5. CADERNOS PARA O ENSINO DE FUNÇÃO

Os Cadernos para o Ensino de Função são resultantes de Pesquisa realizada durante o desenvolvimento de Mestrado Profissional, no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas, que é desenvolvido pelo Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará. Esse produto faz parte da Dissertação intitulada Ensino de Função: Sua compreensão e possibilidades de ação a partir de múltiplos olhares, elaborada pela mestranda Soraia das Neves Barros, sob a orientação do prof. Dr. Neivaldo Oliveira Silva e se configura em um material didático destinado ao ensino de Função, para uso de professores que atuam no ensino de matemática.

É importante destacar que os múltiplos olhares que possibilitaram a elaboração do material, além de referenciais teóricos que se fazem necessários como fundamento de produções acadêmicas, foram olhares de professores que atuam com o ensino de função e de alunos desses professores. Todos eles tiveram suas vozes ouvidas para que suas experiências, anseios, dúvidas, dificuldades e expectativas também pudessem ser referências colocadas a serviço dessa produção.

5. 1. Apresentação

Os Cadernos para o Ensino de Função foram idealizados na perspectiva de sua utilização em sala de aula, por professores que atuam no nível médio. Para isso, a temática Função é tratada de forma introdutória e, portanto, o tipo de Função explorado é a Função Afim, mas as ideias discutidas devem ser entendidas como básicas e gerais, necessitando, é claro, de acréscimos para o trabalho de ensino com outros tipos de função. Essas ideias gerais são apresentadas a partir do estabelecimento de Princípios para o Ensino de Função, que serão explicitados na seção seguinte, detalhados e fundamentados, para depois serem apresentadas atividades, como propostas de encaminhamento metodológico para o ensino, mas que são apenas sugestões, dentre outras várias possíveis.

A composição do Caderno foi feita a partir da organização de atividades nas quais são explorados os três principais aspectos relacionados à aprendizagem do tema Função que julgo devam estar presentes no ensino, que são: (1) Em busca do Sentido de Função e de Relações. O sentido diz respeito ao Conceito de Função e as relações dizem respeito a outras temáticas já conhecidas e outras áreas de conhecimento; (2) Ampliando a Visão e estabelecendo pontes entre a compreensão e a formalização. Trata-se do aprofundamento do sentido, que parte do informal até chegar ao formal; (3) Consolidando a aprendizagem de função, onde são desenvolvidas atividades de fixação. e as atividades são desenvolvidas tendo como referência diferentes tipos de situações e análise destas, conduzindo ao alcance dos objetivos que foram estabelecidos a partir dos aspectos em pauta.

Considerando a necessidade dos professores terem uma efetiva participação nos seus processos de formação, as atividades foram idealizadas e produzidas de modo a permitir a intervenção deles, adequando aos contextos de aplicação e dos alunos com os quais eles atuam.

5. 2. Princípios para o Ensino de Função

Os princípios para o Ensino de Função são a essência da proposta aqui apresentada e as referências que nortearam a definição das atividades presentes nessa produção, devendo ser entendidos como orientações para o trabalho de ensino, em sala de aula. São seis princípios que possuem articulação entre si e assim devem ser compreendidos, necessitando portanto, de leitura atenta, antes de sua aplicação.

- ✓ **O processo de ensino e aprendizagem do tema Função deve ter como referência primeira os conhecimentos prévios dos alunos em relação à temática**:

Esse princípio foi estabelecido com a intenção de superar dificuldades de aprendizagem de matemática que, segundo Sanchez (2004), se relacionam ao desenvolvimento cognitivo e à construção da experiência matemática, da conquista de noções básicas e princípios numéricos, da conquista da numeração, da prática das operações básicas, quanto à mecânica ou quanto à compreensão do significado das operações e dificuldades na resolução de problemas, o que implica a compreensão do problema, compreensão e habilidade para analisar o problema e raciocinar matematicamente. Nesse sentido é fundamental que os professores desenvolvam atividades exploratórias, buscando identificar possíveis dificuldades relacionadas aos pré-requisitos que dão base à temática e agir no sentido de buscar a superação delas. O trabalho com os pré-requisitos, no entanto, não precisa necessariamente anteceder o ensino de Função, como uma forma de apêndice ou etapa que antecede o ensino específico da temática, pois isso pode acobertar o objetivo principal que é o entendimento da própria temática. Esse trabalho deve fazer parte do processo, de forma natural, mas possibilitar o estabelecimento de relações com temáticas conhecidas pelos alunos; de modo que percebam que o "novo conteúdo" já é conhecido por eles;

✓ **A compreensão deve preceder a formalização**:

O trabalho com o tema Função envolve a realização de cálculos e o uso de modelos matemáticos produzidos por vários estudiosos. No entanto, esse trabalho só adquire sentido se os alunos construírem o significado e entenderem as diversas situações nas quais coisas presentes no mundo físico, que estão em permanente mudança, se relacionam umas com as outras e podem ser, de acordo com Caraça (1989) e considerando as características fundamentais de interdependência e fluência, descritas a partir de uma função. A formalização, através de processos de dedução até chegar a uma definição do que vem a ser uma função é uma etapa posterior e necessita desse estágio inicial, de modo que ele não se torne mecânico e de difícil entendimento, dificultando a aprendizagem. Outro autor que nos auxilia no estabelecimento deste princípio é Nóvoa (2001), que afirma que a proximidade entre o formalismo da construção matemática e a informalidade do mundo real é um princípio extremamente necessário. Essa aproximação ou estabelecimento de relação deve ser um desafio na profissão do educador matemático, uma preocupação que deve acompanhá-lo na sua prática de sala de aula ensinando matemática. É possível, como forma de conclusão relativa a esse princípio, parafrasear Freire (1996), que destacou em sua teoria que a "a leitura do mundo precede a leitura da palavra".

✓ **A proposição de atividades introdutórias ao Ensino de Função deve ter como referência a realidade dos alunos**:

Conhecer a realidade dos alunos é um aspecto essencial para que esse princípio seja respeitado e adequar ou adaptar atividades a essa realidade é uma ação que pode se fazer necessária, mas o fundamental é que ao utilizar atividades com essa intenção seja possibilitado que os alunos se manifestem e, com isso, seja dado o indicativo da ambientação dos alunos, objetivo principal desse tipo de proposição; pode-se fazer uso de situações problemas como princípio da educação matemática. Aqui, novamente nos fundamentamos em Caraça (1989), pois se o autor diz que o conceito de função, mesmo que seja utilizado para explicar o estudo das leis de formação, sugere que este assunto seja introduzido a partir de ideias de correspondência entre grandezas, observando suas regularidades e deixando evidente a relação de dependência entre elas, para entender que as variáveis representam essas grandezas e a taxa de variação entre as variáveis, mas defende que a correspondência se dá entre coisas do mundo físico, entendemos então, que essas coisas do mundo físico podem ser extraídas da realidade dos alunos, para a melhoria da aprendizagem dos alunos a quem se destina o ensino;

- ✓ **A participação dos alunos na sua aprendizagem é condição necessária, de modo a torná-la um processo pessoal em que o aprender se transforme em fazer matemática:**

Nesse sentido, há necessidade de que o ensino possibilite a ação do aluno, seja propondo, refletindo sobre suas produções ou outras já produzidas, levantando questões, estabelecendo planos, estratégias de ação, fazendo conjecturas, buscando caminhos, respostas, generalizando soluções, criando modelos,... e a aprendizagem não se torne um processo mecânico e sem significado. Esse princípio tem como referência Carvalho (2005), ao defender que seria importante que o trabalho matemático primasse pelo raciocínio, pela capacidade de resolver problemas e de usar as ideias matemáticas para explorar situações diversas, mas também tem referência em Freire (1996), quando diz que faz parte da natureza da prática docente a indagação, a busca, a pesquisa, e isto, nos leva a entender que o educador deve ser o mediador nesse processo, incentivando seus alunos para essa reflexão e, nesse sentido, a participação ativa dos alunos se configura numa necessidade vital para a aprendizagem;

- ✓ **A abordagem das atividades precisa se dar de forma ampla e permitir a conexão com outras áreas de conhecimento**:

Uma abordagem integrada, na perspectiva da correlação entre os saberes de diversas áreas de conhecimento possibilita uma visão não fragmentada da realidade e também pode contribuir para dar sentido à matemática, na medida em que as questões quantitativas, de dimensionamento, localização, posicionamento, dentre outras que envolvem o pensamento matemático, vão estar inseridas em um dado contexto da realidade. Uma possibilidade de trazer esse princípio para o trabalho de sala de aula tem apoio nos estudos de Carraher e Schliemann (2011), quando confirmam em suas análises de pesquisa com alunos da classe baixa que o processo de ensino e aprendizagem precisa ser vinculado a situações reais, dando sentido aos conhecimentos matemáticos formais a partir das experiências construídas pelos alunos no seu dia-a-dia;

- ✓ **A diversidade na adoção de Tendências Metodológicas deve ser uma característica da Prática Pedagógica**:

É a diversidade que possibilita lidar com as diferentes individualidades e os mais variados grupos. O uso da história, facilitando a compreensão das produções e utilizações práticas de entes matemáticos é uma possibilidade, dando sentido a eles e despertando o interesse, não simplesmente contando a história, mas reconstruindo-a, como uma forma de reviver ou revisitar a história; a utilização de jogos exploratórios, alternativa considerada como meio de ensino dinâmico, altamente reflexivo, que oportuniza ao aluno interagir e aprender coletivamente na sala de aula e podem, de acordo com Borin (2007) e Macedo (2000), modelar conceitos matemáticos que na opinião dos alunos são abstratos e sem importância; o trabalho com a Resolução de Problemas, que possibilita a organização do pensamento, permite estabelecer conexão com a realidade e pode trazer a dimensão da pesquisa para o ensino de matemática e, segundo Brosseau (1996), em termos do ensino de função, voltado a um caráter dinâmico deste conceito para propiciar ao aluno sua apropriação, demonstrando o seu uso diante de situações problemas que sustente a funcionalidade deste saber; o desenvolvimento de trabalho de forma interativa, com o uso de aplicativos, de novas tecnologias e a possibilidade da proposição de atividades como construção de gráficos, que além de se apresentar como ferramenta atual, dá ênfase no visual e na ação dos alunos. Essas são algumas, dentre outras tendências da Educação Matemática, que podem ser utilizadas para dar esse tom diverso que, para Baccarin (2008) precisa ocorrer, para assegurar às crianças, aos jovens e adultos, aprendizagens e estratégias de ensino diversificadas, pois é na sala de aula, que a escola poderá garantir-lhes a possibilidade de construir conceitos, princípios e fenômenos cada vez mais complexos, e de transitar por diferentes campos do saber, aprendendo procedimentos, valores e atitudes imprescindíveis para o desenvolvimento de suas diferentes capacidades.

Na seção seguinte será explorado o primeiro aspecto relacionado à aprendizagem do tema Função, sob o título “Em busca do Sentido de Função e de Relações”. O sentido diz respeito ao Conceito de Função e as relações dizem respeito a outras temáticas já conhecidas e outras áreas de conhecimento. Nessa seção as atividades serão desenvolvidas tendo como referência diferentes tipos de situações e análise destas, conduzindo ao alcance de objetivos relativos a esse aspecto.

5.3. Em busca de Sentido e de Relações

Para a compreensão do tema Função há necessidade de se buscar o sentido do termo, quando relacionado à matemática, que pode ser entendido sob o prisma da relação entre fenômenos que sofrem transformações e são dependentes entre si. Mas essa dependência pode ser identificada em frases que, a princípio, não possuem relação com a matemática, como *a vida depende da existência de água* ou, dito de outra forma, *a vida existe em função da existência de água*. Dar sentido ao tema é uma preocupação que estará presente na proposta de ensino aqui delineada, mas existe outra preocupação, que é a busca do estabelecimento de conexões com outros temas da matemática, na perspectiva de se ter a percepção de que o tema não é completamente novo e de que existem outros conhecimentos matemáticos que poderão facilitar a compreensão e o trabalho com as funções.

- Ideias já conhecidas relativas ao tema Função:

A ideia de Função surge, naturalmente, em muitos temas que são estudados ao longo das várias séries que antecedem o seu tratamento formal através do qual o tema é estudado. No 7º ano, temos a Proporção, que nos remete ao tema Equação e, depois, ao tema **Função**, pois trata da relação entre duas ou mais grandezas variáveis e interdependentes. Veja, como exemplo, a situação a seguir, na qual existem duas grandezas, velocidade e tempo, as quais estão relacionadas de modo que, quando uma varia, a outra também varia, de forma proporcional:

- Situação 01: Se você faz um percurso entre dois pontos de sua cidade, distantes 1200 metros, o tempo de deslocamento dependerá de sua velocidade (média).

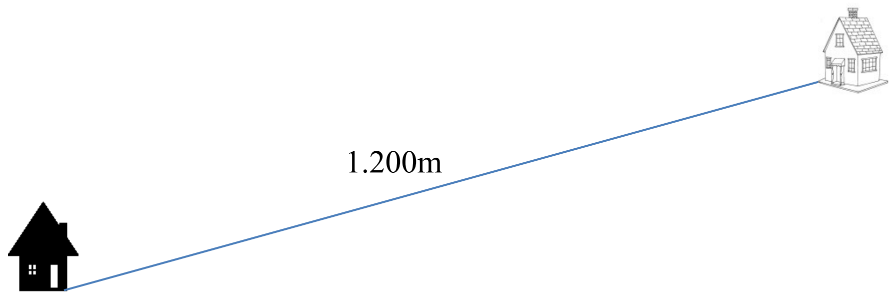


Figura 13: Distância entre dois pontos

Preencha a tabela a seguir, com o tempo de deslocamento para as diferentes velocidades.

VELOCIDADE (v)	1 m/s	2 m/s	4 m/s
TEMPO	..... s (20)	..... s (10)	.... s (5)

Se relacionarmos os pares de grandezas, temos razões e a comparação entre as razões, que é uma proporção. Mas essa situação é um exemplo de Função. Procure identificar o padrão de comportamento da relação, até chegar à Lei de Formação da Função.

$$F(v) = \frac{1200}{60v} \quad \text{ou, simplesmente,}$$

$$F(v) = \frac{20}{V}$$

A partir daqui cabe a você, professor(a), continuar explorando a situação. Observe as orientações a seguir, de modo que possa participar de forma propositiva do trabalho de ensino.

Orientações Metodológicas:

- A situação pode ser modificada e envolver outros pontos de referência que sejam conhecidos por eles, de modo que isso possa ser vivenciado e experimentado pelos alunos. A utilização de mapas de cidades ou de bairros pode ser uma alternativa interessante;
- Explore a situação detalhadamente, até que os alunos consigam visualizar o padrão de comportamento da relação, até chegar à Lei de Formação da Função. O ideal é que os alunos cheguem a essa lei;
- Explore a situação, propondo problemas que, ao serem resolvidos pelos alunos, possibilitem identificar dificuldades relativas ao trabalho com equações e agir no sentido de superá-las.
- A utilização de pequenos mapas de bairros, de cidades pode ser uma alternativa interessante, pois as questões de localização podem possibilitar, posteriormente, o trabalho com gráficos.
- O objetivo aqui era estabelecer relação entre Função, Razão, Proporção e Equação, mas a situação pode continuar sendo explorada até chegar ao trabalho com gráfico. Na atividade relativa à situação 02 o desenvolvimento é mais completo e a primeira pode ser usada como referência.

- Outra relação: Outro tema da matemática que tem relação com Função e que costuma ser estudado no nível fundamental faz parte da Geometria, que é o trabalho com Perímetros, pois o perímetro de uma figura é função de seus lados, ou seja, perímetro de uma figura depende das medidas de seus lados, o que nos remete à situação apresentada a seguir.

- Situação 02: Imagine que será feita uma reforma na sua casa e você irá definir a dimensão de seu quarto, que terá que ter a forma de quadrado, mas precisa saber o comprimento de madeira que será utilizado no rodapé das paredes.

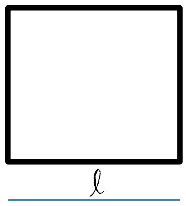


Figura 14: forma quadrada

O perímetro do quadrado que é a figura geométrica que corresponde à forma de seu quarto é a soma das dimensões de seus lados e, portanto, igual a 4ℓ e irá corresponder ao total do comprimento da madeira a ser utilizada no rodapé.

LADO (ℓ)	2,5 m	3 m	3,5 m
PERÍMETRO	..... m (10)	..... m (12)	.... m (14)

Essa situação também é um exemplo de Função. Procure identificar o padrão de comportamento da relação, até chegar à Lei de Formação da Função.

$$F(\ell) = 4\ell$$

A continuidade da exploração da situação novamente é tarefa do(a) professor(a). Existem orientações nesse sentido a seguir. Proponha outro formato, além do quadrado.

Orientações Metodológicas:

- Explore a situação nos moldes da primeira situação, até que os alunos consigam visualizar o padrão de comportamento da relação e chegar à Lei de Formação da Função. O ideal é que os alunos cheguem a essa lei;
- O objetivo aqui era estabelecer relação entre Função e Geometria, mas a situação também pode continuar sendo explorada até chegar ao trabalho com gráfico e ter como referência, novamente, a atividade relativa à situação 01.

- Situação 03: Se você joga basquete e estabelece, como regra, que só é válido lançar a bola de fora do garrafão, fazendo cestas de três pontos, a quantidade de pontos dependerá do número de cestas feita pelo seu time.

Figura 15: cesta de basquetebol

N° de Cestas (c)	2	5	10
Total de Pontos	.... (6)	.... (15)	..... (30)

Essa é mais uma situação que também pode ser traduzida matematicamente através conceito de Função. Procure identificar o padrão de comportamento da relação, até chegar à Lei de Formação da Função.

$$F(c) = 3c$$

Professor(a), siga adiante explorando a situação! Para isso, observe as orientações a seguir.

Orientações Metodológicas:

- O jogo pode ocorrer na quadra da escola, pode ocorrer na sala de aula ou pode simplesmente ser idealizado, mas é importante que os alunos façam os registros dos passos;

- Existem outros jogos que podem ser utilizados, simplesmente alterando suas regras. Isso pode ser feito pelo(a) professor(a) ou pelos alunos.

- O objetivo aqui era explorar outra estratégia metodológica, até chegar à compreensão do sentido de Função, mas a situação também pode continuar sendo explorada até chegar ao trabalho com gráfico e ter como referência, assim como as anteriores, a atividade relativa à Situação 01.

- Relações com outras áreas de conhecimento:

Após o estabelecimento de conexões com outros temas da matemática, outras relações podem ser estabelecidas, agora com outras áreas de conhecimento e isso pode se dar como continuidade da situação 01, criada inicialmente, bastando para isso explorar outros aspectos relativos a ela, pois se a discussão envolvia deslocamento e velocidade, podem ser propostas atividades como corridas tendo os alunos como participantes, em um espaço como quadra de esportes. Nesse momento a ideia de massa poderia ser parte do contexto, pois o deslocamento tem relação com a massa dos alunos. Também seria possível medir os batimentos cardíacos dos alunos após os deslocamentos e várias outras possibilidades.

O número de batimentos cardíacos, por minuto, de uma pessoa depende da temperatura ambiente. Para uma pessoa adulta que não esteja exercendo atividade física, quando a temperatura mede, em graus Celsius, 30°, obtemos como resultado 60 batimentos por minuto, ou 1 batimento por segundo. Se a pessoa exerce atividade física, o aumento dos batimentos cardíacos aumenta de forma proporcional ao rítmo do movimento e ao tempo de realização das atividades físicas. A seguir, apresentamos uma sugestão:

- Situação 04: Se você medir a quantidade de batimentos cardíacos de um colega, após a realização de exercícios físicos (corrida, por exemplo), a quantidade de batimentos dependerá do tempo em que ele se exercitou.

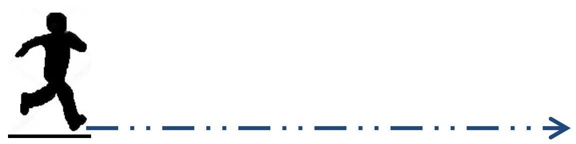


Figura 16: corpo em movimento

Defina tempos de medição e depois preencha a tabela a seguir, com o Número de batimentos cardíacos e o tempo de realização de exercícios físicos.

TEMPO (minutos)	1min	5 min	10 min	20 min
BATIMENTOS	60			

Procure identificar o padrão de comportamento da relação, até chegar à Lei de Formação da Função, ou deixe para fazer isso mais adiante.

Orientações Metodológicas:

O trabalho com funções é oportuno para desenvolver um diálogo com outras áreas de conhecimento, pois em algum momento, na sala de aula, o professor terá que fazer uso da interdisciplinaridade, e quando o ensino se refere a resolução de problemas, a solução nunca vem de forma isolada, sempre tem relações com demais áreas de conhecimento. (FAZENDA, 1993).

A discussão sugerida contempla a nova tendência no ensino, pois a prática escolar evidenciada estabelece interconexões entre os conhecimentos e permite o diálogo com outras áreas do conhecimento. No entanto, ela exige do professor a mobilidade de mudança de prática para romper com o formalismo da racionalidade técnica para transformar o ato pedagógico num ato de conhecimento de vida, assim o aluno tem oportunidade de se formar preparado para enfrentar situações reais num processo dialógico entre teoria e prática. (FAZENDA, 1993).

- Existem possibilidades de exploração de vários outros conhecimentos relacionados à Física e à Biologia e à Educação Física, além dos já mencionados e o aprofundamento da discussão em relação a esses aspectos fica a critério e na dependência do envolvimento com professores dessas outras áreas, que atuam na escola. Leia sobre:

a) O número N de batimentos cardíacos, por minuto, de uma pessoa depende da temperatura ambiente. Para uma pessoa adulta que não esteja exercendo atividade física, esse número pode ser calculado através da função $N(T) = 0{,}1T^2 - 4T + 90$;

b) A temperatura do corpo também varia em função da atividade física realizada por uma pessoa;

c) A noção de velocidade, de tempo são noções que se fazem presentes na realização da atividade;

d) O conceito de Velocidade Média, próprio da física, também se faz presente na realização da atividade e pode ser explorado.

Orientações prévias sobre como detectar a pulsação por minuto e fazer anotações (neste momento podemos pedir auxilio do professor de Biologia da escola).

O coração de um jovem saudável, entre 15 e 20 anos, costuma bater no mínimo 60 e no máximo 90 vezes por minuto. Mas se esporadicamente sua frequência cardíaca ultrapassa ou cai abaixo de tal faixa, isso não quer dizer que você tem algum tipo de doença. “O coração está ligado ao cérebro e ao corpo por estímulos nervosos e são eles que dizem o quanto ele precisa trabalhar", afirma o cardiologista Antônio Carlos Carvalho, da Unifesp.

Use os dedos para encontrar a pulsação. Não use o polegar ao medir a pulsação pois ele já tem pulsação própria, o que pode fazer com que você se confunda.

- **Verifique a pulsação radial.** Esta é a pulsação medida na parte de dentro do pulso. Ponha as pontas de três dedos abaixo do pulso, na base do polegar. Pressione até sentir a pulsação, ou mova os dedos para encontrá-la.
- **Confira a pulsação da artéria carótida.** Para sentir a pulsação do lado de dentro do pescoço, coloque dois dedos, de preferência o indicador e o médio no espaço entre a traqueia e o músculo do pescoço. Pressione levemente até sentir a pulsação.
- **Preste atenção no ritmo e intensidade da pulsação, além de anotar o número de batidas por minuto.** Use um relógio que tenha o ponteiro dos segundos. Repare se o seu batimento é constante ou irregular, e se a pulsação é forte ou fraca.

- Se não tiver um relógio por perto, recomenda-se contar as batidas por 15 segundos e multiplicar o resultado por 4 para obter o número de batimentos cardíacos por minuto:
- Sua pulsação é: (batimentos em 15 segundos) X 4 = F (sua frequência cardíaca). Você pode também contar os batimentos cardíacos por 30 segundos e multiplicar o resultado por 2.
- **Observe o ritmo da sua pulsação.** Essa é a medida das pulsações do seu coração e os intervalos entre elas. Se a sua pulsação for constante, ela pode ser considerada normal. Mas se você reparou que ela falha ou que há alguma irregularidade, talvez ela seja anormal.

Após a realização das quatro atividades nas quais o aspecto a ser explorado era principalmente o sentido de função, assim como o estabelecimento de relações, fica a critério do professor a criação de outras situações, de modo possibilitar a plena compreensão, por parte dos alunos.

Depois disso, as mesmas situações podem continuar sendo exploradas, mas agora com a intenção de trazer para a discussão o segundo aspecto a ser posto em pauta, que é o estabelecimento de relação entre a compreensão e a formalizaçao, aspecto a ser focalizado na seção seguinte e que diz respeito ao aprofundamento do sentido, que parte do informal até chegar ao formal. As atividades agora serão desenvolvidas com a intenção de alcançar objetivos relativos a esse aspecto.

5.4. Ampliando a visão e estabelecendo pontes entre a Compreensão e a Formalização

Após o trabalho inicial de ensino, no qual o objetivo tinha relação com a compreensão do significado de Função, é chegado o momento de ampliar a visão dos alunos, de modo que eles possam estabelecer relações entre o que compreenderam e a representação formal de função que normalmente é apresentada nos livros didáticos. A intenção é que eles possam estabelecer pontes entre esses dois momentos e, para isso, a sugestão é retomar as situações apresentadas e exploradas inicialmente, dando continuidade à discussão de cada uma delas.

Aqui vamos exemplificar retomando e formalizando a Situação 04, que trata dos batimentos cardíacos, organizando o trabalho de ensino em momentos distintos que são descritos a seguir.

Retomando e formalizando a Situação 04

1º momento – realização da corrida

Essa atividade pode ser realizada na quadra da escola ou outro local, com auxílio do professor de educação física da escola, o qual terá maiores condições para dar instruções adequadas para a realização da corrida. Na turma serão escolhidos grupos de três alunos para fazer cada teste. O primeiro realizará a corrida no tempo de 5 minutos, o segundo correrá 10 minutos e o terceiro 15 minutos. Os demais alunos da turma farão anotações dos dados observados.

Será fácil observar a regularidade existente, pois os batimentos cardíacos aumentarão linearmente, de acordo com tempo. Após os registros feitos, a turma pode ser dividida em pequenos grupos, com cada grupo fazendo a análise e discussão sobre os resultados obtidos, quanto ao número de frequência cardíaca e o tempo determinado em minutos:

Neste momento, cada grupo irá preencher a tabela abaixo:

TEMPO (minutos)	1m	5 m	10 m	15 m	T
BATIMENTOS	60	300	600	900	60T

2º momento: Discussão dos resultados

O professor irá instigar reflexões, para que os alunos pensem e percebam a relação existente entre tais variáveis, bem como a existência de regularidades fazendo questionamentos aos grupos:

- O número de batimentos cardíacos tem relação com o tempo?

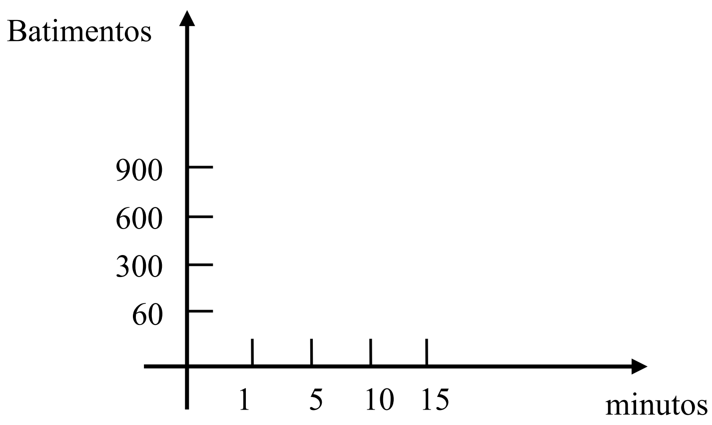
- Quais os valores que se modificam, ou seja, que variam?

- A mudança de um valor depende do outro? Quem depende de quem?

- A quem denominaríamos de ***variável dependente*** e a quem denominaríamos ***variável independente***?

Após as respostas, chega o momento de fazer a sistematização dos resultados observados pelos alunos. Essa sistematização exige a discussão prévia do sentido dos termos "variável" e "dependente", pois são conceitos primários relativos ao tema Função e, nesse sentido, provavelmente serão necessários exemplos e/ou atividades para que questões linguísticas e conceituais sejam esclarecidas.

3º momento: Organização dos dados e Representação no plano cartesiano:



Questionamentos norteadores:

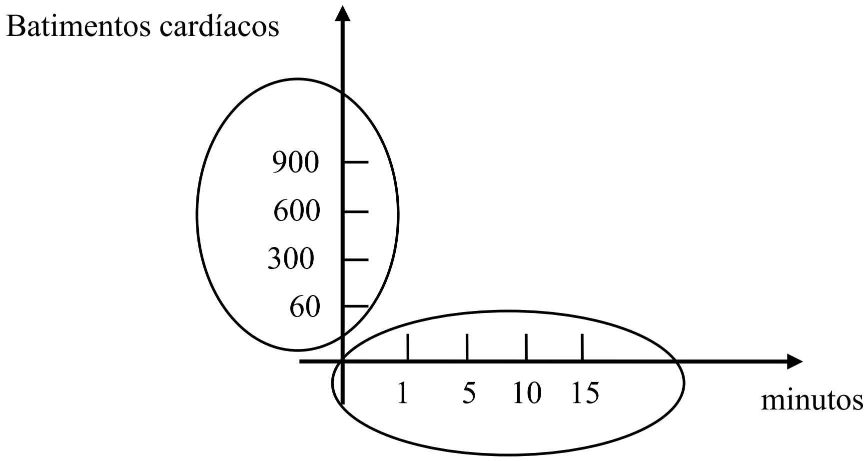
- O que determinam o pares de pontos (1 ; 60) , (5 , 300) , (10, 600), (15, 900), ...
- Se ligarmos esses pontos, que figura obteremos? O que ela representa, em relação ao fenômeno observado?

A partir daqui, a situação pode ser sistematizada, de uma maneira mais formal, pois a compreensão teria precedido a formalização. Podem ser utilizadas as medidas aproximadas sugeridas anteriormente, para fazer a análise. No entanto, os alunos deverão ser orientados a utilizarem seus dados observados.

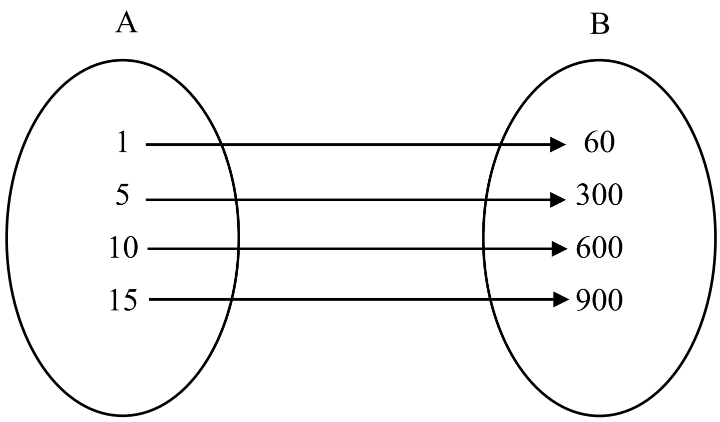
Os dados obtidos e organizados em uma tabela, anteriormente serão retomados:

TEMPO (minutos)	1	5 m	10 m	15 m	T
BATIMENTOS	60	300	600	900	60 . T

Após a organização da tabela, os valores serão registrados no Eixo Cartesiano e, depois, os valores de cada eixo serão agrupados com o uso de um Diagrama de Venn, sobre o Eixo, seguinte forma:



Os alunos deverão ser orientados a observarem que nesta representação já se direciona a compreensão da relação existente entre os dois conjuntos, deixando evidente que os eixos cartesianos representam os elementos correspondentes dos dois conjuntos.
Os dados poderiam ser apresentados de outra forma, que seria a seguinte:



A relação entre os valores (minutos e batimentos cardíacos) faz surgir pares de valores:

R = { (1; 60) , (5 ; 300) , (10; 600) , (15 ; 900) }

A Relação apresentada é uma Função, pois as duas condições abaixo são atendidas:

- **todo** elemento de **A** tem correspondente em **B**
- cada elemento de **A** tem **apenas um** correspondente em **B.**

..

Nesse momento seria interessante a apresentação de exemplos para o perfeito entendimento das condições de existência de uma Função.

Em uma Função existem conjuntos de valores com características específicas e diferentes denominações....

Domínio da Função corresponde a todos elementos do conjunto A

Imagem da Função corresponde aos elementos de B, onde as setas chegam.

..

Nesse momento seria interessante a apresentação de exemplos para o perfeito entendimento do significado de Domínio e Imagem de uma Função.

Para finalizar, Procure identificar o padrão de comportamento da relação, até chegar à Lei de Formação da Função.

B = 60.T, considerando T = x e B = f(x), temos:

A seguinte Lei matemática: f(x) = 60. x , traduz a relação entre o número de batimentos cardíacos e o tempo estabelecido. Quando são atribuídos valores para x, podemos encontrar o valor de f(x) multiplicando x por 60. Vemos então que o número de batimento cardíaco depende do tempo estabelecido.

Trazendo a História da Matemática para o Cenário com a Função Sombra

Nesta atividade a ênfase é a História da Matemática, tendência da Educação Matemática importante a ser usada no ensino, pois possibilita a descoberta da origem dos conceitos e permite a reconstrução de processos e de conceitos, estabelecendo relações entre as ideias matemáticas vistas em sala de aula com suas origens. Essa atividade pode ser desenvolvida nesse momento, tendo em vista a exploração completa que aqui é feita ou ser proposta como atividade introdutória, como forma de contextualização histórica do tema Função, mas com desenvolvimento parcial.

O uso da História da Matemática, em sala de aula, permite a contextualização e a significação do saber, na medida em que conceitos e algoritmos aparecem numa época histórica, dentro de um contexto social, político e construídos pelo homem para auxiliá-lo em sua prática. A preocupação presente nesse momento é o estabelecimento de conexão entre o significado de função e a sua formalização, como relação entre conjuntos. A intenção é seguir a mesma direção que foi impressa na atividade inicial e na discussão a partir das situações criadas, agora com o aprofundamento da análise, mas de forma gradativa, de modo a permitir aos alunos, identificar o gráfico que representa uma situação descrita simbolicamente, reconhecer a expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela e reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 1º grau dado o seu gráfico, como caminho que lhes irá permitir chegar ao formalismo matemático.

Contando sobre uma Situação Histórica:

O uso da sombra foi uma descoberta incrível na história da matemática e proporcionou cálculos precisos e confiáveis utilizados desde os tempos mais remotos até os dias atuais. Para compreender melhor a atividade proposta recorremos à história da matemática, no que diz respeito a grande descoberta de Tales de Mileto[8].

Sabe-se pouco a respeito da vida e da obra de Tales. Os estudos sobre sua história indicam que ele seria o primeiro filósofo e geômetra grego conhecido e o primeiro dos sábios gregos. Tales residiu temporariamente no Egito e lá, desenvolveu estudos relacionados à geometria com os sacerdotes egípcios e, também, aplicados à semelhança de triângulos. Acredita-se também que ele seja o criador da geometria demonstrativa, mas nada do que

[8] Tales de Mileto foi um filósofo matemático, engenheiro, homem de negócios e astrônomo da Grécia Antiga, o primeiro filósofo ocidental de que se tem notícia. De ascendência fenícia, nasceu em Mileto, antiga colônia grega, na Ásia Menor, atual Turquia, por volta de 623 a.C. ou 624 a.C. e faleceu aproximadamente em 546 a.C. ou 548 a.C.

produziu chegou até nós e isso dificulta a determinação precisa de suas ideias ou a certeza das descobertas matemáticas que realizou e tudo que se sabe a seu respeito provém do chamado Sumário Eudemiano escrito pelo matemático filósofo e comentarista Produs (411-485 d.C).

Figura 17: Tales de Mileto, Filósofo e Matemático grego
Fonte: Silva, 2015

Foi Tales de Mileto que, segundo Hierônimo, um dos discípulos de Aristóteles (384-322 a C), teria medido a altura da grande pirâmide de Quéops, no Egito. Para isso, utilizou a observação para comparar a própria sombra com a sombra da pirâmide. Dessa forma, quando sua sombra tivesse o mesmo comprimento da altura dele, a sombra da pirâmide teria mesmo comprimento que a altura dela.

Figura 18: Pirâmides de Quéfren e Quéops, Egito
Fonte: Silva, 2015

Recriando a História: A proposta aqui é a recriação, pelos alunos, da história vivida por Tales de Mileto e foi referenciada em Silva (2014), tendo como objetivo a compreensão do conceito de função até sua formalização, como possibilidade metodológica de ensino. Esta proposta versa mais especificamente sobre o ensino de função afim.

Função Sombra

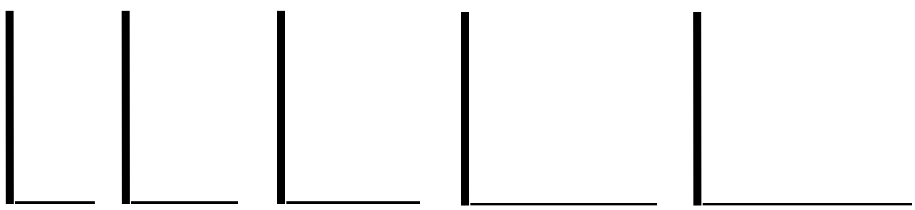
Material didático necessário: Cabo de vassoura com 01 metro de comprimento, régua, lápis e papel sulfite.

Ao iniciar a atividade, o professor introduz o trabalho de ensino utilizando a história que envolve Tales de Mileto e a utilização de sua própria sombra para medir a pirâmide de Quéops no Egito. Para isso existem várias alternativas possíveis, como o uso de um vídeo, de um texto apresentado através de projeção de slides ou de forma escrita, ou até a explanação da história, dentre outras. A parte inicial pode ser finalizada com o esclarecimento de que é possível também fazer uso da sombra para compreendermos o conceito de Função.

A Atividade: Encaminhamentos Metodológicos

É importante que o professor ao realizar esta atividade valorize a relação professor x aluno, de modo que o conhecimento seja construído a partir do diálogo, com ambos podendo se ver num processo de construção do conhecimento e, assim, os estudantes possam se sentir confiantes ao realizar a tarefa, relatarem os resultados e falarem, de forma espontânea, o que pensam sobre o fenômeno estudado. Serão, além do momento inicial de apresentação, cinco outros momentos, no desenvolvimento da atividade. Seria interessante, antes da proposição da atividade, uma discussão sobre a variação do tamanho e da posição da sombra de objetos em diferentes horários.

1º momento - Experimental: o professor lança a atividade, pedindo aos alunos que realizem observações sobre a sombra de um cabo de vassoura em sua residência, nos seguintes horários: 14h, 15h, 16h, 17h e 18h (podem ser outros horários). Os alunos devem ser orientados a fazer anotações sobre a medida da sombra em cada horário estabelecido e essas anotações, com a representação através do desenho do cabo da vassoura e de sua sombra, terão que ser trazidas na aula seguinte e depois registrarem os valores em uma tabela.



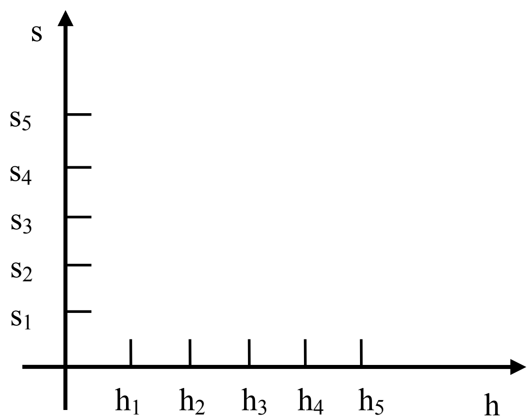
HORA	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00
SOMBRA					

2º momento – Discussão de Resultados: Na sala de aula, após as observações feitas em casa, a turma pode ser dividida em pequenos grupos, com cada grupo fazendo a análise e discussão sobre os resultados obtidos, quanto às medidas da sombra e os diferentes horários, buscando responder às seguintes questões:

- Quais os valores que se modificam, ou seja, que variam?
- A mudança de um valor depende do outro? Quem depende de quem?
- A quem denominaríamos de ***variável dependente*** e a quem denominaríamos ***variável independente***?

3º momento - Sistematização: Após as respostas, chega o momento de fazer a sistematização dos resultados observados pelos alunos e, como os valores certamente serão diferentes, o(a) professor(a) irá trabalhar com valores aproximados de tamanhos de sombras que, podemos supor, sejam os seguintes: 0,5m; 1m; 1,5m; 2m e 2,5m.

4º momento – Rumo à formalização: É a hora de enfatizar que a variável independente será representada com a letra ***h*** e a variável dependente com a letra ***s*** (note que poderiam ser outras letras, mas comumente utilizam-se *x* e *y,* sendo isto apenas uma convenção, para facilitar o reconhecimento do tipo de variável). Em seguida, é apresentado o eixo cartesiano e os alunos serão orientados a anotar as duplas de valores que caracterizam cada momento, nas figuras:

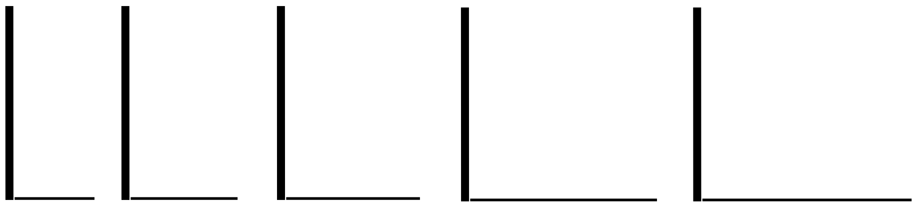


Questionamentos norteadores:

- O que determinam o pares de pontos (h1 ; s1) , (h2 , s2) , ...

- Se ligarmos esses pontos, que figura obteremos? O que ela representa, em relação ao fenômeno observado?

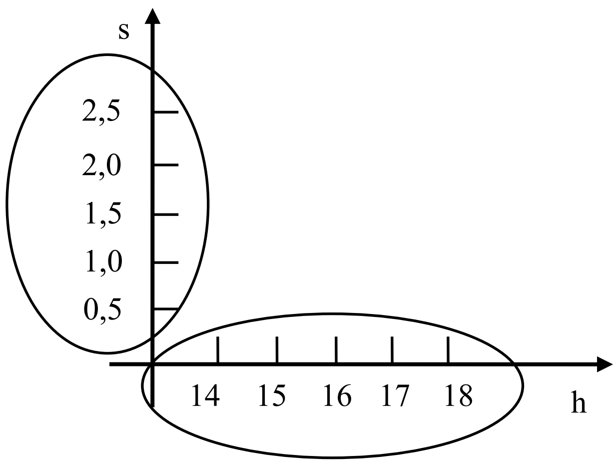
A partir daqui, a situação pode ser sistematizada, de uma maneira mais formal, pois a compreensão teria precedido a formalização. Podem ser utilizadas as medidas aproximadas sugeridas anteriormente, para fazer a análise. No entanto, os alunos deverão ser orientados a utilizarem seus dados observados. Retornando, então, ao cabo de vassoura e sua sombra, nos diferentes horários:



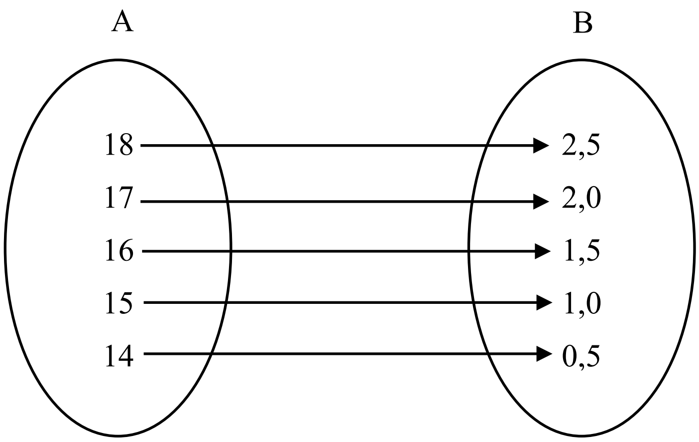
Os dados obtidos deverão ser organizados em uma tabela

HORA	14h	15h	16h	17h	18h
SOMBRA	0,5m	1m	1,5m	2m	2,5m

Após a organização da tabela, os valores serão registrados no Eixo Cartesiano e, depois, os valores de cada eixo serão agrupados com o uso de um Diagrama de Venn e sobre o Eixo. Após isso, os alunos deverão ser orientados a observar que nesta representação já se direciona a compreensão da relação existente entre os dois conjuntos, deixando evidente que os eixos cartesianos representam os elementos correspondentes dos dois conjuntos.



Os dados poderiam então ser apresentados de outra forma, que seria a seguinte:



A relação entre os valores (horário e comprimento da sombra) faz surgir pares de valores:

R = { (14 ; 0,5) , (15 ; 1) , (16 ; 1,5) , (17 ; 2) , (18 ; 2,5) }

A Relação apresentada é uma Função, pois:

- **todo** elemento de **A** tem correspondente em **B**
- cada ele mento de **A** tem **apenas um** correspondente em **B.**

Temos, ainda, que: Os valores do conjunto **A** presentes na relação compõem o **Domínio** da Função e os valores do Conjunto **B** presentes na relação compõem a **Imagem** da Função. Daqui para a frente, os livros apresentam ótimas alternativas para o aprofundamento do tema, sendo um bom auxiliar. Nossa intenção, com essa atividade, era apontar um caminho para iniciar a abordagem do tema.

Para finalizar, Procure identificar o padrão de comportamento da relação, até chegar à Lei de Formação da Função, considerando que o início da marcação ocorre às 14:00 horas, ou seja, às 14:00 horas, t = 0 e o tamanho da sombra é exatamente igual à sua metade.

$$F(t) = 0,5 + \frac{1}{2}t$$

Na seção seguinte será explorado o terceiro e último aspecto relacionado à aprendizagem do tema Função, sob o título "Consolidando a Aprendizagem de Função", quando serão desenvolvidas atividades de fixação da aprendizagem, com a intenção de alcançar objetivos relativos a esse aspecto.

5.5. Consolidando a Aprendizagem de Função

Este momento agora, após a compreensão do significado de Função e o estabelecimento de relações entre o que compreenderam e a representação formal de função, é o momento da Consolidação da Aprendizagem, com o desenvolvimento de jogos e a apresentação de situações, que devem ser extraídas do contexto mais próximo possível dos alunos, a serem modeladas. Esse é, também, o momento da avaliação da aprendizagem.

Aqui vamos apresentar apenas um jogo, o Jogo de Baralho de Função, seguido de uma situação. O jogo de baralho é conhecido pela maioria das pessoas e, certamente, dos alunos do 1° ano do ensino médio e esse é o principal motivo da proposta de sua adaptação e de sua inclusão neste material de ensino. A inclusão se dá na parte final do material, pois o objetivo aqui é consolidar o conhecimento já ensinado. O jogo é, portanto, uma estratégia para trabalhar e consolidar a aprendizagem.

O jogo é uma das atividades presentes em diferentes culturas e sociedades e, de acordo com Kishimoto (2001), era marcado por rituais de passagem da fase de criança para a fase adulta, estabelecendo um marco delimitador dessas fases e algumas habilidades se evidenciavam por meio de regras estabelecidas para os jogos, específicos para este fim. A atividade que envolve o jogo apresenta potencialidade de motivar os alunos e desenvolver habilidades lógicas e cognitivas essenciais para a compreensão dos conhecimentos matemáticos. Para Borin (2007) e Macedo (2000), neste contexto, o uso de jogos pode modelar conceitos matemáticos que na opinião dos alunos são abstratos e sem importância.

De acordo com orientações presentes nos PCN (1998), o papel da escola é formar cidadãos competentes e atuantes e, partindo desse pressuposto, os jogos podem ser uma ferramenta de grande relevância na formação do cidadão preparado para a vida, quando desenvolvidos em grupos, o que favoreceria o desencadeamento da noção de cooperação e de vida em sociedade. Além do mais, o trabalho em grupo pode apresentar uma forma mais divertida de desenvolvimento do raciocínio lógico e cognitivos do aluno, além de beneficiar a relação professor/aluno, aluno/aluno. É bom ressaltar que o aspecto mais importante do jogo, no ensino de matemática, não é sua ludicidade, que atrai e motiva o aluno a participar. O importante é a oportunidade de aprender matemática de forma mais efetiva e, para isso, é necessária a intervenção do professor durante o jogo, com questionamentos para alcançar os objetivos de ensino. Uma alternativa didática deve ser desenvolvida com intencionalidade pedagógica e isso deve ser observado na realização da atividade, de modo que os participantes tenham clareza dessa intencionalidade.

Jogo de Baralho de função

Jogo que, segundo classificação de Mansutti (1993), pode ser identificado como Jogo de Fixação de Aprendizagem. A proposta do jogo tem a finalidade de propiciar ao estudante a apropriação e consolidação da aprendizagem sobre função, em um ambiente de interação na turma, assim se permite a compreensão do conceito de função e, ao mesmo tempo, possibilita ao professor avaliar o processo de ensino e aprendizagem, assim como facilita a auto avaliação, pelos alunos. O jogo obedece às mesmas regras do baralho tradicional, com acréscimo de várias cartas-desafio, com perguntas e respostas. Se o jogador acertar a resposta, o jogo é validado e se errar ele perde as três cartas e retira outras três do baralho.

Figura 19: Baralho tradicional

Descrição e Regras do Jogo Pif Paf

Nas regras do jogo Pif Paf do Baralho tradicional foi acrescentada um item à regra, de modo a permitir o envolvimento do conteúdo função. A seguir a regras:

O **jogo Pife** é jogado com dois a oito participantes, que jogam de forma individual.

- Jogadores - 2 a 8
- Baralhos - dois jogos com 52 cartas, sendo que as cartas dos curingas (Jokers) não são utilizadas.
- Ordem das cartas (da menor para maior): A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K.

Maço - é o bolo de cartas que sobra após a distribuição.

- Distribuição - 9 cartas para cada participante.
- Maço - é o bolo de cartas que sobra após a distribuição.
- Lixeira - é o bolo formado com as cartas descartadas, onde apenas a última carta é visível.
- Objetivo - Fazer trincas e/ou sequências para bater.

- Trinca - três cartas do mesmo valor e de naipes diferentes.
- Sequência - três ou mais cartas seguidas, do mesmo naipe. O Ás, nas sequências, pode ser posicionado acima do Rei ou abaixo do Dois.
- Para validar as trincas e sequências, o jogador terá que responder corretamente a pergunta presente na **carta desafio, estas farão parte do jogo.**
- A **carta desafio** apresenta questionamento sobre função para ser respondido pelos jogadores, a cada trinca formada. Se respondido corretamente, a trinca ou a sequência será validada, se não, as cartas da trinca ou da sequência formada serão devolvidas para o Baralho, assim como a carta desafio. O jogo continua até que algum jogador bata, com as três trincas formadas.
- Rodada - uma sequência de jogadas que ocorre até que algum jogador bata.
- Bater - combinar e baixar as nove cartas ou as 10 cartas (as nove que recebeu mais a da compra), formando trincas e/ou sequências. Além de responder a carta desafio que valida a batida do jogo.
- CARTAS DESAFIOS

As cartas abaixo são sugestões, o professor poderá utilizar ou acrescentar outras cartas; elaborando outras questões sobre o objeto em estudo. Essa atividade também pode utilizada para explorar outros assuntos estudados, a fim de consolidar a aprendizagem dos estudantes.

Pergunta: **O que uma Função Afim?** **...................................** **Resposta: É uma Função que apresenta termos do primeiro grau**	**Pergunta:** **Qual dessas funções você concorda que seja uma função afim** **a) $f(x) = \log x^{10}$** **b) $f(x) = x^2 + 2$** **c) $f(x) = a^{x+2}$** **d) $(x) = ax + b$** **.............................** **Resposta: $f(x) = ax + b$**	**Pergunta:** **Uma função afim pode ter no máximo:** **a) duas raízes** **b) dois coeficientes** **c) dois resultados** **d) duas incógnitas** **...................................** **Resposta: Dois coeficientes**

Pergunta: A função afim pode ser também chamada de:

( ) função quadrática

( ) função do 1º Grau

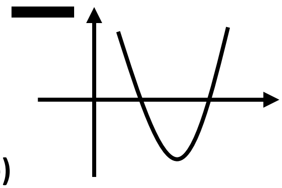
( ) função logarítmica

( )função monomial

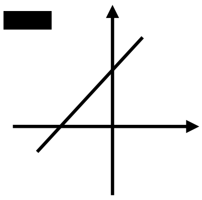
....

Resposta: função do 1º grau

Pergunta: Qual gráfico representa uma Função Afim? a)



b)



Resposta:b

Pergunta: Observe a tabela: (venda de Açaí)

Quantidade em L	Valor a pagar
1	12,00
1,5	18,00
2	24,00
2,5	30,00

-Qual a variável dependente? E variável independente? Resposta: valor a pagar depende da quantidade, que é valor independente.

Pergunta: a: Observe a tabela: (venda de Açaí)

Quantidade em L	Valor a pagar (R$)
1	12
1,5	......
2	24
2,5	......

-Qual o valor que preenche exatamente a tabela?

Resposta: 18 e 30

Pergunta: Máyra e Manuelle são irmãs estavam realizando um jogo, Mayra dizia um número e Manuelle dizia outro usando uma regra que só ela conhecia o desafio de Mayra era descobrir qual regra Manuelle estava usando. (dados organizados na tabela)

Nº falado por Mayra	Nº falado por Manuelle
3	9
6	18
9	27

Resposta: considerando x Mayra e y Manuelle, temos: y = 3.x

Pergunta: Qual a função decrescente?

a) $F(x) = -3x + 2$
b) $F(x) = 2x - 1$
c) $F(x) = \frac{x}{2} - 1$
d) $F(x) = x + 1$

....

Resposta: a

Professoror(a), você pode elaborar outras questões e confeccionar novas cartas!

O Jogo

Após a distribuição das cartas o primeiro jogador compra uma carta do maço, tenta formar jogos e se possível bater. Descarta uma carta dando início à formação da lixeira. Quando o jogador descarta uma carta, a vez é passada ao jogador seguinte, seguindo o sentido horário. O jogador seguinte poderá comprar do maço ou comprar a última carta descartada na lixeira.

A partida termina quando alguém bate. Um jogador pode bater com 9 ou 10 cartas. Quando bate com 9 ele descarta uma carta, e quando bate com 10 não descarta nada.

A cada trinca e/ou sequência formada pelo jogador, ele mostrará o jogo e responderá o desafio lançado, se responder correto o jogo é validado, se errar, o jogo formado irá ser descartado na lixeira, pegará novamente três novas cartas e o jogo continua. Será vencedor o jogador que bater o jogo.

É necessário a intervenção do professor no momento do jogo, observando sempre as respostas dos alunos, questionando e/ou esclarecendo dúvidas que porventura possam surgir em relação a aprendizagem do fenômeno em estudo.

Modelando uma Situação Real usando Função

Apresento aqui uma situação real que retrata a prática de um morador da cidade de Santo Antônio do Tauá. A opção por esse contexto tem relação com a pesquisa realizada, mas considero importante deixar claro que quando professores forem utilizar este material didático em suas salas de aula, o ideal é que eles próprios procurem retratar e explorar, juntamente com seus alunos, situações de seus contextos. Entendo que esse talvez seja, no momento de aplicação em sala de aula do Produto de ensino, o principal espaço de criação de professores, momento em que precisarão ser propositivos para aproximar a temática Função do cotidiano dos alunos, possibilitando, inclusive, que os próprios alunos criem situações...

- O Senhor Raimundo da Comunidade de Santa Maria do Umbituba-SAT compra espeto de churrascos produzidos pelos moradores da comunidade para serem comercializados na CEASA, em Belém do Pará. A cada viagem ele transporta 20 milheiros. O custo a pagar pelo milheiro corresponde ao valor de R$ 9,00, acrescentando a despesa de R$60,00 de combustível para realizar a viagem.

a) Se uma viagem transporta 20 milheiros de espeto. Qual será o valor gasto total de seu Raimundo?

$$20 . 9 + 60$$
$$180 + 60 = 240$$

Resposta: R$ 240,00

b) Considerando que ele transporta 20 milheiros, se vender a R$15 reais o milheiro. Qual seria seu lucro?

$$\mathbf{[\ (20 . 15) – (20 . 9)\ ]\ - 60}$$
$$\mathbf{[300 – 180] – 60}$$
$$\mathbf{120 - 60}$$

Resposta: R$ 60,00

c) Qual a lei matemática que define melhor a situação que representa o gasto por semana pelo Sr. Raimundo?

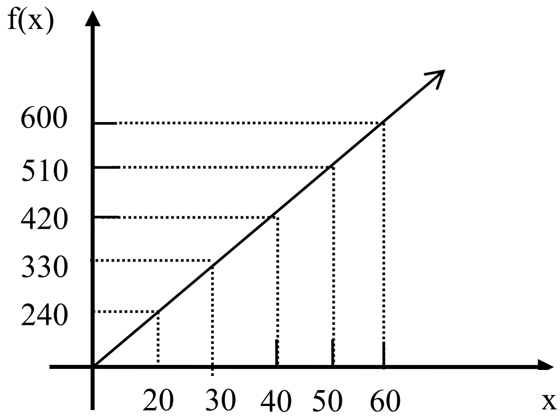
$$V = 9 \,.\, E + 60, \text{ tendo } V = f(x) \text{ e } E = y\text{; conclui-se}$$

$$F(x) = 9.x + 60$$

d) Preencha a tabela, considerando a lei de formação da função indicada da situação problema.

QUANTIDADE DE ESPETO (MILHEIRO) X	VALOR A PAGAR (R$) f(X) = 9x + 60	F(X)
20	f(20) = 9.20 + 60	240
30	f(30) = 9.30 + 60	330
40	f(40) = 9.40 + 60	420
50	f(50) = 9.50 + 60	510
60	f(60) = 9.60 + 60	600

e) Fazendo uso do plano cartesiano, represente graficamente a relação existente entre (x e y)



f) Se por viagem transporta 20 milheiros, e se ele vender a R$15,00 cada um. Qual o valor da venda na quarta semana?

V = [(20 x 4) x 15] – (4 x 60)

V = [80 x 15] – 240

V = 1.200 – 240

Resposta : V = 960

g) Qual a função que representa o lucro por viagem?

Lucro = venda - custo

$$L(x) = 15x - (9x + 60)$$

$$L(x) = 15x - 9x - 60$$

Resposta: $L(x) = 6x - 60$

h) Qual a quantidade mínima de espeto para que o Senhor Raimundo não tenha lucro e nem prejuízo?

$$L(x) = 6x - 60$$

Se, $L(x) = 0$

$$6x - 60 = 0$$

$$6x = 60$$

$$x = \frac{60}{6}$$

Resposta: $x = 10$ **milheiros**

Ao final do trabalho com os Cadernos para o Ensino de Função, considero importante ressaltar que a intenção com essa sugestão de encaminhamento metodológico, dentre outras possíveis, não era esgotar o processo de ensino do tema, mas atender a necessidade de trabalhar os três aspectos colocados em pauta, relembrando que as ideias discutidas devem ser entendidas como básicas e gerais, necessitando é claro, de acréscimos para o trabalho de ensino com outros tipos de função. O livro didático, a partir daqui, se adequa perfeitamente a essa complementação, assim como vídeos e outros aplicativos/softwares, relacionados ao tema.

E, ao chegar na etapa final do que foi anunciado como início do processo, volto a registrar a expectativa de que a teorização seja transformada em ação, nas salas de aula, transformando práticas e concorrendo para a melhoria do ensino e da aprendizagem, de modo que, aí sim, se tornando efetiva realidade no ambiente de sala de aula, a pesquisa que teve como objetivo inicial identificar dificuldades, possibilidades e tendências, em termos de ensino de função para, a partir daí, definir princípios e diretrizes para o Ensino de Função e isso ser traduzido sob a forma de um produto de ensino a ser apresentado como proposta de ensino do tema Função possa ser considerada concluída e seus objetivos plenamente alcançados.

REFERÊNCIAS

ALARCÃO, Isabel. **Professores reflexivos em uma escola reflexiva.** São Paulo: 8ª Ed. Cortez, 2011.

ALVES, Rubem. **Conversas com quem gosta de ensinar.** Campinas-SP: Papirus, 2000.

ARAGÃO, R. M. R. de. **Reflexões sobre Ensino, Aprendizagem, Conhecimento...** In: Revista de Ciência & Tecnologia. Piracicaba-SP : Editora UNIMEP, Ano 2, Nº 3, Julho/1993.

BARRETO, Marina Menna. **Tendências atuais sobre o ensino de funções no ensino médio**. PPG-Ensino de Matemática, UFRGS, Porto Alegre, 2008. Disponívelem:<http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/modulo_II/pdf/funcoes.pdf

BOYER, C.B. **História da Matemática**. Tradução de Elza. F. Gomide. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BOYER, C. **História da Matemática**. 2a edição. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**.

Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BORBA, Marcelo de C. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** 3ª Ed. Belo Horizonte: Autentica, 2010.

BORGES, C. M. F. **O professor da Educação Básica e seus saberes profissionais**. Araraquara: JM Editora, 2004.

BORIN, Júlia (2007): **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática**. São Paulo: IME – US.

BICUDO. M. Aparecida V.(org.) **A Pesquisa qualitativa olhada para além dos seus procedimentos.** 1ª Ed. São Paulo: Editora: Cortez, 2011.

BRAGA, Ciro. **Função: a alma do ensino da matemática.** São Paulo: Annablume; FAPESP, 2006. 174 p.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasilia**: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Brasilia: MEC/SEF, 1999.

BRASIL, Secretaria de Educação Média. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**: Matemática. Brasilia: MEC/SEF, 2000.

CARRAHER, David Willian; SCHLIEMANN, Ana Lúcia Dias. **Dividir para conquistar**. Guia do professor. Sunburst Communications, Pleasantville, USA, 1992.

CALDEIRA, Ademir A. **Educação Matemática e ambiental: um contexto de mudança**. Tese doutoral em educação, Universidade de Campinas, 1998.

CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 9a edição. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1989.

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Fazer Matemática e usar Matemática.** Salto para o futuro. Série Matemática não é problema. Disponível em: [http://www.tvbrasil.com.br/SALTO/boletins 2005.htm].

CLANDININ, D. Jean, CONNELLY, F. Michael - **Pesquisa Narrativa: experiências e história em pesquisa qualitativa.** Uberlandia: 2011.

COUTINHO, Laura. TV na Educação. In: Salto para o Futuro: TV e informática na Educação. Brasília. Secretaria de Educação a Distância. Ministério da Educação e do Desporto, 1998. P. 11-46.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade.** Belo Horizonte: Autentica, 2001.

EVES, H. **Introdução a história da Matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

FAZENDA, Ivani C. A. **Práticas Interdisciplinares na escola.** 2 ed. São Paulo: Cortez, 1993.

FIORENTINI, Dario e LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática: Percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. – (Coleção formação de professores).

FOSSA, John Andrew. FOSSA, Maria da Glória. **Funções, Equações e Regras: ensaios sobre a educação matemática.** Belém-PA: EDUEPA, 2000.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2005, 42.ª edição.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GARNICA, A. V. M. **História Oral e educação Matemática.** In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GAUDÊNCIO, Rogéria. **Um estudo sobre a Construção do Conceito de Função**. Tese doutoral, Natal: Universidade Federal do Rio Grande do Norte, UFRN, 2000.

JOSSO, Marie-Christine - **Experiências de vida e formação**- Marie-Christine Josso; prefácio António Nóvoa; revisão cientifica, apresentação e notas a edição brasileira Cecilia Warschauer; tradução José Cláudio e Júlia Ferreira; adaptação a edição brasileira Maria Vianna. – São Paulo: Cortez, 2004.

KAUFMANN, Jean-Claude. **L'entretien compréhensif**. Paris: Nathan, 1996

KLINE, M. **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**, v.1, Oxford University Press,1990.

KISHIMOTO, M.T. **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. Cortez editora. 5º ed São Paulo, 2001.

LUZIN, N. **Function. The American Mathematical Monthly**. Jan e Mar, 1988.

MACEDO, L. **Aprender com jogos e situações-problema**. 2.ed. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

MANSUTTI, Maria Amabile. **Concepção e Produção de Materiais Instrucionais em Educação Matemática**. in Revista de Educação Matemática da SBEM/ São Paulo, ano 1, número 1, Campinas - São Paulo, setembro/1993, p. 17 - 29.

MILLS, C. Wright. **A imaginação sociológica.** Tradução de Waltensir Dutra. 6. ed. São Paulo: Zahar, 1982.

MIORIM, Maria Angela. **Introdução à História da Educação Matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MORAES, R.: **Uma Tempestade De Luz: A Compreensão Possibilitada pela Análise Textual Discursiva.** ***Ciência & Educação,*** v. 9, n. 2, p. 191-211, 2003.

MORAES. R. Galiazzi, M.C. **Análise Textual Discursiva.** I jui. UNIJUI, 2007.

NÓVOA, A. **Professor se forma na escola**. Revista Nova Escola, São Paulo, n.142, maio 2001. Entrevista concedida a Paola Gentile.

RÜTHING, D. *Some Definitions of The Concept of Function from Joh. Bernoulli to N. Bourbaki.*The Mathematical Intelligencer, vol. 6 , n° 4, 1984, p. 72-77.

SÁ, P.F.; SOUZA, G.S.; SILVA, I.D.B. **A construção do conceito de função**: alguns dados históricos... Traços (UNAMA), Belém, v.6, n 11, p. 123-140, 2003.

SANCHES, Jesus-Nicásio Garcia. **Dificuldades de aprendizagem e intervenção psicopedagógica.** . Ed. Artmed, Porto Alegre, 2004.

SÁNCHEZ HUETE, Juan Carlos. **O ensino da Matemática: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artmed, 2006.

SCHÖN, D. A. **Formar professores como profissionais reflexivos**. In; NÓVOA, A (Cood.) Os professores e a sua formação. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1992. (Nova Enciclopédia, 39).

SILVA, M. H. M. e REZENDE, W. M. **Análise histórica do conceito de função.** *Caderno DáLicença.* Instituto de Matemática. Universidade Federal Fluminense. v.2. p. 28-33. Niterói, 1999.

SILVA, Marcos Noé Pedro Da. **Introdução à Função**; *Brasil Escola*. Disponível em <http://brasilescola.uol.com.br/matematica/introducao-funcao.htm>. Acesso em 22 de abril de 2016.

SILVA, Neivaldo Oliveira. **Relações e conexões no ensino de Matemática**: **focalizando funções,** Belém, 2014.

SILVA, Venício do Nascimento. **Teorema de Tales e suas Aplicações.** Dissertação de Mestrado Profissional – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2015. Orientador Prof. Dr. Cláudio Carlos Dias.

SPINILLO, Alina Galvão & MEIRA, Luciano L. **Psicologia cognitiva: cultura, desenvolvimento e aprendizagem.** Recife: Ed. Universitária da UFPE, 2006. 260p.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. 14 ed. Petrópolis, RJ:Vozes, 2012, 325p.

VÁSQUEZ, S.; REY, G.; BOUBÉE.; **El concepto de función a través de la História**, Revista Iberoamericana de Educación Matemática; V. 4, n. 16, pp. 141-151, Dez. 2008.

ZUFFI, E.M. **Alguns Aspectos do Desenvolvimento Histórico do Conceito de Função,** Educação Matemática em Revista, SBEM, Ano 8, (2001), No. 9/10, p.10-16.