Atividades para o Ensino de Polinômios com o Uso do Geogebra

Thiago Jacob Maciel Modesto

Fábio José da Costa Alves

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

Atividades para o Ensino de Polinômios com o Uso do Geogebra

1ª Edição

Autores:
Thiago Jacob Maciel Modesto
Fábio José da Costa Alves

Belém/Pa - 2020

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

MODESTO, Thiago Jacob Maciel e ALVES, Fábio J. da C. Atividades para o Ensino de Polinômios com o Uso do Geogebra. Produto Educacional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, (PPGEM/UEPA), 2020.

ISBN:

Polinômios; Ensino; Geogebra.

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Este livro é parte de uma dissertação de mestrado de Modesto (2019), intitulada **A Gênese Instrumental e sua interação com o Geogebra: Uma Proposta de Ensino de Polinômios**, a qual teve como direcionamento a exploração de assuntos matemáticos sobre o ensino de Polinômios a partir do uso de um objeto de aprendizagem do *software* Geogebra, pois, de acordo com as experiências vivenciadas no decorrer de nossa prática docente nas escolas públicas, constatamos dificuldades no que tange o aprendizado de Polinômios, tanto no aspecto conceitual como também na utilização dos conhecimentos prévios para resolução de exercícios ou problemas que envolvem o conteúdo, isto é, possivelmente o modelo tradicional de ensino que nos direciona à prática dessas duas situações não está provocando o resultado desejado dentro da nossa docência escolar. Isso despertou o anseio de propor algo no sentido de sanar as dificuldades observadas durante as aulas.

A entrada de aparelhos tecnológicos no ambiente escolar ocorreu por meio do uso de computadores em salas e laboratórios de informática, além da posse de celulares e *smartphones* com os alunos. No decorrer da minha *práxis*, achava inadequado o uso do aparelho dentro das escolas. Com o advento de novas pesquisas com uso de tecnologias para ensino e aprendizagem, verifiquei que tais aparelhos poderiam sair da posição de simples instrumentos de diversão ou necessidade na mão dos estudantes e se tornar um bom instrumento de ensino e aprendizagem de conteúdos escolares, principalmente na matemática.

Outra situação que despertou nossa atenção foi a falta de acesso aos recursos dispostos em salas de informática, porque os professores em sua maioria não a frequentam, e a alegação dos mesmos é a de que possuem pouco ou nenhum domínio em relação aos artefatos da informática educativa e, por isso, é freqüente a solicitação de formações continuadas direcionadas para esse fim.

No ano de 2016 a classificação ao programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, cujo curso teve início em fevereiro de 2017, possibilitou-me a oportunidade de estudar em uma das disciplinas a criação de aplicativos para o Ensino de Matemática no *App Inventor*, no Geogebra e no *Scratch*. Ao criar um aplicativo para *smartphones* e um *software* para computadores, vislumbrei e conectei os conhecimentos acumulados no decorrer da carreira como professor por intermédio do uso de celulares e de computadores, manipulando e criando algoritmos matemáticos para a resolução de atividades, isto é, a junção do artefato tecnológico da informática às Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) e o pensamento matemático para a solução de um problema matemático proposto.

Com a referida disciplina do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da UEPA, no Centro de Ciências Sociais e Educação, senti um grande incentivo para propor um projeto para ensinar Polinômios no Ensino Fundamental através do uso de *softwares*. Com a aprovação do artigo *Redescobrindo Operações Com Polinômios No 8º Ano Do Ensino Fundamental Utilizando APP Inventor 2 Como Recurso Didático* no XI Encontro Paraense de Educação Matemática (XI EPAEM), a motivação para continuar com a ideia do projeto foi ainda maior.

Tal disciplina ampliou e melhorou os meus conhecimentos sobre a utilização dos artefatos tecnológicos como recursos, que podem fazer parte da nossa prática docente na ampliação e na melhoria de nossa *práxis*, a fim de atender as necessidades apresentadas por cada classe a qual trabalho e alcançar os objetivos traçados a cada início de ano letivo. A dificuldade encontrada no início do curso da disciplina aos poucos desapareceu por conta de todo esse processo de envolvimento e motivação para o uso dessas ferramentas tecnológicas.

A ampliação dos conhecimentos da informática educativa e suas utilizações nos provocaram motivações para observar o entusiasmo dos alunos quando houver a utilização dos recursos da informática nas atividades, ou seja, a conciliação do ensino de conteúdos de matemática com os artefatos da informática e das TICs, conforme verificava por meio da leitura de diversos artigos e trabalhos voltados para essa área de atuação.

No que se refere às competências específicas de matemática para o Ensino Fundamental apresentados na BNCC (2016), podemos destacar as que envolvem matemática e tecnologias, que são, respectivamente, as competências 4 e 5:

- enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens: gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna;
- utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

Em relação aos Polinômios, a inserção deste conteúdo na BNCC (2016) ocorre dentro da unidade temática **Álgebra** relacionada ao 8º ano do Ensino Fundamental, que tem como objetos de conhecimento:

- valor numérico de expressões algébricas;
- associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano;
- sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano;
- equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$;
- variação de grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não-proporcionais.

A unidade temática **Álgebra**, no 8º ano do Ensino Fundamental, além de seus objetos de conhecimentos citados previamente, aponta as seguintes habilidades:

- resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações;

- associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano;
- resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso;
- resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$;
- identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano;
- resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

A facilidade de manuseio, a gratuidade, o ambiente virtual de aprendizagem, a programação visual no ambiente do Geogebra foram pontos elencados que despertaram nosso interesse para utilizá-lo. Assim, a criação do *software* foi decisiva, pois o mesmo serviria para proporcionar a solução desejada de uma atividade, além de reforçar o entendimento por parte do estudante que está na fase de aprendizagem ao relacionar todos os conhecimentos prévios com os conhecimentos inerentes ao ano de estudo durante as aulas.

Assim, com o olhar voltado para os aspectos aqui elucidados, propomos uma abordagem e uma contribuição diferenciadas para suprir as deficiências na aprendizagem de Polinômios no 8º ano do Ensino Fundamental, a título que tal abordagem e contribuição se transformem em novos caminhos metodológicos a serem apreciados pelos professores de matemática da Educação Básica.

Pode-se acarretar um grande desperdício no ensino e aprendizagem ao se deixar de utilizar tecnologias como auxílio durante esse processo, pois o acesso ao computador e à *internet* fora de sala de aula também tem aumentado nessas últimas duas décadas, e isso facilita o trabalho dos alunos com *softwares* matemáticos e a comunicação do professor com a turma (DOMINGUES, 2013; HEITMANN, 2013; SOBRINHO, 2013).

Esperamos também com as atividades propostas neste livro que o estudante apresente um interesse mais significativo no estudo de Polinômios, de modo que possamos estender esse interesse para vários outros conteúdos da disciplina, pois, nas palavras de Machado (2001, p. 57):

> *É muito fácil compreender a ausência de uma maior interesse pela Matemática em numerosos indivíduos intelectualmente bem dotados, notáveis mesmo em suas áreas de atuação, que parecem ter poucos pontos de contato com esse assunto. Apesar de essa ser uma postura insólita entre filósofos e de ser muito difícil indicar um só setor das atividades humanas que prescinda completamente de Matemática, não é de se estranhar que a crescente fragmentação do saber em segmentos cada vez mais específicos conduza com tanta frequência tantos indivíduos a um afastamento consciente de certos assuntos. Parece razoável, no entanto, interpretar tal ocorrência como uma questão de opção entre diversas alternativas e não como um impedimento em função de uma incompetência congênita.*

Segundo Araújo e Marquesi (2009), os Ambientes Virtuais de Aprendizagem (AVAs) podem ser definidos, na perspectiva do usuário, como ambientes que simulam os ambientes presenciais de aprendizagem com o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs). Ainda de acordo com esses autores, esses ambientes permitem apresentar informações de maneira organizada, utilizar mídias diversas e ferramentas que possibilitam estabelecer interações entre pessoas e compartilhar produções, tendo em vista atingir determinados objetivos.

As reflexões pertinentes sobre a utilização deste recurso e as dificuldades verificadas ao longo de anos de prática docente na Educação Básica contribuíram para elencar a proposta de ensino que envolvesse a plataforma do Geogebra, que é totalmente grátis, ou seja, o acesso é livre para qualquer usuário, de modo apenas que o usuário tenha acesso à *internet*. Nestes parâmetros, a finalidade principal é a de reverter a situação de falta de compreensão sobre Polinômios, além de mostrar o quanto de matemática há para o desenvolvimento dos recursos computacionais e seu funcionamento.

Segundo Machado (2012), a Educação Matemática está nas confluências das tentativas de busca por metodologias que possibilitem o alcance de entusiasmos em querer conhecer ou se apropriar dos conhecimentos da matemática para a explicação dos acontecimentos da vida. O autor afirma que mais do que despertar o interesse pelas aplicações práticas da matemática, também é fundamental desvelar sua beleza intrínseca, sua vocação para a apreensão de padrões e das regularidades.

Então, diante do que propomos, a questão essencial é: **qual a potencialidade de uma sequência didática com o uso do Geogebra no ensino e na aprendizagem de Polinômios?**

Assim, nosso objetivo geral é direcionado aos professores da Educação Básica, de modo que possam verificar as potencialidades de uma sequência didática sobre o ensino e a aprendizagem de Polinômios com o uso do Geogebra.

Esse livro apresenta dois capítulos. No primeiro capítulo trataremos de nossa Sequência de Atividades, construída para atingir os objetivos deste trabalho. No segundo capítulo apresentamos um aspecto teórico sobre Polinômios, com uma abordagem minuciosa em um nível acadêmico, cujo objetivo é contribuir para o aprimoramento e uma melhor compreensão desse assunto. Este capítulo é direcionado aos professores de matemática de qualquer nível de ensino.

1. A SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

O Geogebra é um *software* educativo de representação dinâmica, gratuito e de multiplataforma por estar escrito em linguagem *Java*, que é uma linguagem de programação orientada a objetos desenvolvida na década de 90 por uma equipe de programadores chefiada por James Gosling, na empresa Microsystems. Esse *software* dispõe de recursos visuais e interativos que podem servir como ferramenta para a aprendizagem de qualquer objeto matemático em todos os níveis de ensino combinando Geometria, Álgebra, Tabelas, Gráficos, Estatística e Cálculo em uma única aplicação.

Nossa proposta visou por meio do Geogebra a construção de um objeto de aprendizagem para o ensino de Polinômios para que o aluno, por meio de nossa sequência de atividades propostas, tivesse êxito na aprendizagem de Polinômios, de modo que possa redescobrir conceitos e propriedades acerca desse assunto.

Nesses parâmetros, os seguintes tópicos serão abordados em nossa sequência didática para o ensino de Polinômios:

- Coeficiente numérico e parte literal
- Classificação dos polinômios
- Termos semelhantes
- Adição e subtração de polinômios
- Multiplicação de um monômio por outro monômio
- Multiplicação de um monômio por um polinômio
- Multiplicação de dois polinômios
- Divisão de monômios
- Divisão de um polinômio por um monômio
- Divisão de um polinômio por outro polinômio

A atividade 01 inicia o momento da sequência didática em que apresentamos as operações com Polinômios relacionando Geometria e Álgebra, a qual permite descobrir uma maneira prática de adicionar e subtrair Polinômios semelhantes a x, que estão relacionados geometricamente a múltiplos do comprimento x.

ATIVIDADE 01

Título: Adição e subtração de Polinômios semelhantes a *x*

Objetivo: Descobrir uma maneira prática de efetuar a adição e a subtração de Polinômios semelhantes a x

Material: Roteiro de atividade, lápis ou caneta, *software* Geogebra

Procedimento:

Com o auxílio do *software* Geogebra, efetue as operações seguintes

1) $x + 3x =$
2) $3x + x =$
3) $3x + 5x =$
4) $6x + 2x =$
5) $2x + 7x =$
6) $3x - x =$
7) $x - 3x =$
8) $7x - 5x =$
9) $3x - 9x =$
10) $-2x - 5x =$
11) $-5x - x =$
12) $x + x + 2x =$
13) $3x - x + 4x =$
14) $3x - x - 7x + 5x =$
15) $3x + x + 7x - 3x =$

Descubra uma maneira prática de obter o resultado sem o uso do *software* para adicionar dois desses Polinômios.

Conclusão:

Descubra uma maneira prática de obter o resultado sem o uso do *software* para subtrair dois desses Polinômios.

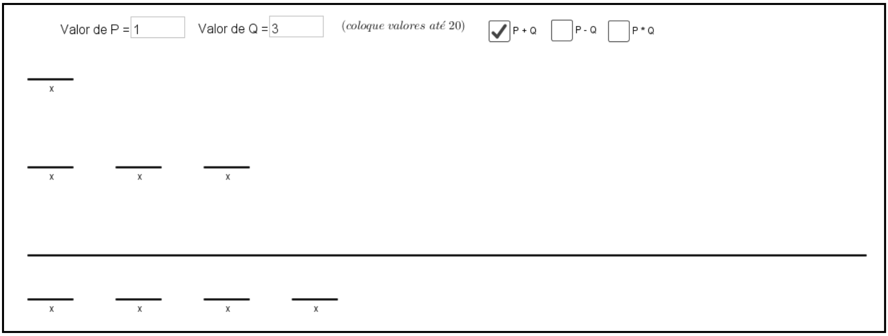
Conclusão:

Sem o uso do *software*, sendo A = $5x - 3x + 2x$, B = $7x - 5x + 3x$ e C = $4x - 6x$, efetue:

a) A + B + C =

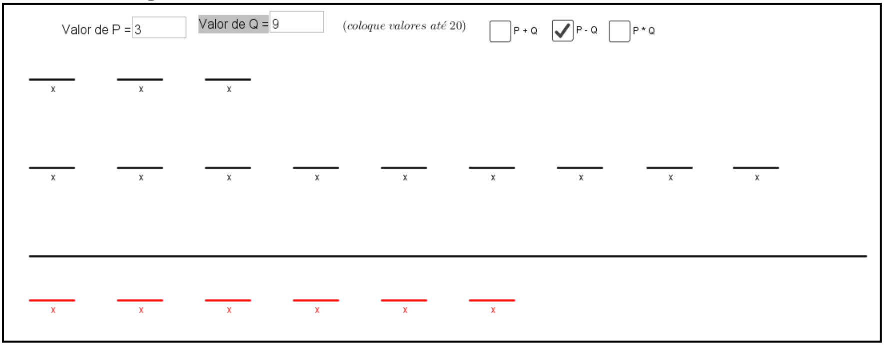
b) A - B - C =

Figura 1 - Tela do software ilustrando o primeiro item da atividade 01



Fonte: O próprio autor

Figura 2 - Tela do software ilustrando o item 9 da atividade 01



Fonte: O próprio autor

Sugestão para a Atividade 01: Nesta atividade esperamos que, a partir do uso do Geogebra, os alunos percebam inicialmente a relação do Polinômio *x* e seus semelhantes com o comprimento *x* e seus múltiplos. Em seguida, deverá haver a socialização sobre as regras práticas para adição e subtração de Polinômio cuja parte literal é *x* depois do registro escrito. Após a socialização, o professor questionará aspectos necessários do conteúdo para uma melhor compreensão. Caso haja dificuldades por parte do aluno em responder de modo formal, o professor seguirá então com a formalização. É importante também atribuir significado para o que já é de domínio do aluno. Após a conclusão, os papeis com as atividades devem ser recolhidos. No caso da atividade 01, esperamos que os alunos possam identificar uma regra prática para adicionar e subtrair Polinômios semelhantes a x sem o uso do *software* Geogebra. Para o desenvolvimento dessa atividade, os alunos deverão efetuar a adição e a subtração de termos semelhantes a x, até obterem como resultado um Polinômio cuja parte literal é x. Avaliamos que a operacionalidade com termos positivos e negativos represente um obstáculo durante a resolução. Porém, neste momento o aluno já estudou os números relativos em uma série anterior e, portanto, a subtração já é vista como uma situação de adição de números com sinais diferentes. No *software*, os termos geométricos relacionados a Polinômios com sinais negativos serão representados pela cor vermelha, e os positivos pela cor preta. Se necessário, o professor pode promover uma discussão sobre o conteúdo para uma melhor interpretação para as devidas conclusões da atividade.

A seguir apresentaremos a atividade 02 a qual permite descobrir uma maneira prática de adicionar e subtrair Polinômios semelhantes a x^2, que estão relacionados geometricamente a múltiplos da área x^2.

ATIVIDADE 02

Título: Adição e subtração de Polinômios semelhantes a x^2

Objetivo: Descobrir uma maneira prática de efetuar a adição e a subtração de Polinômios semelhantes a x^2

Material: Roteiro de atividade, lápis ou caneta, *software* Geogebra

Procedimento:

Com o auxílio do *software* Geogebra, efetue as operações seguintes

1) $2x^2 + 3x^2 =$
2) $3x^2 + 2x^2 =$
3) $4x^2 + 5x^2 =$
4) $6x^2 + x^2 =$
5) $2x^2 + 8x^2 =$
6) $7x^2 - x^2 =$
7) $x^2 - 7x^2 =$
8) $8x^2 - 5x^2 =$
9) $3x^2 - 10x^2 =$
10) $-2x^2 - 9x^2 =$
11) $-9x^2 - x^2 =$
12) $3x^2 + x^2 + 2x^2 =$
13) $2x^2 - x^2 + 4x^2 =$
14) $5x^2 - x^2 - 7x^2 + 4x^2 =$
15) $8x^2 + x^2 + 7x^2 - 6x^2 =$

Descubra uma maneira prática de obter o resultado sem o uso do *software* para adicionar dois desses Polinômios.

Conclusão:

Descubra uma maneira prática de obter o resultado sem o uso do *software* para subtrair dois desses Polinômios.

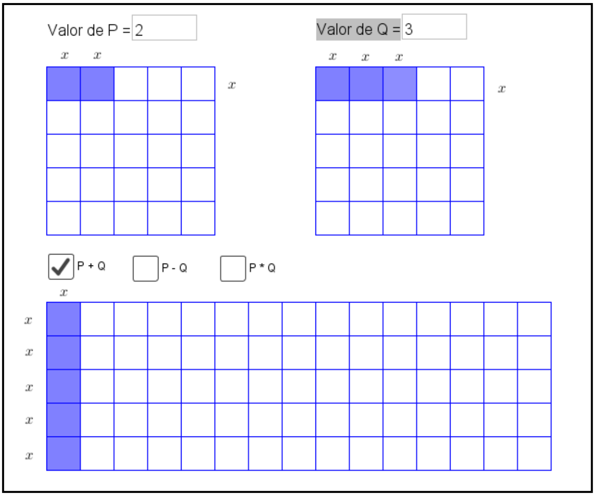
Conclusão:

Sem o uso do *software*, sendo A = $6x^2 - 2x^2 + 3x^2$, B = $8x^2 - 4x^2 + x^2$ e C = $3x^2 - 7x^2$, efetue:

a) A + B + C =

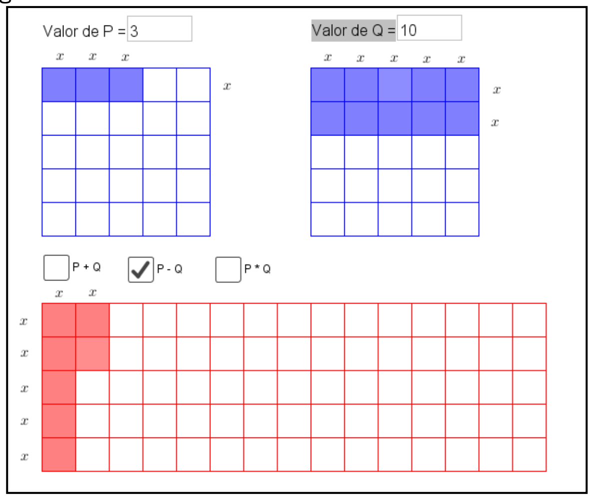
b) A - B - C =

Figura 3 - Tela do software ilustrando o primeiro item da atividade 02



Fonte: O próprio autor

Figura 4 - Tela do software ilustrando o item 9 da atividade 02



Fonte: O próprio autor

Sugestão para a Atividade 02: Nesta atividade esperamos que, a partir do uso do Geogebra, os alunos percebam inicialmente a relação do

Polinômio x^2 e seus semelhantes com a área x^2 e seus múltiplos, socializando sobre as regras práticas para adição e subtração de Polinômio cuja parte literal é x^2 depois do registro escrito. Após a socialização, o professor questionará aspectos necessários do conteúdo, de modo que haja uma melhor compreensão do mesmo. Após o aluno responder de modo formal, segue-se a formalização. Novamente, após a conclusão, os papeis com as atividades deverão ser recolhidos. No caso da atividade 02, esperamos que os alunos possam identificar uma regra prática para adicionar e subtrair Polinômios semelhantes a x^2 sem o uso do *software*. Para o desenvolvimento dessa atividade, os alunos deverão efetuar a adição e a subtração de termos semelhantes a x^2, até obterem como resultado um Polinômio cuja parte literal é x^2. No *software*, os termos geométricos relacionados a Polinômios com sinais negativos serão representados pela cor vermelha, e os positivos pela cor azul.

A atividade 03 permite descobrir uma maneira prática de adicionar e subtrair Polinômios semelhantes a x^3, que estão relacionados geometricamente a múltiplos do volume x^3.

ATIVIDADE 03

Título: Adição e subtração de Polinômios semelhantes a x^3

Objetivo: Descobrir uma maneira prática de efetuar a adição e a subtração de Polinômios semelhantes a x^3

Material: Roteiro de atividade, lápis ou caneta, *software* Geogebra

Procedimento:

Com o auxílio do *software* Geogebra, efetue as operações seguintes

1) $2x^3 + 5x^3 =$
2) $5x^3 + 2x^3 =$
3) $3x^3 + 5x^3 =$
4) $8x^3 + x^3 =$
5) $x^3 + 5x^3 =$
6) $7x^3 - 4x^3 =$
7) $4x^3 - 7x^3 =$
8) $9x^3 - 6x^3 =$
9) $4x^3 - 9x^3 =$
10) $-2x^3 - 6x^3 =$
11) $-10x^3 - x^3 =$
12) $4x^3 + 2x^3 + x^3 =$
13) $5x^3 - x^3 + 8x^3 =$
14) $9x^3 - x^3 - 6x^3 + 3x^3 =$
15) $10x^3 + x^3 + 6x^3 - 5x^3 =$

Descubra uma maneira prática de obter o resultado sem o uso do *software* para adicionar dois desses Polinômios.

Conclusão:

Descubra uma maneira prática de obter o resultado sem o uso do *software* para subtrair dois desses Polinômios.

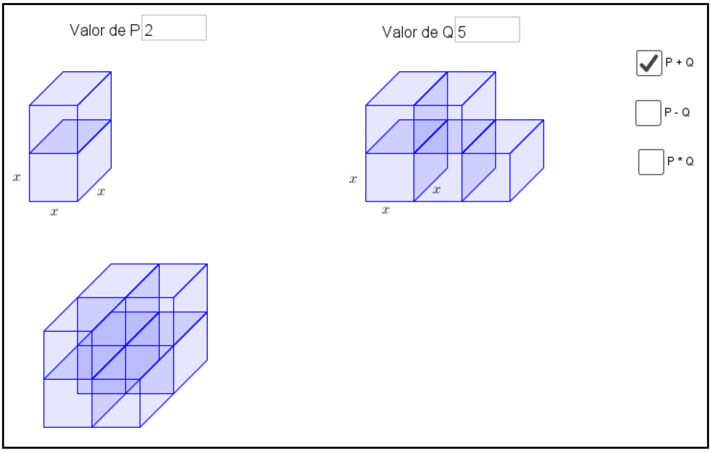
Conclusão:

Sem o uso do *software*, sendo A = $5x^3 + x^3 - 4x^3$, B = $3x^3 - 5x^3 + 7x^3$ e C = $5x^3 + 11x^3$, efetue:

a) A + B + C =

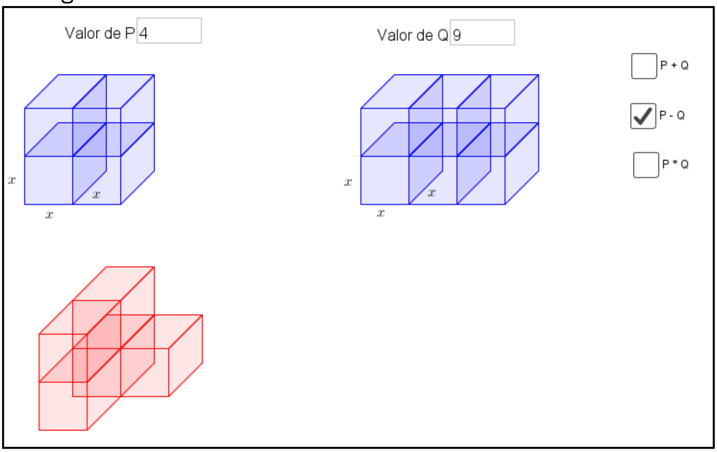
b) A - B - C =

Figura 5 - Tela do software ilustrando o primeiro item da atividade 03



Fonte: O próprio autor

Figura 6 - Tela do software ilustrando o item 9 da atividade 03



Fonte: O próprio autor

Sugestão para a Atividade 03: Esperamos que, a partir do uso do Geogebra, os alunos percebam inicialmente a relação do Polinômio x^3 e seus semelhantes com o volume x^3 e seus múltiplos, socializando sobre as regras práticas para adição e subtração de Polinômio cuja parte literal é x^3 depois do registro escrito. Depois da socialização, o professor questionará aspectos necessários do conteúdo. Após o aluno responder de modo formal, segue-se com a formalização. Novamente, após a conclusão, os papeis com as atividades deverão ser recolhidos. Na atividade 03 esperamos que os alunos possam identificar uma regra prática para adicionar e subtrair Polinômios semelhantes a x^3 sem o uso do *software*. Para o desenvolvimento dessa atividade, os alunos deverão efetuar a adição e a subtração de termos semelhantes a x^3, até obterem como resultado um Polinômio cuja parte literal é x^3. No *software*, os termos geométricos relacionados a Polinômios com sinais negativos serão representados pela cor vermelha, e os positivos pela cor azul.

A atividade 04 inicia o momento da sequência didática em que começamos a apresentar as operações com Polinômios com parte literal x, x^2, x^3, x^4, x^5, etc, ou seja, de modo que possamos generalizar as operações para diversos Polinômios além dos que têm somente a parte literal x, x^2 ou x^3. Essa atividade permite descobrir uma maneira prática de adicionar termos semelhantes de uma forma algébrica mais generalizada.

ATIVIDADE 04

Título: Adição de Polinômios

Objetivo: Descobrir uma maneira prática de efetuar a adição de Polinômios

Material: Roteiro de atividade, lápis ou caneta, *software* Geogebra

Procedimento:

Com o auxílio do *software* Geogebra, efetue as operações seguintes

1) $x + 3x =$
2) $x^2 + 3x^2 =$
3) $3\,x^4 + 5\,x^4 =$
4) $6\,x^5 + 2x^5 =$
5) $2\,x^7 + 7\,x^7 =$
6) $3\,x - x =$
7) $x^2 - 3x^2 =$
8) $7x^4 - 5x^4 =$
9) $3\,x^5 - 9\,x^5 =$
10) $-2\,x^7 - 5\,x^7 =$
11) $-5\,x^3 - x^3 =$
12) $x + x^2 + 2\,x + 6\,x^2 =$
13) $3\,x - x^5 + 4x - 6\,x^5 =$
14) $3\,x^2 - x^5 - 7x^2 + 5x^5 =$
15) $3\,x^3 - x^4 - 7\,x^4 - 3x^3 =$

Descubra uma maneira prática de obter o resultado sem o uso do *software*.

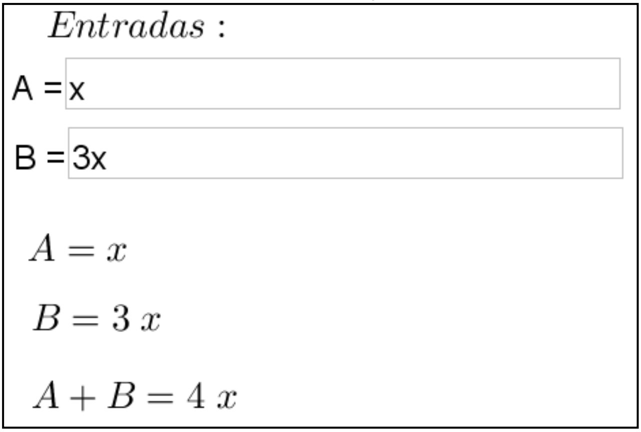
Conclusão:

Sem o uso do *software*, sendo A = $5x^4 - 3x^2 + 2x$, B = $7x^2 - 5x + 3$ e C = $4x^2 - 6$, efetue:

a) A + B + C =

b) A - B - C =

Figura 7 - Tela do software ilustrando o primeiro item da atividade 04



Fonte: O próprio autor

Sugestão para a Atividade 04: Espera-se a partir do uso do Geogebra que os alunos socializem sobre as regras práticas para adição e subtração de Polinômio cuja parte literal é x, x^2, x^3, x^4, x^5, *etc.*, depois do registro escrito. Após a socialização, o professor questionará aspectos necessários do conteúdo, de modo que haja uma melhor compreensão do mesmo. Caso haja dificuldades por parte do aluno em responder de modo formal, novamente se deve prosseguir com a formalização. É importante também que se atribua significado para o que já é de domínio do aluno. Outra vez, após a conclusão, os papeis com as atividades deverão ser recolhidos. No caso da atividade 04, espera-se que os alunos possam identificar uma regra prática para adicionar Polinômios sem o uso do *software* Geogebra. Para o desenvolvimento dessa atividade, os alunos deverão efetuar a adição de termos semelhantes, até obter como resultado um Polinômio onde não haja mais termos semelhantes. Novamente avaliamos que a operacionalidade com termos positivos e negativos possa ser um obstáculo durante a resolução. Porém, neste momento o aluno já estudou a adição e a subtração de Polinômios com a parte literal x, x^2 e x^3 e, possivelmente, já tem um considerado domínio com a adição e subtração desses Polinômios semelhantes a x, x^2 e x^3, além de que a subtração já é vista como uma situação de adição de números com sinais diferentes. Sobre isto, caso seja necessário, sugerimos uma discussão sobre o conteúdo.

A atividade 05 permite aos alunos descobrir uma maneira prática de calcular o produto entre um número real e um monômio.

ATIVIDADE 05

Título: Multiplicação de um número real por um monômio

Objetivo: Descobrir uma maneira prática de multiplicar um número real e um monômio

Material: Roteiro da atividade, lápis ou caneta, *software* Geogebra

Procedimento:

Utilizando o *software* Geogebra, calcule os produtos.

1) $-1 \cdot (2x^2) =$

2) $-3 \cdot (5x^3) =$

3) $-3 \cdot (-2x^3) =$

4) $7 \cdot (-3x^5) =$

Descubra uma maneira prática de obter um resultado sem o uso do *software*.

Conclusão:

Sem o uso do *software*, efetue:

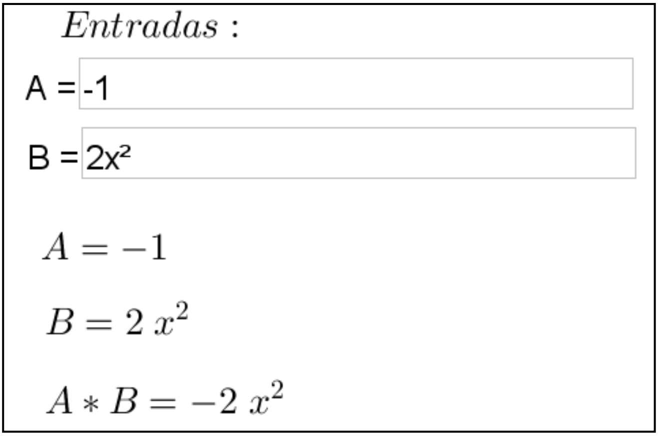
a) $3 \,.\, 4x^3 =$

b) $32 \,.\, 2x^2 =$

c) $10 \,.\, 2x^4 =$

d) $12 \,.\, 4x =$

Figura 8 - Tela do software ilustrando o primeiro exemplo da atividade 05



Fonte: O próprio autor

Sugestão para a Atividade 05: Esperamos que os alunos possam construir adequadamente uma regra prática para o cálculo do produto de um número real e um monômio. A regra prática esperada é algo similar à linguagem escrita *multiplicam-se os coeficientes numéricos e repete-se a parte literal*.

A atividade 06 permite aos alunos descobrir uma maneira prática de calcular o produto de um monômio por outro monômio.

ATIVIDADE 06

Título: Multiplicação de um monômio por outro monômio

Objetivo: Descobrir uma maneira prática de multiplicar dois monômios

Material: Roteiro da atividade, lápis ou caneta, *software* Geogebra

Procedimento:

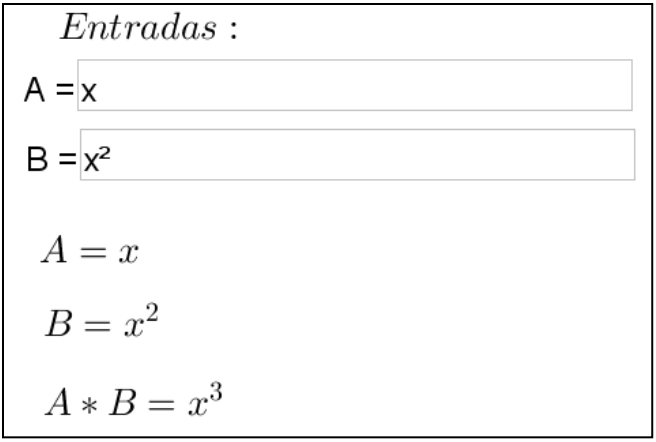
Utilizando o *software* Geogebra, calcule os produtos entre os monômios.

1) $x \cdot x^2 =$
2) $x^2 \cdot x^3 =$
3) $2x^2 \cdot 3x^2 =$
4) $4x^3 \cdot 5x =$
5) $7x^3 \cdot 2x^3 =$
6) $(3x^4) \cdot (-8x^2) =$
7) $(-6x^3) \cdot 7x^2 =$
8) $(-3x^5) \cdot (-4x^6) =$

Descubra uma maneira prática de obter um resultado sem o uso do *software*.

Conclusão:

Figura 9 - Tela do software ilustrando o primeiro exemplo da atividade 06



Fonte: O próprio autor

Sugestão para a Atividade 06: Esperamos que os alunos possam construir adequadamente uma regra prática para o cálculo do produto de dois monômios. Para resolver a atividade 06, os alunos utilizarão uma propriedade fundamental da potenciação, que é o **produto de potências de mesma base**. Possíveis dificuldades com o manuseio do *software* ainda poderão ser percebidas nessa atividade, que serão intermediadas e solucionadas pela intervenção do docente, se necessário. É possível também que haja dificuldades na aplicação dessa propriedade fundamental da potência.

A atividade 07 permite aos alunos descobrir uma maneira prática de calcular o produto de um monômio por um Polinômio.

ATIVIDADE 07

Título: Multiplicação de um monômio por um Polinômio

Objetivo: Descobrir uma maneira prática de multiplicar um monômio por um Polinômio

Material: Roteiro da atividade, lápis ou caneta, *software* Geogebra

Procedimento:

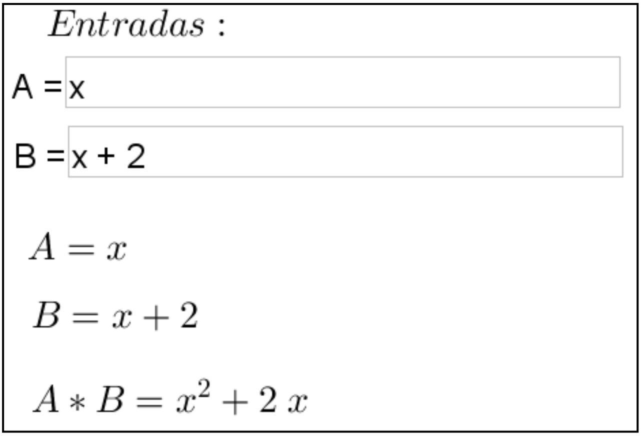
Utilizando o *software* Geogebra, calcule os seguintes produtos.

1) $x \cdot (x + 2) =$
2) $2x^2 \cdot (3x^2 + 4x) =$
3) $(3x^2) \cdot (4x - 8x^2) =$
4) $(-3x) \cdot (-4x^3 + 3) =$
5) $(x^2 + 2) \cdot x =$
6) $(4x^3 - 2) \cdot 5x =$
7) $(7x^2 + 2x) \cdot 2x^2 =$
8) $(-6x^3 + 5x) \cdot 7x^2 =$
9) $5 \cdot (8x^2 + 3x + 2) =$
10) $(8x + 2x^2 - 3) \cdot 5 =$

Descubra uma maneira prática de obter um resultado sem o uso do *software*.

Conclusão:

Figura 10 - Tela do software ilustrando o primeiro exemplo da atividade 07



Fonte: O próprio autor

Sugestão para a Atividade 07: Esperamos que os alunos possam construir adequadamente uma regra prática para o cálculo do produto de um monômio por um Polinômio. Para resolver a atividade 07, os alunos utilizarão uma propriedade fundamental da potenciação, que é o **produto de potências de mesma base**, além da adição e subtração de Polinômios, realizadas na atividade 04, bem como o produto de monômios, realizado na atividade 06. Há possibilidades de dificuldades na aplicação da propriedade fundamental da potência, ou nas operações de adição e subtração de Polinômios, assim como no produto de monômios. Porém, numa possível dificuldade de elaboração da regra prática, propomos o uso de números reais no lugar de monômios, de modo que se possa obter mais esclarecimento, compreensão e ajuda na construção da regra prática.

A atividade 08 permite aos alunos descobrir uma maneira prática de calcular o produto de dois Polinômios.

ATIVIDADE 08

Título: Multiplicação de dois Polinômios

Objetivo: Descobrir uma maneira prática de multiplicar dois Polinômios

Material: Roteiro da atividade, lápis ou caneta, *software* Geogebra

Procedimento:

Utilizando o *software* Geogebra, calcule os seguintes produtos.

1) $(x + 3)\cdot(x + 2) =$

2) $(x^2 + 2)\cdot(x - 2) =$

3) $(2x^2 + 3)\cdot(3x^2 + 4x) =$

4) $(4x^3 - 2)\cdot(5x - 4x^2) =$

5) $(3x^2 + 2x)\cdot(4x - 8x^2) =$

6) $(-3x^2 - x)\cdot(-4x^2 + 3) =$

7) $(7x + 2)\cdot(2x + x^2 + 3) =$

8) $(-6x^3 + 5x)\cdot(7x^2 + x^3 + x) =$

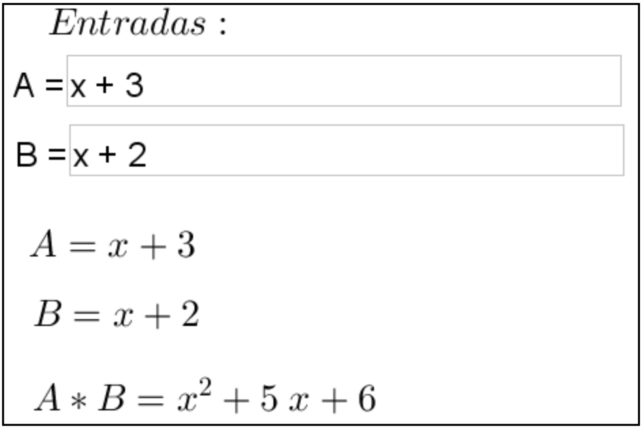
9) $(5 + x + x^2)\cdot(8x^2 + 3x + 2) =$

10) $(8x + 2x^2 - 3)\cdot(5x + 2x^2 - 3x^3) =$

Descubra uma maneira prática de obter um resultado sem o uso

Conclusão:

Figura 11 - Tela do software ilustrando o primeiro exemplo da atividade 08



Fonte: O próprio autor

Sugestão para a Atividade 08: Esperamos que os alunos possam construir adequadamente uma regra prática para o cálculo do produto de dois Polinômios. Para resolver a atividade 08, os alunos utilizarão uma propriedade fundamental da potenciação, que é o **produto de potências de mesma base**, além da adição de Polinômios, realizados na atividade 04, bem como o produto de monômios, realizado na atividade 06. Nessa etapa não consideramos dificuldades na aplicação da propriedade fundamental da potência, nem na operação de adição de Polinômios, tampouco no produto de monômios. Entretanto, é bem provável que haja várias intervenções do docente para a construção ou mesmo para a descoberta da regra prática para a multiplicação de dois Polinômios.

A atividade 09 permite aos alunos descobrir uma maneira prática de calcular a divisão de monômios por um número real diferente de zero.

ATIVIDADE 09

Título: Divisão de monômios por um número real diferente de zero

Objetivo: Descobrir uma maneira prática de dividir monômios por um número real diferente de zero

Material: Roteiro de atividade, lápis ou caneta, *software* Geogebra

Procedimento:

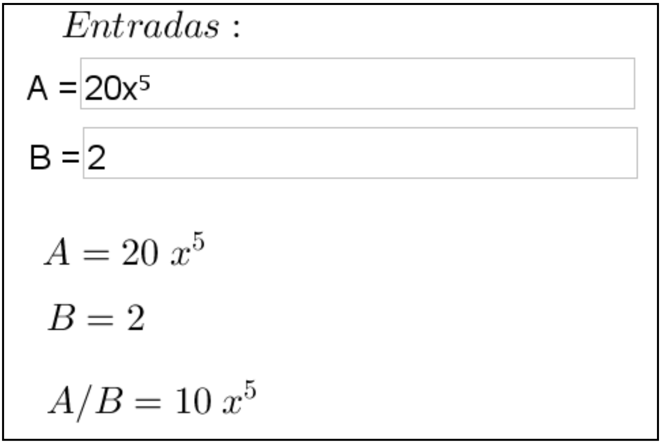
Com o auxílio do *software* Geogebra, efetue as seguintes divisões.

1) $20x^5 : 2 =$
2) $25x^2 : 5 =$
3) $12x^5 : 4 =$
4) $(-200x^4) : (-10) =$
5) $(-21x^3) : 7 =$
6) $24x^5 : 6 =$
7) $100x^2 : 20 =$
8) $4x^3 : (-2) =$
9) $(-11x^4) : 11 =$
10) $(-15x^6) : (-3) =$

Descubra uma maneira prática de obter um resultado sem o uso do *software*.

Conclusão:

Figura 12 - Tela do software ilustrando o primeiro exemplo da atividade 09



Fonte: O próprio autor

Sugestão para a atividade 09: Para resolver as questões da atividade 09, os alunos deverão relembrar que em uma divisão, o divisor nunca pode assumir o valor zero. Pelo uso constante do computador e do *software*, é possível que a atividade seja desenvolvida em menor tempo se comparada com a atividade de produto de monômios.

A atividade 10 permite aos alunos descobrir uma maneira prática de calcular a divisão de monômios.

ATIVIDADE 10

Título: Divisão de monômios

Objetivo: Descobrir uma maneira prática de dividir monômios

Material: Roteiro de atividade, lápis ou caneta, *software* Geogebra

Procedimento:

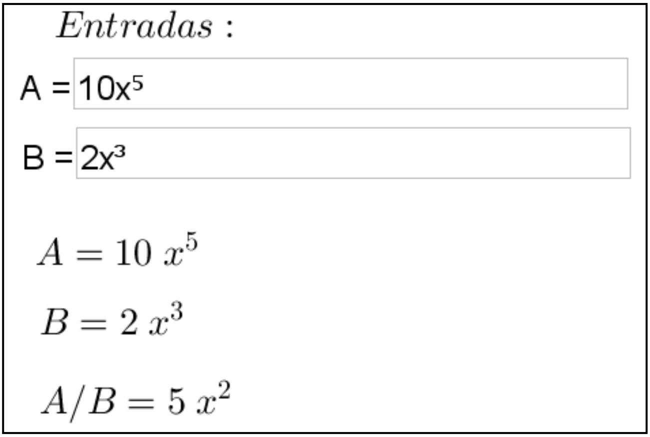
Com o auxílio do *software* Geogebra, efetue as seguintes divisões.

1) $10x^5 : 2x^3 =$
2) $25x^7 : 5x^4 =$
3) $12x^5 : 4x^3 =$
4) $(-20x^3) : (-10x^2) =$
5) $(-21x^3) : 7x =$
6) $18x^4 : 6x^2 =$
7) $100x^5 : 20x^3 =$
8) $4x^3 : (-2x) =$
9) $(-11x^3) : x^3 =$
10) $(-15x^5) : (-3x^2) =$

Descubra uma maneira prática de obter um resultado sem o uso do *software*.

Conclusão:

Figura 13 - Tela do software ilustrando o primeiro exemplo da atividade 10



Fonte: O próprio autor

Sugestão para a Atividade 10: Para resolver as questões da atividade 10, os alunos deverão relembrar novamente que em uma divisão, o divisor nunca pode assumir o valor zero, além da propriedade de potência de quociente. Novamente, há uma grande possibilidade de que a atividade seja desenvolvida em um tempo menor ainda que a atividade 09, devido o uso constante do computador e do *software* pelos estudantes.

A atividade 11 permite aos alunos descobrir uma maneira prática de calcular a divisão de um Polinômio por um monômio.

ATIVIDADE 11

Título: Divisão de um Polinômio por um monômio

Objetivo: Descobrir uma maneira prática de dividir um Polinômio por um monômio

Material: Roteiro de atividade, lápis ou caneta, *software* Geogebra

Procedimento:

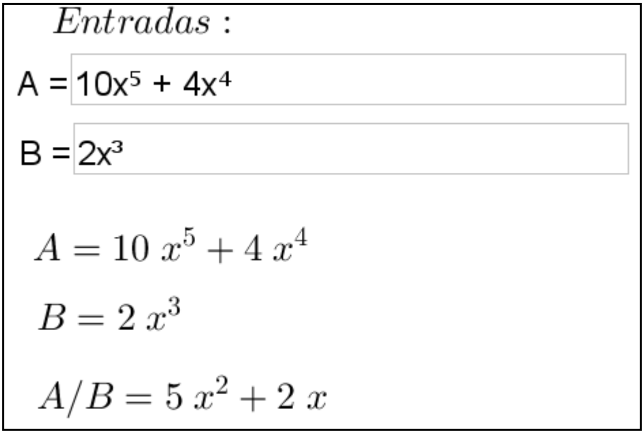
Com o auxílio do *software* Geogebra, efetue as seguintes divisões.

1) $(10x^5 + 4x^4) : 2x^3 =$
2) $(25x^7 - 10x^5) : 5x^4 =$
3) $(12x^5 + 4x^3) : 4x^3 =$
4) $(-20x^3 + 20x^2) : (-10x^2) =$
5) $(-21x^3 + 14x^2) : 7x =$
6) $(18x^4 + 12x^3 - 6x^2) : 6x^2 =$
7) $(100x^5 + 40x^3) : 20x^3 =$
8) $(2x^3 - 4x^2 - 4x^4) : (-2x) =$
9) $(x^3 + x^2 + x) : x =$
10) $(x^4 - x^3 + x^2) : (-x^2) =$

Descubra uma maneira prática de obter um resultado sem o uso do *software*.

Conclusão:

Figura 14 - Tela do software ilustrando o primeiro exemplo da atividade 11



Fonte: O próprio autor

Sugestão para a Atividade 11: Para resolver as questões da atividade 11, os alunos deverão relembrar que em uma divisão, o divisor nunca pode assumir o valor zero, além da **propriedade de potência de quociente** e da divisão de monômios, operação realizada na atividade 10. Não descartamos a possibilidade de ocorrer obstáculos no momento de escrita do polinômio-quociente, pois o aluno poderá por simples descuido confundir os sinais dos termos algébricos que compõem o polinômio-quociente. Sugerimos, se necessário, alguns esclarecimentos por parte do professor para sanar tal dificuldade.

A atividade 12 singulariza-se por um procedimento diferente das demais atividades anteriormente apresentadas pelo fato de que o algoritmo da divisão de dois Polinômios não ser de simples compreensão para ser trabalhado numa atividade de redescoberta ou de ensino por atividades. Usaremos o *software* Geogebra com as operações de Polinômios vistas em atividades anteriores neste trabalho, com o objetivo de revisá-las e torná-las mais familiares para os alunos.

ATIVIDADE 12

Título: Divisão de um polinômio por outro Polinômio

Objetivo: Calcular a divisão de um Polinômio por outro Polinômio

Material: Roteiro de atividade, lápis ou caneta, *software* Geogebra

Procedimento:

Com o auxílio do *software* Geogebra, seguindo passo a passo as orientações do professor, efetue as seguintes divisões.

1) $(x^2 - 7x + 10):(x - 2) =$

2) $(2x^2 - x - 15):(x - 3) =$

3) $(12x^2 + 7x - 8):(4x + 5) =$

4) $(3x^3 - 8x^2 + 13x - 8):(x - 1) =$

5) $(12x^3 - 2x^2 + 3x - 2):(4x^2 - 6x + 9) =$

Agora, sem o uso do *software*, efetue as seguintes divisões.

6) $(6x^3 - 25x^2 + 25x + 7):(3x^2 - 5x + 1) =$

7) $(x^2 - 9x + 20):(x - 5) =$

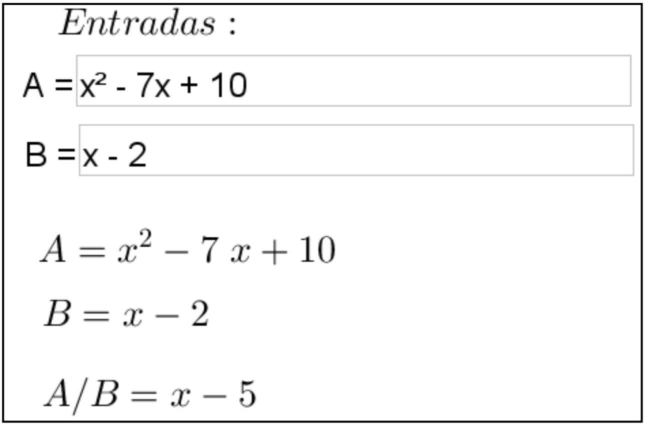
8) $(6x^2 + x - 40): (3x + 8) =$

9) $(5x^2 + 11x - 3):(5x + 1) =$

10) $(6x^3 - 5x^2 - 9x + 5): (3x + 2) =$

Conclusão:

Figura 15 - Tela do software ilustrando o primeiro exemplo da atividade 12



Fonte: O próprio autor

Sugestão para a Atividade 12: Para resolver as questões da atividade 12, os alunos aplicarão todas as regras práticas e propriedades utilizadas nas atividades de 01 a 11. Ressaltamos que, não sendo uma atividade de redescoberta ou de ensino por atividade, essa atividade necessitará de bastante ajuda por parte do professor, bem como esclarecimentos a respeito do algoritmo de divisão de dois Polinômios. Dificuldades serão possíveis a respeito de qual operação utilizar em cada momento, mas é possível que com várias atividades de cunho algébrico similar já resolvidas e elucidadas, o aluno não levará muito tempo a se esclarecer sobre qualquer obstáculo que venha a ser apresentado.

Durante a aplicação das atividades anteriores, é admissível que haja situações em que o docente é questionado sobre algum procedimento a respeito do assunto Polinômios cujo rigor e tratamento algébrico não é recomendado dentro do contexto da Educação Básica, mas que se faz necessário o conhecimento de tal rigor ou tratamento algébrico por parte desse docente. É o que mostraremos no capítulo a seguir.

2. BASE TEÓRICA DOS POLINÔMIOS

Toda a teoria produzida nesta seção está contida nas seguintes obras consultadas: Villela (2012), Janos (2010), Iezzi (2001) e Dante (2012). Não faremos uma unicidade quanto a notação e os símbolos utilizados para descrever os termos matemáticos, porquanto gostaríamos de explicitar a teoria de um modo mais geral, sem direcionar necessariamente para uma ou outra obra. Por exemplo, para expressar um Polinômio utilizaremos símbolos como *f*, *f*(*x*), *P*, *P*(*x*), *A*, *A*(*x*), etc., mas sempre com boas caracterizações e denominações em cada simbologia de modo a não gerar equívocos.

2.1. Polinômio ou Função Polinomial

Dada uma seqüência de número complexo **(a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, a_0**), definimos como *função polinomial*, ou simplesmente *polinômio*, toda função definida pela relação $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, onde:

a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, a_0 são números reais chamados *coeficientes*;

n é um número natural e *x* é um número complexo, onde *x* é a *variável*.

Assim, podemos escrever *P*(*x*) em formato de uma função *f*, de modo que $f(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n$, ou ainda

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Exemplo: $f(x) = 5 + x + 3x^2$

2.2. Valor Numérico

O valor numérico de um polinômio *P*(*x*) para *x* = *a* é o número que se obtém substituindo *x* por *a* e efetuando todas as operações indicadas pela relação que define o polinômio.

Exemplo: Se $P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4$, o valor numérico de $P(x)$, para $x = 2$, é:

$P(x) = x^3 + 2x^2 + x - 4$

$P(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2 - 4$

$P(2) = 14$

Observação: Se $P(a)=0$, o número a é chamado *raiz* ou *zero* de $P(x)$. Por exemplo, no polinômio $P(x) = x^2 - 3x + 2$ temos $P(1) = 0$; logo, 1 é raiz ou zero desse polinômio.

2.3. Grau de Um Polinômio

Seja $f(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$ um polinômio não nulo. Chamamos *grau de* **f** e representamos por ∂f ou gr(f), o numero natural p tal que $a_p \neq 0$ e $a_i = 0$ para todo $i > p$.

$$\partial f = p \iff \begin{cases} a_p \neq 0 \\ a_i = 0, \forall\, i > p \end{cases}$$

Assim, o grau do polinômio f é o índice do "último" termo não nulo de f.

Exemplos:

a) $f(x) = 4 + 7x + 2x^3 \Rightarrow \partial f = 3$

b) $f(x) = -1 + 2x + 5x^2 \Rightarrow \partial f = 2$

c) $f(x) = 1 + 5x - 3x^2 + (a - 4)x^3 \Rightarrow \begin{cases} \partial h = 2, \text{ se } a = 4 \\ \partial h = 3, \text{ se } a \neq 4 \end{cases}$

Em relação ao grau, podemos classificar os polinômios como:

- Grau 0 - *polinômio constante*;
- Grau 1 - *função afim* (*polinômio linear*, caso $a_0 = 0$);
- Grau 2 - *polinômio quadrático*;
- Grau 3 - *polinômio cúbico*.

Se o grau do polinômio *f* é *n*, então a_n é chamado de *coeficiente dominante de f*. No caso do coeficiente dominante ser a_n igual a 1, *f* é chamado de *polinômio unitário*.

Podemos estender a definição de polinômio para incluir *f*(*x*) = 0, chamado *polinômio nulo*. O polinômio nulo não possui grau definido.

2.4. Polinômio Nulo

Dado o polinômio $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$,se a_i = 0, $\forall$ i $\in$ (1, 2, 3,...,*n*), definimos *f*(*x*) como um *polinômio nulo*.

Exemplo: *f*(x) = 0 + 0*x* + 0x^2

2.5. Polinômios Iguais

Dizemos que dois polinômios *f*(*x*) e *g*(*x*) são *iguais* ou *idênticos* (e indicamos *f*(*x*) = *g*(*x*)) quando assumem valores numéricos iguais para qualquer valor comum atribuído à variável *x*. A condição para que dois polinômios sejam iguais ou idênticos é que *os coeficientes dos termos correspondentes sejam iguais*, ou seja:

$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $g(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow a_i = b_i \forall i \in (1,2,3,..,n)$$
$$a_i = b_i$$
$$a_i - b_i = 0$$
$$(a_i - b_i)x^i = 0$$
$$\sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i)x^i = 0$$
$$\sum_{i=0}^{n} (a_i x^i - b_i x^i) = 0$$
$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = 0$$
$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$
$$f(x) = g(x)$$

2.6. Operações Polinomiais

2.6.1. Adição

2.6.1.1. Definição

Dados dois polinômios: $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, chamamos de *soma de f* e *g*, o único polinômio *S*, tal que *S*(*x*) = *f*(*x*) + *g*(*x*). Podemos também representar esse polinômio por $S(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$, onde $c_i = a_i + b_i \forall i \in (1,2,3,..,n)$.

2.6.1.2. Propriedade

Sendo *A*, *B* e *C* três polinômios quaisquer, são válidas as seguintes propriedades:

1ª) *Comutativa*: *f*(*x*) + *g*(*x*) = *g*(*x*) + *f*(*x*)
Demonstração:

Dados $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $g(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$. Daí,

$f(x)+g(x)=\sum_{i=0}^{n} (a_i+b_i)x^i = \sum_{i=0}^{n} (b_i+a_i)x^i = \sum_{i=0}^{n} (b_i x^i + a_i x^i) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i + \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ = *f*(*x*) + *g*(*x*).

2ª) *Associativa*: *f*(*x*) + (*g*(*x*) + *h*(*x*)) = (*f*(*x*) + *g*(*x*)) + *h*(*x*)
Demonstração:

Dados $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ e $h(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i x^i$. Daí, temos que $f(x)+[g(x)+h(x)] = f(x)+\sum_{i=0}^{n}[b_i+c_i]x^n$ = $\sum_{i=0}^{n}[a_i+(b_i+c_i)]x^i = \sum_{i=0}^{n}[(a_i+b_i)+c_i]x^i = \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i + \sum_{i=0}^{n} c_i x^i$ = [*f*(*x*) + *g*(*x*)] + *h*(*x*).

3ª) *Elemento neutro*: *f*(*x*) + *e*(*x*) = *f*(*x*), onde *e*(*x*) indica o polinômio nulo.

Demonstração:

Dados $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $e(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$. Então,

$a_i + b_i = a_i \Rightarrow b_i = 0, \forall i \in (1,2,..,n)$ Logo, $e(x)=\sum_{i=0}^{n} 0x^i$.

4ª) *Elemento oposto*: *f*(*x*) + (–*f*(*x*)) = 0
Demonstração:

$$f(x)+(-f(x)) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \left(-\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$$

Observação: A partir da quarta propriedade, podemos definir a *diferença* entre dois polinômios *A* e *B* como sendo a adição de *A* com o oposto de *B*, ou seja, sendo *A* = *f*(*x*) e *B* = *g*(*x*), temos que *A* – *B* = *f*(*x*) – *g*(*x*) = *f*(*x*) + [–*g*(*x*)] = *A* + (-*B*).

2.6.2. Subtração

2.6.2.1. Definição

Da álgebra elementar temos que somente podemos somar e/ou subtrair *termos semelhantes*, ou seja, termos que possuam expoentes iguais.

Tendo em vista a operação anterior, sendo $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $g(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, chamamos de diferença *f*(*x*) - *g*(*x*) o polinômio *f*(*x*) + (-*g*(*x*)), conforme já definimos anteriormente, isto é,

$$f(x)+(-g(x))=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i +(-\sum_{i=0}^{n} b_i x^i)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i -\sum_{i=0}^{n} b_i x^i = f(x)-g(x)$$

.

2.6.3. Multiplicação de Dois Polinômios

2.6.3.1. Definição

Dados dois polinômios $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $g(x)=\sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, chamamos de *produto* de *f* e *g* o único polinômio *P*, tal que *P*(*x*) $\equiv$ *f*(*x*) $\cdot$ *g*(*x*). Este polinômio é obtido multiplicando cada termo de *f* por todos os termos de *g*, isto é, o produto:

f(*x*) **.** *g*(*x*) = *P*(*x*), onde $P(x)=\sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i$, sendo $C_k=\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

2.6.3.2. PROPRIEDADES

Sendo $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g(x)=\sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ e $h(x)=\sum_{i=0}^{t} c_i x^i$ três polinômios quaisquer, são válidas as seguintes propriedades:

1ª) *Comutativa*: *f*(x) ▪ *g*(x) = *g*(x) ▪ *f*(x)

Demonstração:

$$f(x).g(x)=\sum_{k=0}^{n+m}(\sum_{i=0}^{n+m} a_i b_{k-i})x^k = \sum_{k=0}^{n+m}(\sum_{l=0}^{n+m} a_{k-l} b_l)x_X^k = g(x).f(x),$$ onde $k-i=l \Rightarrow i=k-l$.

2ª) *Associativa*: *f*(x) ▪ (*g*(x) ▪ *h*(x)) = (*f*(x) ▪ *g*(x)) ▪ *h*(x)

3ª) *Distributiva*: *f*(x) ▪ (*g*(x) + *h*(x)) = *f*(x) ▪ *g*(x) + *f*(x) ▪ *h*(x)

Demonstração: Sejam $f(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g(x)=\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ e $h(x)=\sum_{i=0}^{n} c_i x^i$. Daí, temos que

$$f(x)[g(x)x+h(x)]=$$
$$f(x)[\sum_{i=0}^{n}(b_i+c_i)x^i]=$$
$$\sum_{k=0}^{m+n}[\sum_{i=0}^{m+n}a_i(b_{k-i}+c_{k-i})]x^k=$$
$$\sum_{k=0}^{m+n}[\sum_{i=0}^{m+n}(a_ib_{k-i}+a_ic_{k-i})]x^k=$$
$$\sum_{k=0}^{m+n}[\sum_{i=0}^{m+n}a_ib_{k-i}+\sum_{i=0}^{m+n}a_ic_{k-i}]x^k=$$
$$\sum_{k=0}^{m+n}(\sum_{i=0}^{m+n}a_ib_{k-i})x^k+\sum_{k=0}^{m+n}(\sum_{i=0}^{m+n}a_ic_{k-i})x^k=$$
$$f(x).g(x)+f(x).h(x)$$

2.6.4. Multiplicação de Um Polinômio por Um Escalar

2.6.4.1. Definição

Seja o polinômio $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ e um escalar $\alpha \in$ R. Temos que $\alpha f(x)=h(x)$, onde $h(x)=\sum_{i=0}^{n}c_ix^i$,em que $c_i=\alpha a_i \forall i \in (1,2,...,n)$.

2.6.4.2. Propriedades

Dados $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ e $g(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i$, temos as seguintes propriedades:

1º) $\alpha(f(x)+g(x))=\alpha f(x)+\alpha g(x)=$

$$\alpha(f(x)+g(x))=$$

$$\alpha(\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+\sum_{i=0}^{n}b_ix^i)=$$

$$\alpha\sum_{i=0}^{n}(a_ix^i+b_ix^i)=$$

$$\sum_{i=0}^{n}(\alpha a_ix^i+\alpha b_ix^i)=$$

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha a_ix^i+\sum_{i=0}^{n}\alpha b_ix^i=$$

$$\alpha\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+\alpha\sum_{i=0}^{n}b_ix^i=$$

$$\alpha f(x)+\alpha g(x)$$

2º) $(\alpha+\beta)f(x)=\alpha f(x)+\beta f(x)$

$$(\alpha+\beta)f(x)=(\alpha+\beta)\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

$$=\sum_{i=0}^{n}[(\alpha+\beta)a_ix^i$$

$$=\sum_{i=0}^{n}(\alpha a_ix^i+\beta a_ix^i)$$

$$=\alpha\sum_{i=0}^{n}a_ix^i+\beta\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

$$=\alpha f(x)+\beta f(x)$$

2.6.5. Divisão

2.6.5.1. Definição

Dados dois polinômios *A*(*x*) e *B*(*x*), *B*(*x*) não-nulo, existe um único par de polinômios *Q*(*x*) e *R*(*x*) em que se verificam as condições:

1ª) $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$
2ª) $G_R < G_B$ ou $R(x) = 0$

Podemos também representar a divisão de dois polinômios $A(x)$ e $B(x)$ na seguinte forma:

$$\begin{array}{l|l} A(x) & B(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

Os polinômios $A(x)$ e $B(x)$ são chamados, respectivamente, de *dividendo* e *divisor* e os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ de *quociente* e *resto*, respectivamente.

Quando $R(x) = 0$, dizemos que a divisão é *exata*, ou que $A(x)$ é *divisível* por $B(x)$.

2.6.5.2. O Método da Chave

Quando dividimos o polinômio $A(x)$ pelo polinômio $B(x)$ não-nulo, determinamos o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$, ou seja, $A(x) = Q(x) \,.\, B(x) + R(x)$.

Exemplo: Vamos dividir o polinômio $A(x) = 2x^3 - 8x^2 + 7x - 5$ por $B(x) = x^2 - 2x + 3$, pelo método da chave.

1ª etapa: Dividimos inicialmente $2x^3$ por x^2, encontrando $2x$.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - 8x^2 + 7x - 5 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2} & 2x \end{array}$$

2ª etapa: Multiplicamos $2x$ por $x^2 - 2x + 3$ e verificamos "quanto falta para $2x^3 - 8x^2 + 7x - 5$", isto é, subtraímos $2x^3 - 4x^2 + 6x$ de $2x^3 - 8x^2 + 7x - 5$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 8x^2 + 7x - 5 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2} -2x^3 + 4x^2 - 6x \quad & 2x \\ \cline{1-1} -4x^2 + x - 5 & \end{array}$$

3ª etapa: Enquanto o grau do resto for maior ou igual ao grau do divisor, continuamos a divisão. Dividimos então – $4x^2$ por x^2, encontrando – 4.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - 8x^2 + 7x - 5 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^3 + 4x^2 - 6x} & 2x - 4 \\ \quad -4x^2 + x - 5 & \end{array}$$

4ª etapa: Multiplicamos – 4 por $x^2 - 2x + 3$ e verificamos "quanto falta para $-4x^2 + x - 5$".

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 - 8x^2 + 7x - 5 & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^3 + 4x^2 - 6x} & 2x - 4 \\ \quad -4x^2 + x - 5 & \\ \quad \underline{+4x^2 - 8x + 12} & \\ \qquad -7x + 7 & \end{array}$$

Nesse ponto terminamos a divisão, pois o grau de $-7x + 7$ é menor que o grau do divisor. Portanto, temos:

Quociente: $Q(x) = 2x - 4$

Resto: $R(x) = -7x + 7$

2.6.5.3. Considerações Sobre O Grau

Sendo *A* e *B* dois polinômios não-nulos, o grau do quociente $Q(x)$ é a diferença entre os graus dos polinômios *A* e *B*, e o resto, se não for nulo, terá grau menor que o grau de $B(x)$.

2.6.5.4. O Método de Descartes

Este método, também conhecido como o *método dos coeficientes a determinar*, baseia-se nos fatos seguintes:

(I) $\partial q = \partial f - \partial g$, o que é conseqüência da definição;

(II) $\partial r < \partial g$ (ou $r = 0$).

O método de Descarte é aplicado da seguinte forma:

1º) calculam-se ∂q e ∂r;

2º) constroem-se os polinômios q e r deixando incógnitos seus coeficientes;

3º) determinam-se os coeficientes impondo a igualdade $qg + r = f$.

Demonstração do método.

Dados os polinômios $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_mx^m \quad (a_m \neq 0)$ e $g = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_nx^n \quad (b_n \neq 0)$, existem um único polinômio q e um único polinômio r tais que $f = qg + r$ e $\partial r < \partial g \ (ou\ r = 0)$.

Se fizermos

$$f = g.q_1 + r_1 \qquad\qquad f = g.q_2 + r_2$$

$$f = f \Rightarrow g.q_1 + r_1 = g.q_2 + r_2 \Rightarrow (q_2 - q_1).g = r_1 - r_2$$

Como $\partial[(q_2 - q_1).g] = \partial(q_2 - q_1) + \partial g \geq \partial g$ e $\partial[r_1 - r_2] \leq máx\{r_1, r_2\} < \partial g$, isso implica que

$$\partial[(q_2 - q_1).g] \neq \partial(r_1 - r_2)$$

Com o resultado anterior temos que $q_2 = q_1 \quad e \quad r_1 = r_2$.

Vamos fazer $\frac{a_m}{b_n} = q_0$. Daí, $r_1 = f - (q_0x^{m-n}).g$

$$r_1 = (a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots) - \frac{a_m}{b_n}x^{m-n}(b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots)$$

$$r_1 = c_\alpha x^\alpha + c_{\alpha-1}x^{\alpha-1} + c_{\alpha-2}x^{\alpha-2} + \ldots + c_1x + c_0$$

Onde foram suprimidos os termos a_mx^m e $\partial r_1 = \alpha < m$

Fazendo agora $\frac{c_\alpha}{b_n} = q_1$, temos que $r_2 = r_1 - (q_1 x^{\alpha - n}).g$

$$r_1 = (a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots) - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots)$$

$$r_1 = c_\alpha x^\alpha + c_{\alpha-1} x^{\alpha-1} + c_{\alpha-2} x^{\alpha-2} + .. + c_1 x + c_0$$

Onde foram suprimidos os termos $a_m x^m$ e $\partial r_1 = \alpha < m$, e, portanto, concluímos a demonstração.

Em outra representação simbólica, a título de simplicidade, podemos escrever o método de Descartes da seguinte maneira:

Sejam os polinômios *A*(*x*) e *B*(*x*) chamados, respectivamente, de *dividendo* e *divisor* e os polinômios *Q*(*x*) e *R*(*x*) de *quociente* e *resto*, respectivamente. Este método se baseia nos fatos seguintes:

(I) $G_Q = G_A - G_B$, conseqüência da definição;

(II) $G_R < G_B$ (ou *R*(x) = 0).

O método de Descarte é aplicado da seguinte forma:

1º) calculam-se G_Q e G_R;

2º) constroem-se os polinômios *Q*(*x*) e *R*(*x*) deixando incógnitos seus coeficientes;

3º) determinam-se os coeficientes impondo a igualdade *Q*(*x*) . *B*(*x*) + *R*(*x*) = *A*(*x*);

4º) determinam-se *Q*(*x*) e *R*(*x*).

Como exemplo ilustrativo, faremos a divisão do polinômio $A(x) = 2x^3 - 8x^2 + 7x - 5$ por $B(x) = x^2 - 2x + 3$ pelo *método de Descartes*, ou *método dos coeficientes a determinar*.

1ª etapa: Estimamos quem serão o quociente *Q*(*x*) e o resto *R*(*x*) da divisão, lembrando que $G_Q = G_A - G_B = 1$, e, se o resto não for nulo, $G_R < G_B$. Assim: $Q(x) = ax + b$ e $R(x) = cx + d$.

2ª etapa: Como $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, temos:

$2x^3 - 8x^2 + 7x - 5 = (x^2 - 2x + 3) \cdot (ax + b) + cx + d$

$2x^3 - 8x^2 + 7x - 5 = ax^3 + (-2a + b)x^2 + (3a - 2b + c)x + (3b + d)$

3ª etapa: Estabelecemos a igualdade dos coeficientes dos termos correspondentes.

$$\left.\begin{array}{l} a=2 \\ -2a+b=-8 \\ 3a-2b+c=7 \\ 3b+d=-5 \end{array}\right\}$$

4ª etapa: Resolvemos o sistema e encontramos $a = 2$; $b = -4$; $c = -7$ e $d = 7$.

Então, $Q(x) = 2x - 4$ e $R(x) = -7x + 7$.

2.6.6. Divisão por (x – a)

2.6.6.1. Teorema do Resto

O resto r da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x - a$ é igual ao valor numérico de $P(x)$ em a, ou seja, $P(a) = r$.

Demonstração.

Na divisão de um polinômio $P(x)$ por $(x - a)$, observamos que o resto, se não for nulo, terá grau zero, isto é, será sempre um número real r. Então:

$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + r$, em que $Q(x)$ é o quociente dessa divisão. Calculando o valor numérico de $P(x)$ para $x = a$, temos:

$P(a) = (a - a) \cdot Q(a) + r$

Logo, $P(a) = r$

Verificamos assim que *o resto da divisão de P(x) por (x – a) é r = P(a)*.

Exemplos.

1º) Calcular o resto da divisão de $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ por $x - 2$.

Resolução

$r = P(2) = 2^4 - 3 . 2^2 + 2 . 2 - 1 = 16 - 3 \cdot 4 + 2 . 2 - 1$

Assim, $r = 7$

2º) Calcular o resto da divisão de $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 6$ por $x + 2$.

Resolução

$x + 2 = x - (-2)$

Então, $r = P(-2)$

$r = (-2)^4 + 2\,(-2)^3 + 3(-2)^2 - 6$

$r = 6$

2.6.6.2. Teorema de D'Alembert

Para que um polinômio seja divisível por $(x - a)$ é preciso que o resto seja igual a zero, ou seja, $P(a) = 0$. Em outras palavras, *P(x) é divisível por (x – a) se, e somente se, P(a) = 0.* Essa propriedade é conhecida como *Teorema de D'Alembert*, [Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783)].

Demonstração.

De acordo com o *teorema do resto* anterior, temos $r = P(a)$. Então, $r = 0$, explicitando uma divisão exata, implica que $P(a) = 0$, ou seja, que a é raiz de $P(x)$, como queríamos demonstrar.

Exemplo: Determine k para que o polinômio $P(x) = kx^3 + 2x^2 + 4x - 2$ seja divisível por $(x + 3)$.

Resolução

Devemos ter $P(-3) = 0$. Assim:

$k\,.(-3)^3 + 2\,.(-3)^2 + 4.(-3) - 2 = 0$

Então, $k = \frac{4}{27}$

2.6.6.3. Algoritmo de Briot-Ruffini

Dividindo um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ pelo binômio $(x - a)$, o quociente será um polinômio $Q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \ldots + q_2x^2 + q_1x + q$; tal que:

$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + r$

Assim:

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 =$

$(x - a)(q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + \ldots + q_2x^2 + q_1x + q_0)$

Ou, então:

$a_n x^n + a_n x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 =$

$q_{n-1}x^n + (q_{n-2} - aq_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (q_1 - aq_2)x^2 + (q_0 - aq_1)x + r - aq_0$

Daí, obtemos:

$q_{n-1} = a_n$

$q_{n-2} - aq_{n-1} = a_{n-1} \Rightarrow q_{n-2} = aq_{n-1} + a_{n-1}$

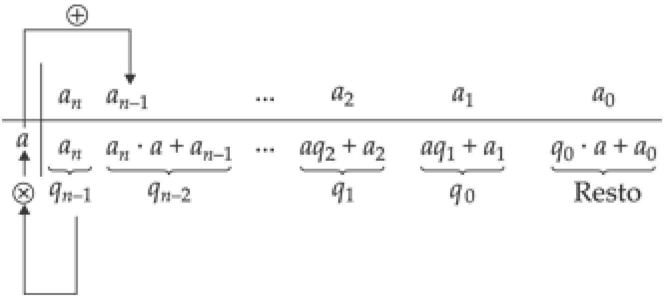
....

$q_1 - aq_2 = a_2 \Rightarrow q_1 = aq_2 + a_2$

$q_0 - aq_1 = a_1 \Rightarrow q_0 = aq_1 + a_1$

$r - aq_0 = q_0 \Rightarrow r = aq_0 + a_0$

Esses cálculos podem ser efetuados aplicando-se o seguinte esquema, conhecido como dispositivo de Briot-Ruffini:



Há também a situação que podemos usar o algoritmo de Briot-Ruffini para o binômio $ax + b$ (sendo $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $a \neq 1$):

$P(x) = (ax + b) \cdot Q(x) + r$

$P(x) = a. \left(x + \frac{b}{a}\right) \cdot Q(x) + r$

$P(x) = (x + \frac{b}{a}) \cdot a \cdot Q(x) + r$

Fazendo $Q_1(x) = a \cdot Q(x)$, temos:

$P(x) = (x + \frac{b}{a}) \cdot Q_1(x) + r$

Assim, aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini para $(x + \frac{b}{a})$, obtemos $Q_1(x)$ e r, em que r também é o resto na divisão por $(ax + b)$ e $\frac{1}{a} \cdot Q_1(x)$ é o quociente na divisão por $(ax + b)$.

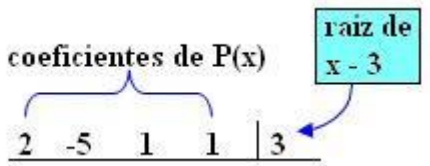
2.6.7. Divisão pelo Produto (x – a)(x – b)

Se um polinômio $P(x)$ é divisível por $x - a$ e também por $x - b$, sendo $a \neq b$, então $P(x)$ é divisível pelo produto $(x - a)(x - b)$.

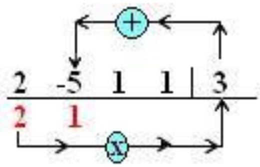
E se um polinômio $P(x)$ é divisível por $(x - a)(x - b)$, sendo $a \neq b$, então $P(x)$ é divisível por $x - a$ e também por $x - b$, isoladamente.

2.6.8. Divisões Sucessivas

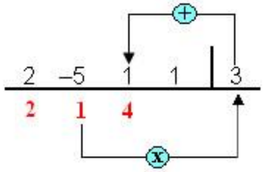
Se um polinômio $P(x)$ é divisível por $x - a$ e o quociente obtido é divisível por $x - b$, então, $P(x)$ é divisível pelo produto $(x - a)(x - b)$, dando como resultado o último quociente obtido.

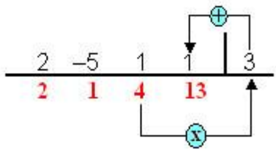


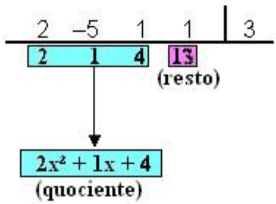
Descemos o primeiro coeficiente de $P(x)$. Multiplicamos esse coeficiente pela raiz de $x - 3$ e somamos o produto obtido com o próximo coeficiente de $P(x)$, descendo o resultado.



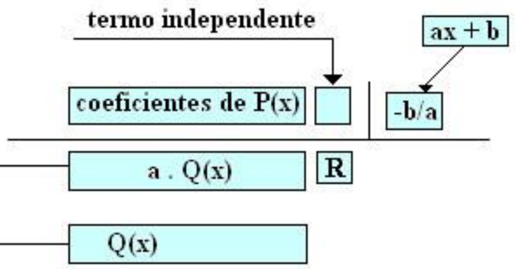
Repetimos o procedimento anterior até obter os coeficientes do quociente e o resto da divisão:







Para aplicar o dispositivo de Briot-Ruffini na divisão de um polinômio *P*(*x*) por *ax* + *b*, *a* ≠ 0, devemos utilizar o esquema a seguir:



CONSIDERAÇÕES

As atividades porpostas neste livro foram construídas a partir de reflexões sobre a nossa *práxis* vivenciada nas escolas públicas brasileiras. Como o ensino de Polinômios não é algo simples de ser trabalhado em sala de aula mediante nossas considerações em decorrência de nossa vivência no ambiente escolar da Educação Básica, as experiências praticadas nos causaram indagações e incertezas ao despertar nosso interesse em propor situações relevantes, com a finalidade de contribuir não somente para a ciência e para a pesquisa, mas também aos demais docentes que se encontram no mesmo contexto truculento entre a prática docente e os possíveis resultados não satisfatórios durante o processo de ensino e aprendizagem.

As pesquisas desenvolvidas na área de ensino da matemática, além da vontade de inovar o modelo tradicional que se apresenta dentro das escolas públicas brasileiras, nos provocaram inquietações para a vontade de criar algo novo e trazer tal novidade para o ambiente escolar. E aliar a tecnologia à doze atividades propostas em uma sequência didática não foi algo simples de ser realizado. Entretanto, constatamos que seus resultados após o experimento foram bastante convincentes no sentido de melhoria do ensino e principalmente da aprendizagem do estudante.

No momento da apresentação da primeira atividade de nossa sequência didática concomitantemente com o uso do objeto de aprendizagem feito a partir do *software* considerado para o ensino de Polinômios, foi perceptível no semblante dos estudantes uma sensação de espanto e surpresa. E essa sensação veio acompanhada logo a seguir por outras sensações de entusiasmos e motivação praticamente até o fim de nossa experimentação, pois, pela nossa percepção, muitos não tinham idéia que era possível aliar artefatos tecnológicos e aprendizagem dentro do ambiente educacional.

Logo após as duas primeiras atividades apresentadas aos alunos percebemos um aumento na autonomia e nas interações de um modo geral, principalmente nas verbais, algo característico de um ensino mais interativo e mais centralizado no aluno conforme fomos guiados pela proposta da BNCC (2016). Essas interações foram tão significativas que em alguns momentos viraram uma disputa sadia no modo “quem responde mais ou quem responde primeiro”, de modo a ter algum tipo de premiação entre eles durante o andamento do processo.

Foi notório também o aumento da autonomia desses alunos, a qual ocasionou um melhor desempenho nas resoluções das atividades e nas descobertas de suas regras práticas, ambos em um ambiente colaborativo e participativo.

De modo similar ao ocorrido com a nossa experimentação, almejamos que os docentes, ao fazerem uso de nossa proposta de atividades, tenham também seus objetivos alcançados de modo satisfatório. Ansiamos também que nossa sequência didática proposta possa contribuir com um enriquecimento quantitativo e qualitativo para os docentes da Educação Básica com sua utilização em sala de aula.

Assim, desejamos que em estudos futuros haja uma melhoria dessas atividades para futuras propostas, ou seja, que antes de uma aplicação de atividades similares à nossa envolvendo qualquer assunto, em especial a álgebra, o pesquisador encontre meios que provoquem entusiasmo e motivação em um ambiente cooperativo, de modo que todo esse conjunto incentive a participação de todos os sujeitos envolvidos, para que o resultado apresente sempre uma aprendizagem significativa.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO JUNIOR, Carlos Fernandes de; MARQUESI, Sueli Cristina. Atividades em ambientes virtuais de aprendizagem: parâmetros de qualidade. *In*: LITTO, Fredric M.; FORMIGA, Marcos (Org). **Educação a distância**: o estado da arte. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009. p. 358-368.

BRASIL. Ministério da educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Proposta preliminar. Segunda versão revista. Brasília: MEC, 2016. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf. Acesso em: 01 de junho de 2017.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris**: matemática. 8º ano. São Paulo: Ática, 2012. p. 118-153.

DOMINGUES, Nilson Silveira; HEITMANN, Felipe Pereira; SOBRINHO, Geraldo Aparecido de Lima. Vivências e pesquisas: compondo uma das tecnologias em 20 anos de GPIMEM. *In*: BORBA, Marcelo C. & CHIARI, Aparecida. **Tecnologias digitais e educação matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2013. Cap. 6, p. 113-140.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**. v.6. 6 ed. São Paulo: Atual, 2001. 242 p.

JANOS, Michel. **Matemática e natureza**. São Paulo: Livraria da Física, 2010 460 p.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e língua materna**: análise de uma impregnação mútua. 5 ed. São Paulo: Cortez, 2001. 169 p.

_____________, Nilson José. **Matemática e educação**: alegorias, tecnologias, jogo, poesia. 6 ed. Cortez, São Paulo, 2012.

MODESTO, Thiago Jacob Maciel. **A gênese instrumental e sua interação com o geogebra**: uma proposta de ensino de polinômios. 2019. 206 f. Dissertação do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

VILLELA, Maria Lúcia Torres & HEFEZ, Abramo. **Polinômios e equações algébricas.** Rio de Janeiro: SBM, 2012. 269 p.

SOBRE OS AUTORES

THIAGO JACOB MACIEL MODESTO

Possui Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade do Estado do Pará (UEPA), Especialização em Matemática do Ensino Superior pela Universidade Federal do Pará (UFPA), Mestrado em Ensino de Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará (UEPA). Professor na Secretaria Municipal de Educação e Cultura de Belém (SEMEC) e na Secretaria de Estado de Educação do Pará (SEDUC-PA). Possui diversos artigos e trabalhos publicados em livros e em anais de eventos nacionais e internacionais.

FÁBIO JOSÉ DA COSTA ALVES

Possui Doutorado e Mestrado em Geofísica. Licenciado em Matemática, Engenheiro Civil, Professor Pesquisador da Universidade do Estado do Pará-UEPA. Docente do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Líder do Grupo de Pesquisa em Ensino da Matemática e Tecnologias-GPEMT.