Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Departamento de Matemática, Estatística e Informática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática

JOSÉ AUGUSTO RIBEIRO DA SILVA
ROBERTO PAULO BIBAS FIALHO

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES

Belém
2020

José Augusto Ribeiro da Silva
Roberto Paulo Bibas Fialho

PRODUTO EDUCACIONAL:

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES

Produto Educacional apresentado ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática. Linha de pesquisa: Ensino Médio.
Orientador: Prof. Dr. Roberto Paulo Bibas Fialho

Belém-PA
2020

Diagramação e Capa: Os Autores

Revisão: Os Autores

Conselho Editorial

Comitê de Avaliação

SILVA, José Augusto Ribeiro da e FIALHO, Roberto Paulo Bibas. Sequência didática para o ensino de sistemas lineares. Produto Educacional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da Universidade do Estado do Pará, (PPGEM/UEPA), 2020.

ISBN:

Ensino de Matemática; Sistemas Lineares; Sequência Didática; Transposição Didática; Representações Semióticas.

RESUMO

SILVA, José Augusto Ribeiro da e FIALHO, Roberto Paulo Bibas. Sequência Didática para o Ensino de Sistema de Equações Lineares. 47 f. Produto de Ensino (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2019.

Este trabalho é culminância de um trabalho dissertativo, e que se materializou como um produto direcionado ao ensino de Sistemas Lineares, depois de uma pesquisa realizada seguindo os pressupostos da Engenharia Didática, de Michelle Artigue (1986), desenvolvemos esse produto para auxiliar no trabalho do professor em sala de aula, de forma que: sua primeira parte foi um levantamento prévio, para detectar de forma direta os problemas enfrentados pelos alunos em aprender a resolver Sistemas Lineares; a segunda parte foi elaborar esta sequência, que chamamos de análise a priori, baseada na orientação dos autores da revisão literária contida no texto dissertativo; a terceira etapa foi sua aplicação ao um grupo de 26 alunos que se dispuseram a fazer parte do corpo de sujeitos da pesquisa; e a quarta parte foi a análise a posteriori, onde analisamos as respostas dos alunos à luz da teoria dos registros e representações semióticas de Duval (2012). E a razão pela qual escolhemos o escalonamento foi porque este método pode ser aplicado a sistemas de ordem superior a 3x3, de maneira bastante confortável. Por isso reunimos a confiança de sugerir aos professores de matemática, este produto como item de sua composição de materiais didáticos na intenção de melhorar o seu trabalho em sala de aula.

Palavras chave: Sistemas Lineares; Sequência Didática; Transposição Didática; Representações Semióticas.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta Sequência Didática representa a culminância de um trabalho dissertativo, desenvolvida para ajudar a melhorar a qualidade do ensino de Sistemas Lineares, em sala de aula, e para isso procuramos nos manter atentos ao propósito d aproximar os conteúdos, ao entendimento dos aprendizes, tanto pelos recursos da Transposição Didática de Chevallard (2005), como também tomamos as medidas possíveis para sua inserção no contexto de significados dos sujeitos pesquisados na ocasião de sua experimentação.

Os problemas que procuramos minimizar por meio de Nossa Sequência Didática foram detectados por Freitas (2013), quando diz que os alunos não fazem a diferença entre parâmetro e incógnita; e por Rodrigues (2011), quando diz que os calouros da matemática superior têm dificuldades de apresentar soluções de sistemas indeterminados e impossíveis, e também os problemas aprendizagens detectados por nossa análise a priori. Então, a partir da reflexão sobre estes problemas de aprendizagem, que ao mesmo tempo se traduz em problemas de ensino, nos indagamos da seguinte forma: c**omo podemos ensinar Sistemas Lineares, no ensino médio, por escalonamento, usando uma Sequência Didática Articulada como um conjunto de atividades?**

Para responder esta pergunta, a nossa sequência didática foi desenvolvida para atingir o **objetivo geral** de proporcionar a assimilação do conceito de sistemas equivalentes e a construção das habilidades para resolução de problemas que podem ser modelados por sistemas lineares. E como **objetivos específicos:** a) Estudar os processos que favoreçam aprendizagem da aplicação das operações básicas nos sistemas lineares, para obter sistemas equivalentes e escalonados; b) Desenvolver um produto a ser direcionado aos professores como ferramenta de ensino do conteúdo de sistemas lineares em sala de aula.

1 – UMA BREVE HISTÓRIA DOS SISTEMAS LINEARES

A dimensão história de um conteúdo vem tomando espaço na forma de melhor conhecer um assunto, então neste tópico procuramos introduzir esta dimensão com o proposito de situar o leitor no tempo e no espaço em que os sistemas lineares surgiram na vida humana, o contexto social e o contexto científico que motivou os matemáticos da época a ampliar suas aplicações.

No início o homem não imaginava que um procedimento tão simples para resolver problemas em que a resposta era composta de dois valores, iria se desencadear num assunto que hoje por meio da programação linear, ajuda o homem a resolver problemas com grande quantidade de variáveis.

Segundo Eves (2004, p. 444), atribui-se a Leibniz, em 1693 a criação da Teoria dos Determinantes, visando o estudo dos sistemas de equações lineares, mesmo que 10 anos antes já houvesse algumas considerações sobre o assunto. No Japão, Seki Kowa (*apud* EVES, op. cit.) relata que numa antiga obra intitulada de *K'ui-ch'ang Suan-shu* (Nove Capítulos Sobre a Arte Matemática), publicado na China no período de Hans (206 a. C – 220 d. C), já trazia no oitavo capítulo estudos sobre sistemas de equações lineares e procedimentos matriciais. E ainda segundo Katz (1995, *apud* NEMAN, 2013) existem evidências de que os chineses já usavam um procedimento análogo para resolver sistemas lineares por volta de 200 a.C.

Segundo Tavares e Pereira (2013, p. 552), os chineses resolviam sistemas lineares com coeficientes positivos, manipulando gravetos, método semelhante ao da eliminação de Gauss, apresentado no séc. XIX e por Cayley (1821-1895), em 1857, quando descobria a álgebra não comutativa das matrizes.

Segundo Boyer (2003), num escrito para a academia de Paris em 1764, e um pouco mais tarde num tratado de 1779 intitulado de *Théorie générale équations algébriques*, Bézout deu regras artificiais semelhantes às de Cramer para resolver n equações lineares simultâneas. E ainda, conforme o mesmo autor,

> Lagrange (1736 -1813) afirma que a área do triângulo é o determinante da matriz quadrada formada pelos seus vértices, dividido pelo fatorial de 2. O volume de qualquer pirâmide triangular é o determinante de uma matriz quadrada formada pelos seus vértices, dividido pelo fatorial de 3 (LAGRANGE, 1736 – 1813).

Em 1843, Cayley iniciava a geometria analítica ordinária do espaço n-dimensional, usando os determinantes como instrumento essencial para sua as anotações homogêneas da reta e do plano.

Para Valiente (2015), em 1841 já era possível identificar que as tabelas, até então trabalhadas como caixas de armazenar coeficientes de equações de um sistema linear, não eram estáticas e sim dinâmicas, podendo assim ser estudadas de forma sistematizada. Então Ferdinand Gotthold Max Eisentein (1823-1852), em 1844, estudou essas tabelas e os chamou de matrizes.

Segundo Melo (2012), em 1947 o método simplex, descoberto por George Dantzig, é capaz de resolver qualquer problema de programação linear, quando trabalhava na Rand Corporation no projeto SCOOP, pois o Algoritmo Simplex permite o uso de um número muito grande de cálculos.

Em 1951, os trabalhos com a programação linear ficaram bem mais simples permitindo um alto grau de expansão, mas as raízes da programação linear vêm da antiguidade, no sec. III a. C. conforme o livro II de Euclides (300 a. C.) ele já procurava encontrar a distância de um ponto a uma circunferência, e no livro IV ele descreve uma forma de encontrar um paralelogramo de área máxima de perímetro conhecido.

O método de eliminação de Gauss-Jordan surgiu da seguinte forma:

> Em 1º de janeiro de 1801, o astrônomo siciliano Gilseppe Piazzi (1746-1826) observou um pequeno objeto celeste que ele acreditou que pudesse ser um “planeta que faltava”. Ele considerou o objeto por Ceres e fez um número de medições sobre sua posição antes de perdê-lo de vista da a uma proximidade do sol. Gauss tomou para si a tarefa de calcular a órbita a partir de dados muito limitado com o procedimento que agora denominamos eliminação gaussiana. O trabalho de Gauss causou sensação quando o planeta reapareceu um ano depois na constelação de Virgem. Praticamente na posição exata predita por Gauss. O método foi popularizado pelo engenheiro Wilhelm Jordan em seu livro de geodesia (a ciência de medir as formas terrestres) em 1888 (ANTON; RORRES, 2012, p 15).

E hoje o conhecemos popularmente por método do escalonamento, cujos detalhes, “vide definições principais”.

Ao ver a disposição pedagógica conteúdos trabalhados em nossos livros didáticos, temos a seguinte ordem: Matrizes Determinantes e Sistemas Lineares apresentados nesta ordem. Neste momento, tem se a impressão de que estes surgiram também nesta ordem, mas a ideia de resolver problemas envolvendo variáveis simultâneas vem desde o sec. III a. C, com os chineses tentando resolver problemas simples ligados aos trabalhos do campo.

De acordo com a literatura consultada, Vandermonde ainda não usava o termo matriz para um grupo de dados organizados em linhas e colunas, apenas entre 1770 e 1773 trabalhou sobre eles escrevendo três artigos, entre eles o estudo dos determinantes, como afirma Anton e Busby (2007, p. 212), "Vandermonde se tornou a primeira pessoa a estudar determinantes sem levar em conta sua relação com as equações lineares e, nesse sentido, é o fundador da teoria dos determinantes".

Sobre as matrizes, ou seja, um agrupamento de dados em tabelas, dispostos em linhas e colunas, agora visto como objeto matemático, segundo Valiente (2015), Ferdinand Gotthold Max Eisentein (1823-1852), em 1844, estudou essas tabelas e os chamou de matrizes.

A inclusão deste tópico se fez necessário, para situar o leitor no tempo e acompanhar por meio de citações estratégicas que marcaram a evolução deste conteúdo, frente às exigências da vida humana.

1.1 – Aplicações Sociais e a Resolução por Escalonamento

Para Valiente (2015), a aplicação dos sistemas lineares em Engenharia, Ciência da computação, Economia e Biologia, nos leva a compreender o quanto se faz necessário o uso de ferramentas computacionais para resolver estes problemas na graduação ou em pós-graduação, e pela nossa experiência de sala de aula, os alunos que precisam aprender um assunto, que por sua vez precisa de um pré-requisito não aprendido, tendem a enfrentar acentuadas dificuldades na assimilação.

> Pelo fato da sequência permitir esse processo de subsunção superordenada, em que cada conceito serve de base para o aprendizado do próximo, que, por sua vez, está relacionado com seu precedente de uma maneira não trivial, ela constitui-se em um material potencialmente significativo, segundo a teoria de Ausubel (2003, *apud* RORATTO, NOGUEIRA E KATO, 2009, p. 775 - 786).

O método de resolução por escalonamento, se aprensentou mais produtivo para nossa Sequência Didática, por inserir das operações básicas no processo, aproveitando este subsunsor importante para transformar o sistema original em um sistema equivalete, com o objetivan de transformá-lo num equivalente mais simples. Esta simplificação consiste no cancelamento conveniente das variáveis de cada equação, de forma que cada equação do sistema fica com uma variável a menos, até que a útima euqação se torne a mais objetiva possível. E então sabemos se o sistema é possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível.

> A não aplicação dos saberes escolares conduz os alunos a um aprendizado mecânico e desprovido de reflexão, pois eles não cosenguem relacioná-los com o seu dia-a-dia. Na verdade o estudo sem contextualização pode não permitir a exploração do caráter indagador que ele possui, daí, em muitos casos, não possibilitar a construção significativa do conhecimento (RUFATO, 2014, p. 17)

Segundo esta autora, entendemos como imprecindível que contextualizemos ao objevar ensinar Sistemas de Equações a alguem, pelos significados que o assunto poderá abrager no sistema cognitivo dos aprendizes. Por isso, ao transpor didáticamente um conteúdo para o seu ensino, é coerente inseri-lo no contexto social e cultural dos estudantes.

O método de resolução por escalonamento pode ser aplicado com maior simplicidade aos sismemas de ordem maior que 3x3, e também aos sistemas de ordem menor, e ainda aproveitando os subsunçores construídos na resolução dos sistemas 2x2 no Ensino Fundamental. Por isso o escolhemos como objeto de ensino em nossa Sequência Didática.

> Um sistema de m equações lineares com n variáveis, com (m, $n \geq 1$) tal que para $m = n$, o sistema tem ordem n, é um conjunto de m equações lineares tendo cada uma delas n variáveis, consideradas simultâneas (CALIOLLI, DOMINGUES e COSTA 1990 *apud* SILVA, 2018, p. 62).

Nessa perspectiva, o produto tem como objeto de ensino os Sistemas de Equações Lineares, Silva (2018), trabalhados no Ensino Médio.

2 – APORTES TEÓRICOS DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Os primórdios da Sequência Didática nos moldes da nossa, parece ter surgido especificamente 1954, na região de Osaka, em que o professor Toru Kumon, ao descobrir que seu filho estava enfrentando dificuldades para compreender a matemática, resolveu articular as atividades para seu filho Takeshi, de forma que ele pudesse, fazer as atividades partindo do item mais simples ao mais complexo, inserindo níveis mais suáveis de dificuldades, para que: do item anterior, pudesse entender sozinho o item seguinte. Pois assim diz Kumon (2001, p. 14): “nesse horário, logicamente não me era permitido ensinar meu filho, a solução foi preparar exercícios à mão, no dia anterior, para que minha esposa os entregasse a Takeshi”.

Quando se observa as atividades do método Kumon, (Vide Atividade D151a, anexo 01), de fato, percebe-se que existem pequenas diferenças no grau de dificuldade de um item anterior para o seguinte, isto, segundo as origens do método, para permitir que o aluno aos poucos ganhe autonomia para resolver as atividades. E a atividade referida, introduz a transformação de uma fração imprópria em um número misto. Os dois primeiros itens, pedem para o aluno descobrir o numerador da fração do número misto. Do terceiro ao décimo primeiro item, a atividade já pede o registro completo do número misto correspondente à fração imprópria dada, e assim vai aumentando o numerador da fração. E no final da atividade ele orienta como se lê a fração e o número misto, e nesta informação estão fornecendo elementos que irão formalizar algo mais abrangente, que é conceito das frações impróprias.

Para Almeida, Oliveira e Florêncio (2008 *apud* SÁ, MAUÉS E MUNFORD 2014), “o ensino por investigação é uma estratégia de ensino que engloba atividades centradas no aluno, possibilitando o desenvolvimento da autonomia e da capacidade de tomar decisões, de avaliar e de resolver problemas”. Então, analisando as atividades do Sistema Kumon de Ensino, e o Ensino de Matemática por atividade, percebemos que os dois modelos buscam aproximar cada item da atividade, para que os alunos não se percam na atividade, de um item para o outro, no caminho do entendimento para a formalização dos conceitos envolvidos no processo.

Para melhor visualização desta análise, vejamos a atividade de Sá e Jucá (2014), (vide Anexo 03), quando expõem uma sequência de frações para os alunos dividirem o numerador pelo denominador e observar a posição da vírgula nos resultados e ligar a posição da vírgula com a quantidade de zeros à direita da unidade do denominador.

E seguindo por estas linhas conceituais, estruturamos nossa Sequência Didática de forma que segundo Zabala (1998, p.18), é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos alunos como pelos professores. Não podemos deixar de frisar que uma Sequência Didática não funcional por si só, o professor precisa intervir no processo sempre que perceber que os estudantes, em sua busca de entendimento, estão a se desviar do conceito a ser aprendidos, e isto consequentemente pode levar os mesmo a se desviarem dos objetivos planejados pelo professor,

Para Cabral (2017, p.45, grifo nosso) "[...] Essas **Intervenções Orais** são extremamente necessárias, pois ajudam o professor a modular as aproximações e dos alunos em relação aos objetivos de aprendizagem". Por esta linha reflexiva, entendemos que da mesma forma em que um engenheiro orienta e redireciona o trabalho dos seus operários sobre o trabalho em curso da construção a ser erguida, o professor intervém didaticamente em sala de aula a orientar seus estudantes a não se desviar dos objetivos da construção a ser erguida no terreno cognitivo de seus próprios alunos.

2.1 – Sobre a Contextualização da Sequência

A inserção do conteúdo que se pretende ensinar, na realidade dos aprendizes, parece algo vital para o ensino. Vejamos que para Silva (2009, p. 60): "é necessário que o conhecimento escolar seja relacionado com o conhecimento da vida diária do ano". Por estas orientações, percebemos o teor da recomendação para o uso da contextualização do conhecimento a ser ensinado, no cotidiano do aluno, para que haja a interação dos significados do novo conhecimento com os conhecimentos trazidos pelo aprendiz.

Essa é apenas uma das dimensões da contextualização, pois a complexidade da vida humana não cabe apenas em um tipo. Para isso o professor, no âmbito do domínio de sua área de saberes, pode usar como elemento catalizador da aprendizagem, algo que os alunos praticam com entusiasmo e descontração como: brincadeira e jogos. E a dimensão lúdica que o jogo pode ajudar em muito o clima de aprendizagem, como diz Smole *et al* (2008, p.10), "Esse aspecto lúdico faz do jogo um contexto natural para o surgimento de situações problemas cuja superação exige do jogador alguma aprendizagem e certo esforço na busca por sua solução".

Pelas orientações da autora, entendemos que uma Sequência Didática pode perfeitamente conter algum tipo de jogo, desde que com estratégia e objetivos definidos, para que a culminância seja atingida.

Em relação à contextualização em outras disciplinas, como: História, Física, Biologia, Química, vejamos o que diz Silva (2009):

> A contextualização de conteúdos matemáticos no âmbito de conteúdos de outras disciplinas é uma das formas de se mostrar a contribuição da matemática na leitura dos diversos fenômenos naturais e sociais em que outras ciências se apresentam. (SILVA, 2009, P. 66)

Os campos de contextualização sugeridos por deste autor, nos permitem imaginar o tamanho do campo de abrangência que pode ser explorado por uma sequência didática para poder atingir os objetivos de ensino de uma aula. Desta forma podemos imaginar: Comércio, Trânsito Urbano, Balanceamento alimentar, e porque não a gestão pública. R entre os contextos históricos para a inserção no ensino da matemática, a própria história da matemática vem sendo recomendada como um possível incentivador da aprendizagem de alguns conteúdos, partindo da motivação que culminou na descoberta e no aperfeiçoamento de determinado conteúdo. E além de poder traçar um paralelo entre o aparecimento do assunto movido pelo contexto histórico da época,

> O professor deverá explicar ao aluno que determinados assuntos em matemática, são ensinados devido serem muito uteis para determinadas profissões. Logo conhecer tal assunto poderá lhes ampliar as possibilidades na escola da carreira e lhes dará mais segurança em relação à matemática que terá de aprender futuramente (MENDES e CHAQUIAM, 2016, p. 25).

Nessa perspectiva, a historicidade dos conteúdos, pode incentivar os alunos que se identificam com a história, incentivando o interesse para assimilar os conteúdos de um produto de ensino. Outro mecanismo de contextualização para o ensino da matemática, é a contextualização na própria matemática.

> Situar o raciocínio do aluno a partir de um conceito que seja uma forma mais elementar daquele conhecimento considerado. [...] Da mesma forma que podemos desenvolver um conhecimento matemático mais elevado por intermédio da manipulação de conceitos mais simples e conhecido do aluno, podemos a partir de um dado conteúdo mais complexo melhorar a compreensão de outro já conhecido (SILVA, 2009, p. 69, 73)

Para este autor, alguns assuntos matemáticos, para que os alunos avancem no conhecimento e aperfeiçoem seu poder de abstração, é necessário o exercício da matemática dentro da própria matemática, para que possam compreender a sua estrutura lógica interna, pois se a matemática não tivesse essa estrutura consistente não seria capaz de guiar as outras ciências com a segurança que as ciências precisam para dá o suporte de qualidade que a vida moderna demanda. E isto nos levou a compreender que a contextualização de um tópico matemático e sua transposição didática, não pode ferir a consistência dos conceitos matemáticos ou a sua operacionalidade, sob o risco dos alunos entenderem os conceitos de maneira incoerente. E sobre estas duas dimensões do encaminhamento didático de um conteúdo, demanda um grande diferenciador do trabalho letivo, em relação ao modelo de direcionamentos tradicionais.

2.2 – O Jogo como Recurso Didático

Os jogos como recurso motivador do ensino não são coisa recente, pelo contrário, acompanham a humanidade desde tempos remotos.

> Existem jogos há dezenas de séculos, sendo provavelmente responsáveis pelas primeiras atividades estritamente mentais que o homem inventou (descobriu). Alguns deles contêm noções de matemática recreativa, como os Mancala, cujos tabuleiros se assemelham a ábacos, instrumentos usados na contabilidade antiga para executar operações aritméticas (PEDRO NETO e SILVA, 2004, p. 14).

As afirmações destes autores ainda devem parecer estranhas diante de grande parte de nós, pelo fato de até em torno de três décadas atrás, os alunos para serem considerados capazes teriam que vencer as barreiras da exposição verbal dos conteúdos, e assimilá-los apenas com as explicações do professor. E na busca de melhorar a acessibilidade aos saberes, é que pesquisadores do ensino vêm desenvolvendo estratégias que sem tirar a seriedade do ato de ensinar, vêm recomendando o uso dos jogos no trabalho didático.

Na segunda etapa da nossa Sequência Didática, introduzimos uma atividade lúdica, um jogo, com o objetivo de fixar o conteúdo trabalhado na primeira etapa, pois, para Gil (2017, p.18), a utilização de um jogo como "fixação de conteúdos, é a abordagem mais comum, avaliando a possibilidade de um reforço do conteúdo estudado". Pela perspectiva desta autora, articulamos um jogo com o propósito de ajudar na fixação do conteúdo.

> O jogo pode ser utilizado em várias circunstâncias: para introduzir um assunto novo, para amadurecer um assunto em andamento ou para concluí-lo. Não importa o momento, mas de que forma o jogo é conduzido. O jogo não deve ser usado apenas como jogo, ou seja, não é jogo pelo jogo, não que isso não seja importante, mas pode não trazer o aprendizado que se espera. O jogo deve vir acompanhado de reflexões, indagações que o educador pode propor ao grupo de alunos (QUARTIERI e REHFELDT, 2004, p. 1).

Por estas autoras, podemos usar os jogos também em outros momentos do ensino, como: na introdução do assunto, na fixação ou no fechamento. A cautela que o profissional do ensino precisa ter é com a forma da condução do jogo, para que não perca seu objetivo como transporte dos saberes que queremos ensinar. Nos encaminhamentos lúdicos, os alunos irão gostar do que aprenderam do conteúdo, outros da dinâmica do jogo e outros talvez apenas da quebra de rotina de aula. E nós professores precisamos ficar atentos para desenvolver jogos diferentes para que possa levar o conteúdo da melhor forma possível aos estudantes de nossas classes.

> Uma atividade lúdica muito importante que estimula a criatividade, o pensamento, o raciocínio, o afetivo e a autoestima. Em busca da resolução de desafios propostos por um jogo pedagógico, o estudante entra em contato com um determinado conteúdo e acaba por aprendê-lo para superar os desafios propostos (SANTOS, BIZERRIL, 2014, p. 2594 – 2605)
> .

Os conteúdos que os alunos apresentam dificuldades de assimilar, é necessário procuramos algo no campo intuitivo da cotidianidade dos aprendizes para que possamos nos direcionar para aprendizagem desejamos produzir. Nesse momento, um jogo, envolvendo o conteúdo, poderá introduzir um tom de recreação e promover o envolvimento dos alunos nas atividades, tomando os cuidados devidos para não fazer do jogo um passa tempo maléfico e vicioso.

> O jogo reduz a consequência dos erros, e dos fracassos do jogador, permitindo que ele desenvolva iniciativa, autoconfiança e autonomia. No fundo, o jogo é uma atividade séria que não tem consequências frustrantes para quem joga, no sentido de ver o erro como algo definitivo ou insuperável (SMOLE, 2008, p.10).

Nessa perspectiva, inserimos o jogo mencionado, para reforçar os conceitos já estudados e exercitados nas atividades anteriores. E por último aplicaremos o teste final para verificar a aprendizagem esperada.

2.3 – O Desenvolvimento da Sequência didática

As atividades humanas, historicamente se revelam como elementos propulsores na aquisição de saberes, experiências e habilidades.

> O objeto da atividade pedagógica é a transformação dos indivíduos no processo de apropriação dos conhecimentos e saberes; por meio dessa atividade – teórico e prática –, é que se materializa a necessidade humana de se apropriar dos bens culturais de constituição humana. (RIGON, ASBAHR e MORETTI, apud CARDOSO *et al,* 2012, p. 3)

Por estes autores, entendemos que a presença de um professor na vida de um aprendiz se torna significativa na medida do direcionamento intencional das atividades do que se quer ensinar. A atividade é o elemento que promove a interação materializadora da necessidade humana. E ainda nessa linha teórica, para Azevedo (2010, apud ALMEIDA, OLIVEIRA e FLORÊNCIA, 2014, p. 6758 - 6764), “utilizar atividades investigativas como ponto de partida para desenvolver a compreensão de conceitos é forma de levar o aluno a participar de seu processo de aprendizagem e sair de uma postura passiva”. E então, por nestas orientações entendemos o quanto devemos desenvolver atividades que movam com entusiasmos e os nossos alunos para os saberes significativos e necessários a promoção da para a qualidade de suas vidas, e da qualidade de vida das futuras gerações.

> Apesar das diferenças de natureza que separam a vida orgânica, a inteligência prática ou a inteligência reflexiva, a adaptação em todos os casos é possibilitada pela assimilação dos objetos (que também são de naturezas diferentes) pelo sujeito. E a partir daquilo que é incorporado, o sujeito se reorganiza de modo a se incorporar ao objeto (SANSHIS e MAHFOUD, 2007, p. 165-177).

À luz das orientações desses autores, entende se que as atividades que um professor precisa desenvolver para se colocar como elemento significativo de intermediação entre o sujeito que aprende e o conteúdo de ensino contido no objeto, que aqui é um conjunto de atividade organizadas para otimizar a aprendizagem em relação tempo, estas atividades precisam conter elementos que motive o aprendiz a se envolver com as atividades, e aqui no nosso entender, precisa ter algo da cultura dele, para que se interesse pelos saberes ali contidos, e então potencializar a incorporação do sujeito a esse objeto.

Articulamos nossa Sequência Didática com base em Zabala (1998), Quando diz que a uma sequência didática é um conjunto de atividades articuladas para atingir um objetivo de aprendizagem conhecido pelos alunos e pelo professor. E esta Sequência didática tem um aposte teórico que o apoia seu encaminhamento junto com o poder de iniciativa dos alunos estimulando os para a descoberta de conceitos e articulações para as resoluções dos questionamentos.

A vantagem do trabalho com as sequências didáticas se concentra no fato do aluno tirar o foco do professor e focar na atividade, e é nesse momento que o processo da intermediação entra em cena, de forma mais efetiva, mas, mesmo o aluno diante de uma atividade em que precisa usar seu poder de iniciativa para a descoberta, os estudantes podem desviar do caminho conceitual planejado pelo professor, e por isso surgem necessidade das intervenções orais.

> Alunos diferentes reagem diferentes às provocações dirigidas pelas SD, e o professor ao exercer o monitoramento do envolvimento e desempenho dos seus aprendizes vai fazer Intervenções Orais que podem ou não se repetir diante das demandas específicas de outras classes (CABRAL, 2017, p. 49).

Então, conforme Cabral (2017), mesmo os estudantes com o foco na Sequência Didática – SD, ainda poderão precisar de redirecionamento para não se desviar do assunto, pois como se trata de sujeitos em busca de caminhos para resolver questionamentos, poderão tomar caminhos que pensam estarem no caminho certo, e o professor que naquele momento está regendo a construção do conhecimento precisa intervir para reorienta-los.

3 – SOBRE AS ATIVIDADES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A decisão de procurar desenvolver um modelo de produto auxiliar o professor de matemática no ensino de Sistemas Lineares veio da relevância e diversidade das aplicações dos Sistemas Lineares, tanto na vida cotidiana dos nossos alunos quanto nos projetos avançados de engenharia, acatei as sugestões dos meus professores do mestrado de mudar de tema, pois no momento, nossos alunos teriam urgentemente mais chances de serem agraciados com um trabalho sobre Sistemas Lineares, objetivando minimizar as dificuldades que ainda impedem sua assimilação.

Em relação ao conceito de sistemas lineares, Lamin (2000) diz: que um sistema linear é um conjunto de duas ou mais equações envolvendo as mesmas variáveis.

Em relação aos problemas que os nossos alunos egressos do ensino médio, Chiari (2011), com base no trabalho de Herrero *apud* Pantoja (2008, p. 19), diz que os problemas de aprendizagem dos alunos no estudo de sistemas lineares são: dificuldades para usar as operações elementares na resolução de equações e sistemas de equações, dificuldades na conversão da linguagem escrita para a linguagem matemática, não verificam as respostas e não têm clareza do que elas representam.

Para Almouloud e Bianchini (2005) *apud* Rodrigues (2011), os problemas dos alunos na resolução de sistemas linerares estão em não fazer a diferença entre o parâmetro e a incógnita de um sistema linear, e não conseguir classificar se um sistema é possível e determinados, possível e indeterminados ou impossível.

Para (BRASIL, 2006), deve-se trabalhar as técnicas de resolução, dos Sistemas de Equações, colocar a álgebra sob o olhar da geometria, associando a resolução de sistema 2 X 2 a duas equações e duas incógnitas com posição relativa de duas retas no plano. E proporcionar aos alunos a possibilidade de determinar a existência ou não de soluções do sistema, usando operações elementares, e interpretar geometricamente a Intersecção, paralelismo e coincidência de retas na resolução de sistemas 2 X 3 ou 3 X 3.

Na aplicação de uma sequência didática, a realidade do alunado deve ser considerada, pela diversidade de culturas e costumes, pois o tempo previsto para o término, em uma classe pode divergir em outra classe. E o tempo para estabelecer os organizadores prévios, também tende a ser diferentes.

3.1 – Cronograma de Atividade/Objetivo

Ordem	Aulas	Atividades	Objetivo
	1	Teste diagnóstico inicial	Identificar se os alunos ainda não conhecem nada sobre sistemas Lineares.
1	1	Conceito de equações equivalentes.	Construir equações lineares equivalentes à outra.
2	1	Identificação de sistemas lineares equivalentes	Identificar sistemas lineares equivalentes
3	1	Sistemas equivalentes pela troca da ordem de suas equações.	Obter sistemas equivalentes a outro trocando a ordem de suas equações.
4	2	Sistema equivalente pela multiplicação dos membros de uma de suas equações por um número k diferente de zero.	Obter sistemas equivalentes pela multiplicação de uma de suas equações por um número diferente de zero.
5	2	Sistemas equivalentes pela substituição de uma de suas equações pela sua soma membro a membro com outra equação do sistema.	Obter sistemas equivalentes pela substituição de uma de suas equações pela sua soma membro a membro com outra equação do sistema.
6	2	Resolução de sistema linear 2x2, por escalonamento.	Resolver problemas modelados por sistemas lineares 2x2.
7	2	Resolução de sistema linear 3x3 por escalonamento.	Resolver problemas modelados por sistemas lineares 3x3.
8	2	Jogo: Corrida Sistemática	Contribuir com a fixação do conteúdo de forma descontraída.
9	3	Questões de aprofundamento	Fixar os conteúdo e construir habilidades de resolver problemas por meio dos sistemas lineares.
	2	Avaliação final	Comparar produção de aprendizagem em relação ao estado inicial dos alunos.
	17	-	-

Fonte: Do autor (2018)

3.2 – Aprendizagem Esperada

Esta Sequência Didática foi construída para o professor, e por meio dela esperamos ajudar a melhorar seu trabalho em sala de aula. O teste inicial e o final são literalmente idênticos e, cada questão tem o objetivo de verificar o nível que o aluno se encontra, em relação aquele questionamento. E a verificação das aprendizagens possível mente ocorrida é identificada pela análise a posteriori.

A primeira e a segunda questão deste teste exigem a identificação de uma equação linear e de equação equivalente. E esses conhecimentos correspondem ao objetivo da Atividade 1.

A terceira e a quarta questão exigem os critérios de identificação de sistemas equivalentes, 2x2 e 3x3. E esses conhecimentos são os objetivos das atividades 2, 3, 4, 5 e 6.

A quinta e a sexta questão exigem as habilidades para resolução de sistemas 2x2, cujos conhecimentos para a construção dessas habilidades são os objetivos da Atividade 7.

A sétima e oitava questão exigem as habilidades para resolver sistemas lineares 3x3. As habilidades para resolver estas duas últimas questões são os objetivos da Atividade 8.

A atividade 9 é um jogo de tabuleiro, inserido nessa Sequência Didática para descontrair a sequência de atividade com um tom recreativo, mesmo tratando do assunto, mas sem exigência de performance.

A Atividade 10 aborda os tópicos de todas as outras atividades, e os alunos podem fazer perguntas que por alguma razão particular não fizeram antes.

A **Atividade 1** tem o objetivo proporcionar ao a oportunidade de construir o conceito de equação equivalente, e com os procedimentos práticos e teóricos de cada item consiga chegar ao conceito de equação equivalente, ou mais próximo do possível, mas com suas palavras. Depois, então o conceito será discutido e formalizado com o aval científico pelo professor.

Na **atividade 2**, os alunos são orientados a explorar o significado da palavra “sistema” para chegar o mais próximo possível do conceito de sistema linear.

Na **atividade 3** os alunos foram orientados a testar as respostas sugeridas para um grupo de seis sistemas, logo depois foram informados que os sistemas que têm a mesma solução são sistemas equivalentes. Ainda na mesma atividade os alunos testam uma solução em quatro sistemas. Aqui esperamos que os alunos descubram que são sistemas lineares equivalentes.

Na **atividade 4**, os alunos são informados das respostas de quatro sistemas lineares dados, em seguida foram solicitados a trocar a ordem das equações do sistema, e verificar se a resposta é mesma. Esperamos que o aluno conclua com suas palavras que se trocarmos as equações de ordem a resposta não muda. Logo o novo sistema linear é equivalente.

Na **atividade 5**, os alunos são informados das respostas de um grupo de quatro sistemas lineares solicitados a multiplicar uma das equações do sistema por um número diferente de zero, em seguida verificar se a resposta é a mesma, verificando que sim, esperamos que os alunos concluam com suas palavras que mesmo multiplicando uma de suas equações por um número diferente de zero a resposta não munda. Logo os sistemas lineares são equivalentes.

Na **atividade 6**, são informados das respostas de quatro sistemas, e em seguida são solicitados a substituir uma de suas equações pela sua soma com outra equação do sistema, e depois verificar se a resposta é a mesma. Verificando que sim, esperamos que os alunos concluam com suas palavras que em um sistema, se trocar uma das equações pela soma com outra equação do sistema, a resposta não muda. Logo o sistema linear é equivalente ao anterior. Esperamos com esta atividade, estimular os estudantes a verbalizar cada procedimento deste e a concluir que estes procedimentos servem para se adquirir sistemas lineares equivalentes.

Na **Atividade 7**, os alunos são orientados a utilizar os procedimentos da atividade 06 para cancelar algumas variáveis pela substituição de uma equação pela soma com outra do sistema linear. Esperamos com esse processo consigam resolver um sistema linear 2x2.

Pela **atividade 8** os alunos são orientados a utilizar os procedimentos aplicados para resolver o sistema linear 2x2, para escalonar o sistema 3x3. Esperamos que com algumas intervenções leves, consigam resolver um sistema linear 3x3, em seguida serão solicitados a resolver um sistema linear3x3 sem interferência do professor. Para a atividade introduzimos um jogo de tabuleiro que aqui denominamos de Corrida Sistemática, como parte da estratégia de fixação do conteúdo, porém com um tom de recreação, antes da atividade de aprofundamento. É composta de seis exercícios e um jogo de tabuleiro que aqui denominamos de Corrida Sistemática.

Para (SÁ, 2015, p. 15), “a calculadora assim como o computador, surgem da necessidade humana de tornar mais fácil, rápido e preciso a realização de cálculo e armazenamento de informações”. Nesse jogo, sugerimos que os alunos usem a calculadora para resolver os cálculos decorrentes de algum problema que aparecerem na dinâmica da partida, proporcionando agilidade ao jogador na sua resolução, sem perder o clima da partida.

> Uma atividade lúdica muito importante que estimula a criatividade, o pensamento, o raciocínio, o afetivo e a autoestima. Em busca da resolução de desafios propostos por um jogo pedagógico, o estudante entra em contato com um determinado conteúdo e acaba por aprendê-lo para superar os desafios propostos (SANTOS, BIZERRIL, 2014, p. 2594 – 2605)
> .

Os conteúdos que os alunos apresentam dificuldades de assimilar, é necessário procuramos algo no campo intuitivo da cotidianidade dos aprendizes para que possamos nos direcionar para aprendizagem desejamos produzir. Nesse momento, um jogo, envolvendo o conteúdo, poderá introduzir um tom de recreação e promover o envolvimento dos alunos nas atividades, tomando os cuidados devidos para não fazer do jogo um passa tempo maléfico e vicioso.

> O jogo reduz a consequência dos erros, e dos fracassos do jogador, permitindo que ele desenvolva iniciativa, autoconfiança e autonomia. No fundo, o jogo é uma atividade séria que não tem consequências frustrantes para quem joga, no sentido de ver o erro como algo definitivo ou insuperável (SMOLE, 2008, p.10).

Nessa perspectiva, inserimos o jogo Corrida Sistemática (página 34), para reforçar os conceitos já estudados e exercitados nas atividades anteriores. E por último aplicaremos o teste final para verificar a aprendizagem esperada.

3.3 – Corrida Sistemática

Esse jogo tem o objetivo de ajudar na fixação do conteúdo e precisa ser aplicado num clima de descontração, pois os alunos não podem ser pressionados a participar, e sim motivados a isso. Estes discentes cursam o 2º ano do Ensino Médio, no qual estudam o conteúdo de Sistemas Lineares, que vislumbrado na perspectiva lúdica poderá oferecer um olhar diferenciado do mesmo.

O tabuleiro é o campo onde acontecerá o jogo, os peões são as peças que indicará aonde o jogador vai estar na trilha da corrida, em determinado momento da competição, os dados são os objetos que serão lançados alternadamente, e os pontos da face de cima indicarão quantas casas da trilha o jogador da vez terá que avançar, sendo que a casa em que a pontuação do dado indicar, poderá ser de: comando, de pergunta ou de informação.

As informações, em grande parte são de contexto real dos alunos inseridos no jogo; as perguntas são de cunho teórico sobre Sistemas Lineares ou problemas modelados por sistemas lineares, culminando para sua aprendizagem do mesmo. E, os comandos são as ordens que os jogadores devem obedecer no andamento durante o jogo, no geral são de pular casas para frente ou para trás.

3.3.1 – Procedimentos de Construção e Montagem

O jogo Corrida Sistemática, página 34 (a seguir), contém um tabuleiro colorido composto pela figura de uma trilha com 29 casas, do ponto de partida ao ponto de chegada, onde dois alunos (jogadores), estando motivados pela ludicidade e momentos de socialização e participação, irão assimilar o conteúdo de Sistemas Lineares estudado anteriormente, promovendo a fixação do aprendizado de forma descontraída. Este processo ainda será importante como prelúdio à inserção do conteúdo mais aprofundado deste assunto trabalhado.

Este sub-tópico aborda as possibilidades de construção e montagem das peças do jogo, especialmente em relação aos materiais que serão utilizados. Algumas técnicas são baseadas em procedimentos prontos, que são sugeridos, outras, o professor pode usar a sua criatividade.

Como procedimento, o professor poderá imprimir o tabuleiro-base indicado na página 34 e colá-lo em uma base de papelão; outra opção, seria imprimi-lo em lona sintética (naipa), que é um material rígido e ao mesmo tempo flexível e prático. Os cartões (página 35 a 39) poderão ser impressos em papel alta gramatura (cartolina, papel cartão ou papel carmen) ou de menor gramatura, que opcionalmente poderá ser colado em papelão.

Qualquer dado tradicional, numerado de I a IV, com números ou pontos poderá ser utilizado. Normalmente, são materiais fabricados em plástico e comercializados em papelarias, bazares e lojas de artigos de jogos e lazer. Em último caso, pode-se imprimir em uma folha de papel no formato A4 uma figura planificada de um cubo em qualquer dimensão possível de ser manuseável. Ao final, deve-se colar as abas indicadas e facilmente pode-se obter um dado para a finalidade requerida no jogo.

Como o jogo requer duas peças de marcação a serem utilizadas no tabuleiro (posição na trilha), o professor poderá fazer uso de tampas plásticas de garrafas PET ou pedras de diferentes formatos. Uma sugestão prática seria cortar um tubo plástico ou de borracha (comercializado em casas comerciais e de materiais de construção), com qualquer diâmetro e medida manuseável.

Quanto ao ambiente, é bom que o mesmo seja iluminado e ventilado, podendo utilizar uma mesa, carteira escolar, esteira ou mesmo no piso para estender o tabuleiro. O manuseio do dado pode ser feito diretamente na mão ou em copo plástico.

3.3.2 – Regras do Jogo

Regra-01. Para saber quem sairá jogando, os dois ou mais jogadores devem disputar a sorte pelo dado, tipo par ou ímpar.

Regra-02. O jogador da vez põe o dado no copo, balança e lança o na mesa, se der, por exemplo, o número 5, o jogador avança 5 casas, se nesta casa tiver escrito: Informação, o jogador tira o cartão de informação e lê a informação contida em voz alta para que os dois jogadores desfrutem da informação, põe o embaixo de todos os outros cartões e repassa a jogada para o outro jogador.

Regra-03. Se na casa tiver escrito: Comando, o jogador tira o cartão de comando, e executa a ordem que contiver no cartão, coloca o embaixo de todos os outros cartões e repassa a jogada ao outro jogador.

Regra-04. Se na casa tiver escrito: pergunta, o jogador tira o cartão pergunta e o lê em voz alta a pergunta para que o outro jogador o ouça, responde a pergunta tirada, coloca embaixo de todos outros cartões, e repassar a vez para o outro jogador.

Regra-05. Se o jogador da vez não souber responder a pergunta, ele volta à posição que estava, põe o embaixo de todos ou outros cartões e repassa a jogada ao outro jogador.

Regra-06 Quem cruzar primeiro a linha de chegada do tabuleiro.

Observação: as perguntas que os jogadores não souberam responder, o professor deverá responder e comentar em sala de aula, para fechar o entendimento do assunto.

Depois da aplicação da Sequência Didática, aplicamos o teste final, com o mesmo grau de dificuldade do teste inicial para verificar a aprendizagem adquirida pelos sujeitos, e consequentemente validar o produto como ferramenta de ensino de Sistemas Lineares pelo escalonamento.

Esta etapa da pesquisa, ao nosso entender, se apresenta dentro das recomendações da Engenharia Didática de Artigue (1996, *apud* CARNEIRO, 2005), como a etapa mais importante da pesquisa, pois é nela que todo trabalho se concretiza e se encaminha para sua validação. A etapa seguinte consiste num relato cientificamente detalhado, para a verificação das aprendizagens ocorridas no processo.

4 – SEQUÊNCIA DIDÁTICA

TESTE INICIAL

1) Quais dos itens abaixo é uma equação linear?

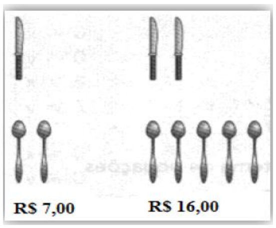
a) $2x^2 + x = 0$ b) $2x + 5y - z = 0$ c) $y^2 = x - 2$ d) $\frac{1}{x} - x = 0$ e) $y = 2^x$

2) Dada a equação linear **β**: $3x - 2y = 4$, marque uma ou mais equações abaixo que forem equivalentes a **β**.

a) $2x = y - 2$ b) $2x^2 + y - 3$ c) $6x - 4y = 8$ d) $3x - 2y = 1$ e) $3x + y = 4$

3) Escreva um sistema equivalente ao sistema: $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y - z = 2} \\ \boldsymbol{2x + y - z = 4} \\ \boldsymbol{x + y - z = 7} \end{cases}$

4) (Chiari, 2011) Examinando o anúncio, descubra o preço de cada colher e de cada faca.



5) A respeito do sistema $\begin{cases} \mathbf{-x + 2y = 6} \\ \mathbf{3x - 6y = 5} \end{cases}$, pode se afirmar que é:

a) possível e determinado **b)** possível e indeterminado **c)** impossível.

6) Encontre os valores das x, y e z do sistema, se for possível: $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y - z = 2} \\ \boldsymbol{2x + y - z = 1} \\ \boldsymbol{x + y - z = 0} \end{cases}$

Atividade 1: Equações equivalentes

Objetivo: Equação lineares equivalentes.

Material: Lápis, borracha, caneta, papel A4 e roteiro de atividades.

Procedimento: Preencher a coluna B seguindo as instruções da A e responder as questões seguintes.

A	B	C
	Equação: $2x + y = 5$	Resposta
O par ordenado (1, 3) é solução da equação da coluna B?		Sim
		Não
Somando o número 3 aos dois membros da equação B por um número diferente de zero, o par ordenado (1, 2) ainda continuará sendo solução da equação?		Sim
		Não
Somando o número k aos dois membros da equação da coluna B por um número diferente de zero, o par ordenado (1, 2) ainda continuará sendo solução da equação?		Sim
		Não
Multiplicando os dois membros da equação da coluna B por um número k qualquer, o par ordenado (1, 2) ainda continuará sendo solução da equação?		Sim
		Não

a) A pesar das alterações ocorridas na equação a solução continuou a mesma? ____

b) O que você conclui sobre isso? ________________________________
____

c) Formalização do conceito:

Atividade 2: Conceito de sistema de equações lineares

Objetivo: construir o conceito de sistema de equações lineares.

Material: lápis, borracha, caneta, papel A4 e roteiro de atividades.

Procedimento: marcar a alternativa que mais se aproxima do significado de sistema, em seguida responder os itens abaixo.

a) Quando você ouve a palavra: **sistema**, Em que você pensa como um possível significado?
( ) Coleção ( ) Conjunto ( ) Família ( ) Boiada Kit ( )
( ) outros...

b) Como chamamos o conjunto de órgãos que juntos fazem a digestão dos alimentos que comemos?____

c) Como chamamos o conjunto de órgãos que juntos permitem a circulação do sangue no corpo? ____

d) Como chamamos o conjunto de astros o qual pertence a terra?
____

e) Que nome você daria a um conjunto de equações lineares envolvendo as mesmas variáveis? ____

f) Formalização do conceito____
____

Atividade 3: Sistemas Lineares equivalentes

Objetivo: Identificar Sistemas Lineares equivalentes.

Material: Lápis, borracha, caneta, papel A4 e roteiro de atividades.

Procedimento: Verificar se os pares ordenados da tabela abaixo são soluções dos sistemas, marcando um X no sim, se for solução, e não se não for solução.

S	Sistemas	O par ordenado (1, 2) é solução do sistema?		O par ordenado (0, 2) é solução do sistema?		A terna ordenada (0, 3, 2) é solução do sistema?	
		Sim	Não	Sim	Não	Sim	Não
S1	$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$						
S2	$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 3x + 3y - 2z = 6 \\ x + y - z = 7 \end{cases}$						
S3	$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$						
S4	$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ x + y - z = 7 \end{cases}$						
S5	$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$						
S6	$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$						

a) Quais dos sistemas do quadro acima têm as mesmas soluções?

____

Sistemas lineares que tem a mesma solução são denominados de sistemas equivalentes

b) Quais dos sistemas do quadro são equivalentes? ________________________

c) Verifique quais dos sistemas abaixo são equivalentes usando a solução: (3, 2)

S1: $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ **S2:** $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ **S3:** $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x + 5y = 21 \end{cases}$ **S4:** $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

Atividade 4: Equivalência pela permutação de equações

Objetivo: Levar o aluno a construir a construir as habilidades para obter Sistemas Lineares equivalentes pela mudança de ordem de suas equações.

Material: Lápis, borracha, caneta, papel A4 e roteiro de atividades.

Procedimento: Seguir as orientações da tabela abaixo em relação aos sistemas e suas soluções.

Sistema.	A solução sugerida logo abaixo de cada um dos sistemas, é solução do sistema?		Agora troque a ordem de duas equações quaisquer de cada sistema e anote os sistemas resultantes nessa coluna.	A solução sugerida é solução do sistema resultante, depois da mudança de ordem de suas equações?	
	Sim	Não		Sim	Não
$\boldsymbol{S1}: \begin{cases} \boldsymbol{2x + y = 6} \\ \boldsymbol{x - y = 3} \end{cases}$ Solução (1, 2)					
$\boldsymbol{S2}: \begin{cases} \boldsymbol{x - y + z = 0} \\ \boldsymbol{2x + y - 3z = -12} \\ \boldsymbol{-x + y - z = -4} \end{cases}$ Solução (1, 0, 2)					
$\boldsymbol{S3}: \begin{cases} \boldsymbol{2x + y = -6} \\ \boldsymbol{x - y = 3} \end{cases}$ Solução (0, 1)					

a) Os sistemas resultantes também continuaram com as mesmas soluções? ________

b) O que você conclui sobre isso? ____

Formalização: ____

Atividade 5: Equivalência pela multiplicando uma de suas equações por um número real diferente de zero.

Objetivo: Construir as habilidades para obter Sistemas Lineares equivalentes pela multiplicação de uma de suas equações por um número k diferente de zero.

Material: Lápis, borracha, caneta, papel A4 e roteiro de atividades.

Procedimento: Seguir as orientações da tabela abaixo em relação aos sistemas e suas soluções.

Sistema.	A solução sugerida logo abaixo de cada um dos sistemas, é solução do sistema?		Multiplique uma das equações de cada sistema por um número k ≠ 0, e anote os sistemas resultantes nessa coluna.	A solução sugerida é solução do sistema resultante, depois da mudança de ordem de suas equações?	
	Sim	Não		Sim	Não
$\boldsymbol{S1}: \begin{cases} \mathbf{2x + y = 6} \\ \mathbf{x - y = 3} \end{cases}$ Solução (1, 2)					
$\boldsymbol{S2}: \begin{cases} \mathbf{x - y + z = 0} \\ \mathbf{2x + y - 3z = -12} \\ \mathbf{-x + y - z = -4} \end{cases}$ Solução (1, 0, 2)					
$\boldsymbol{S3}: \begin{cases} \mathbf{2x + y = -6} \\ \mathbf{x - y = 3} \end{cases}$ Solução (0, 1)					

a) As soluções continuaram corretas para os sistemas resultantes? _______

b) O que você conclui sobre isso? ____

Formalização: ____

Atividade 6: Equivalência pela substituição de uma de suas equações pela soma com outra equação do sistema.

Objetivo: Construir as habilidades para obter Sistemas Lineares equivalentes pela substituição de uma de suas equações pela sua soma membro a membro com outra equação do sistema.

Material: Lápis, borracha, caneta, papel A4 e roteiro de atividades.

Procedimento: Seguir as orientações da tabela abaixo em relação aos sistemas e suas soluções.

Sistema.	A solução sugerida abaixo de cada um dos sistemas, é solução do sistema?		Substitua uma das equações dos sistema pela sua soma membro a membro com outra equação do sistema, e anote os sistemas resultantes nessa coluna.	A solução sugerida é solução do sistema resultante, depois da mudança de ordem de suas equações?	
	Sim	Não		Sim	Não
$\boldsymbol{S1}: \begin{cases} \boldsymbol{2x + y = 6} \\ \boldsymbol{x - y = 3} \end{cases}$ Solução (1, 2)					
$\boldsymbol{S2}: \begin{cases} \boldsymbol{x - y + z = 0} \\ \boldsymbol{2x + y - 3z = -12} \\ \boldsymbol{-x + y - z = -4} \end{cases}$ Solução (1, 0, 2)					
$\boldsymbol{S3}: \begin{cases} \boldsymbol{2x + y = -6} \\ \boldsymbol{x - y = 3} \end{cases}$ Solução (0, 1)					

a) As soluções continuaram corretas para os sistemas resultantes? ________

b) O que você conclui sobre isso? ____

Formalização: ____

Atividade 7: Sistemas lineares 2x2 pelo método do escalonamento.

Objetivo: Levar o aluno a resolver sistemas lineares por escalonamento.

Material: Lápis, borracha, caneta, papel A4 e roteiro de atividades.

Procedimento para resolução: Observar o sistema: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$, e nas linhas da tabela abaixo, anotar a equação de A2 em A3. Multiplique a equação de A2 por um número de forma que somando com a equação de B2, anule a variável x de B2 e anotar o resultado em B3.

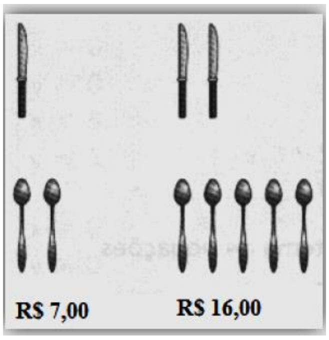
Ordem	2	3
A	$x + 2y = 5$	
B	$2x + y = 7$	

a) Calcule o valor de y da equação da equação B3, y = _________

b) Agora use o valor de y para Calcular o valor de x da equação de A3. x = ____

c) Você terminou de resolver um sistema linear de duas equações e duas incógnitas. Já tinha resolvido sistemas lineares por este método? __________

(CHIARI, 2011) Examinando o anúncio abaixo, descubra o preço de cada colher e de cada faca.



Atividade 8: Sistemas lineares 3x3 pelo método do escalonamento

Objetivo: Levar o aluno a resolver problemas modelados por sistemas lineares.

Material: Lápis, borracha, caneta, papel A4 e roteiro de atividades.

Informação: escalonar, segundo Ferreira (1988), é colocar em forma de escada.

Vamos resolver este sistema, também pelo método do escalonamento, em apenas cinco passos. $\begin{cases} x+2y-z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ x+y+z=4 \end{cases}$.

Passo 1: multiplique a primeira equação por -2, e some com a segunda, eliminando a variável x da segunda. Depois multiplique a primeira equação por -1 e some com a terceira, eliminando também a variável x da terceira.

Passo 2: multiplique a segunda equação por -3 e some com a terceira, eliminando a variável y da terceira. **Pronto!** Sistema escalonado.

Sistema	Passo 1	Passo 2
$\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x+5y-3x=6 \\ x+5y-2z=7 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 0+y-z=0 \\ 0+3y-z=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 0+y-z=0 \\ 0-0+2z=4 \end{cases}$

Passo 3: calcular o valor de z, e substituir nas outras equações para encontras o valor das outras variáveis. Agora calcule o valor de z: ___________

a) Use o valor de z para achar o valor de y da segunda, y = ______________

b) Com os valores de z e de y calcule o valor de x da primeira equação, x =______

c) Agora resolva o sistema abaixo, usando os mesmos passos:

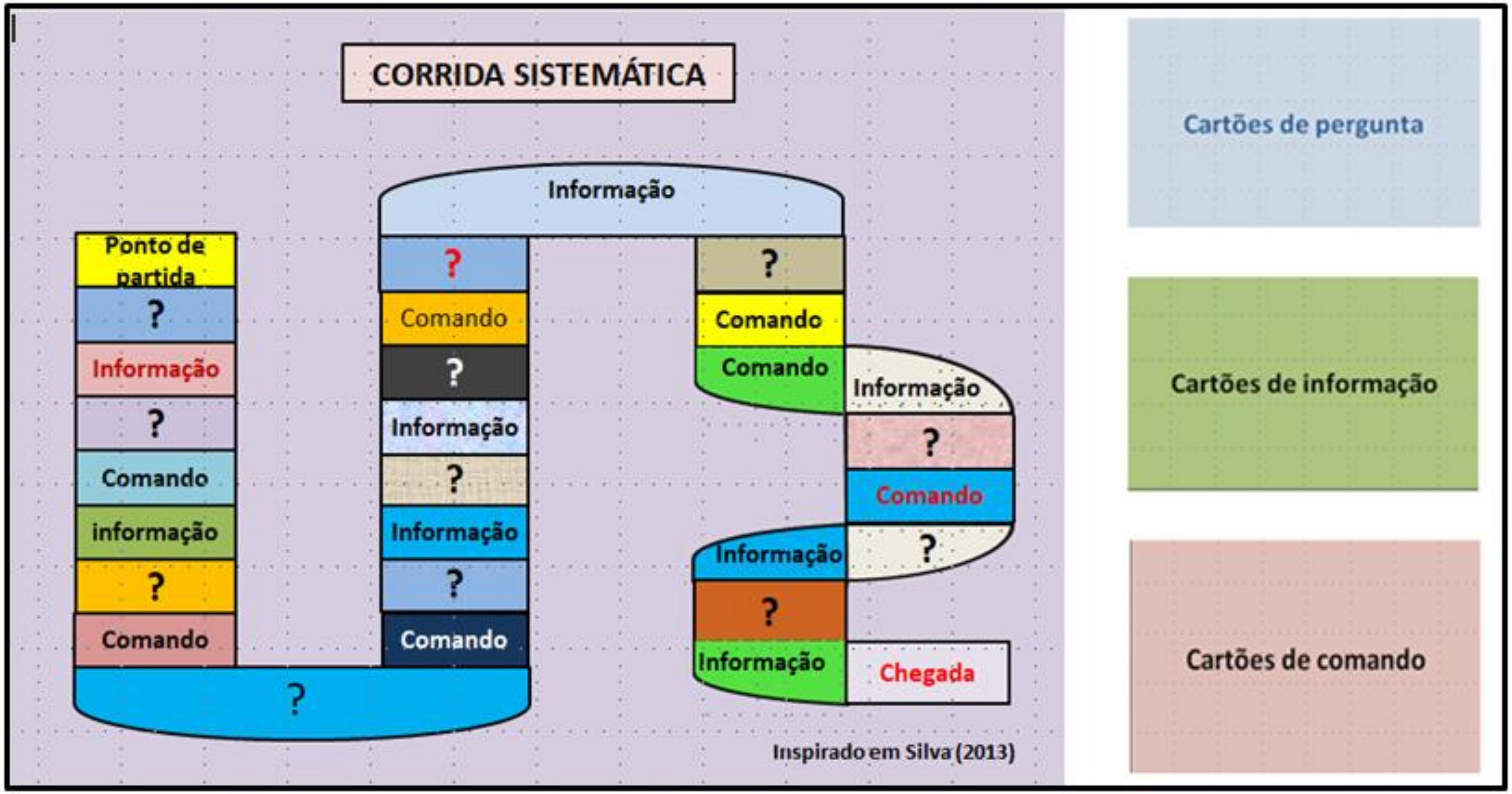
$$\begin{cases} x+2y+z=9 \\ 2x+y-z=3 \\ x+y+z=6 \end{cases}$$

Sistema	Passo 1	Passo 2
$\begin{cases} x+2y+z=9 \\ 2x+y-z=3 \\ x+y+z=6 \end{cases}$		

Resposta: x=___________, y= _______________, z=___________

Atividade 9: CORRIDA SISTEMÁTICA

Figura 1: Tabuleiro do jogo



Cartões de 1 a 40

Pupunha: Fruto de polpa fibrosa de cor vermelho-amarelados ou verde-amarelados. O pupunheiro é uma palmeira de até 20m de altura, nativa da América Central à Amazônia, saboroso e nutritivo, consumido após cozimento, e que: assado, fornece farinha, e da amêndoa, se extrai óleo.
A **Pupunha** é uma excelente fonte de fibra alimentar, proteína e alguns minerais, como: Ferro, Zinco, Cobre, Manganês, Magnésio, Cálcio, fósforo e Potássio.

Dados os sistemas: A = $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 4 \\ x - y + 3z = -1 \end{cases}$

e B = $\begin{cases} x - y + 3z = -1 \\ 2x - y + z = 4 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$

O sistema A e equivalente ao B? Porque?

As proteínas são essenciais para a estrutura do nosso corpo, pois são responsáveis pela reparação e construção de todos os músculos, nervos, tendões, ligamentos, órgãos internos, pele, cabelo unhas e sangue.

Os sistema lineares são classificados quanto às soluções em: sistemas possíveis e determinados, sistemas possíveis, indeterminados e sistemas impossíveis.

Açaí: alimento muito consumido pelas populações regionais do Norte do País. É um alimento rico em proteínas; fibras; lipídios; minerais, como manganês, cobre, boro e cromo, e em vitamina E, um antioxidante natural que atua na eliminação dos radicais livres **Fonte: Cohen et al. (2009).**

Alguns Estudos apontam que o ferro presente no açai se encontra na forma insolúvel para o organismo humano, por isso deve ser consumido junto com outro alimento rico em vitamina C, para facilitar a absorção desse nutriente.

Sobre os determinantes

O estudante, no momento poderá não saber como se calcula um determinante de uma matriz, mas por enquanto deve guardar isto: um sistema será sempre possível e determinado, se o determinante formado pelos coeficientes de suas variáveis for diferente de zero.

Adquira um sistema equivalente ao sistema: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$

Quando é que um sistema é possível e determinado?

O que é um sistema linear?

Quando é que um sistema é impossível?

Quando é que um sistema é possível e indeterminado?

Quais os procedimentos que podemos executar em um sistema para se obter sistemas equivalentes ale?

Ao permutar a posição das equações de um sistema, sua solução muda.

Verdadeiro ou falso?

Quando se substitui uma das equações de um sistema pela soma com outra equação do sistema, sua solução troca de sinal.

Falso ou verdadeiro?

Ao multiplicar pelo menos uma das equações de um sistema, por um número diferente de zero sua solução será também multiplicada por esse número.

Verdadeiro ou falso?

Dados os sistemas: A = $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$

e B = $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$

O sistema A e equivalente ao B?

Porque?

Dados os sistemas: A = $\begin{cases} -2x + y = -1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$

e B = $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$

O sistema A e equivalente ao B?

Porque?

Dados os sistemas: A = $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 4 \\ x - y + 3z = -1 \end{cases}$

e B = $\begin{cases} x - y + 3z = -1 \\ 2x - y + z = 4 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$

O sistema A e equivalente ao B?

Porque?

(UEL-PR) Aline, Marcelo e Nilza saíram da aula e encostaram na lanchonete. Lá, Aline comeu uma coxinha e tomou um suco e pagou R$3,00. Marcelo comeu uma coxinha e um quibe, pagando R$3,50. Nilza comeu um quibe e tomou um suco pagando R$2,80. Qual o preço de cada coxinha?

Fonte: Edilson (2003)

Três pessoas encostaram na banca de um vendedor ambulante. Um deles comprou um saquinho de castanha, um pacotinho de pupunha cozida e duas paçoquinha e pagou R$7,00. O outro comprou um saquinho de castanha, dois pacotinhos de pupunha e uma paçoquinha pagando R$8,00. O terceiro comprou um saquinho de castanha, dois pacotinhos de pupunha e três paçoquinhas pagando R$9,00. Qual o preço de uma paçoquinha?

(Ita-SP) Em uma mesa de lanchonete, o consumo de três sanduiches, sete xícaras de café e um pedaço de torta totalizou R$31,50. Em outra mesa o consumo de quatro sanduiches, dez xícaras de café e um pedaço de torta totalizou R$42,00. Então qual o valor de sanduiche, uma xícara de café e um pedaço de torta?

Fonte: Dante (2010)

Dada a equação A: 2x -3y + z = 1,
Quais da equações abaixo é equivalente à equação A?

a) x - y + z = 1
b) 2x – 2y – z = 3
c) 4x – 6y + 2z = 2
d) 4x – 5y + 2z = 6

João contou os coelhos, os patos e os bois que havia numa fazenda, obtendo um total de 340 animais. A seguir, verificou que o numero de coelhos era o triplo do de patos, e que o número de bois excedia em 20 unidades o total de coelhos e patos. Qual o número de patos que havia na fazenda?

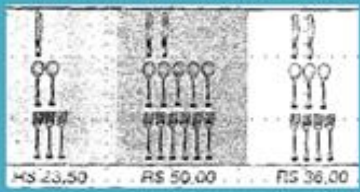
Fonte: Dante (2010)

Na volta às aulas as mães saem às livrarias procurando os preços mais acessíveis. Para comprar os materiais escolares dos filhos.

Em um dia de promoção na livraria ABC, Maria a Paula foram comprar livros para seus filhos. Maria comprou 2 livros de 6º ano e um do 8º ano por R$110,00. Paula comprou dois livros do 6º ano, dois do 8ºano, um do 9º ano e pagou R$150,00.

Quanto custa nessa livraria, um livro de 9ºano?

Examinando o anuncio abaixo, calcule o preço de cada faca, de cada colher e de cada garfo.



Fonte: Lamin (2000)

	Pão e manteiga (p. de 50g)	Café c. leite (p. de 200g)
Carboidrato	32g	4g
Lipídio	6g	4g

(Rangel, 2011, ADAPTADO) adaptado), Se uma pessoa adulta precisa de 116g de carboidrato e 28g de lipídio no café da manhã. De acordo com os dados da tabela acima, Qual a quantidade de porções de café com leite e pão uma pessoa deve comer para se alimentar destes nutrientes?

	Açaí	Farinha de mandioca torrada
Fósforo	47mg	39mg
Potássio	124mg	328mg

Se uma pessoa adulta precisa de 214mg de fósforo e 1140mg de potássio para um almoço desses dois nutrientes, e em um determinado dia só tenha esses dois alimentos para almoçar, quantas porções de 100 gramas de cada alimento da tabela, ela deve ingerir de forma balanceada, para seu organismo ficar abastecido com esses nutrientes?

Em uma pista circular, três estudantes, Paulo Sergio e Carlos resolveram apostar quem daria a volta mais rápida na pista. Então sabe se que a soma dos tempos dos três estudantes deu 24minutos, a soma do tempo de Paulo com o temo do Sergio deu 11minutos e a soma dos tempos de Carlos e Sergio deu 13minutos. Quem dos três foi o mais lento?

	Açaí (p. de 100g)	Pescada (p. de 100g)
Carboidrato	6,2g	2,6g
Lipídio	28,6g	3,6g

Se uma pessoa adulta precisa de 116g de carboidrato e 28g de lipídio no almoço, de acordo com os dados da tabela acima, qual a quantidade de porções de açaí de pescada frita uma pessoa deve comer para se alimentar destes nutrientes?

Volte três posições.

Avance quatro posições.

Os Sistemas Lineares são aplicados nem só na matemática, mas também em outras áreas do conhecimento. Cite pelo menos cinco das delas:

Volte uma posição.

O método gaussiano para resolver sistemas se tornou público em 1801, para calcular o tempo de rota do planeta Ceres. Esse procedimento hoje é conhecido como: método do escalonamento.

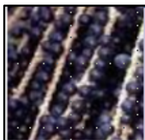
Fonte: Anton e Rorres (2012)

Volte duas posições.

Dado um sistema: S, o seu escalonado S' é equivalente a S

Adquira uma equação equivalente à euqaçã0: $2x - y + z = 3$

(IMPA 1998), Um par de tênis, duas bermudas e três camisetas custam juntos R$ 100,00. Dois pares de tênis, cinco bermudas e oito camisetas custam juntos R$235,00. Quanto custam juntos um par de tênis, uma bermuda e uma camiseta?



Estudos recentes vêm recomendando adicionar uma fruta que seja rica e vitamina C, como banana, limão, mamão, etc, para ajudar o organismo a extrair o ferro do açaí, pois se encontra insolúvel ao organismo humano.

Atividade 10

Questões para aprofundamento.

Objetivo: Levar o aluno a consolidar os conceitos e as habilidades para resolver problemas modelados por sistemas lineares e sanar ou minimizar as dificuldades dos alunos para interpretar as soluções dos sistemas, apontados pelos autores consultados.

Material: Lápis, borracha, caneta, papel A4 e roteiro de atividades.

a) Preencha a tabela abaixo marcando Sim, para os sistemas lineares e não para os sistemas não lineares.

A	Sim para sistemas lineares, e Não para não lineares.	
	Sim	Não
$\begin{cases} x+y=5 \\ x-3y=4 \end{cases}$		
$\begin{cases} x+y=5 \\ 3/x-3y=4 \end{cases}$		
$\begin{cases} x+y=5 \\ x-3y=4 \end{cases}$		
$\begin{cases} x^2+y=5 \\ x^3-3y=4 \end{cases}$		

a) Anote nas linhas da coluna da direita os sistemas equivalentes aos da coluna da esquerda, cada um em sua linha.

A	**Usando os critérios de obtenção de sistemas equivalentes, anote nesta coluna os sistemas equivalentes aos da coluna A, nas suas linhas.**
$\begin{cases} 2x+y=6 \\ x-y=3 \end{cases}$	
$\begin{cases} x-y+2z=-7 \\ 2x+y-2z=9 \\ -2x+3y+z=4 \end{cases}$	
$\begin{cases} 2\mathrm{x}+\mathrm{y}=8 \\ \mathrm{x}-\mathrm{y}=1 \end{cases}$	
$\begin{cases} x-2y+z=2 \\ 2x-3y+2z=5 \\ -x+3y+z=4 \end{cases}$	
$\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=6 \end{cases}$	

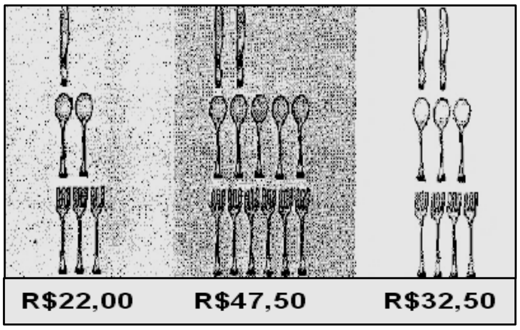
b) Preencha as colunas de x, y e z com as respectivas soluções dos sistemas da primeira coluna, .

Sistemas	Espaços para a resolução quando couber.	Solução se existir		
		x	Y	Z
$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - y = 3 \end{cases}$				
$\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ x + y = 3 \end{cases}$				
$\begin{cases} -2x + y = 6 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$				
$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = -12 \\ x + y - z = -4 \end{cases}$				
$\begin{cases} 2x + 4y = 15 \\ x - y = 6 \end{cases}$				

c) Em uma determinada loja, o proprietário colocou uma placa valendo para redes (R) e Lençóis (L) conforme o modelo abaixo: Calcule o preço de cada rede e de cada lençol.

$$\boxed{\begin{array}{c} 2Redes + um\ Lençol\ por\ R\$\ 60{,}00 \\ 3Redes + 2Lençois\ por\ R\$95{,}00 \end{array}}$$

d) (LAMIN, 2000. ADAPTADO) Examinando o anúncio abaixo, calcule o preço de cada faca, cada colher e cdada garfo.



TESTE FINAL

1) Quais dos itens abaixo é uma equação linear?

a) $3x^2 + x = 0$ b) $2x + 5y - z = 0$ c) $x^2 = 2y - 2$ d) $\frac{1}{x} - 2 = 0$ e) $y = 2^x$

2) Dada a equação linear $\boldsymbol{\beta}$: $3x - 2y = 4$, marque uma ou mais equações abaixo que forem equivalentes a $\boldsymbol{\beta}$.

a) $2x = y - 2$ b) $2x^2 + y - 3$ c) $6x - 4y = 8$ d) $3x - 2y = 1$ e) $3x + y = 4$

3) Escreva um sistema equivalente ao sistema: $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y - z = 2} \\ \boldsymbol{2x + y - z = 4} \\ \boldsymbol{x + y - z = 7} \end{cases}$

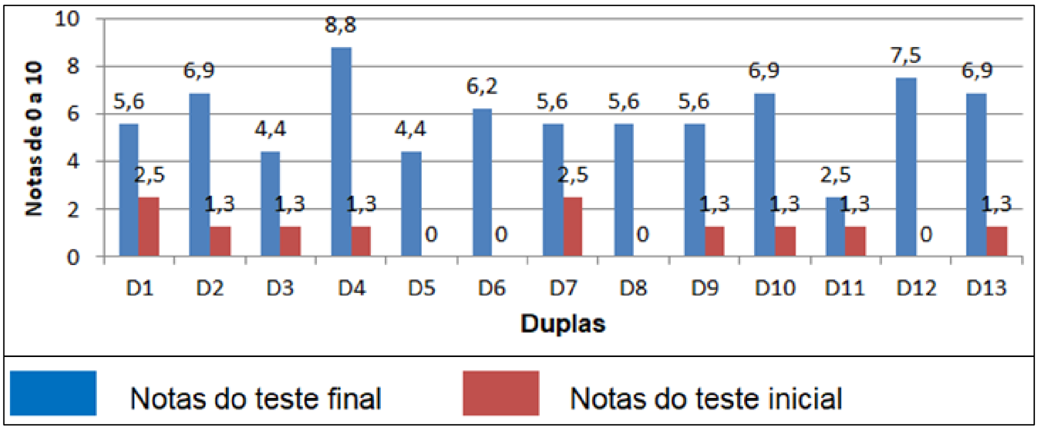
4) A respeito do sistema $\begin{cases} \mathbf{-x + 2y = 6} \\ \mathbf{3x - 6y = 5} \end{cases}$, pode se afirmar que é:

a) possível e determinado **b)** possível e indeterminado **c)** impossível.

5) Encontre os valores das x, y e z do sistema, se for possível: $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y - z = 2} \\ \boldsymbol{2x + y - z = 1} \\ \boldsymbol{x + y - z = 0} \end{cases}$

Pelo gráfico a seguir procuramos informar a aprendizagem adquirida pelas duplas, aqui, demonstrada pelas notas do teste final de cada uma delas, em relação ao teste inicial. As colunas azuis são das notas do teste final, e as colunas marrons são das notas do teste inicial.

Teste inicial e final



Fonte: Pesquisa de campo do autor (2017)

O objetivo de apresentar este gráfico é para o professor ter melhor visualização da aprendizagem adquirida pelos sujeitos da pesquisa, durante o experimento, pois diante dos desafios que os professores de matemática enfrentam para melhorar o ensino de sua disciplina. Em geral, as notas de matemática ao chegar a este nível, já estão acrescidas da pontuação referente aos aspectos qualitativos dos estudantes. Entretanto, diante destas situações, este produto se apresenta com evidências de possibilidades de melhorar o trabalho do professor, em sala de aula, no ensino de Sistemas Lineares por escalonamento.

5.1 – Sugestão para Avaliação dos Resultados

Pela proposta que apresentamos ao leitor, por via deste trabalho, deixamos observado que a avaliação da aprendizagem compõe se de um trabalho minucioso e reflexivo, mesmo diante dos apostes teóricos a nossa disposição, e quanto mais diverso o aposte teórico mais dúvidas poderão aparecer se não tivermos segurança do que queremos fazer com um conteúdo numa sala de aula, e de maneira detalhada. Mas diante da diversidade de modos de agir dos aprendizes, precisamos saber que irão aprender em nível diferente e de formas diferentes, ou não aprender, dependendo da forma que encaminhamos didaticamente o conteúdo. E por isso a avaliação se faz trabalhosa e reflexiva, para reduzir ao máximo as injustiças que poderão vir camufladas em nossos argumentos de autoridade.

O ponto forte que consideramos em nossa sugestão é a pontuação pelo que foi feito corretamente em relação às respostas esperadas. E no momento da leitura e interpretação dos registros que os alunos fazem buscando respostas para os questionamentos, cada passo na direção da resposta se torna importante, tanto para a avaliação em si como para a motivação dos alunos. Para Duval (2012), esses registros podem ser:

> **A formação de uma representação identificável** como uma representação de um registro dado: enunciação de uma frase (compreensível numa língua natural dada), composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, expressão de uma fórmula, etc (DUVAL, 2012, p. 271).

Então, podemos compreender que as conversões marcam os passos do procedimento executado pelo aluno na direção da resposta do questionamento feito pelo professor. E ainda segundo Duval (2012, 266 - 297), "**A conversão** de uma representação é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a **totalidade** ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial". Nessa perspectiva, quanto maior o número de conversões, maior sua compreensão do objeto ensinado.

E o trabalho executado em cada registro, por exemplo: um enunciado que o estudante interpretou, e o transformou em um sistema linear, ele fez a conversão da linguagem verbal para a linguagem algébrica. E os procedimentos que devem ser feitos para resolver o sistema, Duval (2012) os chamou de tratamento. E ainda de acordo com o mesmo autor (266 - 297), "O **tratamento** de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro".

Então, com o tratamento interno ocorrido nas conversões, é possível visualizar teoricamente o caminho percorrido pelo aluno na busca da resposta, e pontuar seus avanços de aprendizagem do conteúdo. E assim reiteramos que este modelo de análise nos permite enxergar e valorizar não só a finalização correta, mas também a aprendizagem ocorrida no processo.

6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este produto de ensino é a Sequência Didática, definida por Zabala (1998), como um conjunto de atividades articuladas para se chegar a um objetivo de aprendizagem, conhecida pelo professor e pelos alunos. Segundo Silva (2018), Esta Sequência Didática é direcionada para o uso do professor em sala, no ensino de Sistemas Lineares, para alunos do 2º ano do Ensino Médio. E entre os resultados alcançados por Silva (2018, p.146), temos os seguintes,:

A) A Sequência Didática produziu resultados significativos na aprendizagem dos sujeitos da pesquisa, conforme os mecanismos de apresentação como os gráficos de coluna e os diagramas qualificativos de respostas;

B) Proporcionou aos sujeitos da pesquisa, a assimilação dos conceitos de sistemas equivalentes, necessárias para a construção das habilidades para resolução de sistemas lineares, proporcionou a assimilação do conceito de Sistemas Lineares, o suficiente para realizar a conversão do enunciado que se encontrava a linguagem comum, para a linguagem algébrica;

C) Promoveu a compreensão do conceito de sistemas equivalentes, possibilitou o estudo dos processos que favoreceram a aprendizagem da aplicação das operações básicas para obter sistemas equivalentes, proporcionou o desenvolvimento de uma Sequência Didática sobre Sistema de Equações Lineares, usando a engenharia didática de Michele Artigue;

D) O resultado geral foi estatisticamente significativo, diante do teste de hipótese “t” de Student com os dados pareados;

Este produto não irá restringir as possibilidades de desenvolvimento das ações do professor, que poderá trabalhar esta sequência de modo integrado a outras atividades, avaliativas ou não. Ao mesmo tempo, tanto a dissertação à qual este produto educacional está vinculado, como outras obras que abordem o assunto de Sistemas Lineares poderão ser trabalhados de modo conexo, possibilitando melhor aproveitamento do conteúdo.

7 – REFERÊNCIAS

ALMEIDA, S. L. S. S; OLIVEIRA, K. S e FLORÊNCIO M. F. Ensino por Investigação: uma proposta de leitura e escrita no ensino de biologia. In: **V Enebio e II Enebio.** Regional I. Associação Brasileira de Ensino de Biologia**.** Revista da SBEnBio - N. 7. Outubro de 2014.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM):** Ciências da Natureza, Matemática e Suas Tecnologias**.** Brasília: MEC, 2006.

CABRAL, N. F. **Sequências Didáticas:** Estrutura e Elaboração. Belém, PA: SBEM, 2017.

CARDOSO; N. P. et al. Atividade Orientadora de Ensino: uma experiência utilizando trocas nos anos iniciais. In: **III EIMAT – Escola de Inverno de Educação Matemática** – 1º Encontro do PIBID – Matemática. De 01 a 03 de agosto, 2012.
CARNEIRO, V. C. G. **Engenharia didática:** um referencial para ação investigativa para formação de professores de matemática. Zetetiké, Campinas: UNICAMP, v. 13, n. 23, 2005, p. 85-118.

CHEVALLARD, E. **La Transposición Didactica.** 3. Ed. Buenos Aires: Aique, 2005.

CHIARI, A. S. **A Utilização do Escalonamento na Resolução de Sistemas Lineares por Alunos do Ensino Médio.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campos Grande, 2011. Disponível em: <https://sistemas.ufms.br/sigpos/portal/trabalhos/download/.../cursoId:91>. Acesso em: 10 dez. 2016.

DUVAL, R. Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo do Pensamento. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. In: **Revemat**: R. Eletr. de Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266-297, 2012. Disponível em:< https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465>. Acesso em: 28 jan. 2018.

FREITAS, N. A. **Sistemas de Equações Lineares:** Uma Proposta de Atividade com Diferentes Registros de Representação Semiótica. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), 2013. Disponível em: < https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10983>. Acesso em: 07 dez. 2016.

GIL, R. S. A. **Jogos matemáticos Regionalizados**. Belém, PA: SBEM, 2017.

KUMON, T. **Estudos Gostosos de Matemática:** O segredo do Método Kumon. Tradução Silvia Shiota. 9ª ed. São Pulo: Instituto Kumon Educação, 2001.

LAMIN, M. R. N. **Resolução de Problemas Modelados com Sistemas Lineares.** Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática: Habilitação Licenciatura. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis: UFSC. 2000. Disponível em:

<http://www.mtm.ufsc.br/~daniel/7105/Maria_Regina_Nunes_Lamin.PDF>. Acesso em: 29 nov. 2016.

PEDRO NETO, J; SILVA, J. N. **Jogos Matemáticos, Jogos Abstratos.** Espanha: Gradiva, 2004.

QUARTIERI, M. T & REHFELDT, M. J. H. Jogos Matemáticos para o Ensino Médio. In: **VIII Encontro Nacional de Educação Matemática,** Educação Matemática: um compromisso social. Recife, 15 a 18 jul. Universidade Federal de Pernambuco, 2004. Disponível em: <www.sbem.com.br/files/viii/pdf/03/MC41839641053.pdf>. Acessado em: 11/04/2018.

RODRIGUES, E. P. **Sistema de Equação Linear:** Um Estudo de Sua Abordagem nos Cadernos do Professor de Matemática de 2008 e 2009 da Rede Pública de Ensino do Estado de São Paulo. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). São Paulo, 2011.

SANTOS; F. C. A. BIZERRIL; M. X. A. Proposição de uma Estratégia para o Desenvolvimento do Tema Transversal Meio Ambiente no Contexto do Ensino Médio. In: **V Enebio e II Enebio.** Regional I. Associação Brasileira de Ensino de Biologia**.** Revista da SBEnBio - N. 7. Outubro de 2014.

SÁ, P. F; JUCÁ, R. S. O Ensino dos Números Decimais por Atividades. In: **Matemática por atividades:** experiências didáticas bem-sucedidas. Org: SÁ, P. F; JUCÁ, R. S. Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

SÁ, Pedro Franco de. **Atividades para o Ensino de Matemática no Ensino Fundamental.** Belém: EDUEPA, 2009.

SALGADO, R. C. S & SÁ, P. F. A Calculadora e o Ensino de Matemática. In: SÁ, P. F & SALGADO, R. C. S. **Calculadora:** Possibilidades de Uso no Ensino da Matemática. Belém: EDUEPA, 2015.

SANSHIS, I. P;MANFOUD, M. Interação e Construção: o sujeito e o conhecimento no construtivismo de Piaget. In: **Ciência e Cognição.** V. 12, 2007. Disponível em:< http://www.cienciasecognicao.org> Acessado em: 08 de out. 2017.

SILVA, J. R. **Sistema de Equações Lineares:** Possibilidades de Ensino por Meio de Uma Sequência Didática. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2018

SILVA, P. A. D; DEL PINO, J. C. O Mestrado Profissional na Área do ensino. In: **HOLOS**, ano 32, vol. 8. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2016. SMOLE, K. S et al. **Caderno do Mathema:** Jogos de Matemática de 1º a 3º Ano. Porto Alegre: Artmed, 2008.

ZABALA, A. **A Prática Educativa:** Como Ensinar. tradução Ernani F. da F. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Universidade do Estado do Pará
Centro de Ciências Sociais e Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação
Travessa Djalma Dutra, s/n – Telégrafo
66113-200 Belém-PA
www.uepa.br/mestradoeducaca