuário *DevonTT* no FLICKR sob o título "Pieceof8- Old Paper-1600x1200"e adaptada para o tamanho A4.

O primeiro autor é professor de matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima, campus Novo Paraíso, e mestre em matemática pelo PROFMAT.

O segundo autor é doutor em matemática e professor da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Curitiba.

A capa do livro foi de autoria de Leonardo Sarmenho Satto, da DOS Comunicação, que doou como cortesia para os autores.

O projeto do Teodolito Didático conta com a participação, além dos dois autores, do engenheiro mecânico e professor Silvio Luiz Castelhano Firmino, do IFSP Campus Registro, ao qual agradecemos. Agradecemos também às sugestões do professor Ederson Marcelino da Silva, que auxiliou na revisão do conteúdo do livro.

A maioria das figuras foram criadas pelos autores, todavia algumas são adaptações das questões dos respectivos concursos. Nas figuras utilizadas de outros trabalhos citamos as fontes abaixo das figuras.

Cassiano Henrique Monteiro Corrêa Ramos - *chmcramos@gmail.com*
Márcio Rostirolla Adames - *marcioadames@utfpr.edu.br*

Referências Bibliográficas

[1] Dante, L. R. *MATEMÁTICA: Contextos e Aplicações.* Vol. 1, Ática. São Paulo: 2010.

[2] Dolce, O.; Pompeo, J.N. *Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana.* 7ª ed. Atual Editora LTDA. São Paulo: 1995.

[3] OBMEP *Olimpíada Brasileira de matemática das Escolas Públicas.* Gabaritos - Exames anuais da OBMEP. Disponível em: `http://www.obmep.org.br/provas.htm.` Acesso em 26 jun. 2018

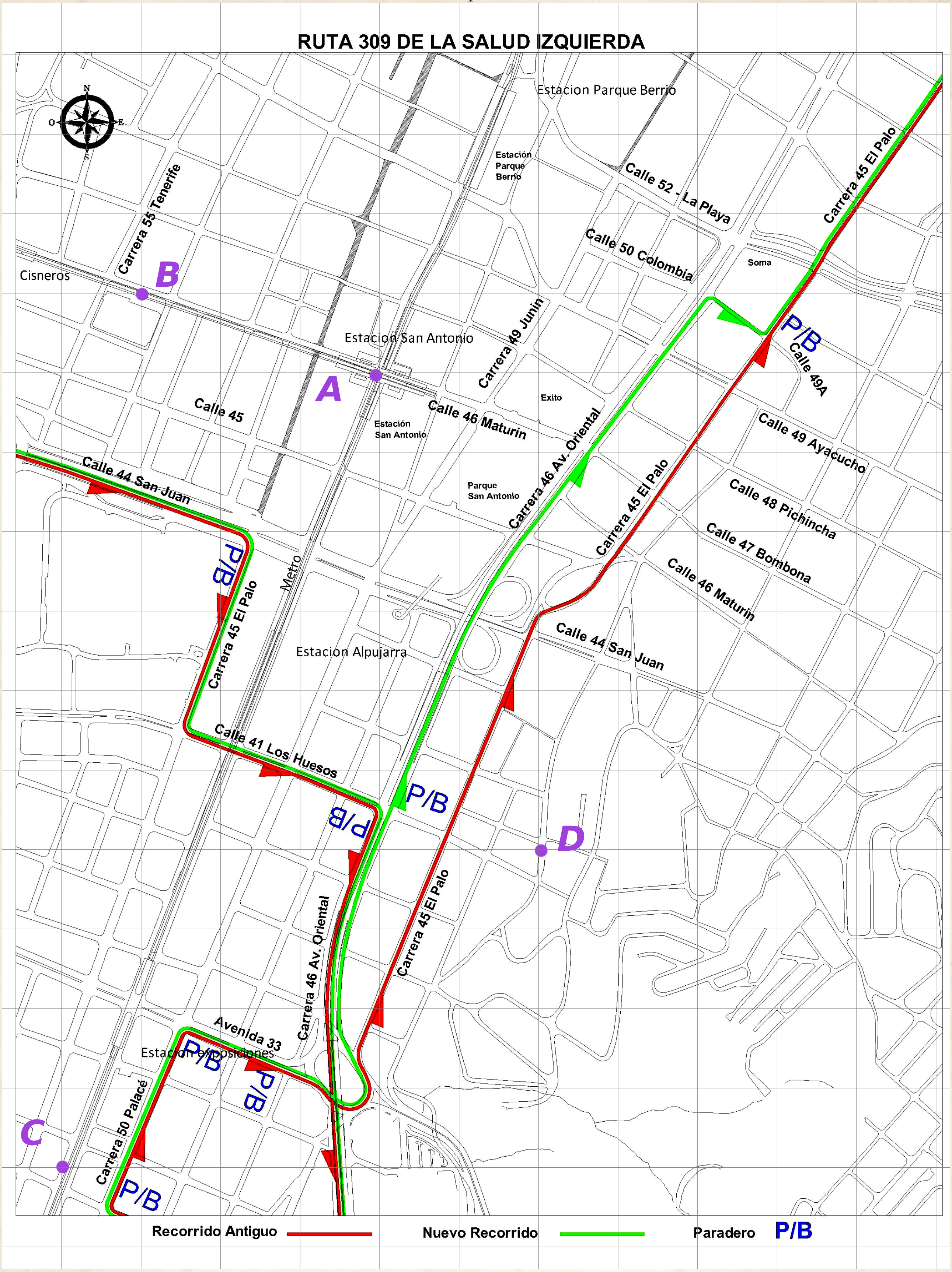
[4] OMIF *Olimpíada Mundial dos Institutos Federais.* Simulado. Disponível em: `http://omif.muz.ifsuldeminas.edu.br/assets/archives/simulado_omif_2018.pdf`. Acesso em: 26 jun. 2018

[5] Pastana, C. E. T. *TOPOGRAFIA I E II: Anotações de Aula.* UNIMAR - Faculdade de Engenharia, Arquitetura e Tecnologia. Marília: 2010.

[6] PROFMAT. *Provas - Exame Nacional de Acesso.* Disponível em: `http://www.profmat-sbm.org.br/funcionamento/memoria/ena/provas/`. Acesso em: 26 jun. 2018

[7] Ribeiro, J. *MATEMÁTICA: Ciência, Linguagem e Tecnologia.* Vol. 1, Scipione. São Paulo: 2010.

Anexo 1: Mapa da Rota 309



Fonte: Mapa disponibilizado no flickr pela Secretaría de Movilidad de Medellín, com alterações.